

DISSERTATION



Die Zyklografie Wilhelm Fiedlers

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der

BERGISCHEN UNIVERSITÄT WUPPERTAL



vorgelegt von : Robert Wengel
Gutachter : Prof. Dr. Klaus Volkert (Wuppertal)
Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (Zürich)
Prof. Dr. Andreas Filler (Berlin)
Datum : 20.01.2020

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20200513-100658-4

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20200513-100658-4>]

DOI: 10.25926/ap24-xa94

[<https://doi.org/10.25926/ap24-xa94>]

Danksagung

Mein herzlichster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Klaus Volkert, der mich zur Auseinandersetzung mit dem Thema der vorliegenden Arbeit angeregt hat. Ich danke ihm insbesondere für die sehr gute Unterstützung bei der Abfassung der Dissertation, die intensive Betreuung sowie für viele zahlreiche Hinweise und Ratschläge. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Norbert Hungerbühler und Herrn Prof. Dr. Andreas Filler für die Erstellung eines Zweit- und Drittgutachtens.

Darüber hinaus danke ich meiner Familie, die mir unterstützend zur Seite gestanden und mir mein Studium ermöglicht hat.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
1.1. Einführung	9
1.2. Bemerkungen zu mathematischen Zeichen, Konstruktionen und Sätzen	13
2. Die Zyklografie Wilhelm Fiedlers	15
2.1. Fiedlers Leben und Einfluss auf die Geometrie	15
2.2. Die Bedeutung der Kreisgeometrie	18
2.3. Zur Entstehung der Zyklografie	23
2.4. Rezeption der Zyklografie	29
2.4.1. Besprechungen	29
2.4.2. Lehrwerke und Aufsätze	32
2.4.3. Die Verbreitung der zyklografischen Idee	35
2.5. Aufbau und Inhalt Fiedlers <i>Cyklographie</i>	40
3. Elemente der Darstellenden Geometrie	47
3.1. Geometrische Größen	47
3.1.1. Verhältnisse von Punkten auf Geraden	47
3.1.2. Die harmonische Teilung	52
3.2. Die Zentralperspektive	58
3.2.1. Die grundlegenden Begriffe der Zentralprojektion	60
3.2.2. Die Invarianz des Doppelverhältnisses der zentralperspektivischen Abbildung	68
3.2.3. Die Konstruktion einer harmonischen Gruppe	70
4. Die zyklografische Abbildungsmethode	73
4.1. Das zyklografische Abbildungsverfahren	73
4.2. Die zyklografische Abbildung in Verbindung mit Kreis Kegeln	76
4.3. Der Satz von Monge	81
4.3.1. Anmerkungen	81
4.3.2. Der Satz von Monge und sein Beweis mithilfe der Zyklografie	81
4.4. Der Satz von Poncelet-Steiner	84
4.4.1. Hintergrund	84
4.4.2. Die Aussage des Satzes	86
4.5. Die zyklografischen Bilder von Raumgeraden und Ebenen	90
4.5.1. Die linearen Kreisreihen	90
4.5.2. Die planaren Kreissysteme	96
4.5.3. Sätze über lineare Kreisreihen und planare Kreissysteme	103

4.5.4.	Konstruktionsaufgaben und deren Lösungen	110
4.6.	Die Transversalen zu drei gegebenen Geraden	149
4.7.	Die Harmonikalen	152
5.	Die Grundlagen der Kreisgeometrie	157
5.1.	Die Kreisinverson	157
5.1.1.	Die Definition der Inversion an einem Kreis und die Konstruktion inverser Punkte	157
5.1.2.	Zusammenhang der Inversion zu harmonischen Gruppen . . .	165
5.2.	Die Begriffe Pol und Polare eines Kreises	167
5.2.1.	Die Definition von Pol und Polare	167
5.2.2.	Der Schnitt zweier Kreise	168
5.2.3.	Die Polarebene eines Pols in Bezug auf einen geraden Kreis-kegel	173
5.3.	Die Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises	175
5.3.1.	Die Definition des geometrischen Potenzbegriffs	175
5.3.2.	Die Potenzgerade in Bezug auf zwei Kreise	177
5.3.3.	Die Konstruktion der Potenzgeraden zu zwei Kreisen	181
5.3.4.	Die gemeinschaftliche Potenz eines Ähnlichkeitspunktes zu zwei Kreisen	186
5.4.	Der Potenzkreis und das Potenzzentrum zu drei Kreisen und ihre Eigenschaften	189
5.5.	Die Potenzkreise zu zwei Kreisen	194
5.6.	Der Ähnlichkeitskreis zu zwei Kreisen	195
6.	Die Hyperbel und Kreisbüschel	197
6.1.	Die Hyperbel	197
6.1.1.	Die Hyperbel als Ortskurve	198
6.1.2.	Die Hyperbel als Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel .	200
6.2.	Die Regelflächen	204
6.2.1.	Der Kreiskegel	205
6.2.2.	Das einschalige Rotationshyperboloid	205
6.3.	Das Kreisbüschelkonzept	209
6.3.1.	Das elliptische Kreisbüschel	210
6.3.2.	Involutionen	215
6.3.3.	Die algebraische Beschreibung einer Hyperbel	220
6.3.4.	Die Hyperbel und ihre Asymptoten	227
6.4.	Sätze über Potenz- und Ähnlichkeitskreise	232
6.5.	Erweiterung des Begriffes des Potenzkreises und die Behandlung der Kreisinverson	244
6.6.	Konjugierte Kreisbüschel	251
6.7.	Die Hyperbel in Verbindung mit der Kreisinverson	262

6.8. Die Ähnlichkeitskreise im Zusammenhang mit dem Kreisbündelkonzept	263
7. Das Apollonische Berührproblem	271
7.1. Biografisches und Historisches	271
7.1.1. Apollonius von Perge	271
7.1.2. Historische Anmerkungen und Lösungsmethoden	272
7.2. Die zyklografische Methode der Lösung des Apollonischen Berührproblems	277
7.3. Die analytische Lösung des Apollonischen Berührproblems	279
7.3.1. Eine Strategie zur Lösung des Apollonischen Berührproblems	279
7.3.2. Beispiel	282
7.4. Die elementargeometrische Lösung des Apollonischen Berührproblems mithilfe der Zyklografie	286
7.4.1. Hilfskonstruktionen zu gemeinsamen Kegelpunkten	286
7.4.2. Die Lösung des Apollonischen Problems	302
7.4.3. Beispiel	303
8. Die Kreisschnittprobleme	309
8.1. Die Schnittwinkel von Kreisen	309
8.2. Kreisschnitte unter bestimmten Winkeln in der Zyklografie	311
8.3. Abschlussbemerkungen/Ausblick: Weitere Untersuchungen in Fiedlers <i>Cyklographie</i>	319
9. Didaktische Anmerkungen zur Zyklografie	323
9.1. Fiedlers didaktische Vorstellungen von der Lehre der Geometrie . . .	323
9.2. Die Zyklografie im Unterricht	328
9.2.1. Vorbemerkungen	328
9.2.2. Vorschlag für eine unterrichtliche Diskussion: Einführung der Zyklografie	330
9.2.3. Anmerkungen	331
9.3. Didaktische Stellungnahme	355
10. Schlusswort	359
A. Anhang	367
A.1. Die Gleichung der Geraden l – Fall 1	367
A.2. Die Gleichung der Geraden l – Fall 2	369
Literaturverzeichnis	371
Abbildungsverzeichnis	379
Glossar	385

1. Einleitung

1.1. Einführung

Wilhelm Fiedler, ein Mathematiker, der in der damaligen Industriestadt Chemnitz im Jahre 1832 geboren wurde und in Zürich am Polytechnikum Darstellende Geometrie und Geometrie der Lage lehrte, veröffentlichte nach langem Zögern im Jahre 1882 das Lehrwerk

*Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und die Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme.*¹

Die darin dargestellte Theorie ist der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit. Es werden in dieser Dissertation mehrere Ziele verfolgt und Schwerpunkte gesetzt. Dies wird nachfolgend genauer beschrieben.

Das Kapitel 2 widmet sich einem historischen Diskurs. Hierzu werden zunächst Fiedlers Biografie dargestellt und sein Wirken in der Mathematik aufgezeigt. Wie bereits der Titel seines oben erwähnten Lehrwerkes offenbart, sind zentralen Themen der dort beschriebenen Theorie – die sogenannte Zyklografie – Kreise und Kugeln, wobei sich in der hier vorliegenden Arbeit auf erstere fokussiert wird. Aus diesem Grund wird zu Anfang eine kurze historische Übersicht über die Kreisgeometrie gegeben. Der nächste Abschnitt widmet sich der Entstehung der *Cyklographie*. Hier wird insbesondere ein Konflikt dargestellt, den Fiedler mit der Veröffentlichung seines Lehrbuchs hatte. Er vermutete, dass Jakob Steiner bereits an der gleichen oder an einer ähnlichen Idee gearbeitet hätte, sodass sich Fiedler dazu entschied, sein Werk vorerst nicht zu veröffentlichen. Im zweiten Kapitel wird zudem herausgearbeitet, in welchen Publikationen die *Cyklographie* Erwähnung fand, wie sie rezipiert und weiterentwickelt wurde und wie Fiedler versuchte, sie populär zu machen. Als Nachweis dafür werden einige Briefe Fiedlers und seiner Korrespondenten aus dem Archiv der ETH Zürich herangezogen. Das Kapitel endet mit einer Darstellung der Inhalte, die in Fiedlers *Cyklographie* behandelt werden, wobei auch hier der Schwerpunkt,

¹Das Lehrwerk wird nachfolgend verkürzend *Cyklographie* genannt.

wie bereits erwähnt, auf der Kreisgeometrie liegt. Die ersten Kapitel des Lehrwerks werden aufgrund ihrer fundamentalen Bedeutsamkeit detaillierter beschrieben.

Fiedlers Theorie der zycklografischen Abbildung geht einher mit darstellend-geometrischen Methoden. Damit verbundene Konzepte, wie die Zentral- und Parallelprojektion, werden im Kapitel 3 eingeführt. Hier werden elementare Sätze und Begriffe besprochen, wie beispielsweise das Doppelverhältnis, welches für die Darstellende Geometrie von Bedeutung ist, mitsamt seiner Eigenschaften.

Das anschließende Kapitel führt die zycklografische Abbildung ein. Die ihr zugrundeliegende Idee sowie ihr Potential für die Geometrie ist heute weitestgehend unbekannt. Aus diesem Grund wird die zycklografische Methode mit ihrer Anschauung von Beginn an eingeführt und es werden unterstützend Abbildungen gezeigt, die es ermöglichen sollen, die fundamentalen Ideen dieser Theorie zu verstehen. Im Gegensatz zu Fiedler werden in der vorliegenden Arbeit auch Abbildungen in räumlicher Darstellung eingesetzt. Zudem werden sowohl Fiedlers als auch selbst definierte Symbolik verwendet. Auch die strukturelle Behandlung der *Cycklographie* wurde verändert, wenn es sinnvoll erschien. Einen der inhaltlichen Höhepunkte des Kapitels stellt die Diskussion des Satzes von Monge dar, der die Lage von sogenannten Ähnlichkeitspunkten von drei Kreisen spezifiziert. Dort wird dieser Satz mit Mitteln der Zycklografie bewiesen; ein Beweis der nur wenig populär ist. Des Weiteren werden Eigenschaften von elementaren Raumelementen im Kontext der zycklografischen Abbildung ausgearbeitet. Es werden die zycklografischen Bilder von Geraden und Ebenen in verschiedenen Lagen betrachtet und abschließend einige Konstruktionsaufgaben aus Fiedlers *Cycklographie* aufbereitet dargestellt. Diese behandeln unter anderem Schnittprobleme von Kreisen mit Geraden.

Das Kapitel 5 widmet sich der Aufarbeitung und Untersuchung von Inhalten der Kreisgeometrie. Hier liegt der Schwerpunkt nicht auf den klassischen Sätzen, wie man sie beispielsweise bei Euklid findet, sondern auf solchen, die im 18. und 19. Jahrhundert in großen Teilen von Steiner entwickelt wurden. Heute weniger geläufige Begriffe und Konzepte, wie beispielsweise die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis oder der Potenzkreis, werden eingeführt, erklärt und ihre Bedeutung für die Kreisgeometrie erläutert. Zum Teil wurde die Motivation aus Fiedlers *Cycklographie* verwendet, teilweise auch andere Zugänge gewählt, wenn es leicht verständlicher erschien.

Kegelschnitte und Kreisbüschel sind die beiden zentralen Themen des 6. Kapitels. In der vorliegenden Arbeit wird eine von Fiedler abweichende Herangehensweise für ihre Einführung aufgezeigt. So motiviert Fiedler den Kegelschnitt Hyperbel darstellend-geometrisch als Schnittkurve zweier gerader Doppelkreisegel in geeigne-

ter Lage, wohingegen in der vorliegenden Arbeit der konventionelle Weg gewählt und ein Doppelkreisegel mit einer Ebene geschnitten wird. Dass beide Zugangsweisen auf dasselbe Resultat führen, wird sich im Kapitel 7 zeigen. Dieser alternative Zugang ermöglicht die Diskussion des Beweiskonzeptes von Dandelin. Des Weiteren wird die Bedeutung der Hyperbel, genauer des Rotationshyperboloids, für die Zyklografie erklärt; seine zyklografischen Bilder dienen der Konstruktionen von sich rechtwinklig oder diametral schneidenden Kreisen. Die Einführung dieser Figur motiviert eine kurze Behandlung der Regelflächen. Außerdem wird das Kreisbündelkonzept diskutiert und in Verbindung mit dem oben bezeichneten Potenzbegriff gebracht. Dies ist auch bei Fiedler zu finden und wurde im Rahmen dieser Arbeit strukturiert dargestellt.

Anschließend wird das Apollonische Berührproblem thematisiert. Dieses klassische Konstruktionsproblem der Antike fragt nach der Berührkreiskonstruktion zu drei gegebenen Kreisen. Es gibt zahlreiche Lösungen dieser Aufgabe von verschiedenen Mathematikern aus verschiedenen Epochen, wobei hier die eher unbekanntere zyklografische Lösung diskutiert werden soll. Dies geschieht aus zweierlei Perspektiven: Es wird zum einen die Zyklografie im Kontext der Analytischen Geometrie verwendet, zum anderen wird eine elementargeometrische Lösung gezeigt, die sich mit Zirkel und Lineal realisieren lässt. Zur besseren Nachvollziehbarkeit werden die notwendigen Sätze mitsamt ihren Beweisen angegeben sowie ein Beispiel zur Verdeutlichung der praktischen Umsetzung der erarbeiteten Ideen angegeben.

Das darauffolgende Kapitel widmet sich der Beschreibung sogenannter Schnittwinkelprobleme. Bei Steiner finden sich Hinweise darauf, dass er Aufgaben angab, die erforderten, Kreise zu bestimmen, die andere unter bestimmten Winkeln schneiden. Dies ist eine Erweiterung konventioneller Fragestellungen nach rechtwinkligen Schnitten oder Berührkonstruktionen. Das vorletzte Kapitel zu diesem Themenblock versucht, diese Idee zu motivieren, und es wird gezeigt, weshalb das Rotationshyperboloid zur Lösung derartiger Aufgaben mithilfe der Zyklografie von Bedeutung ist.

Abgeschlossen wird die inhaltliche Arbeit mit einer didaktischen Untersuchung der Zyklografie. Hier werden als Abrundung des zweiten Kapitels über Wilhelm Fiedler nochmals seine didaktischen Ansichten thematisiert und dargestellt, insbesondere wie nach seiner Auffassung Geometrie gelehrt werden sollte. Aufschluss darüber gibt der im letzten Kapitel angeführte Briefverkehr mit Torelli, welcher die Ansichten Fiedlers konkretisiert. Daran anschließend wird der aktuell gültige Lehrplan Nordrhein-Westfalens für die Sekundarstufe II erwähnt, aus dem man schließt, welche inhaltlichen Schwerpunkte in der Geometrie in der Oberstufe zu setzen sind.

Hier zeigt sich, dass der Fokus auf Vektorrechnung und Analytischer Geometrie liegt und eine Behandlung von Darstellender Geometrie nicht vorgesehen ist. Man findet darin außerdem Hinweise, welche konkreten inhaltlichen Schwerpunkte bei der Behandlung dieser geometrischen Disziplinen gesetzt werden sollen, dies sind beispielsweise die Beschreibung von Geraden im Raum oder die Untersuchung ihrer gegenseitigen Lage. Diese bilden den Ausgangspunkt für die selbsterstellte Konzeption eines Unterrichtsvorhabens in der Oberstufe im Rahmen einer Projektarbeit mit dem Ziel der Einführung der Zyklografie und der Beschreibung sowie Lageuntersuchung von Geraden mit ihrer Hilfe. Es werden dabei einzelne Phasen beschrieben, wie bestimmte Schwerpunkte eingeführt und wie einzelne Untersuchungen mit der Zyklografie durchgeführt werden können. In diesem Kontext werden auch Aufgabenbeispiele mit Lösungen vorgeschlagen. Das Kapitel wird mit einer didaktischen Diskussion abgeschlossen, in der die Vor- und Nachteile der Behandlung der Zyklografie angegeben werden.

Insgesamt lassen sich für die vorliegende Dissertation folgende Kernziele ausmachen:

- Es soll Fiedler, der die Zyklografie entwickelte und systematisch aufarbeitete, vorgestellt und verdeutlicht werden, welche Einstellung er zur Didaktik der Geometrie hatte.
- Auf Grundlage verschiedener (historischer) Quellen soll herausgestellt werden, wie und wann die Zyklografie entstand.
- Es soll der Konflikt, den Fiedler mit der Vermutung hatte, dass Steiner bereits die Zyklografie kannte, betrachtet werden.
- Die Zyklografie wird eingeführt und der Leser soll ihre Grundlagen verstehen, also was die zyklografische Abbildung ist, wie man sie definiert, wie sie funktioniert und wie man mit ihrer Hilfe geometrische Grundobjekte beschreibt.
- Es sollen kleinere Beweise, die auch in Fiedlers *Cyklographie* beschrieben sind, vor- und darstellt werden. Sie zeigen anwendungsbezogen, wie mithilfe der Zyklografie Geometrie betrieben werden kann. Es soll ebenfalls deutlich werden, dass sich durch sie das Apollonische Problem handhaben lässt.
- Als Abschluss soll durch ein selbstentwickeltes Unterrichtsvorhaben eine Möglichkeit aufgezeigt werden, wie sich die Zyklografie in der schulischen Oberstufe behandeln lässt und welche Vor- und Nachteile eine unterrichtliche Besprechung mit sich bringt.

Zusammenfassend bildet die Arbeit eine umfassende Übersicht über Fiedlers Zyklografie und sein dieses Thema behandelndes Lehrwerk. Durch sie soll eine wenig beachtete Theorie für den heutigen Leser verständlich zugänglich gemacht und in einen Rahmen eingebettet werden, der es ermöglicht, ihr Potential für die Kreisgeometrie und für die Lösung geometrischer Fragestellungen zu offenbaren. So werden verschiedene Beweise und Ideen aus Fiedlers *Cyklographie* aufgearbeitet, umstrukturiert und durch zahlreiche Abbildungen ergänzt. Darüber hinaus sind verschiedene seiner Erklärungen ergänzt und präzisiert worden. Dies soll das Verständnis erhöhen. Um jedoch den direkten Bezug zur *Cyklographie* nicht zu verlieren, sind in den Fließtext Zitate aus dem Lehrwerk eingeflechtet worden. Diese zeigen auch deutlich, wie mathematische Sachverhalte zu Fiedlers Zeit formuliert, beschrieben und diskutiert wurden.

Darüber hinaus soll eine geschichtliche Kontextualisierung durch historische Quellen, Lehrwerke und mithilfe des Briefkontakts Fiedlers zu seinen Zeitgenossen über die Entstehung und Herkunft der zyklografischen Idee aufklären. Außerdem ermöglichen sie es, die Person Fiedler, die die Zyklografie entwickelt und als eigenständige Theorie begründet hat, vorzustellen. Ausschnitte aus diesen Briefen wurden wörtlich im Fließtext eingebettet. Auf ihrer Grundlage sowie eines Beitrags Fiedlers in einer Fachzeitschrift wurde auch seine didaktische Auffassung der Vermittlung von Geometrie ausgearbeitet. Eine Möglichkeit, wie man die Zyklografie im Unterricht umsetzen kann, ist im letzten Kapitel zu finden.

1.2. Bemerkungen zu mathematischen Zeichen, Konstruktionen und Sätzen

In dieser Arbeit werden verschiedene Resultate der Zyklografie vorgestellt. Häufig werden dabei die Notationen Fiedlers verwendet, so bezeichnet er üblicherweise im Rahmen der zentralperspektivischen Abbildung das Zentrum bzw. den Augpunkt mit dem Zeichen C , was in dieser Arbeit ebenfalls übernommen wird. An den relevanten Stellen wird dies genauer erläutert. Im Gegensatz zu Fiedler wird in der vorliegenden Arbeit ein Unterschied zwischen einer Strecke, welche durch zwei Punkte A und B festgelegt und mit \overline{AB} bezeichnet wird, sowie ihrer Länge, welche durch das Symbol $d(A, B)$ angegeben wird, gemacht. Des Weiteren werden neue Zeichen eingeführt, um das Verständnis bestimmter Ideen für den Leser zu erhöhen – so wird man sehen, dass die zyklografische Abbildung eines Punktes P im Raum durch $Z(P)$ dargestellt wird, was bei Fiedler nicht zu finden ist.

Fiedler stellt in seiner *Cyklographie* Lösungen von Konstruktionsaufgaben in der Ebene mithilfe der Zyklografie dar. Dabei werden elementare Sätze der Kreisgeometrie verwendet, welche Fiedler als bekannt voraussetzt. Da diese Sätze zu Fiedlers Zeiten größtenteils zum Standardschulstoff gehörten, werden diese im Unterschied zu seiner Vorgehensweise in der vorliegenden Arbeit explizit erwähnt und erklärt, wie sie in eine Argumentation eingehen.² Des Weiteren gibt Fiedler in seinem Lehrwerk Konstruktionen an, welche in der Ebene durchgeführt werden und explizite Aufgabenstellungen lösen. Hierbei sind zwei Dinge zu beachten: Fiedler prüft nicht explizit die Existenz einer Lösung. Ist beispielsweise vom Schnittpunkt zweier Geraden in »in allgemeiner Lage« die Rede, so wird vorausgesetzt, dass dieser Schnittpunkt existiert, die Geraden also nicht in den speziellen Lagen, also etwa *parallel* oder *parallel identisch*, sind. Diese Vorgehensweise wird – sofern keine Missverständnisse entstehen können – in der vorliegenden Arbeit übernommen. Außerdem stellt Fiedler die Konstruktionslösungen oft in den Kontext einer (räumlich-zyklografischen) Argumentation, die seine Konstruktionsschritte motivieren und rechtfertigen. Um die Lesbar- und Nachvollziehbarkeit für den heutigen Leser zu erhöhen, werden in der hier vorliegenden Arbeit beide Teile getrennt, so gibt es die zwei Teile **Konstruktion** und eine daran anschließende *Erläuterung zur Konstruktion*, welche ausschließlich die Konstruktion in einer Ebene beschreibt und anschließend ihre Rechtfertigung gibt. Des Weiteren verwendet Fiedler keine »Satz-Beweis«-Struktur, wie sie nach moderner Konvention in mathematischen Aufsätzen zu finden ist, sondern gliedert sein Lehrwerk in fortlaufend nummerierte Artikel. In der vorliegenden Arbeit wurden darauf basierend wichtige Aussagen Fiedlers *Cyklographie* herausgearbeitet und abgeleitet und die übliche »Satz-Beweis«-Struktur gebracht, wodurch ebenfalls das Verständnis für den Leser verbessert werden soll. Es sei nochmals abschließend angemerkt, dass die vorliegende Arbeit neben einer historischen Einbettung das Ziel verfolgt, die zylografische Idee zu motivieren und ihr Potential für die Mathematik und Geometrie herauszustellen. So wird hier ein darstellender Charakter angestrebt, der nicht immer der exakten mathematischen Strenge genügt.

²Eine Liste von Sätzen der Kreisgeometrie, die in der vorliegenden Arbeit (ebenso in Fiedlers *Cyklographie*) vorausgesetzt werden, findet sich in [Aum15, S.15-19]. Dort werden auch die entsprechenden elementargeometrischen Beweise vorgestellt.

2. Die Zyklografie Wilhelm Fiedlers

In diesem Kapitel wird das Leben und das Werk des Mathematikers Wilhelm Fiedler vorgestellt. Des Weiteren wird ein Abriss der geschichtlichen Entwicklung der Kreisgeometrie, ein Überblick über die Entstehung sowie den Inhalt von Fiedlers Lehrwerk *Cyklographie* gegeben. Man erfährt etwas über die Korrespondenz Fiedlers zur Zyklografie mit Mathematikern seiner Zeit. Darüber hinaus wird vorgestellt, wie die Zyklografie besprochen wurde, an welchen Stellen sie in der Literatur Erwähnung fand, aufgegriffen und rezipiert wurde.

2.1. Fiedlers Leben und Einfluss auf die Geometrie

Eine ausführliche und umfangreiche Biographie Wilhelm Fiedlers findet man in [Fie15, S. 14-25], verfasst von seinem Sohn Ernst Fiedler³, welche im Folgenden erläutert werden soll.

Otto Wilhelm Fiedler wurde am 3. April 1832 in Chemnitz geboren und starb am 19. November 1912 in Zürich. Er wuchs in finanziell begrenzten Verhältnissen auf und arbeitete mit seinem Vater in einer Schuhmacherwerkstatt. Es stellte sich heraus, dass er schon früh ein besonderes Interesse an der Wissenschaft entwickelte – so versuchte er bereits in jungen Jahren elementare physikalische Zusammenhänge zu verstehen, beispielsweise weshalb die aufsteigende Wärme der Kerzen einer Weihnachtspyramide eine Bewegung ihres Flügelrades hervorrufen kann. Doch nicht nur die Wissenschaft, sondern auch seine Rechenbegabung sowie die Affinität zur Kunst bzw. Malerei gehörten zu den vielseitigen Begabungen Fiedlers. So gelang es dem Subrektor der obersten Schulabteilung Caspary, welcher diese Begabungen erkannte und förderte, Fiedlers Zeichnungen zu verkaufen. Durch den erzielten Erlös konnte sich der junge Schüler Fiedler sein Schulgeld verdienen (vgl. [Fie15, S. 14f.]).

Aufgrund seiner außerordentlich guten schulischen Leistungen erhielt Fiedler ein

³Ernst Fiedler (1861-1954) war Wilhelm Fiedlers ältester Sohn und wie sein Vater als Lehrer/Professor für Darstellende Geometrie in Zürich tätig.

Staatsstipendium, welches ihm den Besuch der Bergschule in Freiberg ermöglichte. Während dieser Studienzeit finanzierte er sämtliche Ausgaben und seinen Lebensunterhalt durch Nachhilfe. Die Professoren Ferdinand Reich⁴ und Julius Weisbach⁵ wurden prägende Lehrer Fiedlers. Er unterstützte sie und half ihnen bei ihren wissenschaftlichen Arbeiten. So entwickelte er mit Reich ein Gerät zur Bestimmung der Erdmasse, wodurch er mit der Mechanik und Mathematik in Kontakt kam.

Im Jahre 1852 begann Fiedler in Freiberg an der Gewerkschule zu unterrichten. Im nachfolgenden Jahr siedelte er zusammen mit der Schule nach Chemnitz über; er wurde dort später Lehrer für Darstellende Geometrie (vgl. [Fie15, S.16f.]). In dieser Zeit hat er sich autodidaktisch fundamentales Wissen über die Darstellende Geometrie angeeignet. Es zeigte sich außerdem, wie bereits oben geschrieben, dass Fiedler verschiedene Interessen und Veranlagungen über die Mathematik hinaus besaß. So beschäftigte er sich unter anderem mit Geschichte, Philosophie und Geographie. Außerdem veranstaltete Fiedler mit seinen Freunden literarische Vortragsabende, welche diverse Themen (auch aus der Wissenschaft) zum Gegenstand hatten (vgl. [Fie15, S. 17]).

Ende 1858 reichte Fiedler seine Dissertation mit dem Titel *Die Zentralprojektion als geometrische Wissenschaft* in Leipzig ein (vgl. [Fie15, S. 18] und s. Abschnitt 2.3). Anhand des Titels wird bereits deutlich, dass Fiedler ein starkes Interesse an der Darstellenden Geometrie gewonnen hatte.

Neben seiner Lehrtätigkeit übersetzte er 1859 Salmons Buch zur Analytischen Geometrie der Kegelschnitte und nahm mit dessen Einverständnis Veränderungen und Adaptionen vor.

Seine besonderen wissenschaftlichen Leistungen in seiner akademischen Zeit verhalfen Fiedler in den Jahren 1863 bis 1866 zu mehreren Berufungen an verschiedene Lehrinstitute, u. a. nach Gießen, Prag und an das Züricher Polytechnikum. So war er zunächst 1864 in Prag und schließlich ab 1867 in Zürich tätig.

Es wird besonders deutlich, dass Fiedler immer viel Wert auf eine gute Lehre legte – trotz der Tatsache, dass er einen Großteil seines Wissens durch ein disziplinier-

⁴Ferdinand Reich (1799-1882) war ein deutscher Physiker und Chemiker. Er studierte an der Universität in Leipzig und besuchte die Bergschule in Freiberg, wo er in den Fächern Bergbau, Hüttenkunde und Mineralogie ausgebildet wurde. Reich wurde im Jahr 1824 zum Leiter der Bergschule Freiberg ernannt. Er leistete Beiträge in der Geophysik und führte Experimente zur Bestimmung der Gravitationskonstante der Erde durch. (vgl. [Wal03, S. 288])

⁵Julius Weisbach (1806-1871) war ein deutscher Ingenieur und Mathematiker. Er besuchte die Bergschule in Freiberg, die Universitäten in Göttingen und Wien sowie das Wiener Polytechnische Institut. Er war Lehrer für Mathematik an einem Gymnasium in Freiberg und lehrte ab dem Jahr 1833 an der Bergschule Freiberg u. a. Mathematik, Mechanik und Bergmaschinenlehre. Auch in anderen Gebieten wirkte er und erhielt 1859 einen Ehrendoktor der Universität Leipzig für Philosophie. (vgl. [Sch])

tes Selbststudium erlangte. Das bedeutet, dass er nicht nur der wissenschaftlich-inhaltlichen Arbeit eine große Bedeutung zumaß, sondern auch der Wissensvermittlung an Lernende. Dies lässt sich aus verschiedenen Tatsachen ableiten: Er verfasste Lehrwerke, die sich an Lernende der Darstellenden Geometrie richten, hier ist vor allem das Werk Fiedlers *Die darstellende Geometrie. Ein Grundriß für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium* von 1871 sowie die Aussage Ernst Fiedlers zu nennen, dass Wilhelm Fiedler die Techniker nicht lehren wollte, »mit den üblichen technischen Beispielen fertig zu werden, sondern [er] will seine wissenschaftliche Raumanschauung jedem technischen Problem gewachsen machen.« [Fie15, S. 21]. Es ist zu bemerken, dass dieser Ansatz eine moderne Auffassung der Didaktik im Kontext einer problemlösenden Lehre vorwegnimmt, wie sie zum Beispiel bei George Pólya in den 1960er Jahren beschrieben wird. Es sollen keine fertigen Lösungen erlernt werden, sondern vielmehr Heuristiken und Denkstrategien, welche auch andersgeartete Problemstellungen zugänglich machen. Auch in Fiedlers Lehre machte sich dies deutlich bemerkbar: Es war ihm wichtig, seine Hörer in die Vorlesung mit einzubeziehen und sie anzuregen, sich mit dem gelernten Inhalten auseinanderzusetzen (vgl. [Fie15, S. 23]). Dass er immer wieder Wert auf einen hohen didaktischen Anspruch legte, erkennt man ebenfalls im Vorwort seines Buches über die Zyklografie (s. Abschnitt 2.5).

Es zeigt sich immer wieder, dass Fiedler der Auffassung war, dass die Lehre der Geometrie einen besonderen Stellenwert besitzt. So fasste er seine Überzeugung, wie sie gelehrt werden sollte, wie folgt zusammen:

[...] [D]ie ganze Geometrie muss darstellend werden, muss projectirend verfahren, um projectivisch zu sein [...]. [Fie77, S. 92]

Der Artikel, aus dem das Zitat entnommen wurde, beschreibt Fiedlers Vorstellung von einem geometrischen Unterricht. Gabriele Torelli (1849-1931), ein italienischer Mathematiker, der an der Universität Neapel unterrichtete, übersetzte den Artikel und stellte Fiedler in einem Briefverkehr inhaltliche Rückfragen. Fiedlers Antworten konkretisieren seine Ansichten und belegen damit zugleich, dass ihn didaktische Fragestellungen beschäftigten und von besonderer Wichtigkeit für ihn waren. So sind folgende Elemente seiner Ansicht nach im geometrischen Unterricht von zentraler Bedeutung (vgl. [ETH-Bibliothek Hochschularchiv 87:1381, Brief 1]):

- »Auf Anschauung beruhender geometrischer Unterricht«
- »Zeichnungen nach Stabmodellen«
- »Erstellen von Netzen«

- »Geometrisches Zeichnen«
- »Deduktion und Festsetzung der Definitionen sowie Begriffe mit mehreren Zugaben von Formen«
- »Übungen zu den Definitionen und ihrem Gebrauch«
- »Die Geometrie als Wissenschaft des Vergleichs«
- »[...] Geometrie der Lage⁶, die sowohl synthetisch als auch analytisch unterrichtet werden sollte.«

Offenbar hatte Fiedler eine klare Vorstellung von geometrischem Unterricht, der sehr inhaltsbezogen und problemorientiert sein sollte sowie mathematische Präzision verfolge.

Darüber hinaus leistete Fiedler auch inhaltliche Beiträge zur Darstellenden und Projektiven Geometrie, weshalb Ernst Fiedler zu dem Schluss kam, dass Wilhelm Fiedler die Darstellende Geometrie durch Integration in die Projektive Geometrie von einer Hilfswissenschaft zum Teil zu einer eigenständigen mathematischen Disziplin machte (vgl. [Fie15, S. 21]); Christian Wiener (1826-1896) vertritt in seinem Lehrbuch [Wie84, S. 38f.] dieselbe Ansicht. Es kam wegen Fiedlers guter Reputation zu weiteren Berufungen an Lehrinstitute nach Wien, Darmstadt sowie Dresden, welche Fiedler jedoch ablehnte. So war er noch viele Jahre in Zürich aktiv, bis er 1907 in den Ruhestand wechselte und im Jahre 1912 starb (vgl. [Fie15, S. 24f]).

2.2. Die Bedeutung der Kreisgeometrie

Die Geometrie hat eine lange Tradition in der Mathematik. Eine besondere Stellung in der Auseinandersetzung mit geometrischen Objekten nimmt die Untersuchung des Kreises ein. Im Folgenden sollen Bemerkungen zu Begriffen und Entwicklungen der Kreisgeometrie im historischen Kontext gemacht werden.

Zunächst stellt man fest, dass den indischen Mathematikern der Begriff *Halbmesser* für eine Strecke vom Mittelpunkt eines Kreises zu einem beliebigen Punkt seiner Peripherie bekannt war (vgl. [Tro03, S. 54]). Ebenso ist überliefert, dass die arabische Mathematik⁷ einen Begriff für diese charakteristische Strecke hatte. Bis sich jedoch der heute geläufige Begriff *Radius* in der Mathematik etablierte, dauerte es etwa bis

⁶Die Geometrie der Lage untersucht Lagebeziehungen von geometrischen Objekten zueinander. Heute wird sie als Projektive Geometrie bezeichnet.

⁷Die arabische Mathematik baute in großen Teilen auf der griechischen und indischen Mathematik auf. Zeitlich grenzt man sie etwa vom 8. bis zum 13. Jahrhundert ein.

ins 16. Jahrhundert. So verwendete der deutsche Mathematiker Thomas Finck 1583 in seinem Werk über die Trigonometrie diesen Begriff, genauso wie der französische Mathematiker Viète (vgl. [Tro03, S. 55f.]).

Legt man zwei verschiedene Punkte auf einem Kreis fest und verbindet sie miteinander durch eine Strecke, so bezeichnet man diese als *Sehne* des gegebenen Kreises. Es ist überliefert, dass die indische Mathematik auch eine Bezeichnung für diese Strecke besaß.

Die Ägypter beschäftigten sich ebenfalls mit der Geometrie des Kreises. So lassen ihre Malereien, in der die Teilung des Kreises in verschiedene Anteile zu finden ist, darauf schließen (vgl. [Tro03, S. 59f.]).

Die griechische Mathematik⁸ brachte Resultate zur Kreisgeometrie hervor, insbesondere stellte Euklid in seinem Werk *Elemente* viele bekannte Sätze der Kreisgeometrie zusammen. So beschäftigte er sich im dritten Buch u. a. ausführlich mit Tangenten und Sehnen im Kreis. Er bewies beispielsweise den Mittelpunktswinkel- und den Peripheriewinkelsatz (Elemente, 3. Buch, Satz 20/21)⁹. Dies bestätigt, dass sich die Griechen mit der Kreisgeometrie beschäftigten und verschiedene Sätze, die ihr zugeordnet werden können, kannten.

Auch andere antike Mathematiker zeigten Interesse an der Kreisgeometrie und formulierten Konstruktionsaufgaben: Hier sind Apollonius von Perge (260-190 v. Chr.) und Archimedes (etwa 287-212 v. Chr.) zu nennen. Apollonius von Perge beschreibt in einem Buch, welches verschollen, jedoch inhaltlich von Pappus überliefert ist, folgendes Konstruktionsproblem: Es sollen diejenigen Kreise an drei vorgegebene Kreise konstruiert werden, welche die anderen drei berühren (s. Kapitel 7).

Archimedes beschäftigte sich mit der Kreismessung, also den Fragen nach Umfang und Flächeninhalt eines Kreises. Ihm gelang es, den Umfang eines Kreises zu bestimmen und er stieß dabei auf die Proportionalitätskonstante π , welche er bereits näherungsweise angeben konnte. Dabei benutzte er die Eudoxus zuvor entwickelte und zugeschriebene Methode der Exhaustion, in der regelmäßige Polygone in den gegebenen Kreis einbeschrieben und umbeschrieben werden (vgl. [Sti10, S. 58]).

Einen weiteren wichtigen Beitrag zur griechischen Mathematik leistete Ptolemäus (etwa 100-160 n. Chr.). Ihm kann die Entwicklung der Grundlagen der Trigonometrie zugeschrieben werden. Er definierte die sogenannte chord-Funktion¹⁰. Sie ist wie folgt festgelegt: Man betrachte den Einheitskreis mit dem Mittelpunkt M und lege auf ihm zwei verschiedene Punkte A und B fest; der kleinere durch die Geraden MA und MB eingeschlossene Winkel $\alpha := \sphericalangle(AMB)$ ist der Mittelpunktswinkel zur

⁸Die griechische Mathematik ordnet man der Zeit von 600 v. Chr. bis 300 n. Chr. zu.

⁹Siehe für Euklids Elemente des Euklid, 3. Buch, bspw. [Lor81, S. 34-55].

¹⁰engl. chord=Sehne

Sehne \overline{AB} . Dann definiert man

$$\text{chord}(\alpha) := d(A, B),$$

also gibt die Chord-Funktion die Länge der Sehne zum Mittelpunktswinkel α an. Betrachtet man die Winkelhalbierende des Winkels α , so entstehen aus dem Dreieck $\triangle AMB$ zwei rechtwinklige Dreiecke, sodass die chord-Funktion mithilfe der Sinusfunktion durch

$$\text{chord}(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ausgedrückt werden kann. Ptolemäus veröffentlichte in seinem Werk *Almagest* eine Tabelle, welche die Werte der chord-Funktion für die Winkel von $0,5^\circ$ bis 180° mit einer Schrittweite von $0,5^\circ$ umfasst (vgl. [OW12, S. 113f.]). Mit der Gleichung oben, die die chord-Funktion mit den trigonometrischen Funktionen verbindet, erkennt man, dass diese Tabelle Ptolemäus' mit einem Tafelwerk für Sinuswerte vergleichbar ist. Bestimmte Werte konnte er mithilfe geometrischer Überlegungen, andere durch Approximation herleiten. Es war letztlich der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783), der die Entwicklung der noch heute benutzten trigonometrischen Funktionen am intensivsten vorantrieb. Er definierte sie als Funktionen, bestimmte beispielsweise ihre Ableitungen und Stammfunktionen (vgl. [OW12, S.117]).

Eine der Kernfragen der griechischen Mathematik, welche heute zu den sogenannten *klassischen Problemen* der Antike gehört, ist die Lösung der Aufgabe, zu einem Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Diese und andere Konstruktionsaufgaben, welche nur unter Verwendung des Zirkels und des Lineals (welche als klassische Konstruktionsutensilien gelten) gelöst werden sollen, bilden eine Kerndisziplin der (synthetischen) Geometrie. Mit dieser Art zu konstruieren, lassen sich häufig Behauptungen über geometrische Figuren beweisen. Pappus formulierte etwa im 3. Jahrhundert n. Chr. die Aufgabenstellung, ein Dreieck in einen Kreis zu konstruieren, wobei bestimmte Bedingungen erfüllt sein sollten. Eine Erweiterung dieser Aufgabe, welche den Kreis durch andere Figuren ersetzt, geht auf Jean-Victor Poncelet (1788-1867) im 19. Jahrhundert zurück (vgl. [Tro03, S. 65]). Auch die Tatsache, dass beispielsweise das oben formulierte Problem der Kreisquadratur unlösbar ist, konnte u.a. durch Vorarbeiten von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) im Jahre 1882 von Ferdinand von Lindemann (1852-1939) bewiesen werden, was zeigt, dass das Interesse an den klassischen Aufgaben nicht an Bedeutung verloren hatte. Dies bestätigt eindrücklich, dass die (Kreis-)Geometrie und damit verbundene Konstruktionsprobleme stets ein zentraler Bestandteil mathematischer Untersuchungen waren

und sind.

Eine weitere wichtige Erkenntnis in Bezug auf Konstruktionsaufgaben wird dem italienischen Mathematiker Lorenzo Mascheroni (1750-1800) zugeschrieben. Er fand Ende des 18. Jahrhunderts heraus, dass sich sämtliche geometrische Konstruktionen, welche mit Zirkel und Lineal – wie bei den Griechen gefordert – durchführbar sind, ausschließlich unter Verwendung des Zirkels lösen lassen. Wie er zu dieser Entdeckung kam, beschreibt er in dem Vorwort seines Werkes *La Geometria del Compasso* von 1797, welches auf der Basis einer französischen Übersetzung im Jahre 1825 von Gruson ins Deutsche übersetzt wurde. So erklärt Mascheroni, dass die Idee der reinen Zirkelkonstruktion aus einer anwendungsbezogenen Fragestellung heraus entstand. Er erfuhr, dass die astronomischen Viertelkreise/Quadranten von Graham und Bird in England nur mithilfe des Zirkels eingeteilt wurden (vgl. [Gru25, S. VIII]); Mascheroni ging von der Annahme aus, dass Konstruktionen mit dem Lineal ungenau seien, weshalb der Zirkel das zu bevorzugende Konstruktionsutensil sei. Er schreibt dazu:

Leicht werden diejenigen sie [die Gründe, den Zirkel zu bevorzugen] merken, welche sich auf Arbeiten dieser Art [hier ist präzises (handwerkliches) Arbeiten gemeint] verstehen. Um im Allgemeinen das Ueberwiegende bei dem Gebrauch des Zirkels von dem des Lineals zu beweisen, wenn es darauf ankommt, Linien mit solcher Genauigkeit zu beschreiben, daß sie auch vor dem Vergrößerungsglase bestehen können, reicht es hin, zu fragen, daß es bei einem noch so wenig langen Lineal fast unmöglich ist, die Genauigkeit aller Punkte, welche man zieht, zu verbürgen; so schwer ist es, daß es strenge genommen in seiner ganzen Länge gerade sei. Wär' es nun auch äußerst gerade, so wissen doch alle Praktiker, daß der Strich einer Linie, längs dem Lineal gezogen, eine Unsicherheit des Parallelismus mit sich bringt [...]. Diesen [...] Uebelständen ist der Zirkel nicht unterworfen. [Gru25, S. IX]

In den darauffolgenden Jahren des 19. Jahrhunderts rückte die Geometrie erneut verstärkt in den Mittelpunkt mathematischen Interesses. So lässt sich eine Entwicklung in Frankreich sowie in Deutschland erkennen, welche die Darstellende Geometrie in den Fokus setzt. Kennzeichnend hierfür ist das Werk *Géométrie descriptive* des Mathematikers Gaspard Monge (1746-1818) aus dem Jahre 1818, welches verschiedene elementare Aufgaben der Geometrie des Raumes zeichnerisch behandelt. Des Weiteren werden neue Methoden entwickelt, um die klassischen Probleme der Geometrie mit damalig neuen Ansätzen zu untersuchen. In diesem Kontext sind es die Abbildungsmethoden wie die Zentral- oder Parallelprojektion, welche eine andere Sichtweise auf diese Probleme geben. Diese Strategien gehören zur sogenannten *Projektiven Geometrie*. Es stellt sich heraus, dass sie nicht nur dem Zweck, dreidimen-

sionale Raumobjekte mit dem Ziel der Anschaulichkeit zweidimensional abzubilden, dienen, sondern sich Lösungen für »innermathematische« Probleme (s. beispielsweise Konstruktion 3.16, Kapitel 3) finden lassen. Dies ist eine neue Interpretation der Darstellenden Geometrie. Die Auseinandersetzung mit der Darstellenden Geometrie im klassischen Sinne legitimiert sich historisch betrachtet in der Kunst, im Bauwesen und im technischen Konstruktionswesen. So nutzte bereits der römische Baumeister Vitruv, der im ersten Jahrhundert v. Chr. lebte, verschiedene Abbildungsmethoden, um Baupläne zu erstellen. Ähnliches lässt sich bei den Ägyptern nachweisen; diese beschrifteten ihre Zeichnungen von Bauwerken mit Daten und Maßen (vgl. [Wie84, S. 5]), vergleichbar mit einer kotierten Projektion¹¹. In der Kunst hat die Darstellende Geometrie ebenfalls einen hohen Stellenwert. In diesem Kontext ist die Zentralperspektive zur Darstellung realistisch wirkender Bilder von Bedeutung. Man findet bei den Griechen unter anderem Werke, welche in perspektivischer Darstellung sind, andere wiederum verzichten darauf – es zeigt sich also, dass diese Abbildungsmethode nicht allgemein bekannt war (vgl. [Wie84, S. 6f.]). Die Renaissance greift die Idee einer realistischen Darstellung in der Kunst erneut auf, beispielsweise durch Ghiberti oder Michelangelo. Sie nutzten in ihren Werken das Konzept des Fluchtpunktes (vgl. [Wie84, S. 11f.]). Auch Albrecht Dürer (1471-1528) beschäftigte sich mit der perspektivischen Darstellung und schrieb daraufhin eine wissenschaftliche Abhandlung. Beachtet man diesen kurzen Abriss der Historie der Darstellenden Geometrie, so ist es ein besonderer Verdienst der Mathematiker des 18./19. Jahrhunderts, die Darstellende Geometrie mit der Mathematik verbunden und ihre Bedeutung erkannt zu haben.

Felix Klein schrieb in [Kle26], dass sich die neue Kreislehre¹² »[...] bald nach *Mascheroni* [...] innerhalb der Schule von *Monge* [École Polytechnique] [anbahnte.]« [Kle26, S. 36, Kursivstellungen auch im Original]. So werden in den darauffolgenden Jahren diverse Schriften von Mathematikern veröffentlicht und angekündigt, die sich mit der Kreislehre beschäftigen.

Beispielsweise findet man bei B. E. Cousinery, ein ehemaliger Schüler der École Polytechnique, in seinem Werk [Cou28] von 1828 Fragestellungen und Konstruktionsprobleme, die den Kreis betreffen. Er behandelte die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise (s. [Cou28, S. 54]) und diskutierte Joseph Gergonnes (1771-1859) Lösung des Apollonischen Berührproblems (s. [Cou28, S.55-57]).

Im deutschen Sprachraum wurde die Entwicklung der Kreisgeometrie hauptsäch-

¹¹Bei einer kotierten Projektion führt man eine Orthogonalprojektion durch und gibt den Abstand von Punkten des abgebildeten Objektes zur Tafel Ebene an.

¹²Hier sind die neu entwickelten Methoden der Kreisgeometrie, wie beispielsweise Untersuchungen mithilfe des Potenzbegriffs, gemeint.

lich durch Steiner¹³ vorangetrieben. Zunächst betrachtete er Fragestellungen, die als eine Erweiterung der französischen Darstellenden Geometrie zu werten sind. Er diskutierte die Frage nach der Konstruktion von Kreisen, die sich unter bestimmten Winkeln schneiden (vgl. [Kle26, S. 37] und [Ste31, S. XIII]). Er führte u. a. neue Begriffe, wie die Potenz eines Punktes bezüglich eines gegebenen Kreises, ein (vgl. [Aum15, S. 39]), betrachtete komplexe geometrische Kreisfiguren (beispielsweise sogenannte *Steiner-Ketten*) und untersuchte ihre Eigenschaften.

2.3. Zur Entstehung der Zyklografie

Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt, hatten Konstruktionsprobleme seit jeher einen hohen Stellenwert in der Mathematik; vor allem im 18./19. Jahrhundert gerieten sie wieder verstärkt in den Fokus der Mathematiker. Damit und in Verbindung mit dem ausgeprägten Interesse Fiedlers an der Darstellenden Geometrie lässt sich auch begründen, weshalb er sich mit der Lösung von Kreis- und Kugelproblemen befasste. Die neu entwickelten Methoden – auch unter Verwendung von Projektionen der Darstellenden Geometrie – gaben Anlass, altbekannte Konstruktionsaufgaben unter einem neuen Blickwinkel zu behandeln. Es wurden klassische Fragen der Konstruktion von Kreisen aus gegebenen Bedingungen im Sinne der klassischen Kreisgeometrie untersucht, aber auch weitergehende Fragestellungen entwickelt, die die Berührung von Kreisen mit anderen geometrischen Objekten unter bestimmten Winkeln verlangten (vgl. [Kle26, S. 37]). Insbesondere die Anwendung neuentwickelter Methoden, die es erlauben, klassische Problemstellungen mit einer neuen Strategie zu diskutieren, gelten als prestigeträchtiger Nachweis für deren Nützlichkeit. Dies ist ein weiterer wichtiger Grund, weshalb man sich mit diesen Aufgaben beschäftigte. Ein Ansatz, der dieses Herangehen verfolgt, ist die Idee der Zyklografie. Bei ihr handelt es sich im Vergleich zur Zentral- oder Parallelprojektion um kein Verfahren, was der Anschauung dient, sondern es werden Punkte auf Kreise abgebildet. Diese Projektionsmethode beschreibt Erwin Papperitz (1857-1938) als Alleinstellungsmerkmal dieser Projektion und nennt das Verfahren *nichtikonisch*. So sagt er:

Abbildungen im weiteren Sinne sind in verschiedenen anderen Teilen der Mathematik zur Geltung gekommen. In der darstellenden Geometrie ist wesentlich nur ein einzelnes *nichtikonisches Verfahren*, die *Zyklographie*, entwickelt worden. [Pap23, S. 594f., Fett- und Kursivschreibung auch im Original]

Nachfolgend soll diskutiert werden, wann die Zyklografie entstand. Es lässt sich

¹³Er war Schweizer und ab dem Jahre 1835 Professor in Berlin.

sehr genau eingrenzen, wann Fiedler begann, die zycklografische Abbildung zu erforschen und zu entwickeln. So gibt er mehrere Hinweise darauf, dass die Entstehung seiner Idee in den 1860er Jahren geschah. Konkret findet man folgenden Hinweis in dem Sitzungsprotokoll des 28. Bandes der *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*:

[...] habe ich seit 1878 die Idee der Cycklographie, die ich in den ersten sechziger Jahren gefasst hatte, als eine beherrschende Idee in einem immerhin ausgedehnten Gebiete nachgewiesen, [...] [Fie83a, S. 409f.]

Dies deckt sich ebenfalls mit der Aussage, dass Fiedler bereits diese Abbildungsmethode in seiner Dissertation (s. [Fie60]) verwendete. Hier bildete er den Augpunkt bzw. das zentralperspektivische Zentrum durch den Distanzkreis auf der Tafelenebene ab. Die Idee, wie er dies realisierte, ist dieselbe, die dem zycklografischen Verfahren zugrunde liegt. Er schreibt dazu:

Dieselbe [die Idee zur Zycklografie] entsprang mir aus demjenigen Passus meiner Dissertation, in welchem ich in Rücksicht auf die Construction stereoskopischer [sic!] Bilder von der Transformation des Centrums handelte, d. h. von der Art, wie aus der Centralprojection eines Objects für ein durch den Distanzkreis¹⁴ D gegebenes Auge C die Projection desselben Objects auf dieselbe Ebene für ein anderes Centrum C^* abgeleitet werden kann; [...] [Fie82b, S. 149]

Da Fiedler seine Dissertation mit dem Titel *Die darstellende Geometrie als geometrische Wissenschaft* im Jahre 1860 im Programm der Chemnitzer Gewerbeschule (vgl. [Fie15, S. 18]) veröffentlichte bzw. schon im Jahre 1858 einreichte, ist sogar davon auszugehen, dass die Idee schon vor den 1860er Jahren entstand. Außerdem weist Ernst Fiedler darauf hin, dass Wilhelm Fiedler bereits 1866 das zycklografische Konzept in seinen Vorlesungen in Prag nutzte, um das Apollonische Berührproblem zu behandeln (vgl. [Fie15, S. 22]). Betrachtet man dann Wilhelm Fiedlers *Cycklographie* von 1882, so erkennt man, dass er das Apollonische Problem erst im Artikel 122 in [Fie82a, S. 162] beschrieben hat und mit der von ihm entwickelten Theorie löste. Unter diesen Umständen kann man schließen, dass zur Lösung des Problems weitere elementare Aussagen über das zycklografische Verfahren entwickelt werden müssen (bspw. Ähnlichkeitsaussagen, Sätze über Pole und Polaren). Da diese Vorarbeiten getroffen werden müssen, folgt also, dass Fiedler bereits zu diesem Zeitpunkt die Grundlagen für die Zycklografie weiter entwickelt haben muss. An dieser Stelle

¹⁴Man beachte, dass die Idee des Distanzkreises nicht auf Fiedler zurückgeht, sondern im Kontext der Perspektive bereits bekannt war. Fiedler nutzte den Distanzkreis zur Darstellung des Zentrums und zur Transformation von zentralperspektivischen Bildern in der Tafelenebene.

sei noch bemerkt, dass ein Schulprogramm Ernst Fiedlers mit dem Titel *Die Darstellende Geometrie im mathematischen Unterricht* aus dem Jahr 1898 existiert, welches das Potential der Zyklografie beschreibt. Darin wird vor allem die Strategie beschrieben, wie das Apollonische Berührproblem zyklografisch zu behandeln ist. Darüber hinaus wird das Abbildungsverfahren gelobt:

Ein derartiges Verfahren [das zyklografische Abbildungsverfahren] darf gewiss in ganz anderer Masse verständlich und leistungsfähig für Schulzwecke genannt werden, als die planimetrische, für den Schüler unübersichtliche Schlussreihe. [Fie98, S. 35]

Diese Vorzüge sind zu relativieren, wenn man beachtet, dass für die zyklografische Behandlung des Problems ein stark ausgeprägtes räumliches Vorstellungsvermögen und eine Vielzahl an Vorkenntnissen vorausgesetzt werden müssen.

Die Frage, weshalb Fiedler erst etwa 20 Jahre später sein Buch über die Zyklografie herausgegeben hat, klärt er ebenfalls auf. So vermutete er aufgrund der Veröffentlichungen Steiners, dass ein von ihm 1826 angekündigtes Werk – welches jedoch nicht publiziert wurde – bereits die Idee der zyklografischen Abbildung thematisiert habe (vgl. [Fie82a, S. VIII]). Später stellte sich heraus, dass in dem Manuskript des nicht veröffentlichten Buches Steiners, welches im Jahre 1893 in Bern entdeckt wurde, eine derartige Aufarbeitung der Zyklografie nicht zu finden war. In diesem Kontext ist ein Brief von Karl Weierstraß (1815-1897) als Antwort auf eine Anfrage Fiedlers aus dem Jahre 1880 von Bedeutung. Darin erklärte Weierstraß, der Kontakt zu Steiner pflegte und Herausgeber seiner Werke war, dass ihm nicht bekannt gewesen sei, dass Steiner eine Abbildungsmethode wie die Zyklografie entwickelt habe. So schrieb er:

[...] [Ich teile Ihnen mit,] dass ich im persönlichen Verkehr mit Steiner niemals eine Äußerung von ihm gehört habe, aus der sich schliessen liesse, dass er die Abbildung der reellen Punkte des Raumes durch die Kreise der Ebene [dies ist das zyklografische Abbildungsverfahren] gekannt und benutzt habe. [ETH-Bibliothek Archiv Hs. 87:1488]

In Bezugnahme auf die Abhandlung *Einige geometrische Mitteilungen* Steiners, teilte Weierstraß mit, dass es auf ihn

[...] nicht den Eindruck [mache], als ob ihr [der o. g. Abhandlung] eine, von dem Verfasser gekannte, aber verschwiegene Abbildungstheorie zum Grunde gelegen habe. [ebd., Unterstreichung auch im Original]

Schließlich veröffentlichte Fiedler sein Lehrbuch über die Zyklografie.

Das Werk Steiners mit den Schwerpunkten Kreis- und Kugelgeometrie ist von Fueter und Gonseth im Jahre 1931 herausgegeben worden und trägt den Titel *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und Kugeln* (s. [Ste31]). Tatsächlich werden in diesem Werk, welches sich in mehrere Abschnitte zu verschiedenen Aspekten über die Kreis- und Kugelgeometrie gliedert und auf das sich Fiedler mit großer Sicherheit bezog, u. a. die Konzepte der Ähnlichkeitspunkte bei Kreisen und Kugeln, der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis und eine Kugel, der gemeinschaftlichen Potenz bei Kreisen und Kugeln sowie Winkelschnittprobleme (s. Kapitel 3, 5 und 8 der vorliegenden Arbeit) erläutert. Darüber hinaus werden konkrete Aufgabenstellungen und deren Auflösungen vorgestellt. Fueter und Gonseth beschreiben im Vorwort von [Ste31], dass Steiner seine Theorie in etwa in den Jahren von 1823 bis 1826 verfasst haben muss, und begründen dies mit der Tatsache, dass aus diesen Jahren Journale Steiners bekannt seien, die verschiedene Resultate diskutieren, die auch in abschließenden Manuskript zu finden seien [Ste31, S. XI]. Sie berichten außerdem, dass die Tatsache, dass aufgrund fehlender Beweise in Steiners Werken und Manuskripten nur schwer rekonstruierbar sei, wie er seine Ideen und Lehrsätze entwickelte. So erklären auch sie, dass aus diesem Grund die Idee naheliege, dass

[...] ihm [Jakob Steiner] die Prinzipien der zycklographischen Abbildung wohl bekannt gewesen sein mussten, obwohl er niemals dieselbe als Quelle seiner geometrischen Resultate angegeben hat. [Ste31, S. XIV]

Diese Aussage deckt sich mit der ursprünglichen Vermutung Fiedlers, dass Steiner die Zycklografie bereits entwickelt habe. Vor der Veröffentlichung seiner *Cycklographie* existierten bereits mehrere Artikel Fiedlers, welche die Idee der zycklografischen Abbildung sowie ihr Potential für die Geometrie beschreiben. Es werden dort weiterführende Zusammenhänge, wie die linearen Kreisreihen, diskutiert. Im Band 25 der *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* findet man einen Artikel Fiedlers [Fie80, S. 217-256], in dem er das Apollonische Berührproblem mit den Methoden der Zycklografie behandelt. Ein Jahr zuvor, im Jahre 1879, ist in der gleichen Zeitschrift zu lesen:

Sollte es sich um die Bestimmung der Punkte des Raumes durch ihre Bilder auf einer Ebene handeln, so wäre wohl das Natürlichste, sie durch die Kreise der Ebene darzustellen; nämlich so, dass ein Kreis, wie der Distanzkreis der elementaren Methoden, den Punkt repräsentire, welcher im Abstand des Radius von der Bildebene in der Normale derselben im Mittelpunkt auf einer bestimmten Seite der Ebene sich befindet; man würde diese Seite durch die

Beifügung eines Pfeiles in der Peripherie des bestimmenden Kreises angeben, indem man den Punkt als auf derjenigen Seite der Bildebene gelegen ansieht, von welcher aus der angegebene Drehungssinn demjenigen des Uhrzeigers entspricht; [...] [Fie79, S. 221]

Dies ist eine Definition der zyklografischen Abbildung. Des Weiteren erörtert Fiedler hier das Apollonische Berührproblem (s. [Fie79, S. 225]) ausführlich; er beschreibt es als ein Problem des Schnittes dreier Kegel (bei ihm als *Kegeldurchdringung* bezeichnet), denn die Kreise des Apollonischen Problems werden mithilfe von Kegeln beschrieben – im Sinne der zyklografischen Abbildungsmethode.

Wichtig anzumerken ist, dass die im Zitat zuvor beschriebene Idee *nicht* allein auf Fiedler zurückzuführen ist. So erklären Emil Müller (1861-1927) und Josef Leopold Krames (1897-1986), dass schon Barthélemy Édouard Cousinery (1790-1851) in seinem Buch *Géométry perspective* von 1828 die Kernidee dieser Abbildung verwendete (vgl. [Mül29, S. 1]). Darin verweist Cousinery auf eine Lösung des Apollonischen Problems durch Gergonne, welche er darstellte.¹⁵ Weiter erklären Müller und Krames, dass auch Nikolaus Druckenmüller (1806-1883) 1842 und Emanuel Czuber (1851-1925) 1878 die Abbildungsmethode bereits verwandt hätten (vgl. [Mül29, S. 2f.]). So erklärt Czuber in seinem Artikel *Ableitung der Centralprojection aus einer cotirten Orthogonalprojection* von 1878 folgende Abbildung und leitet direkt einen Zusammenhang ab:

Der Punkt a , [...] sei die orthogonale Projection eines Punktes a , dessen Cote α ist. Beschreibt man aus O , [das ist die orthogonale Projektion des Augpunktes O der Zentralprojektion] mit dem Radius δ [das ist die Länge des Projektionslotes \overline{OO}] und aus a' [das sollte a , sein] mit dem Halbmesser α einen Kreis in [der Ebene] E , so ist die Centralprojection a' von a der äussere oder innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise, je nachdem [ob] α positiv oder negativ war. [Czu78, S. 259]

Der in diesem Zitat erwähnte Zusammenhang wird in Fiedlers *Cyklographie* ebenfalls abgeleitet; er wird für den zyklografischen Beweis des Satzes von Monge von Bedeutung sein. Bemerkenswert ist ebenfalls, dass bereits Czuber den abgebildeten Kreisen indirekt eine Orientierung dadurch gibt, dass die Länge des Projektionslotes

¹⁵Gergonne beschreibt die Lösung des Apollonischen Problems in seinem Artikel »Géométrie analytique. Recherche du cercle qui en touchr trois autres sur un plan« in den *Annales de mathématiques pures appliquées* von 1816/1817 auf den Seiten 289-303. Seine Lösung ist weniger konstruktiv und vorrangig analytisch. Auch er arbeitet mit Ähnlichkeitszentren von Kreisen. Cousinery verwendet die Idee Gergonnes und nutzt für die Herleitung einer synthetischen Lösung Kegel zur Repräsentation von Kreisen. Dies geschieht aber nicht im Sinne der zyklografischen Idee.

positiv oder negativ gemessen wird, je nachdem, auf welcher Seite der Tafel Ebene E der abzubildende Punkt liegt. Aufgrund der Tatsache, dass durch den Radius des Bildkreises der Abstand des Bildpunktes bestimmbar ist, identifiziert er seine Abbildung mit einer kotierten Projektion. Bei Hermann Grassmann (1809-1877) findet man die Idee, Punkte des Raumes durch Kreise der Ebene darzustellen. Man liest in seinem Werk *Die Ausdehnungslehre* von 1862 Folgendes:

Der Raum und die Ebene lassen sich in der Art einander verwandt setzen, dass jedem Punkte im Raume ein Kreis in der Ebene entspricht und umgekehrt [...] [Gra62, S. 278]

Ein mit der Zyklografie vergleichbares Abbildungsverfahren beschreibt er aber nicht.

Offenbar hatten viele Mathematiker, die sich mit Darstellender Geometrie befassten, die Idee, eine Punkt-Kreis-Abbildung zu benutzen und für geometrische Probleme einzusetzen. Es ist jedoch Fiedlers Verdienst, erkannt zu haben, dass sich dieser Gedanke als eigenständige und umfassende Theorie auffassen lässt. Zu diesem Schluss kommen und Krames ebenfalls (vgl. [Mül29, S. 2f.]) – Fiedler baut die zyklografische Idee strukturiert auf, leitet Grundlagen sowie weiterführende Resultate ab. Er nutzt diese dann, um Konstruktionsaufgaben zu behandeln.

Für sein Werk erhielt Fiedler den Steiner-Preis¹⁶ im Jahre 1884. Weierstraß, seiner Zeit Sekretär der Akademie der Wissenschaften in Berlin, äußerte sich wie folgt:

[...] Vorzugsweise ist es aber Ihre Zyklographie, in der sie [die Berliner Akademie der Wissenschaften Berlins] ein Werk erkennt, das mit dem Steinerschen Preise gekrönt zu werden vollen Anspruch hat. (zitiert nach: [Fie15, S. 22])

Die Aussage bestätigt und würdigt die hohe Bedeutung der Arbeit Fiedlers. Er erwähnt in [Fie05, S. 503], dass dieser Preis ihm die einzige akademische Anerkennung einbrachte. So schreibt er:

Die selbständige Publikation der 'Cyklographie' von 1882 hat mir zu meiner großen Überraschung die einzige akademische Anerkennung eingebracht, die meine Arbeiten gewährt wurde: Die Erteilung des Steiner-Preises am Leibniztage 1884 durch die Akademie der Wissenschaften in Berlin laut Brief von Weierstraß vom 1. Juli 1884. [Fie05, S. 503]

¹⁶Der Steiner-Preis ist ein Mathematikpreis, der ab dem Jahre 1866 bis zum Jahr 1922 von der Berliner Akademie der Wissenschaften an Mathematiker vergeben wurde, die einen außerordentlichen Beitrag zur Geometrie im Stile Steiners geleistet haben. Das Preisgeld wurde aus dem Nachlass Steiners finanziert, den er der Berliner Akademie der Wissenschaften zu diesem Zwecke überließ. Die ersten Preisträger waren Rudolf Sturm und Luigi Cremona (vgl. [Rei]). Eine vollständige Liste aller Preisträger basierend auf den Monatsberichten der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften findet man in [Rei08, S. 390].

2.4. Rezeption der Zyklografie

Fiedlers Zyklografie wurde in der Literatur mehrfach diskutiert und rezipiert. Die Idee der zyklografischen Abbildungsmethode sowie ihre Verwertbarkeit für die Lösung geometrischer (Konstruktions-)probleme wurde durch andere Autoren erörtert und erweitert und durch Fiedler selbst wurden weitere Entwicklungen gemacht. Im Folgenden soll dies zusammengetragen werden.

2.4.1. Besprechungen

Das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, kurz *JFM*, war eine jährlich erscheinende Zeitschrift, in der über neue Entwicklungen und Beiträge in und zur Mathematik berichtet wurde; es war ein nach Jahren strukturiertes Referateblatt. Das JFM erschien in den Jahren 1868 bis 1942 und wurde von dem Mathematiker, Mathematikhistoriker und Bibliothekar Felix Müller sowie dem Mathematiker Karl Ohrtmann und Albert Wangerin gegründet.

Fiedlers Zyklografie wurde ebenfalls darin rezipiert und besprochen. Es stammen Einträge, die einen direkten oder indirekten Bezug zur Zyklografie haben, von Hermann Schubert¹⁷, Franz Meyer¹⁸, Robert Haussner¹⁹, Emil Lampe²⁰, Guido Hauck²¹

¹⁷Herman Caesar Hannibal Schubert (1848-1911) war ein deutscher Mathematiker, der im Jahre 1870 promovierte und 1872 Mathematiklehrer an einem Hildesheimer Gymnasium wurde. Er wurde 1887 Lehrender am Johanneum im Hamburg, setzte aber seine Lehrtätigkeit an der Schule weiter fort. Von ihm stammen unter anderem Beiträge zur Enumerativen bzw. Abzählenden Geometrie, welche Verwandtschaften zur Algebraischen Geometrie besitzen. (vgl. [JE07])

¹⁸Franz Meyer (1856-1934) war ein deutscher Mathematiker, der an der Leipziger Universität studierte. Er verfasste bei Felix Klein eine Dissertation und promovierte im Jahre 1878. Zwei Jahre später habilitierte er und wurde 1887 Professor in Tübingen. Etwa 10 Jahre später wechselte er nach Königsberg und wurde im Jahre 1924 emeritiert. Er leistete u. a. Beiträge zur Algebraischen Geometrie. (vgl. [Fri94, S. 336])

¹⁹Robert Haussner (1863-1948) war ein deutscher Mathematiker, der im Jahre 1888 in Göttingen promovierte. Habilitiert wurde er im Jahre 1894 und wurde 1898 außerordentlicher Professor an der Universität Gießen. Im Jahre 1902 wechselte er nach Karlsruhe und von 1905-1934 arbeitete er in Jena. Haussners Arbeitsgebiet war die Darstellende Geometrie. (vgl. [Vie06, S. 518])

²⁰Emil Lampe (1849-1918) war ein deutscher Mathematiker, der in Berlin neuere Sprachen, Physik und Mathematik studierte. Zu seinen Lehrern zählten Weierstraß und Steiner. Nachdem Lampe 1864 promoviert wurde, war er Lehrer an einer Gewerbeschule und nach 1874 als Professor an der Berliner Kriegsakademie tätig. Im Jahre 1889 wurde er Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule in Berlin. Sein Interesse an der Vermittlung von Mathematik sorgten dafür, dass er als Lehrer an einer Schule und Hochschule tätig war. Er veröffentlichte zu didaktischen Themen. (vgl. [Str82, S. 459f.])

²¹Hermann Guido Hauck (1845-1905) war Professor für Darstellende Geometrie an der Berliner Bauakademie und entwickelte einen Perspektographen zur Erstellung von Grund- und Aufrissen (vgl. [Sta69, S. 77]). Von ihm stammen auch Beiträge zur Didaktik der Darstellenden Geometrie.

Arthur Schoenflies²² und Georg Feigl²³ aus verschiedenen Jahren zwischen 1881 und 1929. Sämtliche Einträge sind mit ihren Inhalten nachfolgend zusammengetragen; der Titel, auf den sich die jeweilige Besprechung bezieht, ist kursiv angegeben:

- *Fiedler, Wilhelm, 1881: Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln*

Die Besprechung des o. g. Artikels stammt von Schubert. Sein Aufsatz verweist auf Fiedlers Publikation, die vom Winkelschnitt bei Kreisen handelt. Insbesondere erwähnt er, dass Fiedler in seinem Aufsatz das Apollonische Berührproblem als Problem »[...] der Durchdringung von Kegeln zweiten Grades [...]« [Sch82b, S. 490] auffasst. Im Kapitel 7 der vorliegenden Arbeit wird man sehen, dass diese Idee zyklografisch in diesem Kontext benutzt werden kann. Auf Fiedlers Artikel wird sich auch in der Darstellung der Kreisschnittidee im Kapitel 8 der vorliegenden Arbeit bezogen. (s. [Sch82b])

- *Fiedler, Wilhelm, 1882: Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln, und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme*

So wie der zuvor diskutierte Artikel, stammt auch dieser Beitrag von Schubert. Es handelt sich um eine ausführliche Besprechung der *Cyklographie* Fiedlers über mehrere Seiten. Zu Anfang wird beschrieben, wie die zyklografische Abbildungsmethode funktioniert und das Werk wird dafür gelobt, dass es »auf einem bequemen, aussichtsreichem Pfade zu den reichen Schätzen führt, die uns Steiner [...] hinterlassen hat.« [Sch82a, S. 500]. Das Referat geht auch auf weitere Details des Lehrwerks ein; so erklärt Schubert, dass verschiedene geometrische Untersuchungen angestellt werden, u. a. dass die Abbildung von Geraden diskutiert wird und die Frage nach gleichwinklig schneidenden Kreisen Beachtung findet. Darüber hinaus erklärt er, dass das Apollonische Problem sowohl im Zusammenhang mit der Kreis- als auch der Kugelgeometrie behandelt wird. In der vorliegenden Arbeit wird jenes Konstruktionsproblem im klassischen Sinne in Kapitel 7 genau behandelt und dargestellt. Den Abschluss des Referates widmet Schubert Hintergrundinformationen zur Entstehung der *Cyklographie*, die weitestgehend in ihrem Vorwort erwähnt werden:

²²Arthur Schoenflies (1853-1928) war ein deutscher Mathematiker. Wie auch bei Lampe war u. a. auch Weierstraß ein Lehrer Schoenflies'. Parallel zu seiner Lehrtätigkeit an einem Berliner Gymnasium promovierte er und reichte eine Dissertation mit geometrischem Schwerpunkt ein. Felix Klein erwirkte, dass Schoenflies 1892 Professor für Angewandte Mathematik in Göttingen wurde. Schoenflies leistete u. a. wichtige Beiträge zur Kristallographie. (vgl. [Fri07, S. 412f.])

²³Georg Feigl (1890-1945) war ein deutscher Mathematiker, der Mathematik und Physik in Jena studierte. Er promovierte 1918, habilitierte 1927 und wurde 1933 außerordentlicher Professor in Berlin. Er arbeitete vorrangig in der Topologie und Geometrie. (vgl. [Roh61, S. 57])

Er beschreibt den Konflikt Fiedlers, dass er glaubte, Steiner habe die Idee der Zyklografie gekannt und nimmt auch auf Fiedlers Aussage Bezug, er habe die Idee der zyklografischen Abbildungsmethode während der Abfassung seiner Dissertation entwickelt. Eine interessante Wertung Schuberts ist die folgende:

[...] so hat das Fiedler'sche Buch nunmehr auch der darstellenden Geometrie ihren natürlichen Platz unter den Forschungsmethoden in der Geometrie der Kreise und Kugeln erobert, [...] [Sch82a, S. 503]

Hier wird deutlich, dass Schubert das Werk als einen großen Mehrwert für die Darstellende Geometrie aufasst. (s. [Sch82a])

- *Fiedler, Wilhelm, 1882: Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden*

Das Referat zu diesem Artikel stammt von Meyer. So wie der eigentliche Beitrag Fiedlers enthält auch diese Besprechung sehr viele Details, die das zyklografische Abbildungsverfahren betreffen. Der Referent beschreibt mit Bezug auf Fiedler, dass die Zyklografie das Konzept sei, mit dem es gelinge, Kreis- und Kugelgeometrie (in einem darstellend-geometrischen Kontext) zu behandeln. Außerdem werden auch in diesem Referat bereits die Ideen beschrieben, wie man geometrische Objekte zyklografisch abbildet. So wird die Abbildung einer Gerade als lineare Kreisreihe behandelt und erklärt, dass das symmetrische Rotationshyperboloid zur Lösung von Schnittwinkelproblemen in Bezug auf Kreise im zyklografischen Sinne dienlich ist. (s. [Mey82] und Kapitel 8)

- *Fiedler, Wilhelm, 1883, 1888: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. erweiterte Aufl. 1. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projectivischen Geometrie*

Das Referat von Lampe nimmt neben dem restlichen Inhalt des o.g. Werkes auch indirekt Bezug auf das zyklografische Abbildungsverfahren. Es wird erklärt, dass Fiedler mehrere Abschnitte des Lehrwerks dazu verwendet, auf die Zyklografie einzugehen (s. [Lam83] und Abschnitt 2.4.2)

- *Fiedler, Wilhelm, 1884: Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen*

Dieser Artikel, verfasst von Hauck, ist eine Besprechung eines Aufsatzes, welcher in den *Acta Mathematica* 1884 erschien. Hier wird die Bedeutung der Bestimmung der Schnittfigur von Rotationshyperboloiden für die Zyklografie angesprochen. Wie oben erwähnt, wird man in Kapitel 8 der vorliegenden Arbeit lernen, dass die Problemstellung dann von Relevanz ist, wenn es um die

Konstruktion von Kreisen geht, die gegebene Kreise gleichwinklig schneiden. (s. [Hau84])

- *Morawetz, Johann, 1892: Ueber die Berührung und den Winkelschnitt von Kreisen und Kugeln*

Haussner verweist u. a. in dieser Besprechung auf die *Cyklographie* Fiedlers und erklärt, dass Kreiswinkelschnittprobleme und Kreisberührprobleme – wie das Apollonische Berührproblem – in dieser Arbeit mit dem gleichen Titel wie dieser Besprechung diskutiert wurden. (s. [Hau92])

- *Sobotka, Jan, 1896: Eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung und ihr Zusammenhang mit einigen cyklometrischen Aufgaben*

Jan Sobotka (1862-1931) war ein tschechischer Mathematiker und Professor an der Karls Universität in Prag. Er begann im Jahre 1881 sein Studium der Mathematik an der Technischen Universität in Prag. Im Jahre 1891 kam er nach Zürich und besuchte Vorlesungen, unter anderem auch bei Wilhelm Fiedler. Er zog 1894 nach Wien und unterrichtete an einer Realschule Geometrie. Zwei Jahre später wurde er Assistent bei Peschka an der Wiener Technischen Universität. Im Jahre 1899 wurde Sobotka der erste Professor für Darstellende Geometrie in Brünn an der Technischen Universität. Er wurde 1904 Professor für Mathematik in Prag. (vgl. [KN10])

Die oben genannte Besprechung von Schoenflies bezieht sich auf den gleichnamigen Artikel aus dem siebten Jahrgang der *Monatshefte für Mathematik* und erklärt die Bedeutung der Zyklografie für die Lösung einer konkreten Aufgabe: Gesucht sind Kreise, die mit zwei Kreisen gemeinsame Tangentenabschnitte mit einem festgelegten Längenverhältnis besitzen. Es wird mitgeteilt, dass sich dies mithilfe der Zyklografie behandeln lässt und im o. g. Artikel ausgeführt wird. (s. [Sch96])

2.4.2. Lehrwerke und Aufsätze

Ein vollständiges Lehrwerk mit dem Schwerpunkt Zyklografie wurde von Krames auf Grundlage des Manuskripts von Emil Müller veröffentlicht. Müller war Professor für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien und in den Jahren 1912 und 1913 Rektor jener Hochschule. Im Jahre 1929 erschien Müllers und Krames' Lehrbuch *Die Zyklografie* als zweiter Band der Reihe *Vorlesungen über darstellende Geometrie*. Das Werk unterscheidet sich im Aufbau von Fiedlers *Cyklographie* – beispielsweise wird nicht zu Beginn wie bei Fiedler die Zentralpro-

jektion thematisiert – und die Autoren legen – im Unterschied zu Fiedler – verstärkt Wert darauf, dass die Bildkreise, welche für das zyklografische Verfahren grundlegend sind, eine Orientierung besitzen. Aus diesem Grund werden dort Bildkreise auch *Zykel*, welche als orientierte Kreise aufgefasst werden, genannt. Dies wird später in der vorliegenden Arbeit genauer erklärt (s. Kapitel 4). Auch die Struktur des Lehrbuchs von Müller/Krames unterscheidet sich von derjenigen Fiedlers. So legen die Autoren Müller und Krames Wert darauf, ihre Resultate in Form von durchnummerierten Sätzen systematisch niederzuschreiben; bei Fiedler findet man hingegen einzelne Artikel. Des Weiteren veranschaulichen sie ihre geometrischen Ideen durch Zeichnungen, die die räumlichen Situationen darstellen, welche bei Fiedler nicht zu finden sind; er nutzt nur Darstellungen ebener Sachverhalte. Jedoch legen auch sie wie Fiedler Wert darauf, Konstruktionen praktisch durchzuführen.

August Adler (1863-1923) war ein österreichischer Mathematiker, der sich hauptsächlich mit Darstellender Geometrie beschäftigte und gegen Ende seines Wirkens auch Arbeiten über mathematik-didaktische Themen veröffentlichte (etwa ab 1901). Er wurde im Jahre 1885 Assistent an der Hochschule in Wien für Astronomie und Geodäsie; er habilitierte im Jahre 1901 und wurde in Wien Professor im Jahre 1909 (vgl. [JE06]). Eine Sammlung verschiedener Konstruktionsaufgaben und ihrer Auflösungen findet man in seinem Lehrwerk mit dem Titel *Theorie der geometrischen Konstruktionen* (s. [Adl06]) aus dem Jahre 1906. Darin greift Adler die Zyklografie auf den Seiten 63 bis 69 auf. Er demonstriert, wie sich mit ihrer Hilfe das Apollonische Berührproblem lösen lässt. Seine Darstellung liefert die Grundlage für die Darstellung der Lösung des Apollonischen Berührproblems im Kapitel 7 der vorliegenden Arbeit. Es ist zu beachten, dass die in seinem Lehrbuch beschriebenen Konstruktionen zum Teil Spezialfälle der Aufgabenstellung zu Grunde legen, sodass in der vorliegenden Arbeit Anpassungen gemacht wurden. Zudem wurden fehlende oder unvollständige Erklärungen nachgetragen.

Ludwig Eckhart (1890-1938) war ein österreichischer Mathematiker und ab dem Jahre 1929 Professor für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien. In seinem Lehrbuch *Konstruktive Abbildungsverfahren* [Eck26] aus dem Jahre 1926 beschreibt er auf den Seiten 77 bis 115 das zyklografische Verfahren – er arbeitet im Gegensatz zu Fiedler verstärkt mit Methoden der Koordinatengeometrie. Auch er diskutiert das Apollonische Berührproblem und verdeutlicht seine Ideen durch Abbildungen, die die räumlichen Situationen darstellen.

Fiedler behandelt zusätzlich zu seinem Lehrbuch *Cyklographie* auch in seinen beiden Werken

- *Die Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der*

Lage, I. Theil, Die Methoden der darstellenden und die Elemente der Projectivischen Geometrie (1883) sowie

- *Die Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, II. Theil, Die Darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen* (1885)

jeweils in der dritten Auflage Elemente der Zyklografie. In Ersterem wird die Zyklografie im Vorwort, aber auch an weiteren Stellen im Lehrbuch thematisiert. Hier erfährt der Leser, wie die zyklografische Abbildungsmethode funktioniert, also wie man einen Punkt des Raumes auf eine Ebene durch Kreise abbilden kann (s. [Fie83b, S. 4 und S. 24]). Es wird auch erklärt, wie man Geraden und Ebenen abbildet, jedoch nicht so ausführlich wie in der *Cyklographie*. Wichtige Kontruktionen, die mit der Zyklografie gefunden und nachvollzogen werden können, betreffen die Fragen nach Berührungskreisen, orthogonal schneidenden Kreisen und Schnittkreisen in bestimmten Winkeln. Ebenso wie in der *Cyklographie* benötigt Fiedler auch hier mehrere Seiten, um die zyklografischen Figuren zu beschreiben, die zur Lösung solcher Probleme geeignet sind. So erörtert er Kegelschnitte (insbesondere Hyperbeln), Kegel und Hyperboloide (s. [Fie83b, S. 204ff.]). Selbst das Apollonische Berührproblem wird angesprochen und eine zyklografische Lösungsstrategie dargestellt (s. [Fie83b, S.210f.]).

Im zweiten Teil von Fiedlers dreibändiger *Darstellender Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage* wird ebenfalls die zyklografische Idee aufgegriffen. Es wird beispielsweise diskutiert, dass die Zyklografie es ermöglicht, Kreise zu bestimmen, die sich unter einem bestimmten Winkel schneiden, der über einen festgelegten Kosinus definiert ist (s. [Fie85, S. 213]). In diesem Kontext geht es auch um Rotationshyperboloide, die im zyklografischen Sinne zu ihrer Konstruktion benötigt werden (s. [Fie85, S. 62f. und S.202]). In Kapitel 8 der vorliegenden Arbeit werden die entsprechenden Ansätze dazu gezeigt. Darüber hinaus existiert ein (vermutlich von einer dritten Person redigierter) Beitrag Fiedlers auf Französisch aus dem Jahre 1881, also vor der Veröffentlichungen seiner *Cyklographie* im folgenden Jahr. Er ist im Tagungsband für 1881 der Association Française pour l'avancement des sciences erschienen. Darin beschreibt Fiedler unter anderem das zyklografische Abbildungsverfahren und geht auf Hyperboloide ein, die für die Behandlung von Winkelschnittproblemen dienen (s. [Fie81a, S. 127ff.]).

Von Adolf Kiefer²⁴ stammt ein Aufsatz in den Geometrischen Mitteilungen der *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft* auf Grundlage eines Manuskriptes aus dem Jahre 1918. Darin behandelt er verschiedene geometrische Probleme, beispielsweise den Satz von Brianchon²⁵ oder das Apollonische Berührproblem. Auch das Problem des Schneidens von Kreisen unter bestimmten Winkeln, wie es bei Steiner von Bedeutung ist, wird von Kiefer erwähnt. In seinem einleitenden Text macht er auf die *Cyklographie* aufmerksam. Er bezeichnet sie als »inhaltsreich« [Kie18, S. 494] und beschreibt kurz das Abbildungsverfahren. Er macht auf die Tatsache, die in der vorliegenden Arbeit im Kapitel 4 und in Kapitel 7 von Bedeutung wird, aufmerksam, nämlich dass Kreisberührkonstruktionen zyklografisch mithilfe von geraden Kreis Kegeln durchgeführt werden können. Bei der Vorstellung der oben erwähnten Konstruktionen nutzt Kiefer jedoch nicht das zyklografische Abbildungsverfahren, sondern vorrangig die stereografische Projektion.

2.4.3. Die Verbreitung der zyklografischen Idee

Beachtet man die Abschnitte 2.3 und 2.4.1, so kann man zu dem Schluss kommen, dass Fiedler sehr bemüht war, die Idee und die Konsequenzen seiner Zyklografie populär zu machen. Dies zeigt sich darin, dass er mehrere Aufsätze in der *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft* veröffentlichte, welche zu großen Teilen über die Zyklografie und ihre Grundlagen berichten. Beispielsweise enthält der Aufsatz über die *Elementaren Abbildungsmethoden* [Fie82b] neben der *Cyklographie* von 1882 einen mehrseitigen Diskurs über die zyklografische Abbildungsmethode. Auch Leser des I. und II. Teils von Fiedlers Werks *Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage* in dritter Auflage ([Fie83a] und [Fie85]) erfahren Grundlegendes aber auch Weiterführendes über die Zyklografie.

Fiedler pflegte einen regen Briefwechsel mit Mathematikern seiner Zeit, u.a. mit Felix Klein. Eine Vielzahl der Briefe an Fiedler sind erhalten und im Hochschularchiv der ETH in Zürich zu finden. In einigen von ihnen zeigt sich ebenfalls, dass Fiedler versuchte, auf seine zyklografische Abbildungsidee aufmerksam zu machen. So

²⁴Adolf Kiefer (1857-1929) war ein schweizer Mathematiklehrer. Er studierte in Zürich am Eidgenössischen Polytechnikum die Fächer Mathematik und Physik. Mit einer Dissertation zu einem mathematischen Thema wurde er im Jahre 1881 promoviert. Im Jahre 1882 wechselte er nach Frauenfeld und gab an der Kantonsschule Unterricht zur Reinen, Darstellenden und Technischen Geometrie. Aufgrund seiner guten Lehrtätigkeit wurde er zum Konrektor der Schule im Jahre 1886 gewählt, setzte ab 1894 seine Lehrtätigkeit in Zürich fort und unterrichtete dort an verschiedenen Schulen. Er starb im Jahre 1929. (vgl. [Sch29])

²⁵Der Satz von Brianchon besagt, dass sich in einem konvexen Sechseck, welches in einen nicht ausgearteten Kegelschnitt einbeschrieben ist, alle Diagonalen im sogenannten Brianchon-Punkt, also einem Schnittpunkt, schneiden.

schrieb er an Klein am 10.07.1880 noch vor der Veröffentlichung seiner *Cyklographie*:

Die in den Mitthlgen III u. IV jener Hefte [Fiedler, Das Problem der Kegelquerschnitte in allgemeiner Form nebst Bemerkungen zum Problem des Apollonius und Fiedler, Neue Projectionsmethoden] besprochene u. zum Theil benutzte Methode der Abbildung der reellen Punkte des Raumes durch die Kreise der Ebene werde ich doch wohl noch etwas weiter ausführen müssen, weil sie nicht bloß viel Bekanntes in neues Licht stellt sondern auch Lücken ausfüllt. [SUB Göttingen Cod. Ms. Klein 9, 12]

Darüber hinaus tauschte Fiedler sich mit Klein über die Idee der Zyklografie aus. So liest man in einem Brief vom 16.06.1883 von Fiedler an Klein:

Ich hoffe, daß Sie meine kleinen Zusendungen richtig erhalten haben u. wäre wohl begierig, Ihre Meinung betreffs meiner *Cyklographie* u. betreffs des von mir so fest geglaubten Zusammenhangs mit Steiner'schen verloren gegangenen Manuscripten gelegentlich zu hören. [SUB Göttingen Cod. Ms. Klein 9, 16]

Offenbar hatte Fiedler Klein ein Exemplar seines Werkes zugesandt. Zudem werden zwei weitere Dinge deutlich: Erstens hatte Fiedler ein starkes Interesse an Kleins Meinung und Urteil bezüglich der zyklografischen Abbildungsidee und zweitens war für ihn weiterhin seine Ansicht, dass Steiner bereits diese Idee gekannt hatte und benutzt habe, von großer Bedeutung. Auch in einem Brief an Klein in Form einer Postkarte vor der Veröffentlichung seiner *Cyklographie* vom 25.10.1880 nimmt er auf diesen Konflikt Bezug:

Die Abhandlung [vermutlich ein Teil des Manuskripts der *Cyklographie*], die ich sende, giebt einen Ausschnitt aus langverfolgten Betrachtungen, die ich nicht veröffentlichte, weil ich dachte, bei Steiner müsse die Grundidee derselben gedacht und benutzt haben; das wurde mir aber von allen zuständigen Beurtheilern [u. a. Weierstraß als Herausgeber der Steinerschen Werke] verneint; [...] [SUB Göttingen Cod. Ms. F. Klein 9, 14]

Auch mit Guiseppe Veronese (1854-1917) hatte Fiedler Briefkontakt und erwähnt seine *Cyklographie* in einem Briefentwurf aus dem Jahr 1883. Er erklärt, dass er Aspekte und Grundlagen der zyklografischen Abbildung in seinem Lehrbuch über die Darstellende Geometrie aufgenommen habe (s. Absatz 2.4.2). Des Weiteren erklärt er, dass in der *Cyklographie* eine Aufgabe behandelt wurde, die den Schnitt von Kreisen unter gleichen Winkeln betrifft. Das Problem, dass Fiedler glaubte, Steiner habe bereits die zyklografische Abbildung gekannt und entwickelt, findet auch hier Erwähnung; so schreibt er:

[...]; ich hätte doch vielleicht mit diesen Dingen [gemeint ist insbesondere die Publikation der *Cyklographie*] nicht so lange zurückhalten sollen u. hätte es wohl auch nicht gethan, wenn ich gewusst, dass die aller nothwendigste Reform so viel Widerstand u. Lärm erwecken würde. Wäre nur die Steiner-Ausgabe nicht so schrecklich lang verzögert worden. Die Zyclographie hätte ich so gut wie nun für sich bearbeitet, wenn ich nicht immer ganz sicher an das Hervortreten des St.'schen Manuscripts [Steinerschen Manuskripts] von 1826 geglaubt hätte. [ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs. 87:1408a]

Mit Adolf Hurwitz (1859-1919) hatte Fiedler ebenfalls Briefkontakt. Man erfährt aus Hurwitz' Brief an Fiedler vom 17.01.1881, dass Fiedler ihm seine Ausgabe der *Geometrischen Mittheilungen*²⁶ übersandt hatte, in der die Zyklografie im Kontext des Apollonischen Berührproblems diskutiert wurde. Dies zeigt ebenfalls, dass Fiedler seine Idee bekannt machen wollte und darauf hinwies. In dem o. g. Brief liest man dazu

Leider komme ich erst heute dazu, Ihnen für die gütige Übersendung Ihrer »Geometr. Mittheilungen« meinen besten Dank auszusprechen. [ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs. 87:447]

Demnach hat Fiedler Hurwitz ein Exemplar der *Geometrischen Mittheilungen* geschickt. Nicht nur, weil der folgende Auszug aus selbigen Brief nahelegt, dass diese *Geometrischen Mittheilungen* die Zyklografie behandelten, sondern auch aus einem weiteren Grund ist dieser bemerkenswert. Zunächst der Inhalt:

Als ich 3 Jahre in Berlin studirte, hatte ich auch diese Idee, das Apollon. Tractions-Problem durch Abbildung der Kreis-Ebene auf den Punkte-Raum zu behandeln – und zwar durch dieselbe Abbildung, von der Sie in so weiten Umfange Gebrauch machen. – Als ich dann nach München kam, theilte mir Herr Prof. Klein mit, daß Möbius sich ausführlich mit der Abbildung befasst habe, bei dem Kreise vom Radius r und Mittelpunkt (α, β) der Punkt

$$x = \alpha, y = \beta, z = (\pm)ir, i = \sqrt[2]{2}$$

des Raumes entsprechend gesetzt wird.

[ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs. 87:447]

Zunächst zeigt dieser Abschnitt, wie bereits erwähnt, dass die von Fiedler übersandte Ausgabe der *Geometrischen Mittheilungen* der *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* die Zyklografie behandelt; bemerkenswert ist

²⁶Vermutlich handelt es sich um [Fie80].

zudem der Bezug zum Apollonischen Berührproblem. Darüber hinaus erfährt man, dass die Idee der zyklografischen Abbildung bereits existent war. Hurwitz bezieht sich mit großer Sicherheit auf die Theorie der Kreisabbildungen nach August Ferdinand Möbius und Michel Chasles, die die Kreise der Ebene in Verbindung zu den Punkten des Raumes setzt – diese ist nach Klein als *Minimalprojektion* bekannt. In dem Lehrbuch *Vorlesungen über Differentialgeometrie III* von Blaschke aus dem Jahr 1929 wird erklärt, dass die Idee der Zyklografie auch als *isotrope Projektion* und schon bei Chasles [BT29, S. 136] bekannt gewesen sei. Die Abbildung funktioniert im Grunde nach der gleichen Idee, wie sie Fiedlers Zyklografie zu Grunde liegt:

Jedem Punkt Ψ des Raumes ordnen wir einen gerichteten Kreis der „Grundebene der isotropen Projektion“ $X_0 = 0$ zu, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $\{X_1, X_2, X_0 = 0\}$ besitzt und dessen Radius $R = X_0$ ist. Wir erhalten den Mittelpunkt des zu Ψ gehörigen Kreises also einfach durch senkrechte Projektion auf die Grundebene; der Radius ist dann gleich der Länge des Projektionslotes, und zwar ist er positiv für Punkte »oberhalb« der Grundebene und negativ für »unterhalb« derselben gelegene. [BT29, S. 136, Kursivschreibung auch im Original]

Dies entspricht Fiedlers Idee der zyklografischen Abbildung. Bei ihm wird entsprechend der Lage des Punktes nicht ein negativer oder positiver Radius des Kreises angesetzt, sondern ein Drehsinn angegeben. Die Aufarbeitung Blaschkes dieser Theorie zeigt einen weiteren Unterschied: So ist bei Fiedler das Ziel, eine Theorie aufzubauen, um im Wesentlichen Konstruktionsaufgaben zu lösen, bei der isotropen Projektion geht es vorrangig darum, eine Kreisgeometrie²⁷ zu entwickeln und sie auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Im Lehrbuch *Vorlesungen über die Geometrie der Algebren* von Walter Benz aus dem Jahre 1973 wird die Laguerre-Geometrie beschrieben und die *zyklografische Projektion* eingeführt, mit der es gelingt, die Punkte des Raumes auf die Elemente der Laguerre-Ebene abzubilden. Dies beschreibt er so:

Wir betrachten den reellen dreidimensionalen reellen Raum, der auf kartesische Koordinaten ξ, η, ζ bezogen sei. In diesem Raum habe der Punkt (ξ, η) von \mathbf{E} [das ist die reelle euklidische Ebene] die Koordinaten $(\xi, \eta, 0)$. Die Ebene \mathbf{E} ist

²⁷Die wichtigsten Kreisgeometrien werden als sogenannte Benz-Ebenen (nach Walter Benz) bezeichnet. Es handelt sich um die Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebene. Arbeiten von Edmond Laguerre haben diese Entwicklung vorangetrieben. Man kann diese Geometrien als Inzidenzstrukturen definieren. In der klassischen Laguerre-Ebene besteht die Geradenmenge aus den gerichteten Kreisen und Speeren (das sind orientierte Geraden, diese Sprechweise ist auch bei [Mül29] zu finden), die Punktmenge bildet die Menge der Punkte des \mathbb{R}^2 zusammen mit einem uneigentlichen Punkt.

also als Ebene $\zeta = 0$ in den Raum eingebettet. Die Abbildung

$$\tau: (1, \xi, \eta, \zeta) \longrightarrow (\xi, \eta, \zeta),$$

die den Punkt (ξ, η, ζ) des Raumes dem Zykel mit den Zykelkoordinaten $(1, \xi, \eta, \zeta)$ zuordnet, heißt *zyklographische Projektion*. Diese Abbildung τ ist eine eindeutige Abbildung der Menge der Zykel \mathbf{E} auf die Menge der Punkte des Raumes [...] [Ben73, S. 16f., Kursivschreibung auch im Original]

Dies ist im Prinzip die zyklografische Abbildung im Sinne Fiedlers. Benz und Blaschke geben weitere wichtige Eigenschaften der zyklografischen Abbildung an, die Berührungen von Kreisen beschreiben – so wie bei Fiedler ebenfalls erklärt, mit dem Unterschied, dass die Kreise gerichtet sind.

Im o. g. Brief erfährt man außerdem, dass Hurwitz die Untersuchung der Abbildungsmethode nicht weiter verfolgte und sich mit der Funktionentheorie und der Algebra beschäftigte. Erwähnenswert ist, dass auch Hurwitz – genau wie Fiedler – das Apollonische Berührproblem als eine Anwendung der entwickelten Abbildungsmethode im Blick hat. Er erläutert auch, wie mit einer zyklografischen Abbildung das Apollonische Problem gelöst werden kann:

Den 8 Kreisen des Tractions-Problems [das Apollonische Berührproblem] werden also die 8 Durchschnittspunkte [...] [von] Flächen 2^{ten} Grades entsprechen. [ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs. 87:447]

Auch das ist im Sinne der Zyklografie die Lösungsstrategie, wie man im Kapitel 7 erfahren wird. Hier wird das Ziel sein, die Durchschnittspunkte dreier gerader Kreiskegel, welche Flächen zweiter Ordnung sind, zu bestimmen.

Hurwitz beschreibt zudem seine Idee einer Abbildungsvorschrift für Raumpunkte durch Kreise in einer Ebene:

Man nehme einen ein für alle Male festen Kreis (um O), und weise jedem Kreis (M) denjenigen Punkt des Raumes zu, der senkrecht über dem Mittelpunkt M von (M) liegt und von diesem Mittelpunkt die Entfernung OE besitzt, wo E den zweiten Durchschnittspunkt des von O nach einem Schnittpunkt der Kreise (O) und (M) gezogenen Strahls mit (M) bedeutet. [ebd.]

Bei dieser Abbildung handelt sich zwar um eine Punkt-Kreis-Abbildung, die jedoch anders als die Zyklografie funktioniert. So liegt der Raumpunkt, der zu einem Kreis gehört, in der Zyklografie ebenfalls senkrecht über dessen Mittelpunkt, jedoch ist sein Abstand bei der zyklografischen Methode vom Radius des Kreises abhängig

– anders, als es Hurwitz bei seiner Idee beschreibt. Zudem müssen bei Hurwitz die Kreise (M) und (O) einen Schnittpunkt besitzen, was bei der Zyklografie nicht der Fall ist. Interessant bleibt aber die Tatsache, dass die Idee, eine Kreisabbildung im Sinne der Darstellenden Geometrie zu entwickeln, von Mathematikern jener Zeit gefasst und entwickelt wird.

2.5. Aufbau und Inhalt Fiedlers *Cyklographie*

Im Jahre 1882 erschien Fiedlers umfassendes Lehrwerk *Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme* beim Teubner Verlag in Leipzig. Es umfasst 263 Druckseiten, inklusive der Einleitung, und beinhaltet zusätzlich 16 Abbildungstafeln mit mehreren Zeichnungen, welche die im Fließtext beschriebenen Konstruktionen veranschaulichen sollen.

Dabei gliedert sich das Buch in die folgenden Abschnitte (s. [Fie82a, S. XIII-XVI]):

Einleitung über die Elemente der Zentralprojektion.

- I. Die Bildkreise der Punkte, ihre linearen Reihen und planaren Systeme.
- II. Geometrie der Kreisbüschel und Kreisnetze; die Potenz und Abbildungsmethoden in Ebene und Raum.
- III. Die Lehre vom Winkelschnitt für Kreise und Kugeln und die Systeme zweiten Grades.
- IV. Die Theorie der Kegelschnitte und der Rotationsflächen zweiten Grades im Zusammenhange mit der der [sic!] Kreis- und Kugelsysteme.

Schlussbetrachtungen über die Geometrie der Kreise auf der Kugel und Schlussbeispiel.

Die Abbildung 2.1 zeigt das Deckblatt des Buches.

Zunächst fällt auf, dass Fiedler bei diesem Buch Wert auf eine gute Lesbarkeit für Lernende gelegt hat. In der Vorrede seiner *Cyklographie* schrieb er dazu:

Ich kann daher schliesslich nur wünschen, dass meine Darstellung die durchschlagende Bedeutung der einfachen Idee in dem behandelten Gebiete genügend möge hervorgetreten lassen, damit ihr nicht zu dem Mangel des Credits den ihr der Name Steiner's im Vorhinein gegeben hätte, nach so langer Zurückhaltung auch noch das positive Missgeschick einer pädagogisch schwachen

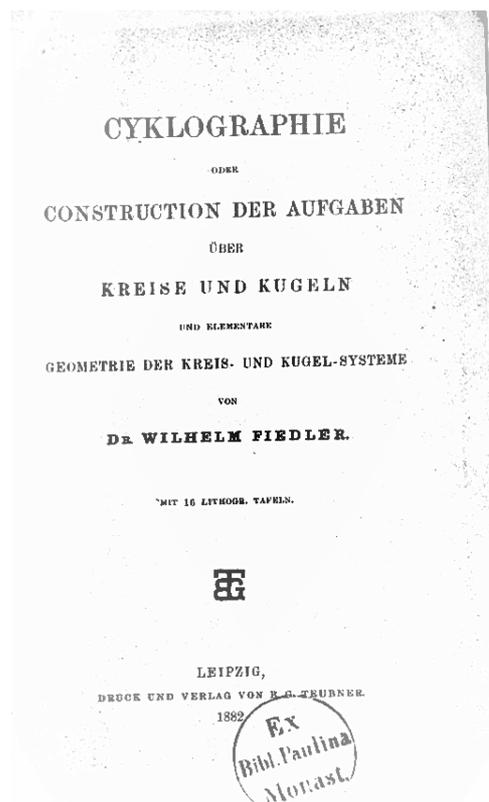


Abbildung 2.1.: Deckblatt der *Cyklographie* Fiedlers (s. [Fie82a])

Vertretung wiederfahren sei! Möchte ich namentlich die rechte Mitte zwischen Ausführlichkeit und Kürze, die bei solchen Darlegungen so schwer zu treffen ist, nicht verfehlt haben, so dass ich überall dem Lernenden verständlich bleibe, ohne doch den Sachverständigen zu ermüden! [Fie82a, S. XII]

Im Abschnitt 2.1 dieser Arbeit wurde in diesem Zusammenhang berichtet, dass Fiedler ein Autodidakt gewesen ist, der jedoch der Lehre einen großen Stellenwert beimaß.²⁸ Es wird deutlich, dass Fiedler ein Werk schaffen wollte, welches sich an Anfänger richtet, aber auch zugleich ertragreich für fortgeschrittene Leser sein soll. Um diesem Anspruch gerecht zu werden, beginnt Fiedler im ersten Abschnitt seines Buches mit der Entwicklung und Diskussion der Grundzüge der Zentralprojektion. Dies hat zweierlei Gründe: Einerseits wird damit der Einstieg für einen Anfänger erleichtert, der sich das Thema der zyklografischen Abbildung erarbeiten will, andererseits ist die perspektivische Abbildung unabdingbar für die Entwicklung von Fiedlers zyklografischer Theorie. Diese Tatsache stellt er auch in der Einleitung heraus:

²⁸In seiner Korrespondenz mit Torelli hat Fiedler seine didaktische Einstellung und Grundhaltung mitgeteilt.

Die Methode [, mit der die Zyklografie entwickelt wird,] ist die der Centralprojektion, und die der Entwicklung zum Grunde liegende Idee ist in der That mit den Elementen der Centralprojektion selbst gegeben; es ist die Idee der Abbildung oder Repräsentation und Bestimmung der Punkte des Raumes durch die Kreise der Ebene bei so zu sagen perspectivischer Lage. [Fie82a, S. 2]

In seinem Kommentar zur zyklografischen Abbildung in der *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* findet man weiter:

[...] so erhält man damit eine Bestimmung und Darstellung oder Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise einer Ebene im engsten Zusammenhang mit der Centralprojection. [Fie82b, S. 150]

Zusammenfassend definiert Fiedler in der Einleitung Grundbegriffe der Zentralprojektion, erläutert das Konzept der Umlegung und fasst elementare Zusammenhänge zusammen.

Im ersten Abschnitt erklärt er die zyklografische Abbildung (s. [Fie82a, S. 13]) und bringt den Begriff der Ähnlichkeit mit ihr in Verbindung. Zudem werden die zyklografischen Bilder von Raumgeraden und Ebenen erörtert, wodurch er zu den Konzepten der linearen Kreisreihen und planaren Kreissysteme (s. Abschnitt 4.5) gelangt. An dieser Stelle wird der Lehrbuchcharakter des Werkes deutlich: Betrachtet man Standardlehrwerke der Darstellenden Geometrie, z.B. Müllers und Kruppas Lehrbuch [KM61] von 1961 oder Christian Wieners (1826-1896) *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* von 1884 (s. [Wie84]) und analysiert die Inhaltsverzeichnisse, so wird man erkennen, dass dort einführend die Projektionen ebener Figuren diskutiert werden. Es werden die Abbildungen von Punkten, Geraden und Ebenen eingeführt. Dass Fiedler gezielt diesem Aufbau folgt, lässt sich anhand der Aussage

Sowie die Entwicklung der Centralprojection mit den projicierenden Geraden und den projicierenden Ebenen beginnt, welche zur Bestimmung und Behandlung aller anderen Geraden und Ebenen als deren Parallelstrahlen und Parallelebenen durch das Centrum benutzt werden, so auch hier; [...] [Fie82b, S. 150]

ablesen. In diesem ersten Abschnitt diskutiert er weiterführend Aufgaben, die die linearen Kreisreihen und planaren Kreissysteme betreffen. So beschreibt er in diesem Kontext, wie sich Kreise vorgegebener linearer Kreisreihen – die zyklografischen Bilder von Raumgeraden – konstruieren lassen, die bestimmten Einschränkungen genügen. Darüber hinaus werden Aufgaben diskutiert, die sich aus der Untersuchung von zyklografischen Bildern einer Ebene – den planaren Kreissystemen – ergeben.

Dies steht im Zusammenhang mit den Ähnlichkeitspunkten von Kreisen. Im Anschluss daran behandelt Fiedler den Satz von Monge. Tatsächlich ließe sich dieser schon eher mit den bis dahin erarbeiteten Mitteln beweisen, jedoch entschließt sich Fiedler für die Diskussion im Kontext der Ebenenabbildung. Der Satz von Monge besagt, dass die äußeren Ähnlichkeitszentren dreier nichtkonzentrischer Kreise mit paarweise unterschiedlichen Radien auf einer Gerade liegen. Außerdem trifft dies auch auf je zwei äußere Ähnlichkeitszentren mit einem inneren (und umgekehrt) zu. Diese Aussage ist leicht mithilfe der Zyklografie nachvollziehbar und wird in dieser Arbeit im Sinne Fiedlers gezeigt. Es wird sich an dieser Stelle der Mehrwert der zyklografischen Abbildungsmethode herausstellen; so wird der Beweis einfacher als mit den Standardmethoden, wie dem Satz von Menelaos aus der Dreiecksgeometrie.

Der zweite Abschnitt von Fiedlers *Cyklographie* beginnt mit der Untersuchung der – wie er sie bezeichnet – Durchdringungskurve zweier verschiedener gerader Doppelkreisegel, deren Spitzen in der Tafel Ebene liegen. Er nutzt diese Untersuchung, um den Begriff der Hyperbel einzuführen, und zeigt eine Möglichkeit auf, diese Kegelschnittkurve zu konstruieren. In der dort dargestellten Herangehensweise offenbart sich insbesondere Fiedlers Überzeugung, dass ein Zugang zu geometrischen Objekten am besten über darstellend-geometrische Methoden geschieht. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein alternativer Zugang dargestellt (s. Kapitel 6), indem die Hyperbel durch eine Ortskurvendefinition eingeführt wird. Dies ermöglicht es, die Beweisidee Dandelins vorzustellen. Mit ihrer Hilfe kann man zeigen, dass die Schnittlinie einer Ebene in einer bestimmten Lage zu einem Kegel eine Hyperbelkurve ergibt. Fiedler arbeitet nachfolgend unterschiedliche Eigenschaften der Hyperbel aus. Er zeigt beispielsweise, wie sich sogenannte involutorische Punkte, also in einem gewissen Sinne austauschbare Punkte, an einer speziellen Hyperbel konstruieren lassen. In der vorliegenden Arbeit wird darüber hinaus gezeigt, dass *jede* beliebige Hyperbel diese Eigenschaft erfüllt. Weiter wird aus den von Fiedler behandelten Sätzen eine Konstruktion abgeleitet, mit deren Hilfe sich Tangenten an eine Hyperbel bestimmen lassen.

Anschließend führt Fiedler den mit der Hyperbel in Verbindung stehenden Begriff der Kreisbüschel ein, indem er die Bildkreise einer Hyperbel betrachtet. Hierbei handelt es sich um Scharen von Kreisen, die bestimmte Eigenschaften erfüllen. Die Rotation der Raumhyperbel um eine ihrer Achsen wird zum Begriff des einschaligen Rotationshyperboloides führen, dessen zyklografische Bildkreise seinen Kehlkreis rechtwinklig schneiden. Des Weiteren ermöglicht der eher unkonventionelle Zugang zu Kreisbüscheln Untersuchungen von Potenzen von Punkten in Bezug auf einen Kreis. So lässt sich mithilfe des Sekanten- und Sehnensatzes der Potenzbegriff moti-

vieren. Damit lässt sich einem Punkt ein bestimmter Zahlenwert in Bezug auf einen Kreis zuordnen. Man beweist dann, dass die Menge der Punkte, welche in Bezug auf zwei Kreise die gleiche Potenz besitzen, auf einer eindeutig bestimmten Geraden, der sogenannten Potenzgeraden oder Radikalachse, liegen. Zur Einführung und Definition der Kreisbüschel gibt man in der Regel zwei Kreise vor, bestimmt ihre Potenzgerade und findet die Menge der Kreise, die eben diese Potenzgerade besitzen. Man kann sich überlegen, dass dies auf drei verschiedene Kreisfamilien führt, welche die Bezeichnungen hyperbolisches, parabolisches und elliptisches Kreisbüschel erhalten. Fiedlers Zugang in der *Cyklographie* hingegen ist eher als darstellend-geometrisch zu bezeichnen, denn er betrachtet die Hyperbel als Raumkurve und leitet davon ausgehend das Kreisbüschelkonzept ab. Er zeigt dann, dass dieser Zugang die gleichen Kreisbüschel wie die oben genannten liefert und identifiziert die Potenzgerade dann mit den entsprechenden Objekten der Hyperbel, sodass sich zeigen wird, dass die Haupt- und Nebenachse der Hyperbel Potenzgeraden der Kreisbüschel darstellen.

Darüber hinaus führt Fiedler den Begriff des Potenzkreises ein. Dieser ist auch bei Steiner zu finden (s. [Ste26, S. 175]). Im Gegensatz zu Steiner definiert Fiedler den Potenzkreis zunächst nur für sich schneidende Kreise und erweitert ihn später mithilfe des Kreisbüschelkonzepts auf Kreise in beliebiger Lage. In diesem Kontext definiert er die gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise in Bezug auf einen ihrer Ähnlichkeitspunkte, womit es ihm gelingt, die Bezeichnung Potenzkreis zu rechtfertigen. Der Begriff des Potenzkreises beruht bei Steiner auf einer anderen Definition. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass beide Definitionen äquivalent sind, also das gleiche Konzept beschreiben. Daran anschließend arbeitet Fiedler die wichtigsten Erkenntnisse zur Inversion am Kreis, die bei ihm Abbildung durch reziproke Radien genannt wird, heraus. Seine Beweise basieren dabei auf den Erkenntnissen über die Potenzkreise und verwenden (indirekt) die linearen Kreisreihen. Er gelangt zu den zentralen Sätzen über die Kreis inversion, beispielsweise, dass Kreise, die nicht durch den Mittelpunkt des Inversionskreises (bei Fiedler Directrixkreis genannt) verlaufen, wieder auf Kreise abgebildet werden, oder dass Kreise, die auf sich selbst abgebildet werden, den Inversionskreis rechtwinklig schneiden. Fiedler führt seine Betrachtungen fort und erweitert die Inversion in der Ebene auf eine Inversion im Raum. Dabei übertragen sich Begriffe wie Potenzkreis, Ähnlichkeitskreis oder Kreisbüschel auf Potenzkugel, Ähnlichkeitskugel oder Kugelbüschel.

Der nächste Abschnitt behandelt Winkelschnittprobleme in Bezug auf Kreise. Wie bereits erklärt, geht es darum, zu gegebenen Kreisen diejenigen Kreise zu finden, welche die vorgegebenen rechtwinklig schneiden. Es zeigt sich, dass im Sinne der zyklografischen Abbildungsidee das (einschalige) Rotationshyperboloid geeignet

sein wird, um derartige Aufgaben zu lösen. Konkret stellt sich heraus, dass die zyklografischen Bildkreise der Punkte eines einschaligen Rotationshyperboloides den Kehlkreis rechtwinklig schneiden, sofern dieser in der Tafel Ebene liegt. Betrachtet man bestimmte Kreise des Rotationshyperboloides, so lässt sich ein Schnitt in einem bestimmten Winkel erzeugen (s. Kapitel 8). Diese erhält man, wenn man die Tafel Ebene entlang der Achse des Rotationshyperboloids verschiebt. Welchen Schnittwinkel eine Verschiebung bewirkt, wird bei Fiedler beschrieben. Es können nun auf dieser Grundlage neue Aufgaben diskutiert werden, die Kreisschnittprobleme in bestimmten Winkeln betreffen. Beispielsweise untersucht Fiedler die Aufgabe, diejenigen Kreise zu vier gegebenen zu finden, die diese im gleichen Winkel schneiden. Letztlich ist dies ein Problem der Ermittlung der Schnittpunkte zu vier Rotationshyperboloiden. Das zweischalige Rotationshyperboloid, welches Fiedler ebenfalls erwähnt, dient zur Bestimmung von Kreisen, die einen gegebenen Kreis diametral schneiden.

Der vierte Abschnitt Fiedlers *Cyklographie* vertieft die Kegelschnitttheorie in Verbindung mit der Zyklografie. Es werden auch Kugelschnittprobleme in bestimmten Winkeln erörtert.

Den Schluss des Werkes bilden nochmals Winkelschnittprobleme. Es kommt zur Besprechung der stereografischen Projektion sowie zu einer Betrachtung des Feuerbachkreises.²⁹

Es sei angemerkt, dass in der vorliegenden Arbeit der Fokus auf die Elemente und Grundlagen der Zyklografie gelegt wird. So werden lineare Kreisreihen und planare Kreissysteme im Kontext von Aufgaben, die Schnitt- und Berührung von Kreisen und Geraden betreffen, die Einführung der Kreisbüschel in einem darstellend-zyklografischen Vorgehen sowie die Grundlagen der Schnittwinkeltheorie für sich schneidende Kreise erörtert. Die Inhalte aus den letzten beiden Abschnitten werden nicht diskutiert. Der Schwerpunkt bei der Auswahl der dargestellten Themen wurde so gelegt, dass erkennbar wird, welches Potential die Zyklografie besitzt, um diese Inhalte auf einem unkonventionellen, damals neuartigen Weg, zugänglich zu machen.

²⁹Der Feuerbachkreis (nach Wilhelm Feuerbach) ist auch als Neun-Punkte-Kreis bekannt. Er wird zu einem Dreieck konstruiert und zeichnet sich dadurch aus, dass auf ihm verschiedene charakteristische Punkte des Dreiecks liegen, u. a. die Mittelpunkte der Dreiecksseiten oder die Höhenfußpunkte.

3. Elemente der Darstellenden Geometrie

Dieses Kapitel behandelt die für die Zyklografie notwendigen Grundlagen der Zentralprojektion. Zuvor werden elementare Begriffe der Geometrie eingeführt und dazu zumeist die Bezeichnungen und die Vorgehensweisen Fiedlers gewählt, die nicht immer modernen Anforderungen an Exaktheit und Strenge entsprechen.

3.1. Geometrische Größen

In diesem Abschnitt folgt eine Einführung elementargeometrischer Grundgrößen, welche für die weitere Entwicklung der zyklografischen Theorie von Bedeutung sind. Zum leichteren Verständnis werden die hier beschriebenen Begriffe, wie der Fernpunkt, nicht auf die gleiche Weise wie bei Fiedler eingeführt, sondern unabhängig vom Begriff der Projektion erklärt und später mit ihr in Verbindung gebracht.

3.1.1. Verhältnisse von Punkten auf Geraden

Im Folgenden werden zwei zentrale Begriffe der Geometrie definiert.

Das Teilverhältnis

Seien A, B und X mit den Einschränkungen $A \neq B$ und $X \neq B$ drei Punkte auf einer Geraden. Man definiert das *Teilverhältnis* $\mathfrak{T}(A, B, X)$ durch folgenden Bruch

$$\mathfrak{T}(A, B, X) = \begin{cases} \frac{d(A, X)}{d(X, B)}, & X \text{ liegt in der Strecke } \overline{AB} \\ -\frac{d(A, X)}{d(X, B)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch die Fallunterscheidung von positivem und negativem Teilverhältnis ist jedem Punkt X der Geraden genau ein Teilverhältnis zugeordnet und umgekehrt. Weiter folgt unmittelbar aus dieser Definition, dass ein von B verschiedener Punkt X genau dann in der Strecke \overline{AB} liegt, wenn sein Teilverhältnis $\mathfrak{T}(A, B, X) > 0$, also positiv

ist³⁰. Speziell gilt

$$\mathfrak{T}(A, B, A) = \frac{d(A, A)}{d(A, B)} = 0$$

für den Fall, dass $A = X$ ist – unabhängig von der Annahme, ob A ein Punkt der Strecke \overline{AB} ist oder nicht. Falls M der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} ist, folgt für das Teilverhältnis

$$\mathfrak{T}(A, B, M) = \frac{d(A, M)}{d(M, B)} = 1,$$

da $d(A, M) = d(M, B)$ gilt. Die Bedeutung von $\mathfrak{T}(A, B, X) = -1$ wird nun diskutiert.

In der Projektiven Geometrie ist es zweckmäßig, einen »unendlich fernen Punkt« \mathbf{F} auf jeder Geraden g einzuführen. Sein Abstand zu einem beliebigen weiteren Punkt P auf der Geraden g soll unendlich groß sein. Konkret bedeutet das, dass für die Abstände zweier beliebiger Punkte P und Q sowie des *Fernpunktes* \mathbf{F} auf der Geraden g stets $d(P, Q) < d(P, \mathbf{F})$ gelten soll. Des Weiteren soll der Fernpunkt \mathbf{F} zu jedem beliebigen Punkt einen unendlich großen Abstand besitzen, also gilt

$$d(P, \mathbf{F}) = d(Q, \mathbf{F}) = \infty$$

für jeden beliebigen Punkt P oder Q auf der Geraden, der nicht der Fernpunkt dieser Geraden ist. Im Folgenden soll dem Fernpunkt einer Geraden ein Teilverhältnis zugeordnet werden. Seien dazu A und B zwei fest gewählte verschiedene Punkte auf einer Geraden g . Der konstante Abstand der beiden Punkte sei aus Gründen der Übersichtlichkeit mit $k := d(A, B)$ bezeichnet. Nun werden die Betrachtungen auf den zwei von B ausgehenden Halbgeraden auf g fortgeführt:

- Halbgerade h_1 auf g von B aus, die A *nicht* enthält:
Ist X ein beliebig gewählter Punkt auf h_1 , dann ist das Teilverhältnis negativ (da X nicht auf der Strecke \overline{AB} liegt) und man erhält

$$\mathfrak{T}(A, B, X) = -\frac{d(A, X)}{d(X, B)} = -\frac{k + d(X, B)}{d(X, B)} = -1 - \frac{k}{d(X, B)}.$$

Ist X der Fernpunkt auf dieser Halbgeraden, so wächst der Abstand $d(X, B)$

³⁰In diesem Fall ist der Punkt A kein Punkt, der in der Strecke \overline{AB} liegt.

über alle Grenzen und es folgt

$$\mathfrak{T}(A, B, X) = -1 - \frac{k}{d(X, B)} \longrightarrow -1,$$

sofern $d(X, B) \longrightarrow \infty$.

- Halbgerade h_2 von B aus, welche den Punkt A enthält:

Ist X ein Punkt der Halbgeraden h_2 und liegt nicht auf der Strecke \overline{AB} (diese Annahme legitimiert sich, da X in einen Fernpunkt übergehen soll), so folgt mit derselben Überlegung wie zuvor

$$\mathfrak{T}(A, B, X) = -\frac{d(A, X)}{d(A, X) + k} = -\frac{1}{1 + \frac{k}{d(A, X)}} \longrightarrow -1,$$

sofern $d(A, X) \longrightarrow \infty$.

Die Ergebnisse der beiden behandelten Fälle werden zu einem Satz zusammengefasst:

Satz 3.1 (Teilverhältnis eines Fernpunktes). *Sei g eine Gerade, auf der die zwei verschiedenen Punkte A und B liegen. Genau dann ist \mathbf{F} der Fernpunkt von g , wenn für das Teilverhältnis*

$$\mathfrak{T}(A, B, \mathbf{F}) = -1$$

gilt.

Es sei bemerkt, dass der Begriff des Teilverhältnisses bei Fiedler in [Fie82a] nicht gesondert eingeführt wird. Vermutlich deshalb, da zur Zeit Fiedlers dieses Wissen zum Standardschulstoff gehörte.

Abschließend ist zur Visualisierung in der Abbildung 3.1 die Funktion $T_{A,B}(X) := \mathfrak{T}(A, B, X)$ dargestellt. Dabei wurde der Abstand der Punkte A und B auf $d(A, B) = 1$ festgelegt. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{A,B}(X) &= \begin{cases} \frac{d(A,X)}{d(X,B)}, & X \text{ liegt in der Strecke } \overline{AB} \\ -\frac{d(A,X)}{d(X,B)}, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{|x|}{|x-1|} & x \in [0, 1) \\ -\frac{|x|}{|x-1|} & x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1] \end{cases} \\ &= \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

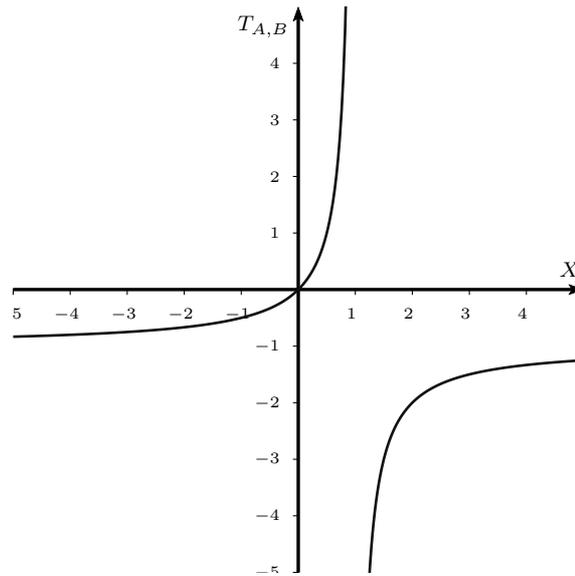


Abbildung 3.1.: Graph der Funktion $T_{A,B}$ in Abhängigkeit des Teilungspunktes X

Fiedler definiert und diskutiert in Artikel 5 direkt den für die Zentralprojektion wichtigen Begriff des Doppelverhältnisses, welcher im Folgenden erklärt wird.

Das Doppelverhältnis von vier Punkten

Das *Doppelverhältnis* von vier Punkten einer gegebenen Geraden beschreibt das Verhältnis zweier Teilverhältnisse. Das bedeutet konkret: Das Doppelverhältnis vierer kollinearere Punkte A, B, C und D , wobei $A \neq B$, $C \neq B$ sowie $D \neq B$ gelten soll, ist definiert als

$$\mathfrak{D}(A, B; C, D) = \frac{\mathfrak{T}(A, B, C)}{\mathfrak{T}(A, B, D)}.$$

Liegt genau einer der Punkte C oder D innerhalb der Strecke \overline{AB} , so ist offenbar aufgrund der Definition des Teilverhältnisses $\mathfrak{D} < 0$, also negativ. Im Abschnitt 3.1.2 wird ein Begriff für ein besonderes Doppelverhältnis eingeführt.

Das Doppelverhältnis von vier Strahlen

Man kann nicht nur Doppelverhältnisse von Punkten betrachten, sondern auf das *Doppelverhältnis vierer Strahlen* a, b, c, d erweitern (s. [Fie82a, S. 5]), welche durch ein gemeinsames Zentrum S verlaufen. Bei Fiedler werden diese Strahlen als *Strah-*

lenbüschel bezeichnet. Man legt

$$\mathfrak{D}(a, b; c, d) = \frac{\sin(\sphericalangle(ab)) : \sin(\sphericalangle(bc))}{\sin(\sphericalangle(ad)) : \sin(\sphericalangle(bd))}$$

in Analogie zum vorher definierten Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten fest. Dabei bedeutet die Bezeichnung $\sphericalangle(ab)$ das Winkelmaß des kleineren Winkels zwischen den Strahlen a und b mit dem Scheitel S . Der Zusammenhang, der zwischen den Begriffen besteht, wird im weiteren Verlauf gezeigt.

Für spätere Zwecke werden noch zwei Begriffe eingeführt. Fiedler definiert sie im Artikel 6 in [Fie82a, S. 6]. Als *projektives Büschel* sollen zwei Strahlenbüschel verstanden werden, die das gleiche Doppelverhältnis in Bezug auf ihre Strahlen besitzen. Analog bezeichnet man als *projektive Gruppe* zwei Geraden mit Punkten, die das gleiche Doppelverhältnis besitzen.

Im Artikel 45 in [Fie82a, S. 40] beschreibt Fiedler eine Möglichkeit, wie sich ein projektives Büschel bestimmen lässt. Folgender Satz bildet die Grundlage dazu:

Satz 3.2. *Es sei ein Kreis \mathcal{K} gegeben. Weiter seien A, B, C und X (im Uhrzeigersinn von A nach X benannt) vier verschiedene Punkte auf dem Kreis \mathcal{K} . Mit zwei weiteren Punkten T_1 und T_2 auf dem Kreis \mathcal{K} bilde man zwei Strahlenbüschel B_1 und B_2 wie folgt: Man wähle die Punkte T_1 bzw. T_2 als Zentren und verbinde sie mit den Punkten A, B, C , und X . Dabei sollen die Zentren nicht auf dem Kreisbogen über der Sehne \overline{AX} liegen, in der sich die Punkte B und C befinden. Es folgt, dass die Strahlenbüschel B_1 und B_2 projektivisch sind, also dasselbe Doppelverhältnis aufweisen.*

Man kann den Satz auch in der Weise auffassen, dass Strahlenbüschel paarweise mit Zentrum und Schnittpunkten auf einem Kreis projektivisch zueinander ist. Folgende Abbildung 3.2 zeigt zwei zueinander projektivische Strahlenbüschel mit den Zentren T_1 bzw. T_2 .

Beweis. Der Satz folgt aus dem Umfangswinkelsatz. Man betrachte dazu beispielsweise die Sehne \overline{AB} . Der Umfangswinkelsatz garantiert, dass der Umfangswinkel über dieser Sehne immer gleich groß ist. Dies folgt ebenfalls für die Umfangswinkel über den Sehnen \overline{BC} , \overline{AD} und \overline{BX} . Da nun deshalb die Sinuswerte zu diesen Umfangswinkeln gleich groß sind, folgt die Behauptung. \square

Tatsächlich bleibt der Satz sogar richtig, wenn die Zentren T_1 und T_2 mit einem der Punkte A, B, C oder X zusammenfallen. In diesem Fall geht einer der Strahlen in eine Tangente an den Kreis in eben diesem Punkt über und der Sehnentangentenwinkelsatz liefert die Korrektheit des Satzes.

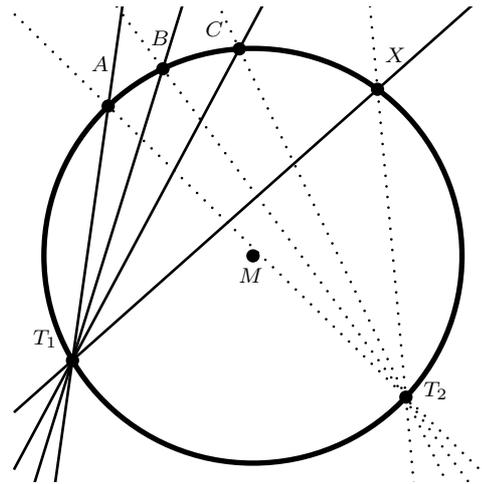


Abbildung 3.2.: Zwei zueinander projektivische Strahlenbüschel mit den Zentren T_1 bzw. T_2

3.1.2. Die harmonische Teilung

Die Definition der harmonischen Teilung

Die *harmonische Teilung*³¹ ist ein besonderes Doppelverhältnis. Man legt es als das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C und D , wobei $A \neq B$, $C \neq B$ sowie $D \neq B$, mit dem konstanten Wert -1 fest, das heißt konkret

$$\mathfrak{D}(A, B; C, D) = -1$$

beziehungsweise äquivalent

$$\frac{\mathfrak{T}(A, B, C)}{\mathfrak{T}(A, B, D)} = -1 \implies \mathfrak{T}(A, B, C) = -\mathfrak{T}(A, B, D).$$

Aufgrund des Minuszeichens wird klar, dass jeweils einer der Punkte C oder D nicht in der Strecke \overline{AB} und der jeweils andere Punkt in der Strecke \overline{AB} liegt. Fiedler bezeichnet vier Punkte, die sich untereinander harmonisch teilen, als eine *harmonische Gruppe* (s. [Fie82a, S. 5]). Die Abbildung 3.3 zeigt eine harmonische Gruppe aus den Punkten A, B, C und D . Wie sich eine harmonische Gruppe mithilfe von Kreisen konstruieren lässt, wird in der Konstruktion 3.4 später in diesem Kapitel ausgeführt. Eine Möglichkeit der Konstruktion des vierten harmonischen Teilungspunktes, wenn bereits drei Punkte gegeben sind, lässt sich mithilfe der Zentralprojektion finden. Die Vorgehensweise gemäß Fiedler wird im Abschnitt 3.2.3 gezeigt.

³¹Die Verwendung des Begriffs »harmonisch« hat ihren Ursprung in der Musik (vgl. [Tro23, S. 178]).

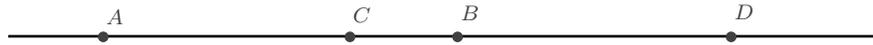


Abbildung 3.3.: Die harmonische Teilung von vier Punkten auf einer Geraden

Die harmonische Teilung mit einem Fernpunkt

Für weitere Betrachtungen ist die Frage relevant, wie die Punkte einer harmonischen Gruppe A, B, C, \mathbf{F} von vier Punkten liegen, sofern \mathbf{F} der Fernpunkt der Geraden g durch die Punkte A, B und C ist. Eine einfache Rechnung unter Anwendung von Satz 3.1 zeigt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(A, B; C, \mathbf{F}) = -1 &\iff \mathfrak{T}(A, B, C) = -\mathfrak{T}(A, B, \mathbf{F}) \\ &\iff \mathfrak{T}(A, B, C) = -(-1) = 1, \end{aligned}$$

woraus nach Abschnitt 3.1.1 folgt, dass C der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} ist. Das Ergebnis ist im folgenden Satz festgehalten:

Satz 3.3. *Liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden g und ist \mathbf{F} der Fernpunkt von g , so ist C der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} genau dann, wenn gilt*

$$\mathfrak{D}(A, B; C, \mathbf{F}) = -1.$$

Die Punkte A, B, C, \mathbf{F} bilden eine harmonische Gruppe.

Die harmonische Gruppe und die Ähnlichkeitspunkte von Kreisen

Fiedler beweist in [Fie82a, S. 20], dass die beiden Ähnlichkeitspunkte³² oder Ähnlichkeitszentren A_i und A_a zweier Kreise unterschiedlicher Radien mit ihren unterschiedlichen Mittelpunkten M_1 und M_2 eine harmonische Gruppe bilden, dass also

$$\mathfrak{D}(M_1, M_2; A_i, A_a) = -1$$

gilt. Zunächst wird die Konstruktion der Punkte A_i und A_a vorgestellt.

Konstruktion 3.4 (Konstruktion von Ähnlichkeitszentren zweier Kreise). Seien zwei Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_1(M_2, r_2)$ mit den unterschiedlichen Radien r_1 und r_2 und den unterschiedlichen Mittelpunkten M_1 und M_2 gegeben. Die Gerade $z :=$

³²Die Begriffe des Ähnlichkeitspunktes bzw. der ähnlichen Lage wurden bei Euler eingeführt und im Kontext der Kreisgeometrie durch Steiner verwendet, sodass sich diese Bezeichnung durchsetzte (vgl. [Tro23, S. 175]).

M_1M_2 bezeichnet man als *Zentrale* der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 . Zeichnet man einen beliebigen Durchmesser, der nicht in z liegt, in einen der Kreise ein und zieht den parallelen Durchmesser in dem jeweils anderen Kreis, so entstehen jeweils zwei Schnittpunkte der Durchmesser mit ihren Kreisen. Die Schnittpunkte mit dem Kreis \mathcal{K}_1 werden mit P_1 und Q_1 , die entsprechenden Schnittpunkte des Durchmessers von \mathcal{K}_2 mit der Kreisperipherie mit P_2 und Q_2 bezeichnet. Nun zieht man die zwei Geraden

$$g_1 := P_1P_2,$$

$$g_2 := Q_1Q_2$$

und bringt diese zum Schnitt mit der Zentralen z . Dabei entstehen die zwei Schnittpunkte A_i und A_a .

Die Abbildung 3.4 veranschaulicht den beschriebenen Sachverhalt.

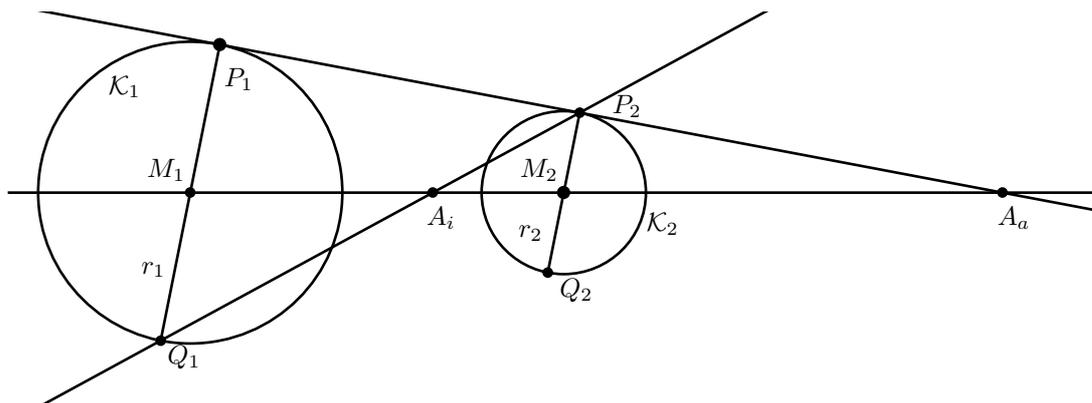


Abbildung 3.4.: Die Ähnlichkeitszentren A_a und A_i zweier Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unterschiedlicher Radien und Mittelpunkte

Erläuterung zur Konstruktion. Man überlegt sich, dass die konstruierten Punkte unabhängig von der Wahl der parallelen Durchmesser (nicht auf der Zentrale M_1M_2 gelegen) immer die gleichen sind. Man wird zugleich erkennen, dass sie die Zentren zentrischer Streckungen sind, welche die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 aufeinander abbilden. Mithilfe des zweiten Strahlensatzes ergibt sich dann:

- Es gilt für das sogenannte *äußere Ähnlichkeitszentrum* A_a die Äquivalenz

$$\frac{d(A_a, M_2)}{r_2} = \frac{d(A_a, M_1)}{r_1} \iff \frac{r_1}{r_2} = \frac{d(A_a, M_1)}{d(A_a, M_2)}. \quad (3.1)$$

Subtraktion von 1 auf beiden Seiten liefert die äquivalenten Gleichungen

$$\frac{r_1}{r_2} - 1 = \frac{d(A_a, M_1)}{d(A_a, M_2)} - 1 \iff \frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{d(A_a, M_1) - d(A_a, M_2)}{d(A_a, M_2)}.$$

Nutzt man aus, dass die Gleichung $d(A_a, M_1) - d(A_a, M_2) = d(M_1, M_2)$ gilt, so vereinfacht sich die obere Gleichung zu

$$\frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{d(M_1, M_2)}{d(A_a, M_2)}.$$

Da die Größen $r_1, r_2, d(M_1, M_2)$ unveränderlich sind, ist die Länge $d(M_2, A_a)$ fest, woraus folgt, dass der Punkt A_a eindeutig bestimmt ist.

- Für das *innere Ähnlichkeitszentrum* A_i gilt

$$\frac{d(A_i, M_1)}{r_1} = \frac{d(A_i, M_2)}{r_2} \iff \frac{r_1}{r_2} = \frac{d(A_i, M_1)}{d(A_i, M_2)}. \quad (3.2)$$

Man verfährt wie im Fall zuvor mit dem Unterschied, dass man die Zahl 1 auf beiden Seiten der Gleichung addiert, woraus man die Gleichung

$$\frac{r_1 + r_2}{r_2} = \frac{d(A_i, M_1) + d(A_i, M_2)}{d(A_i, M_2)} = \frac{d(M_1, M_2)}{d(A_i, M_2)}$$

erhält. Eine analoge Argumentation wie oben ergibt, dass der Punkt A_i eindeutig bestimmt ist.

Gleichsetzen der Ergebnisse (3.1) und (3.2) ergibt insgesamt

$$\frac{d(A_a, M_1)}{d(A_a, M_2)} = \frac{d(A_i, M_1)}{d(A_i, M_2)} \iff \frac{d(A_i, M_2)}{d(M_2, A_i)} = \frac{d(A_i, M_1)}{d(M_1, A_a)}.$$

Beachtet man, dass genau ein Ähnlichkeitspunkt in der Strecke $\overline{M_1 M_2}$ liegt, der andere außerhalb jener Strecke, muss man auf einer Seite der Gleichung ein Minuszeichen setzen, sodass

$$\mathfrak{D}(M_1, M_2; A_i, A_a) = -1$$

folgt, weshalb harmonische Trennung vorliegt. Die erzielten Ergebnisse dieses Abschnittes werden im folgenden Satz formuliert:

Satz 3.5. *Seien $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ zwei Kreise unterschiedlicher Radien r_1 und r_2 und unterschiedlicher Mittelpunkte M_1 und M_2 . Die beiden Ähnlichkeits-*

zentren A_i und A_a der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_1 bilden mit den Kreismittelpunkten eine harmonische Gruppe, also

$$\mathfrak{D}(M_1, M_2; A_i, A_a) = -1.$$

Das konstante Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ der Radien bezeichnet Fiedler als das Ähnlichkeitsverhältnis der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 (s. [Fie82a, S. 20]).

Beweis. Der Beweis erfolgte bereits in der Erläuterung zur Konstruktion 3.4. \square

Sind die Radien der beiden Kreise gleich, so ist der äußere Ähnlichkeitspunkt ein Fernpunkt, wie man im Abschnitt 3.2.1 sehen wird. Fiedler diskutiert in Artikel 21, welche räumliche Bedeutung den Ähnlichkeitspunkten (bei Fiedler mit M' und M'' bezeichnet) im Kontext der zyklografischen Abbildung zukommt. Darauf geht das Kapitel 4 dieser Arbeit ein.

Für spätere Zwecke wird nun der folgende Satz gezeigt³³:

Satz 3.6. *Es seien die verschiedenen Punkte A, B, C und D auf einer Geraden g gegeben, sodass sie eine harmonische Gruppe bilden, also*

$$\mathfrak{D}(A, B; C, D) = -1$$

gilt. Weiter sei L ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt, sodass der Winkel $\angle(CLD)$, der von den Geraden LC und LD im Punkt L eingeschlossen wird, ein rechter ist. Dann ist die Gerade LD die Winkelhalbierende des Winkels $\angle(ALB)$, der von den Geraden LA und LB im Punkt L gebildet wird.

In der Abbildung 3.5 ist die im Satz 3.6 beschriebene Situation dargestellt. Der in der Abbildung dargestellte gestrichelte Kreis ist der Thaleskreis über dem Durchmesser \overline{CD} , sodass der Satz für jede Wahl des Punktes L auf seiner Peripherie gültig ist. Die Winkel α und α' sind laut des Satzes gleich groß.

Methoden der Projektive Geometrie ermöglichen den Nachweis des Satzes; hier soll ein Beweis angegeben werden, der den Strahlensatz benutzt.

Beweis. Für diesen Beweis betrachte man die Skizze in der Abbildung 3.6. Nach Voraussetzung bilden die Punkte A, B, C und D eine harmonische Gruppe, sodass die Äquivalenz

$$\frac{d(A, C)}{d(C, B)} = \frac{d(A, D)}{d(D, B)} \iff \frac{d(B, D)}{d(B, C)} = \frac{d(A, C)}{d(A, D)}$$

³³Dieser Satz ist auch bei Euklid zu finden (s. Euklids Elemente, VI. Buch, Satz 2 und 3).

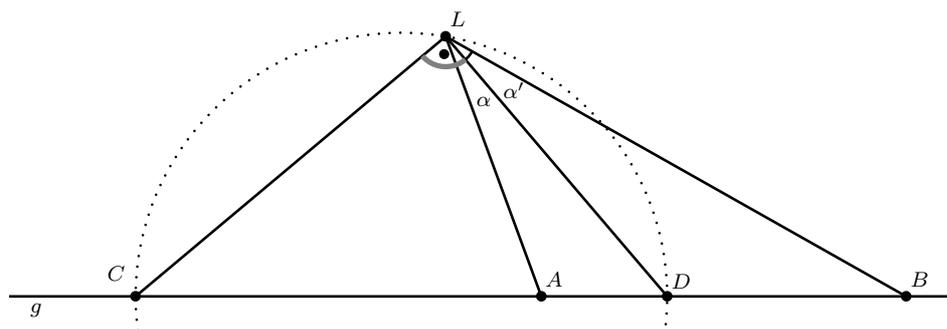


Abbildung 3.5.: Harmonisches Strahlenbündel mit rechtem Winkel im Strahlencentrum L

besteht. Nun wird die parallele Gerade p zur Geraden LC durch den Punkt D konstruiert. Ihre Schnittpunkte mit der Geraden LA und LB seien mit I und J bezeichnet. Der zweite Strahlensatz mit B als Zentrum liefert dann die Gleichung

$$\frac{d(B, D)}{d(B, C)} = \frac{d(D, J)}{d(C, L)}$$

und mit A als Zentrum die Gleichung

$$\frac{d(A, D)}{d(A, C)} = \frac{d(D, I)}{d(C, L)}.$$

Somit ergeben die Strahlensatzgleichungen zusammen mit der Voraussetzung

$$\frac{d(D, J)}{d(C, L)} = \frac{d(D, I)}{d(C, L)} \iff d(D, J) = d(D, I).$$

Der Kongruenzsatz SWS liefert dann mit dem rechten Winkel, der durch die Geraden p und LD im Punkt D (Stufenwinkel zum rechten Winkel bei L) eingeschlossen wird, der oben gezeigten Längengleichheit der Strecken \overline{DI} und \overline{DL} sowie der gemeinsamen Seite \overline{LD} die Kongruenz der Dreiecke

$$\triangle ILD \text{ und } \triangle JLD,$$

woraus die Gleichheit $\alpha = \alpha'$ der Winkel α und α' und damit die Behauptung des Satzes folgt.

□

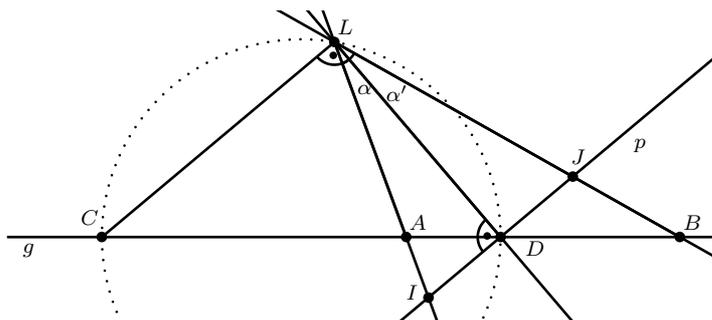


Abbildung 3.6.: Skizze zum Beweis von Satz 3.6

3.2. Die Zentralperspektive

Nachfolgend wird die zentralperspektivische Abbildung gemäß [Fie82a] eingeführt. Im ersten Kapitel, in den Artikeln 1 bis 12, seines Werkes erklärt und definiert er Begriffe der Zentralprojektion, die er in folgenden Artikeln und Kapiteln benutzt. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Aussagen und Zusammenhänge zusammengetragen sowie die entsprechenden Notationen nach Fiedler erklärt. Zunächst wird beschrieben, was die zentralperspektivische Abbildung ist, sowie die von Fiedler benutzten Notationen erklärt. In diesem Kapitel werden die Konstruktionen, die in der Tafel Ebene durchgeführt werden, in den Abbildungen durch einen Rahmen dargestellt.

Das Abbildungsverfahren

Es wird der dreidimensionale Anschauungsraum \mathbb{R}^3 betrachtet. Es sei $C \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt im Raum, den man als *Projektionszentrum*, *Auge* oder *Augpunkt* bezeichnet. Die Bezeichnung C (für Centrum) soll im Folgenden gemäß Fiedler konsequent für den Augpunkt verwendet werden. Weiter sei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die den Punkt C nicht enthält; sie wird als *Tafel Ebene* oder kurz *Tafel* bezeichnet.

Es sei P ein beliebiger, vom Augpunkt verschiedener Punkt im Raum, welcher zentralperspektivisch abgebildet werden soll. Der Punkt P soll zusätzlich nicht in der zur Tafel parallelen Ebene E liegen, in der der Augpunkt liegt – dies ist die sogenannte *Verschwindungsebene*: Man zieht die Gerade CP und bringt sie mit der Tafel \mathcal{T} zum Schnitt. Den auf diese Weise erhaltenen Punkt P' bezeichnet man als die *Projektion von P auf die Tafel \mathcal{T} mit dem Zentrum C* oder kurz *Projektion*.

Modern kann man diese Abbildung wie folgt beschreiben:

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus (\{C\} \cup E) \longrightarrow \mathcal{T}$$

$$P \longmapsto P',$$

mit $P' \in (\mathcal{T} \cap CP)$, sofern man die Gerade durch C und P hier als die Menge der auf ihr liegenden Punkte auffasst. Es ist somit jedem Raumpunkt – ausgenommen des Zentrums und der Punkte in der zur Tafel parallelen Ebene, die den Augpunkt beinhaltet – ein Bildpunkt auf der Tafel zugeordnet.

Die angewandte Notation, den Bildpunkt eines Raumpunktes zu apostrophieren, ist ebenfalls gemäß Fiedler und soll weiterhin verwendet werden. Eine (Halb-)Gerade, die vom Punkt C ausgeht und die Tafel schneidet, wird als *projizierender Strahl* oder *projizierende Gerade* bezeichnet.

Offenbar besitzt jeder beliebige Punkt Q auf dem Strahl CP' dieselbe Projektion wie P , also gilt

$$F(Q) = F(P) = P'.$$

Die Abbildung 3.7 zeigt die Projektion P' der Punkte P und Q auf die Tafel \mathcal{T} .

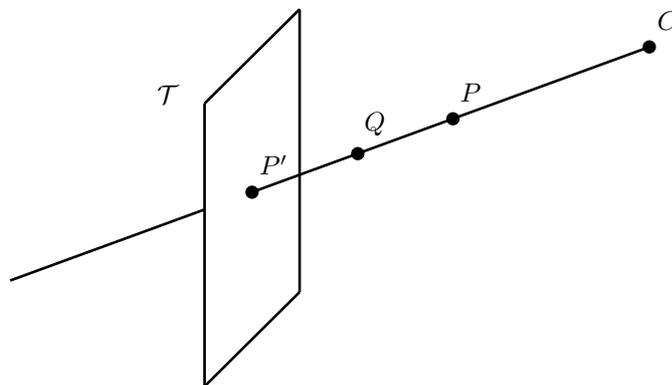


Abbildung 3.7.: Zentralprojektion der Punkte P und Q

Eine eindeutige Zuordnung von Raum- und Bildpunkten kann erzielt werden, indem man die Menge der Punkte, die man zur Projektion zulässt, einschränkt. Nimmt man nur Punkte, die sich in einer Ebene, welche das Zentrum nicht enthält, (häufig zweckmäßig parallel zur Tafel) befinden, so ist die Abbildung eindeutig (vgl. z.B. [KM61, S. 2f.]). Fiedler sieht in seiner *Cyklografie* davon ab (weshalb klärt

sich, wenn das zyklografische Verfahren definiert wird). Die später definierte zyklografische Abbildung wird hingegen eine eindeutige Zuordnung sein, wie der in diesem Kontext stehende Textabschnitt

[...] Repräsentation und Bestimmung der Punkte des Raumes [...] [Fie82a, S. 2]

der Einleitung bereits schließen lässt.

Die Parallelprojektion als Spezialfall der Zentralprojektion

Als Spezialfall der zentralperspektivischen Abbildung ist jener zu nennen, bei dem der Augpunkt der Zentralprojektion ein zur Tafel unendlich weit entfernter Punkt ist. In diesem Fall wird die Abbildung der Raumpunkte auf die Tafel Ebene als *Parallelprojektion* bezeichnet. Diese wird speziell zur *Orthogonalprojektion* oder *orthogonalen Parallelprojektion*, indem man wie folgt den Punkt P abbildet: Ist P ein Raumpunkt, so bestimmt man die zur Tafel Ebene T lotrechte Gerade l durch den Punkt P . Den Schnittpunkt P_1 des Lotes l mit der Tafel Ebene ist der orthogonalprojizierte Punkt des Punktes P . Ist im Folgenden von einer Zentralprojektion die Rede, so geht man immer von einem nicht-unendlich entfernten Punkt, also einer Zentralprojektion im eigentlichen Sinne aus.

3.2.1. Die grundlegenden Begriffe der Zentralprojektion

Für die zentralperspektivische Abbildung werden weitere Begriffe benötigt, die im Folgenden erklärt werden.

Der Fluchtpunkt, die Fluchtlinie und die Verschwindungslinie

In einer Ebene sei eine Gerade g gegeben, auf der der Punkt A liegt. Weiter sei B ein fest gegebener Punkt, welcher nicht auf der Geraden g liegt. Fällt man durch B das Lot auf die Gerade g , so erhält man den Lotfußpunkt B_1 auf der Geraden g . Es sei $\alpha = \angle(B_1BA)$ der Winkel der zwischen dem Lot B_1B und der Geraden AB mit dem Scheitel B eingeschlossen wird. Es gilt dann die Gleichung

$$\tan(\alpha) = \frac{d(A, B_1)}{d(B, B_1)}.$$

Die Abbildung 3.8 veranschaulicht den beschriebenen Sachverhalt.

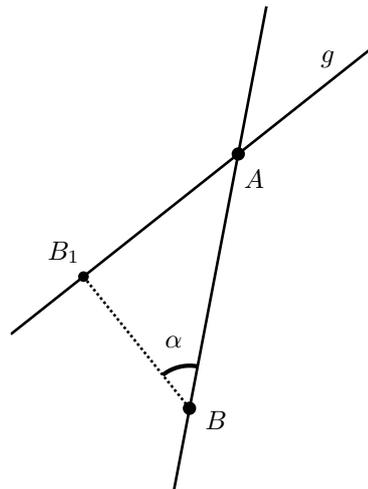


Abbildung 3.8.: Konstruktion eines gemeinsamen Punktes paralleler Geraden

Überführt man A nun in den Fernpunkt der Geraden g , so folgt

$$\alpha = \arctan \left(\frac{d(A, B_1)}{d(B, B_1)} \right) \longrightarrow 90^\circ,$$

wenn $d(A, B_1) \longrightarrow \infty$, da der Abstand $d(B, B_1)$ aufgrund des festen Punktes B konstant ist. Da A der Schnittpunkt der Geraden g und AB ist und die Lotgerade senkrecht auf der Geraden AB steht, sofern A in einen Fernpunkt übergeht, ist die Sprechweise legitimiert, dass sich zwei parallele Geraden in ihrem Fernpunkt schneiden bzw. dass je ein Paar paralleler Geraden den gleichen Fernpunkt besitzt.

Diese Erkenntnisse werden nun verwendet, um den Begriff des *Fluchtpunktes* der zentralperspektivischen Abbildung zu definieren. Man interpretiert dafür den oben beschriebenen Sachverhalt räumlich. Dazu fasst man den Punkt B als den Augpunkt C einer zentralperspektivischen Abbildung, die Gerade g als beliebige Raumgerade, die nicht in der Verschwindungsebene liegt, und den Punkt A als einen Punkt auf der Geraden g auf. Es zeigt sich, dass sich der Bildpunkt A' dem Schnittpunkt Q' der zu g parallelen Geraden durch den Augpunkt C mit der Tafel annähert, sofern sich der Punkt A immer weiter von der zur Tafel parallelen Ebene durch C entfernt. Man vergleiche dazu die Abbildung 3.9. Die dort gestrichelt dargestellten Strecken liegen auf den projizierenden Strahlen, mit deren Hilfe die Bildpunkte der Punkte auf der Geraden g konstruiert werden. Es sei bemerkt, dass die Punkte der zentralprojizierten Geraden g sich in der Abbildung 3.9 auf der Halbgeraden³⁴ $Q'S^+$ dem Fluchtpunkt Q' annähern. Werden die Punkte der Geraden g , welche im Halbraum der Verschwindungsebene liegen, die nicht die Tafel ebene enthält, projiziert,

³⁴Die Halbgerade $Q'S^+$ ist diejenige vom Punkt Q' aus, die den Punkt S enthält.

so geschieht die Annäherung der zentralprojizierten Punkte der Gerade g auf der Halbgeraden³⁵ $Q'S^-$.

Gleiches gilt für jede andere zu g parallele Gerade, weshalb man Q' als ihren gemeinsamen Fluchtpunkt auffasst (vgl. z.B. [Wie84, S. 72]).

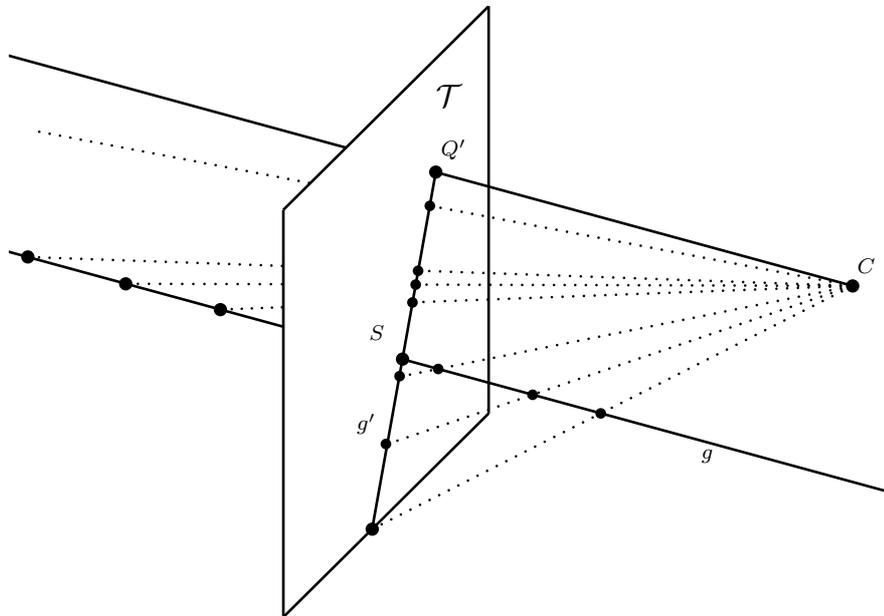


Abbildung 3.9.: Der Fluchtpunkt Q' einer Geraden g bei zentralperspektivischer Abbildung

In Analogie zu obigen Überlegungen erklärt man die Begriffe der *Fluchtlinie* oder *Fluchtgerade*, welche in der Malerei traditionell Horizont genannt werden, des Bildes einer nicht zur Tafel parallelen Ebene E . Sie ist die Schnittgerade q' der zur Ebene E parallelen Ebene F durch den Augpunkt C mit der Tafel. Diese Definitionen ergeben unmittelbar den folgenden

Satz 3.7. *Es sei E eine nicht zur Tafel parallele Ebene mit der Fluchtlinie q' . Jede beliebige nicht zur Tafel parallele Gerade g , welche in der Ebene E liegt, hat ihren Fluchtpunkt auf der Fluchtlinie q' .*

Man beachte: Hat eine Gerade ihren Fluchtpunkt Q' auf q' , so kann nicht geschlossen werden, dass g in E liegt, weil jede parallele Gerade, die nicht in E liegt, den gleichen Fluchtpunkt Q' besitzt.

Abschließend wird noch der Begriff der *Verschwindungslinie* einer nicht zur Tafel parallel liegenden Ebene E definiert. Sie ist die Schnittgerade der Ebene E mit der Verschwindungsebene, die oben definiert wurde.

³⁵Die Halbgerade $Q'S^-$ ist diejenige vom Punkt Q' aus, die den Punkt S nicht enthält.

Die Spur, der Durchstoßpunkt, der Hauptpunkt und der Distanzkreis

Die Angabe des Fluchtpunktes Q' einer Geraden g bzw. der Fluchtlinie q' einer Ebene E reicht im Allgemeinen nicht aus, um die Raumobjekte g bzw. E eindeutig zu identifizieren, weil alle paarweise parallelen Geraden und parallelen Ebenen den gleichen Fluchtpunkt bzw. die gleiche Fluchtgerade besitzen.

Um Geraden und Ebenen eindeutig durch ihre zentralperspektivischen Bilder beschreiben zu können, führt man zwei Begriffe ein: Als *Durchstoßpunkt* S einer zur Tafel Ebene nicht parallelen Geraden g soll der Schnittpunkt von g mit der Tafel \mathcal{T} verstanden werden. Er ist ein Fixpunkt der zentralperspektivischen Abbildung, d.h. das Bild des Punktes S stimmt mit ihm überein, kurz

$$F(S) = S' = S.$$

Es ist klar, dass jeder Punkt P der Tafel Ebene in diesem Sinne ein Fixpunkt der zentralperspektivischen Abbildung ist. Analog zum Durchstoßpunkt bezeichnet man die Schnittgerade s einer nicht zur Tafel parallelen Ebene E mit der Tafel \mathcal{T} als *Spur der Ebene E* . Damit wird eine Ebene E durch ihre Spur s sowie ihrer Fluchtlinie q' festgelegt. Um dies einzusehen, verschiebt man die Ebene, welche durch das Zentrum C und die Fluchtlinie q' festgelegt ist, parallel, bis sie die Spur beinhaltet. Gleichermaßen ist eine nicht zur Tafel Ebene parallele Gerade eindeutig gegeben durch ihren Fluchtpunkt Q' und ihren Durchstoßpunkt S . Man erhält sie, indem man die Gerade CQ' parallel verschiebt, bis sie durch S verläuft. Trivialerweise gilt der folgende

Satz 3.8. *Sind g eine nicht zur Tafel parallel verlaufende, projizierende Gerade sowie E eine nicht zur Tafel parallel durch das Zentrum verlaufende Ebene. Dann gilt:*

(i) *Der Fluchtpunkt der Gerade g ist ihr Durchstoßpunkt.*

(ii) *Die Fluchtgerade der Ebene E ist ihre Spur.*

Es werden noch zwei weitere Begriffe definiert. Der Durchstoßpunkt der projizierenden Geraden, welche zur Tafel lotrecht verläuft, heißt *Hauptpunkt*, er wird bei Fiedler durch das Symbol C_1 bezeichnet. Die Notation orthogonalprojizierter Punkte auf der Ebene mit einer tiefgestellten Eins wird hier aus Fiedlers *Cyklographie* übernommen.

Als *Distanzkreis* \mathcal{D} bezeichnet man den in der Tafel \mathcal{T} liegenden Kreis

$$\mathcal{D} := \mathcal{K}(C_1, d(C, C_1)) \subset \mathcal{T}$$

mit dem Hauptpunkt C_1 als Mittelpunkt sowie dem Abstand $d(C_1, C)$ des Hauptpunktes vom Augpunkt als Radius. Die Spur einer zur Tafel lotrechten Ebene, die das Zentrum C beinhaltet, verläuft durch C_1 .

Da die Fluchtgerade einer nicht zur Tafel parallelen Ebene E durch ihre Parallelverschiebung in den Augpunkt konstruiert wird, gilt der

Satz 3.9. *Sei E eine nicht zur Tafel parallele Ebene mit der Spur s sowie der Fluchtgeraden q' . Stets gilt*

$$s \parallel q'.$$

Also ist die Gerade s parallel zu q' .

Die bislang definierten Begriffe werden durch den folgenden Satz verbunden:

Satz 3.10. *Liegt eine nicht zur Tafel parallel verlaufende Gerade g in einer die Tafel schneidenden Ebene E , so ist der Durchstoßpunkt S der Geraden g ein Punkt der Spur s von E und der Fluchtpunkt Q' von g liegt auf der Fluchtlinie q' .*

Beweis. Dies folgt sofort, da man die Ebene E mitsamt der in ihr liegenden Geraden g parallel in das Zentrum C verschiebt. \square

Daraus schließt man unmittelbar für zwei Geraden

Satz 3.11. *Liegen zwei die Tafel schneidende Geraden g_1 und g_2 in einer die Tafel schneidenden Ebene E und sind S_1 und S_2 ihre Durchstoßpunkte mit der Tafel sowie Q'_1 und Q'_2 ihre Fluchtpunkte, so folgt*

$$S_1S_2 \parallel Q'_1Q'_2,$$

also die Parallelität der Geraden S_1S_2 und $Q'_1Q'_2$.

Mithilfe der bislang erzielten Sätze ist man in der Lage, den Fußpunkt P_1 des Lotes zur Tafel durch einen Raumpunkt P , wenn seine Projektion P' sowie der Hauptpunkt C_1 bekannt sind, zu bestimmen. Dabei soll P zusätzlich auf einer beliebigen Geraden g liegen, von welcher der Fluchtpunkt Q' und Durchstoßpunkt S bekannt seien. Dieses Problem wird von Fiedler in [Fie82a, S. 8f.] gelöst. Die Konstruktion 3.12 gibt die Lösung des beschriebenen Problems.

Konstruktion 3.12 (Fußpunkt). Alle Konstruktionen werden in der Tafel \mathcal{T} ausgeführt. Man zieht die Gerade $q' := C_1Q'$. Folgend zeichnet man die hierzu parallele Gerade p durch den Durchstoßpunkt S . Der Schnittpunkt der Geraden p mit C_1P' ist der gesuchte Punkt P_1 .

Die Abbildung 3.10 zeigt die beschriebene Konstruktion mit frontalem Blick auf die Tafel.

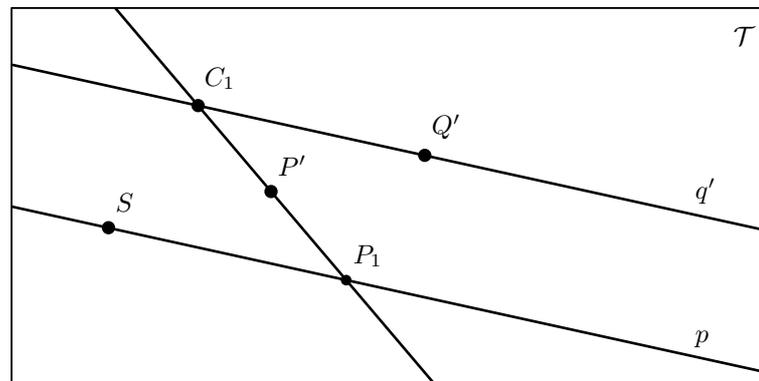


Abbildung 3.10.: Konstruktion des Fußpunktes P_1 des Lotes von einem Punkt P aus den gegebenen Größen C_1, P', Q' und S

Erläuterung zur Konstruktion. Da P ein Punkt der Geraden g ist, muss der Bildpunkt P' ein Punkt ihrer Bildgeraden SQ' sein. Jetzt betrachtet man die Lotgerade l zur Tafel \mathcal{T} durch den Punkt P . Da sie im rechten Winkel auf der Tafel steht, muss ihr Fluchtpunkt der Hauptpunkt C_1 sein. Betrachtet man nun die Gerade C_1Q' , so ist sie nach Satz 3.7 die Fluchtlinie einer Ebene E , welche sowohl die Gerade g als auch die Lotgerade l enthält. Man zieht nun die zur Fluchtlinie C_1Q' parallele Gerade p auf der Tafel durch den Durchstoßpunkt S . Da der Punkt S auf ihr liegt, ist die Parallele p die Spur der Ebene E gemäß Satz 3.9. Weil die zentralperspektivische Bildgerade C_1P' der Geraden l die Spur von E schneidet (da die Gerade l in der Ebene E liegt), ergibt der Schnittpunkt der Geraden C_1P' und der Geraden p den gesuchten Punkt P_1 .

Die Umlegung

Das Konzept der Umlegung³⁶ beruht auf einer Drehung um eine Achse, die in der Tafel Ebene liegt. Sei E eine die Tafel schneidende Ebene sowie s die zugehörige Spur. Will man nun einen Raumpunkt $P \in E$ in der Ebene E um die Achse s umlegen, so dreht man die Ebene mitsamt des Punktes P bis zum Zusammenfallen mit der Tafel Ebene um die Achse s . Zur Kennzeichnung des umgelegten Punktes P nutzt Fiedler eine Klammerschreibweise, hier also (P) . Die Umlegung führt Fiedler bereits in Artikel 2 (s. [Fie82a, S. 3]) im Kontext der Definition der Tafelneigung

³⁶Fiedler bezeichnet die Umlegung geometrischer Objekte in die Tafel Ebene in seiner Dissertation als »Herabschlagen« (vgl. z. B. [Fie60, S. 17])

ein, spezifiziert sie aber erst in Artikel 10 (s. [Fie82a, S. 9]). Des Weiteren definiert er nicht die Drehrichtung. Das Konzept der Umlegung wird notwendig werden, um Argumentationen zur Begründung von Aussagen durchzuführen.

Die Abbildung 3.11 zeigt ein Beispiel der Umlegung des Punktes P wie oben beschrieben, wobei eine projizierende Ebene gewählt wird und der Punkt P' in der Ebene E liegt – damit wird der Bildpunkt P' ein Fixpunkt der Umlegung. Die Drehachse ist die Spur der Ebene E .

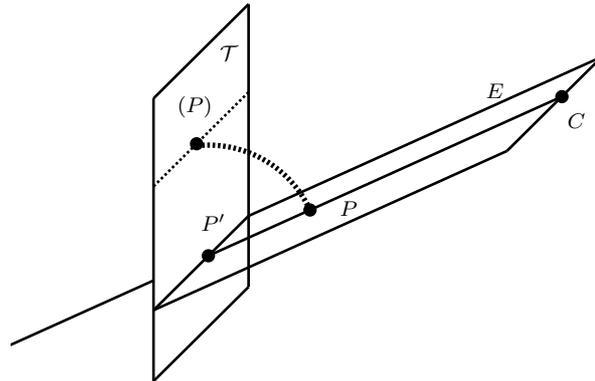


Abbildung 3.11.: Umlegung des Punktes P in der Ebene E in die Tafel \mathcal{T} , Drehrichtung entlang der gestrichelten Linie von P zu (P) hin

Offenbar gilt der folgende

Satz 3.13. Die Spur s einer Ebene E , um welche umgelegt wird, ist eine Fixgerade der Umlegung in die Tafel \mathcal{T} .

Fiedler verwendet für die Umlegung des Zentrums den Frakturbuchstaben \mathfrak{C} .

Die Tafelneigung und der Neigungskreis

Betrachtet man einen beliebigen Punkt P' auf der Tafel sowie den zugehörigen projizierenden Strahl CP' , so wird mit dem Hauptpunkt C_1 ein Winkel

$$\beta := \angle(C_1P'C)$$

mit dem Scheitel P' eingeschlossen. Er lässt sich mit der Formel

$$\beta = \operatorname{arccot} \left(\frac{d(P', C_1)}{d(C, C_1)} \right)$$

berechnen und wird als *Tafelneigung des Strahls CP'* bezeichnet. Die Formel kann mithilfe der zuvor beschriebenen Umlegung nachvollzogen werden: Man wählt die Ebene zur Tafel, welche den Strahl CP' und den Punkt C_1 enthält und misst den Winkel

ihrer Spur s zu dem besagten Strahl. Zur Verdeutlichung betrachte man die Abbildung 3.12, in der die Umlegung der oben beschriebenen Ebene dargestellt ist. Die Strecke $\overline{P'C_1}$ ist die Ankathete und die Strecke $\overline{CC_1}$ die Gegenkathete zum Winkel β . So ergibt sich unmittelbar die oben behauptete Formel. Dass man den Neigungswinkel mithilfe jedes beliebigen Punktes auf der Geraden CP berechnen kann, sieht man so ein: Wählt man nämlich auf dem Strahl CP' einen beliebigen Punkt K und bildet das Lot zur Tafel und findet so K_1 , so gilt aufgrund der Parallelität des gefällten Lotes zu CC_1 mit dem Strahlensatz, dass die Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{d(P', C_1)}{d(C, C_1)} = \frac{d(P', K_1)}{d(K, K_1)}$$

besteht. Das Resultat der Umlegung in der Abbildung 3.12, welche die Argumentation verdeutlicht, beinhaltet auch den Umlegungungspunkt (K) des Punktes K . Die Spurgerade s ist nach Satz 3.13 die Fixgerade der Umlegung ebenso wie die Punkte P' und C_1 Fixpunkte sind. Es ist außerdem noch der Distanzkreis eingezeichnet.

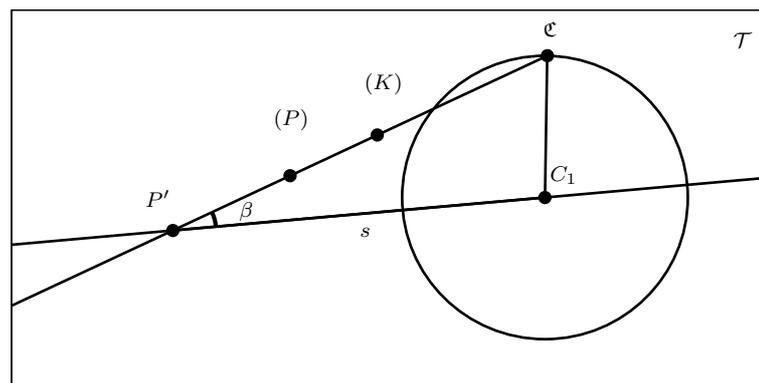


Abbildung 3.12.: Tafelneigung eines projizierenden Strahls

Alle Durchstoßpunkte projizierender Strahlen mit fester Tafelneigung β erzeugen einen Kreis mit dem Mittelpunkt C_1 , man nennt ihn den Neigungskreis zum Winkel β . Die Gesamtheit dieser projizierenden Strahlen erzeugen einen geraden Kreiskegel mit dem Neigungskreis als Grundkreis und C als Spitze. Es gilt der

Satz 3.14. Sei \mathcal{D} der Distanzkreis sowie P' ein beliebiger Punkt von \mathcal{D} . Dann gilt

- (i) Jeder projizierende Strahl CP' schließt mit dem Radius $P'C_1$ im Scheitel P' einen Winkel von 45° ein.
- (ii) Alle Geraden, die die Tafelebene im 45° -Winkel schneiden, haben ihren Fluchtpunkt auf dem Distanzkreis.

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus

$$\cot\left(\frac{d(P', C_1)}{d(C, C_1)}\right) = \cot(1) = 45^\circ,$$

da $d(P', C_1) = d(C, C_1)$ aufgrund der Definition des Distanzkreises gilt. Die zweite Aussage erhält man, indem man die betreffenden Geraden in das Zentrum parallel verschiebt. \square

3.2.2. Die Invarianz des Doppelverhältnisses der zentralperspektivischen Abbildung

Im Folgenden wird ein fundamentaler Satz der zentralperspektivischen Abbildung diskutiert. Es zeigt sich, dass ein Punkt C , der auf einer Strecke \overline{AB} im Raum liegt, welcher zentralperspektivisch auf das Bild C' der projizierten Strecke $\overline{A'B'}$ abgebildet wird, im Allgemeinen nicht das gleiche Teilverhältnis besitzt. Also

$$\mathfrak{T}(A, B, C) \neq \mathfrak{T}(A', B', C').$$

Es stellt sich aber heraus, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten gemäß der Definition aus Abschnitt 3.1.1 erhalten bleibt (s. [Fie82a, S. 3ff.] oder [KM61, S. 6]).

Das sieht man leicht wie folgt ein: Seien a, b, c und d vier Strahlen in einer Ebene mit dem gemeinsamen Zentrum Z . Zieht man nun eine Gerade g , welche die Strahlen a, b, c und d in den Punkten A, B, C und D schneidet, so kann man ihr Doppelverhältnis $\mathfrak{D}(A, B; C, D)$ sowie das Doppelverhältnis $\mathfrak{D}(a, b; c, d)$ angeben. Betrachtet man nun das Dreieck mit der Grundseite \overline{AB} und der Höhe von B auf ZA mit der Länge $d(\overline{ZA}, B)$ so folgt für dessen doppelten Flächeninhalt

$$\begin{aligned} 2A_{ABZ} &= d(Z, A) \cdot d(\overline{ZA}, B) \\ &= d(Z, A) \cdot d(Z, B) \cdot \sin(\sphericalangle(a, b)). \end{aligned}$$

Den beschriebenen Sachverhalt verdeutlicht die Abbildung 3.13.

Analoge Überlegungen liefern die vier weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned} 2A_{ACZ} &= d(Z, A) \cdot d(Z, C) \cdot \sin(\sphericalangle(a, c)), \\ 2A_{BCZ} &= d(Z, B) \cdot d(Z, C) \cdot \sin(\sphericalangle(b, c)), \\ 2A_{ADZ} &= d(Z, A) \cdot d(Z, D) \cdot \sin(\sphericalangle(a, d)), \\ 2A_{BDZ} &= d(Z, B) \cdot d(Z, D) \cdot \sin(\sphericalangle(b, d)). \end{aligned}$$

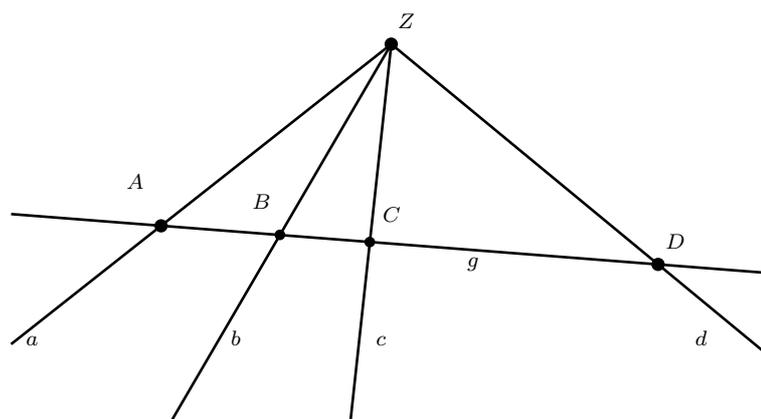


Abbildung 3.13.: Doppelverhältnis von Strahlen und Punkten

Man erhält daraus das folgende Verhältnis

$$\frac{2A_{ACZ} : 2A_{BCZ}}{2A_{ADZ} : 2A_{BDZ}} = \frac{\sin(\angle(a, c)) : \sin(\angle(b, c))}{\sin(\angle(a, d)) : \sin(\angle(b, d))} = \mathfrak{D}(a, b; c, d).$$

Berechnet man die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke mithilfe der Höhe $d(Z, g)$ (s. ebenfalls Abbildung 3.13), so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2A_{ACZ} &= d(A, C) \cdot d(Z, g), \\ 2A_{BCZ} &= d(B, C) \cdot d(Z, g), \\ 2A_{ADZ} &= d(A, D) \cdot d(Z, g), \\ 2A_{BDZ} &= d(B, D) \cdot d(Z, g). \end{aligned}$$

Das liefert insgesamt³⁷

$$\frac{2A_{ACZ} : 2A_{BCZ}}{2A_{ADZ} : 2A_{BDZ}} = \frac{d(A, C) : d(B, C)}{d(A, D) : d(B, D)} = \mathfrak{D}(A, B; C, D).$$

Die Verhältnisse der doppelten Flächeninhalte der obigen Dreiecke zeigen, dass für

³⁷Bei Pappos wird das in der Gleichung ausgedrückte Verhältnis als Verhältnis von Rechtecksinhalten angegeben. Dieses erhält man, indem man die Doppelbrüche entfernt, sodass sich das Verhältnis

$$\frac{d(A, C) \cdot d(B, D)}{d(B, C) \cdot d(A, D)}$$

ergibt.

jede **beliebige** Gerade, die die Strahlen aus Z schneidet, die Gleichung

$$\mathfrak{D}(A, B; C, D) = \mathfrak{D}(a, b; c, d).$$

erfüllt ist. Überträgt man diese Erkenntnis auf einen räumlichen Sachverhalt, so lässt sich folgender Hauptsatz formulieren.

Hauptsatz 3.15 (Invarianz des Doppelverhältnisses bei einer Zentralprojektion).
Wird eine Gerade g , auf der die Punkte A, B, C sowie D mit dem Doppelverhältnis $\mathfrak{D}(A, B; C, D)$ liegen, durch Zentralprojektion auf die Gerade g' abgebildet, so gilt folgende Gleichheit

$$\mathfrak{D}(A, B; C, D) = \mathfrak{D}(A', B'; C', D')$$

für das Doppelverhältnis der projizierten Punkte A', B', C' und D' .

Es sei bemerkt, dass diese hier modern formulierte Aussage auf Pappos und Gérard Desargues (1591-1661) zurückgeht. Bildet man demnach Punkte A, B, C und D durch Zentralprojektion mit dem Augpunkt Z auf eine Ebene ab, so bleibt das Doppelverhältnis der projizierten Punkte erhalten. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als *Invarianz des Doppelverhältnisses unter Zentralprojektion*.

Man kann sich vorstellen, dass man nacheinander mehrere Zentralprojektionen vierer Punkte mit dem gleichen Zentrum ausführt. Man projiziert also den Punkt A auf den Punkt A' , diesen wiederum auf A'' und so weiter. Geschieht dies mit vier kollinearen Punkten A, B, C und D , so bleibt in jeder Projektion mit dem vorherigen Ergebnis das Doppelverhältnis erhalten. Fiedler teilt in diesem Kontext mit, dass

[...] je zwei aufeinanderfolgende [Projektionen] unter ihnen in perspektivischer Lage sind. [Fie82a, S. 6]

Dabei bedeutet es für zwei Punkte A und A' bzw. A' und A'' usw. in *perspektivischer Lage* zu sein, dass die nacheinander erhaltenen Bildpunkte von einem Zentrum zentralperspektivisch abgebildet werden.

3.2.3. Die Konstruktion einer harmonischen Gruppe

Die in Kapitel 2 diskutierten Motivationen, die die Untersuchung perspektivischer Abbildungen im Rahmen der Darstellenden Geometrie motivierten, zeigten, dass sie vor allem in der Kunst sowie dem Bauwesen dienlich waren. Jedoch lassen sich

auch geometrische Probleme – also »innermathematische« Fragestellungen – der Ebene räumlich unter Verwendung der zentralperspektivischen Abbildung lösen. Ein eindrückliches Beispiel dafür liefert Fiedler in [Fie82a, S. 7].

Im Abschnitt 3.1.2 wurde die harmonische Teilung eingeführt und gezeigt, wie sich mithilfe der Konstruktionen von Ähnlichkeitszentren von Kreisen eine harmonische Gruppe bestimmen lässt. Nun sei die folgende Problemstellung gemäß [Fie82a, S. 7] gegeben: Es seien drei Punkte A', B', Q' auf einer Geraden gegeben und es soll der vierte Punkt C' konstruiert werden³⁸, sodass die vier Punkte eine harmonische Gruppe bilden. Die in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Grundlagen zur Zentralprojektion eröffnen eine Möglichkeit, durch Transformation der Aufgabenstellung von einem ebenen in ein räumliches Problem eine Lösung zu finden. Man kann die Aussage des Hauptsatzes 3.15, den Zusammenhang einer harmonischen Gruppe, wovon ein Punkt ein Fernpunkt ist, sowie die Tatsache, dass der Diagonalschnittpunkt in einem Parallelogramm die Diagonalen halbiert, nutzen, um die gestellte Aufgabe zu lösen. Zunächst die Konstruktion:

Konstruktion 3.16. Man zieht eine beliebige Gerade q' durch den Punkt Q' , welche nicht durch A' und B' verläuft. Jetzt wählt man zwei verschiedene Punkt Q'_1 und Q'_2 auf q' . Sie sollen von Q' verschieden sein. Nun zieht man die Geraden

$$\begin{aligned} p'_1 &:= Q'_1 A', \\ p'_2 &:= Q'_1 B', \\ p'_3 &:= Q'_2 A', \\ p'_4 &:= Q'_2 B'. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Geraden p'_1 mit p'_4 liefert den Punkt S'_2 und der Schnittpunkt von p'_2 und p'_3 liefert den Punkt S'_1 . Der gesuchte Punkt C' ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Geraden $S'_1 S'_2$ mit AQ' .

Das Resultat der Konstruktion 3.16 ist in der Abbildung 3.14 dargestellt.

Erläuterung zur Konstruktion. Da die Punkte A', B' und Q' nach Voraussetzung auf einer Geraden liegen, kann man sich den Punkt Q' als den Fluchtpunkt einer Geraden vorstellen, welche im Raum betrachtet durch zwei Punkte A und B verläuft. Da die Gerade q' den Punkt Q' enthält, kann man sie als Fluchtlinie einer Ebene E auffassen, welche die Gerade AB enthält (alle Geraden in E haben ihren Fluchtpunkt auf q' , s. Satz 3.7). Im Raum interpretiert man die Gerade AB jetzt als Diagonale

³⁸Hier sind die Punkte apostrophiert, da sie für die Erläuterung der anschließenden Konstruktion als zentralperspektivische Bilder von Raumpunkten verstanden werden sollen.

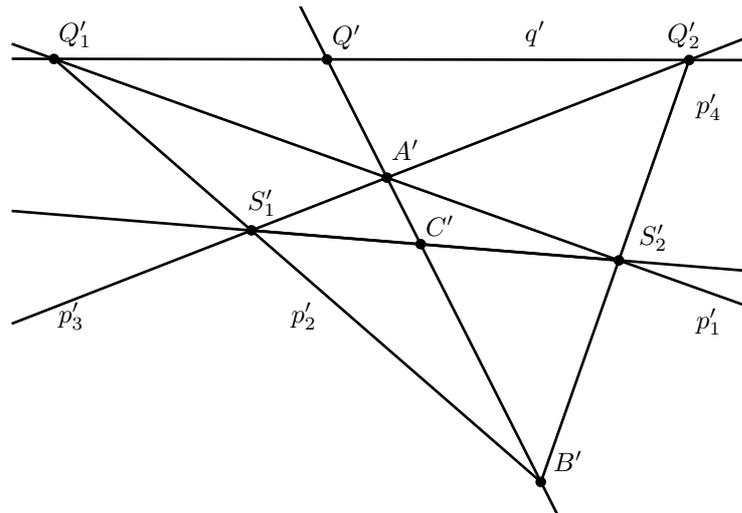


Abbildung 3.14.: Konstruktion einer harmonischen Gruppe mittels Zentralprojektion

in einem Parallelogramm. Die auf der Geraden q' beliebig von Q' verschiedenen gewählten Punkte Q'_1 und Q'_2 sollen ebenfalls Fluchtpunkte darstellen. Alle Geraden, die durch Q'_1 verlaufen, sind im Raum parallele Geraden. Da p'_1 und p'_2 denselben Fluchtpunkt haben sowie jeweils durch A' und B' verlaufen, sind die Geraden p_1 und p_2 im Raum als Parallelen durch A und B aufzufassen. Ebenso sind die Geraden p_3 und p_4 parallel und verlaufen durch die Punkte A und B . Die Schnittpunkte S'_1 und S'_2 der Geraden p'_2 und p'_3 sowie p'_1 und p'_4 bilden im Raum die Eckpunkte S_1 und S_2 des Parallelogramms AS_1BS_2 . Schneidet man also $S'_1S'_2$ mit $A'B'$, so erhält man den gesuchten Punkt C' . Denn der Raumpunkt C ist als Diagonalschnittpunkt von AB und S_1S_2 aufzufassen, welcher die jeweiligen Diagonalen halbiert. Damit folgt nach Satz 3.3 sowie Hauptsatz 3.15 (Invarianz des Doppelverhältnisses), dass C' als Bild des Mittelpunktes C von A und B der gesuchte Punkt C' sein muss.

Es gibt weitere eindruckliche Beispiele, die zeigen, wie sich ebene Sätze beweisen lassen, indem man sie in ein räumliches Problem transformiert. So ist beispielsweise der Satz von Desargues zu nennen, der besagt, dass sich für zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Geraden AA' , BB' und CC' genau dann in einem Punkt treffen, wenn die Schnittpunkte der Geraden $AB, A'B'$ und BC, BC' sowie AC und $A'C'$ auf einer Geraden liegen. Hier nutzt man die Zentralprojektion, um sich von der Korrektheit dieser Aussage zu überzeugen (s. z. B. [Wol55, S. 151f.]

4. Die zyklografische Abbildungsmethode

In Kapitel 3 wurden die Grundlagen der zentralperspektivischen Abbildung gemäß der Artikel 1 bis 12 von [Fie82a, S. 2-12] aufgearbeitet und dargestellt. Der Abschnitt

I. Die Bildkreise der Punkte, ihre linearen Reihen und planaren Systeme.

von Fiedlers *Cyklographie* führt die zyklografische Abbildung ein, zudem werden zentrale Eigenschaften des Abbildungsverfahrens herausgearbeitet. In diesem Kontext werden Begriffe definiert und elementare Konstruktionsaufgaben gelöst. Es kommt die Frage auf, inwiefern sich geometrische Aufgaben allein unter Verwendung des Lineals lösen lassen – also ohne Zuhilfenahme des Zirkels (man beachte den Satz von Poncelet und Steiner). Dazu muss lediglich ein Kreis vorgegeben sein, jeder weitere Punkt, der sich mit Zirkel und Lineal bestimmen lässt, kann dann unter Verwendung des Lineals konstruiert werden (s. Abschnitt 4.4). Dies wird aber an der betreffenden Stelle nicht weiter vertieft, nur ein Beispiel einer für den Beweis notwendigen Konstruktion gegeben.

In diesem Abschnitt sollen diese Grundlagen diskutiert sowie einige Konstruktionsaufgaben gelöst werden.

4.1. Das zyklografische Abbildungsverfahren

Fiedler führt in [Fie82a, S. 12] das zyklografische Abbildungsverfahren ein. Sei dazu im dreidimensionalen Anschauungsraum eine Ebene \mathcal{T} , wie gehabt Tafel genannt, und ein Punkt $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{T}$ des Raumes gegeben, welcher nicht auf der Tafel \mathcal{T} liegt. Er wird wie folgt auf die Tafel \mathcal{T} abgebildet: Man fällt das Lot zur Tafel \mathcal{T} durch den Punkt P . Dessen Fußpunkt sei mit P_1 bezeichnet. Den Kreis $\mathcal{K}(P_1, d(P_1, P)) \subset \mathcal{T}$ um P_1 mit dem Radius $d(P_1, P)$, welcher in der Tafel \mathcal{T} liegt, bezeichnet man als den *Bildkreis von P* . Lässt man zusätzlich Punkte P in der Tafelebene zu, so sind diese Fixpunkte der zyklografischen Abbildung. Dem Punkt P wird somit ein Bildkreis

oder ein Punkt in der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ der Tafel(-menge) zugeordnet. Es ist anzumerken, dass die zyklusografische Abbildung Z gemäß

$$Z: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$$

$$P \longmapsto \begin{cases} \mathcal{K}(P_1, d(P_1, P)), & \text{wenn } P \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{T} \\ \{P\}, & \text{wenn } P \in \mathcal{T} \end{cases}$$

eine Zuordnung ist, welche **nicht** injektiv ist. Das bedeutet, zu einem Bildkreis mit einem Radius $r > 0$ gibt es zwei Urbildpunkte. Dies sieht man so ein: Man legt eine Kugel mit dem Radius $d(P_1, P)$ um P_1 , zeichnet die Lotgerade zur Tafel durch den Punkt P_1 und erhält die Schnittpunkte P^* und P mit der Kugel. Beides sind Urbilder des Bildkreises $Z(P)$, sodass also für $Z(P) = Z(P^*)$ nicht die Gleichheit $P = P^*$ folgt.

Um Injektivität zu erreichen, also einem gegebenen Bildkreis $Z(P)$ ein eindeutiges Urbild zuordnen zu können, führt Fiedler einen Drehsinn für den Bildkreis ein. Damit könnte man die obige Definition wie folgt anpassen:

$$Z_o: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \{(\mathcal{K}(\mathcal{T}), o) : o \in \{+, -, 0\}\}$$

$$P \longmapsto \begin{cases} \mathcal{Z}(P_1, d(P_1, P), +), & \text{wenn } P \in R^+ \\ \mathcal{Z}(P_1, d(P_1, P), -), & \text{wenn } P \in R^- \\ (\{P\}, 0), & \text{wenn } P \in \mathcal{T}. \end{cases}$$

Hierbei sei

$$\mathcal{Z}(Q, d, o) := (\mathcal{K}(Q, d), o) \subset \mathcal{T} \times \{+, -\}$$

ein orientierter Kreis³⁹ mit der Orientierung $o = +$ oder $o = -$. Die Menge $R^+ \subset \mathbb{R}^3$ beschreibt den Halbraum des \mathbb{R}^3 getrennt durch die Tafel, in dem das Zentrum C liegt. Weiter ist $R^- := \mathbb{R}^3 \setminus H^+$.

In vielen Fällen wird die zuerst definierte Abbildung Z ohne Orientierung ausreichend sein. Es sei außerdem erwähnt, dass obige abstrakte Definitionen nicht bei Fiedler verwendet werden. Insbesondere wird man sehen, dass für die Lösung des Apollonischen Berührproblems (s. Kapitel 7) die zuerst definierte Abbildung genügt.

Die Abbildung 4.1 zeigt die zyklusografische Abbildung $Z(P)$ eines Punktes P bzw. P^* .

³⁹In Müllers Zyklusografie [Mül29] werden orientierte Kreise zur Unterscheidung nicht orientierter Kreise *Zykel* genannt.

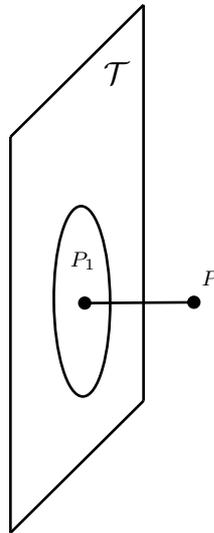


Abbildung 4.1.: Zyklografische Abbildung des Punktes P

Es sei hervorgehoben, dass sich die Werke zur Zyklografie von Müller und Fiedler in diesem Aspekt deutlich unterscheiden: Fiedler definiert viele Begriffe ohne Berücksichtigung der Orientierung des Bildkreises, wohingegen Müller bei der Aufarbeitung der Theorie stets die Orientierung berücksichtigt. Dies zeigt sich beispielsweise in der Unterscheidung der Begriffe *Berührung zweier Kreise*. Bei Müller berühren sich Zykkel *eigentlich*, wenn sie im Berührungspunkt die gleiche Orientierung haben, sonst uneigentlich. Diese Begrifflichkeit wird bei Fiedler nicht benutzt.

Man erkennt, dass der Distanzkreis \mathcal{D} das Bild des Augpunktes C unter der zyklografischen Abbildung ist, kurz

$$Z(C) = \mathcal{D}.$$

Wie oben bereits bemerkt, bildet sich ein Punkt P , der in der Tafel liegt, zyklografisch auf sich selbst ab, man könnte auch sagen, dass der zyklografische Bildkreis ein Kreis vom Radius Null ist.

4.2. Die zycklografische Abbildung in Verbindung mit Kreiskegeln

Die Bildkreise von Raumpunkten und ihre Kegel

Die zycklografische Abbildung und Kreiskegel stehen wie folgt im Zusammenhang: Man betrachte einen beliebigen Raumpunkt $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{T}$ sowie sein zycklografisches Bild $Z(P)$. Zieht man nun für alle Punkte B , die auf dem Bildkreis $Z(P)$ liegen, die Geraden PB , so bilden sie die Mantellinien eines geraden Doppelkreiskegels mit der Spitze P . Seine Grundfläche ist durch die Kreisperipherie $Z(P)$, seine Achse durch die Gerade PP_1 gegeben. Es gilt mit obigen Bezeichnungen der folgende

Satz 4.1. *Die Geraden PB schneiden die Tafel ebene \mathcal{T} in einem Winkel von 45° .*

Beweis. Folgende Rechnung

$$\cot\left(\frac{d(B, P_1)}{d(P_1, P)}\right) = \cot(1) = 45^\circ$$

verifiziert die Behauptung, da $d(B, P_1) = d(P_1, P)$ ist. \square

Man erkennt, dass die Fluchtpunkte aller Geraden PB nach Satz 3.14(ii) auf dem Distanzkreis liegen. Der zu einem Punkt P gehörige Kreiskegel unter der zycklografischen Abbildung $Z(P)$ soll mit $\mathfrak{K}(P)$ bezeichnet werden und wird *zycklografischer Kegel* genannt.⁴⁰

Die Berührungskreise zu einem Kreis

Angenommen, es sei P ein Raumpunkt, welcher nicht in der Tafel \mathcal{T} liegt, und $Z(P)$ sein Bildkreis in \mathcal{T} . Es soll die Frage diskutiert werden, wie Punkte Q im Raum zu wählen sind, sodass ihre zycklografischen Bilder den Kreis $Z(P)$ berühren, also

$$Z(P) \cap Z(Q) = \{T\}$$

gilt, wobei $T \in \mathcal{T}$ der Berührungspunkt sein soll. Zwei Kreise können sich auf zweierlei Weisen berühren: Es soll im Folgenden unterschieden werden zwischen

1. Berührung von innen:

Die Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ berühren sich von innen, wenn sie beide auf der

⁴⁰Die Bezeichnungen Z und \mathfrak{K} für zycklografische Bildkreise und gerade Kreiskegel, die durch die zycklografische Abbildung definiert werden, benutzt Fiedler nicht. Ebenso taucht der Begriff des »zycklografischen (Doppelkreis-)Kegels« bei Fiedler nicht auf.

gleichen Seite der gemeinsamen Tangente der beiden Kreise im Punkt T in der Tafel \mathcal{T} liegen.

2. Berührung von außen:

Die Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ berühren sich von außen, wenn sie auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente der beiden Kreise im Punkt T in der Tafel \mathcal{T} liegen.

Zunächst wird der erste Fall behandelt, also die Berührung von innen untersucht. Es gilt

Satz 4.2. *Sei P ein Raumpunkt, der nicht in der Tafel Ebene liegt, $\mathfrak{K}(P)$ sein Kegel bei zyklografischer Abbildung, T ein beliebiger Punkt auf dem Kreis $Z(P)$, dann ist $m = \overline{TP}$ eine Mantellinie von $\mathfrak{K}(P)$. Wählt man nun einen beliebigen von P verschiedenen Punkt Q auf m , so berühren sich die Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ im Punkt T und liegen auf der gleichen Seite der gemeinsamen Tangente im Punkt T . Sie berühren sich also von innen.*

Beweis. Um dies einzusehen, betrachtet man die Umlegung um die Spur $s = P_1T$ der Ebene E , welche durch die Geraden PP_1 und PT bestimmt ist. Dabei beschreibt P_1 die orthogonale Projektion des Punktes P auf der Tafel. Diese Gerade s ist nach Satz 3.13 eine Fixgerade der Umlegung. Da Q auf der Mantellinie m liegt, liegt die Umlegung (Q) von Q auf der Geraden $T(P)$. Da weiter Q_1 der Fußpunkt des Lotes zur Tafel durch den Punkt Q auf der Tafel und die Ebene E eine Lotebene ist, liegt der Punkt Q_1 auf der Spur s . Es ergibt sich damit die in der Abbildung 4.2 dargestellte Strahlensatzfigur.

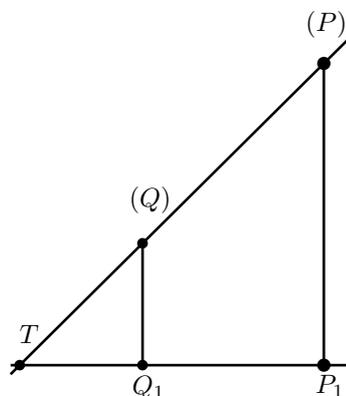


Abbildung 4.2.: Hilfsskizze zum Beweis von Satz 4.2

Darin gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{d(T, Q_1)}{d((Q), Q_1)} = \frac{d(T, P_1)}{d((P), P_1)}$$

und da $d(T, P_1) = d((P), P_1)$ gilt, folgt

$$d(T, Q_1) = d((Q), Q_1) \iff d(T, Q_1) = d(Q, Q_1)$$

und damit die Behauptung. □

Nun erfolgt die Behandlung des zweiten Falls. Es gilt die folgende Aussage:

Satz 4.3. *Sei P ein Raumpunkt, der nicht in der Tafelebene liegt, $\mathfrak{K}(P)$ sein Kegel bei zyklografischer Abbildung, T ein beliebiger Punkt auf dem Kreis $Z(P)$, dann ist $m_1 = \overline{TP}$ eine Mantellinie von $\mathfrak{K}(P)$. Sei nun m die Verlängerung der Mantellinie m_1 auf der Seite der Tafel, auf der P nicht liegt. Wählt man nun einen beliebigen Punkt Q auf der Mantellinie m , so berühren sich die Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ im Punkt T und liegen auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente. Sie berühren sich also von außen.*

Beweis. Das lässt sich analog durch Umlegung wie Satz 4.2 einsehen. Das Bild der Umlegung sieht man in Abbildung 4.3. Die gleiche Betrachtung mithilfe des Strahlensatzes wie im Beweis von Satz 4.2 liefert ebenfalls

$$d(T, Q_1) = d((Q), Q_1) = d(Q, Q_1),$$

woraus wieder die Gültigkeit des behaupteten Satzes folgt.

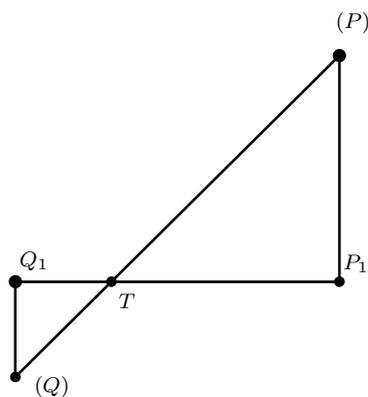


Abbildung 4.3.: Hilfsskizze zum Beweis von Satz 4.3

□

Abschließend wird der Fall eines zyklografischen Doppelkegels betrachtet. Man erhält ihn, indem man den in Satz 4.3 beschriebenen Kegel als Doppelkegel mit der Spitze P auffasst. Man hat die folgende Aussage

Satz 4.4. *Sei P ein Raumpunkt, $\mathfrak{K}(P)$ sein zyklografischer Doppelkegel. Weiter sei T ein beliebiger Punkt auf dem Kreis $Z(P)$. Dann ist $m = TP$ eine beliebige Mantellinie des Doppelkegels $\mathfrak{K}(P)$. Wählt man einen beliebigen Punkt Q auf der Mantellinie m in der Mantelfläche der Kegelhälfte, die die Tafel nicht schneidet, so berühren sich die Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ im Punkt T auf der gleichen Seite der gemeinsamen Tangente.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem des Satzes 4.2. Es sind hierbei die Punkte (Q) und (P) sowie Q_1 und P_1 jeweils zu vertauschen. □

Die Ergebnisse der Sätze über die Kreise der Punkte eines zyklografischen Doppelkegels werden im folgenden Korollar zusammengefasst:

Korollar 4.5. *Sei P ein Raumpunkt, welcher nicht auf der Tafelebene liegt, $Z(P)$ sein zyklografischer Bildkreis und $\mathfrak{K}(P)$ sein zyklografischer Doppelkegel. Weiter sei T ein beliebiger Punkt, der auf dem Kreis $Z(P)$ liegt und $m = TP$ die Mantellinie des Doppelkegels $\mathfrak{K}(P)$, welche durch die Punkte T und P verläuft. Jeder zyklografische Bildkreis $Z(Q)$ eines beliebigen Punktes Q auf der Mantellinie berührt den Kreis $Z(P)$ im Punkt T .*

Der Bildkreis und der Distanzkreis

Nun wird diskutiert, in welcher Abhängigkeit Bildkreise zyklografischer Abbildungen mit dem Distanzkreis stehen (vgl. [Fie82a, S.18f.]).

Dazu sei P ein beliebiger Raumpunkt, der einen anderen Abstand zur Tafel wie der Augpunkt hat, P^* der an der Tafel gespiegelte Punkt P und \mathcal{D} der Distanzkreis. Offenbar sind dann die (nicht-orientierten) zyklografischen Bilder $Z(P) = Z(P^*)$ gleich, da durch die Spiegelung die Abstände beider Punkte P und P^* zur Tafel gleich sind und P_1 ihr gemeinsamer Lotfußpunkt auf der Tafel ist (s. Abschnitt 4.1). Des Weiteren seien $F(P) = P'$ sowie $F(P^*) = P^{*'}$ die Bilder einer Zentralprojektion mit dem Augpunkt in dem Halbraum bezüglich der Tafel, in dem der Punkt P liegt. Es gilt der folgende

Satz 4.6. *Die Punkte P' und $P^{*'}$ liegen auf der Zentrale P_1C_1 der Kreise $Z(P)$ und \mathcal{D} , sie bilden die Ähnlichkeitszentren der Kreise $Z(P)$ und \mathcal{D} . Insbesondere bilden die Punkte $P', P^{*'}, C_1$ sowie P_1 eine harmonische Gruppe.*

Beweis. Dieser Zusammenhang lässt sich mithilfe des Konzeptes der Umlegung leicht einsehen. Man legt um die Gerade P_1C_1 um und erhält die Situation aus Abbildung 4.4. Da die Strecken $\overline{(C)C_1}$ und $\overline{(P)P_1}$ sowie $\overline{(C)C_1}$ und $\overline{(P^*)P_1}$ parallele Radien in den Kreisen $Z(P)$ und \mathcal{D} sind, liefert die Erläuterung zur Konstruktion 3.4 den Nachweis von Satz 4.6. Weiter folgt mit Satz 3.5 die Behauptung über die harmonische Teilung. \square

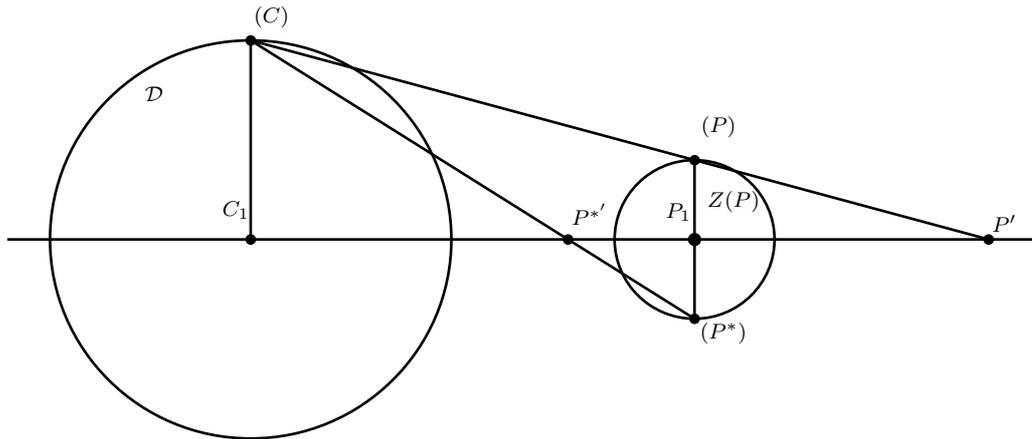


Abbildung 4.4.: Umlegung für den Beweis von Satz 4.6

Die oben angestellten Überlegungen lassen sich unmittelbar von der beschriebenen Situation eines gegebenen Kreises und Distanzkreises auf zwei beliebige Kreise verallgemeinern. Dazu die folgende Aussage von

Korollar 4.7. *Seien Q und Q^* sowie P und P^* , wobei P und Q auf der gleichen Seite der Tafel liegen, zwei Raumpunkte mit*

$$Z(P) = Z(P^*) \quad \text{und} \quad Z(Q) = Z(Q^*),$$

wobei die Radien von $Z(P)$ und $Z(Q)$ verschieden sein sollen. Es sind also P^* und Q^* die Spiegelpunkte von P und Q bezüglich der Tafel. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Geraden PQ und PQ^* mit der Tafelebene bilden die Ähnlichkeitszentren von $Z(P)$ und $Z(Q)$. Die Punkte P_1, S_1, Q_1, S_2 bilden eine harmonische Gruppe.

Beweis. Diese Aussage lässt sich auf die gleiche Weise wie die von Satz 4.6 einsehen, indem man den Distanzkreis durch den Kreis $Z(Q)$ ersetzt und um die Gerade P_1Q_1 umlegt. \square

Man kann also mithilfe der Zentralprojektion und zyklografischen Abbildung harmonische Gruppen angeben. Dieser Sachverhalt wird im folgenden Abschnitt zum Beweis eines wichtigen Satzes der Darstellenden Geometrie genutzt.

4.3. Der Satz von Monge

4.3.1. Anmerkungen

Monge war eine der prägendsten Persönlichkeiten in der Entwicklung der französischen Darstellenden Geometrie. Er war Lehrer an der Militärschule in Mézières und später Mitgründer der *Polytechnischen Hochschule* in Paris im Jahre 1794, an der er als Professor tätig wurde. Zu bemerken ist, dass er nicht nur Beiträge zur Mathematik lieferte, sondern auch als Professor für Physik aktiv war (vgl. [Wie84, S. 27f.]).

Insbesondere behandelte und bewies er in seinem Werk *Géométrie descriptive* aus dem Jahre 1798 einen geometrischen Zusammenhang die Ähnlichkeitszentren von drei Kreisen betreffend (vgl. [Aum15, S. 28]). Darauf wird im Abschnitt 4.3.2 eingegangen.

4.3.2. Der Satz von Monge und sein Beweis mithilfe der Zyklografie

An dieser Stelle soll unter Verwendung von Satz 4.6 der Satz von Monge gezeigt werden. So sieht man, wie ein ebenes Problem mithilfe der zyklografischen Abbildungsmethode gelöst werden kann. Fiedler behandelt diesen Satz in seiner *Cyklographie* erst im Artikel 47 (s. [Fie82a, S. 42ff.]) im Kontext der Untersuchung zyklografischer Bilder von Ebenen und Geraden. Da jedoch die Aussage mit den bereits hier beschriebenen Mitteln einsehbar ist, wird sie an dieser Stelle thematisiert.

Die Aussage des Satzes

Der Satz umfasst eine zweiteilige Aussage, wovon hier nur die erste diskutiert wird. Zunächst sei die Aussage in Form eines Satzes formuliert:

Satz 4.8 (Satz von Monge). *Gegeben seien drei Kreise $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ und \mathcal{K}_3 mit paarweise unterschiedlichen Radien und Mittelpunkten. Dann existieren ihre äußeren Ähnlichkeitszentren P_{12}, P_{13} und P_{23} . Die Punkte P_{12}, P_{13} und P_{23} liegen auf einer Geraden.*

Die Abbildung 4.5 stellt den in Satz 4.8 beschriebenen Sachverhalt grafisch dar. Mithilfe der grauen Strecken werden gemäß Konstruktion 3.4 die Ähnlichkeitszentren bestimmt. Es ist erkennbar, dass diese auf einer Geraden liegen (gestrichelte Linie).

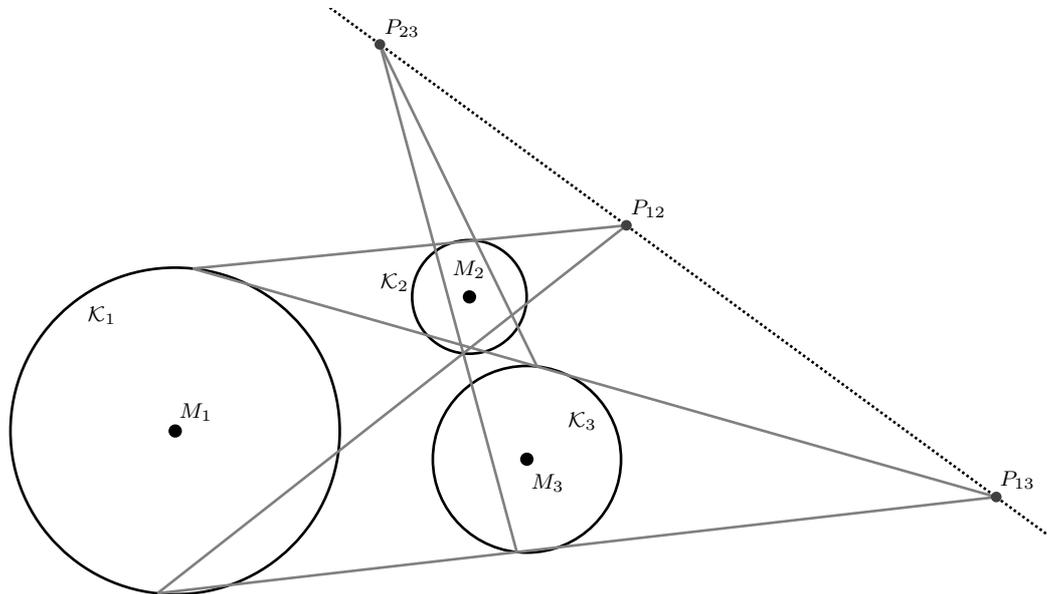


Abbildung 4.5.: Der Satz von Monge

Der zweite Teil der Aussage des Satzes von Monge erklärt, dass eine Gerade durch zwei innere Ähnlichkeitszentren je durch ein äußeres Ähnlichkeitszentrum der gegebenen Kreise verläuft. Dieser Teil der Aussage mit einer Erweiterung auf das Konzept der Harmonikalen wird im Abschnitt 4.7 in dieser Arbeit erörtert.

Beweis von Satz 4.8. Der Beweis geschieht unter Verwendung der zyklografischen Abbildungsmethode. Dazu interpretiert man die Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 als Bildkreise zweier Raumpunkte Q_1 , Q_2 und des Augpunktes C , wobei alle drei Punkte auf derselben Seite der Tafel liegen sollen:

$$Z(Q_1) = \mathcal{K}_1, \quad Z(Q_2) = \mathcal{K}_2 \quad \text{und} \quad Z(C) = \mathcal{K}_3 = \mathcal{D}.$$

Im Sinne der zyklografischen Abbildung sind die Raumpunkte Q_1 , Q_2 und C die Spitzen der geraden Kreiskegel $\mathfrak{K}(Q_1)$, $\mathfrak{K}(Q_2)$ und $\mathfrak{K}(C)$ mit den Grundkreisen \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{D} . Zieht man die Geraden

$$g_{12} := Q_1Q_2, \quad g_{C1} := Q_1C \quad \text{und} \quad g_{C2} := Q_2C,$$

so lässt sich eine Ebene E durch g_{12} und g_{C1} aufspannen. Da die Punkte Q_2 und C

nach Konstruktion ebenfalls auf je einer diesen beiden Geraden liegen, folgt, dass die Gerade g_{C_2} ebenfalls in der Ebene E liegt. Da die Radien der Kreise $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ und \mathcal{K}_3 paarweise verschieden sein sollen, ist die Ebene E nicht parallel zur Tafel Ebene, sodass der Schnitt mit jener die Spurgerade s liefert. Unter Anwendung von Satz 4.6 schließt man, dass die Schnittpunkte P_{13} und P_{23} der Geraden g_{C_1} und g_{C_2} mit der Tafel die äußeren Ähnlichkeitszentren der betrachteten Kreise darstellen, diese liegen nach Satz 3.10 beide auf der Spur s . Weiter gilt wegen Korollar 4.7, dass auch der Schnittpunkt P_{12} der Gerade g_{12} mit der Tafel Ebene auf der Spur der Ebene E liegt und ein Ähnlichkeitszentrum der Kreise $Z(Q_1)$ und $Z(Q_2)$ ist. Insgesamt folgt der Satz von Monge. \square

Die Abbildung 4.6 visualisiert den Beweis und zeigt die im Beweis beschriebene räumliche Situation.

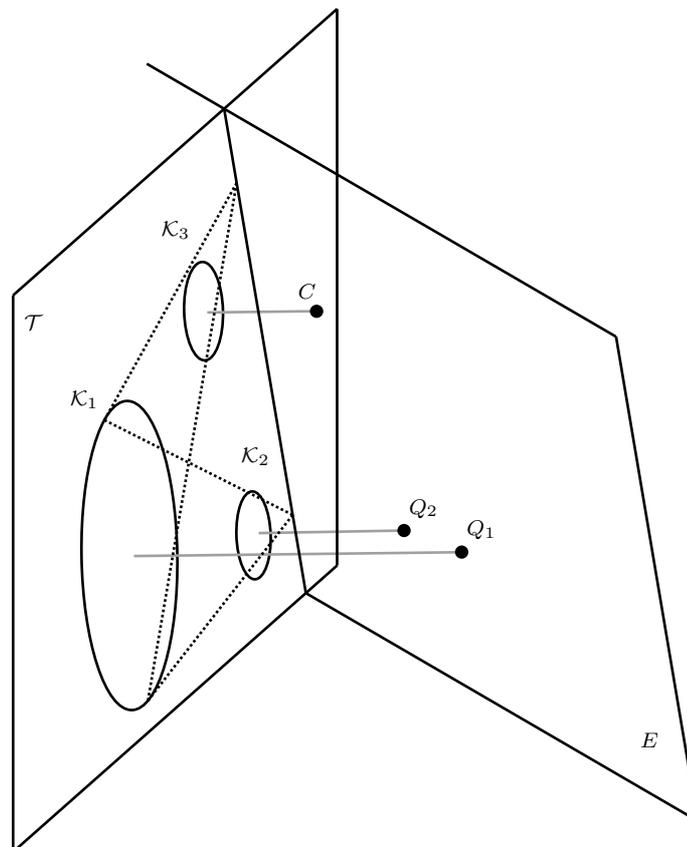


Abbildung 4.6.: Der Satz von Monge in perspektivischer Darstellung

4.4. Der Satz von Poncelet-Steiner

In diesem Abschnitt wird der Satz von Poncelet-Steiner diskutiert. Hierbei wird eine für dessen Beweis notwendige Konstruktion aus [Fie82a, S. 22] vorgestellt.

4.4.1. Hintergrund

In Euklids *Elementen* wird eine Vielzahl von elementargeometrischen Konstruktionen angegeben. Um beispielsweise den Mittelpunkt M einer Strecke, die durch zwei Punkte P und Q gegeben ist, zu konstruieren, zieht man zwei Kreise \mathcal{K}_P und \mathcal{K}_Q um P und Q , wobei die Radien so gewählt sein müssen, dass sich die Kreise in zwei Punkten S_1 und S_2 schneiden.⁴¹ Der Schnitt der Geraden S_1S_2 mit PQ liefert den gesuchten Punkt M .

Die beschriebene Konstruktion der Mittelsenkrechten verlangt die Verwendung von Zirkel und Lineal, die Utensilien, die Euklid nach gängiger Interpretation für seine Konstruktionen zulässt, wie aus den in seinen *Elementen* formulierten Postulaten geschlossen wird. Alle diese Konstruktionen sollen *elementargeometrisch konstruierbar* heißen. Zurückzuführen ist die Idee der Konstruktion unter alleiniger Verwendung des Lineals und des Zirkels auf den griechischen Philosophen Platon (429-348 v. Chr.) (vgl. [Tro23, S. 81]).

Seit jeher ist die Ermittlung von Punkten der Ebene gemäß einer bestimmten Aufgabenstellung durch elementargeometrische Konstruktionen eine Kerndisziplin der (synthetischen) Geometrie. Wie bereits im Abschnitt 2.2 erwähnt, stellte sich heraus, dass sich manche Probleme (wie beispielsweise die klassischen Probleme der Antike der Winkeldrittelung, der Würfelverdopplung sowie der Quadratur des Kreises) nicht durch elementargeometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal lösen lassen. Zu dessen Beweis sind vorrangig die Beiträge von Gauß und Lindemann zur algebraischen Lösbarkeit von Gleichungen von Bedeutung. Vor allem das Scheitern vieler Mathematiker, eine Lösung für jenes Problem zu finden, veranlasste sie, andere Hilfsmittel zur Konstruktion zuzulassen – zum Beispiel das Einschiebelineal, mit dem sich die Winkeldreiteilung realisieren lässt. Lösungen, die durch derartige Hilfsmittel gewonnen werden, gehören zur sogenannten Bewegungsgeometrie, eine Begriffsbildung arabischen Ursprungs (vgl. [Tro23, S. 86]). Auch diese Idee findet sich schon im Altertum, so besaßen schon Erastosthenes und Heron Hilfsmittel zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben (vgl. [Tro23, S. 85]).

Den entgegengesetzten Weg gingen Mathematiker, die sich die Frage stellten, welche Punkte sich unter alleiniger Verwendung des Zirkels oder Lineals konstruieren

⁴¹Euklid zieht die Kreise durch den jeweils anderen Endpunkt der Strecke.

lassen. Dabei gab es praktische Motive, da man unter Umständen der Meinung war, dass sich Konstruktionen präziser unter Verwendung eines Konstruktionsinstrumentes durchführen lassen könnten und dies bei technischen Fragen von Bedeutung war. Hierzu gibt es wichtige Ergebnisse, auf die im folgenden kurz eingegangen wird.

Der dänische Mathematiker Georg Mohr (1640-1697) konnte bereits im 17. Jahrhundert einen Nachweis liefern, dass sich alle elementargeometrischen Konstruktionen, die bei Euklid diskutiert worden sind, allein mit dem Zirkel durchführen lassen⁴² (vgl. [HHL16, S. 156]). Sein Beweis geriet aber in Vergessenheit – vermutlich aufgrund der Tatsache, dass er nicht in der Wissenschaftssprache Latein verfasst wurde (vgl. [Aum15, S. 236]). Mascheroni (1750-1800), ein italienischer Mathematiker, bewies dieses Resultat in seinem Werk *La Geometria del Compasso*, welches 1797 erschien, unabhängig von Mohr. Es existiert hiervon eine deutsche Übersetzung *Gebrauch des Zirkels* von Gruson aus dem Jahr 1825 (s. Abschnitt 2.2).

Analog dazu vermutete der französische Mathematiker Jean-Victor Poncelet (1788-1867) im Jahr 1822, dass alle elementargeometrischen Konstruktionen allein mit dem Lineal durchgeführt werden können. Mit der Einschränkung, dass ein beliebiger Kreis mitsamt seines Mittelpunktes vorgegeben ist, ist die Aussage korrekt, wie Steiner zeigen konnte.⁴³ Den ausführlichen Beweis diskutiert Steiner in seinem 1833 erschienenen Werk *Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*. Den Ursprung dieser Idee findet man bei Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), der seit dem Jahre 1808 Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften war (vgl. [Tro23, S. 87]). Dies ist jedoch zu relativieren, denn Tropfke erklärt, dass die »Benutzung des Lineals beim Zeichnen [uralt sein dürfe] [...], weniger die des Zirkels, dessen Erfindung die griechische Sage dem TALOS, Neffen des DAIDALOS, zuschreibt. [Tro23, S. 83, Kapitälchen auch im Original]«. Heute lässt sich sagen, dass die Geometrie mit dem Lineal allein eine Charakterisierung der Projektiven Geometrie war. Der Zirkel steht für die Metrik.

Es lassen sich noch weitere Einschränkungen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben ersinnen, beispielsweise die Verwendung eines Zirkels, welcher einen festen Radius besitzt; eine Idee, die den Arabern zugeschrieben werden kann (vgl. [Tro23, S. 88]).

⁴²Da sich Geraden nicht mit dem Zirkel konstruieren lassen, sind damit die konstruierbaren Punkte gemeint. Eine Gerade gilt dabei als konstruiert, wenn zwei ihrer Punkte bestimmt sind.

⁴³Dass auf den Mittelpunkt des vorgegebenen Kreises nicht verzichtet werden kann, kann in [HHL16, S. 157] nachgelesen werden.

4.4.2. Die Aussage des Satzes

Man kann das Resultat wie folgt zusammenfassen:

Satz 4.9 (Satz von Poncelet-Steiner). *Jede elementargeometrische Konstruktion lässt sich nur unter alleiniger Verwendung des Lineals durchführen, wenn ein beliebiger Kreis mitsamt seines Mittelpunktes vorgegeben ist.*

In der Einleitung von [Ste33, S. 2] wird erklärt, dass die Aussage von Satz 4.9 bewiesen werden kann, wenn es gelingt, zwei Hauptkonstruktionen, für die man zweckmäßig den Zirkel verwendet, nur mithilfe des Lineals durchzuführen (wenn man Konstruktionen vernachlässigt, die sich bereits unmittelbar mit Lineal lösen lassen). Diese wiederum lassen sich auf die Problemstellung

(A) „die Durchschnitte einer Geraden und eines Kreises [...] zu finden“ [Ste33, S. 2]

zurückführen.

Diese nach Steiner notwendige Konstruktion greift Fiedler im Artikel 24 auf. Er löst die dort formulierte Aufgabe

[...] die Schnittpunkte einer geraden Linie mit einem durch den Peripheriepunkt $S^{(1)}$ und Centrum M_1 bestimmten Kreise durch Linealkonstruktion zu finden, [...] [Fie82a, S. 22]

mithilfe zweier Konstruktionen, die später vorgestellt werden. Steiner löste in [Ste33, S. 78ff.] diese Problemstellung ebenfalls. Fiedler verweist auf den Nutzen der Konstruktion:

[Es] entspringt naturgemäss der Gedanke der Durchführung aller geometrischen Constructionen mit Hilfe eines festen Kreises und des Lineals. [Fie82a, S. 22]

Einen vollständigen Beweis des Satzes 4.9 gibt Fiedler an dieser Stelle nicht.

Die Lösung der Konstruktionsaufgabe

Wie bereits oben beschrieben, werden jetzt Konstruktionen vorgestellt, die die von Steiner formulierte Aufgabe lösen. Fiedler beschreibt sie ebenfalls in Artikel 24 (s. [Fie82a, S. 22]).

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Hauptkonstruktion von Steiner in drei Konstruktionen zerlegt.

Im ersten Schritt sei ein Kreis nur durch den Mittelpunkt M und einen Peripheriepunkt S_1 – dies seien seine einzig bekannten Punkte, der Kreis sei also nicht gezeichnet – sowie ein weiterer Kreis \mathcal{K}_G mit dem Mittelpunkt M_G (dieser Kreis ist gezogen, also vollständig vorhanden) gegeben. Es soll nun der zum Punkt S_1 diametrale Punkt S_2 im Kreis um den Mittelpunkt M konstruiert werden. Es sei davon ausgegangen, dass die Mittelpunkte M und M_G verschieden sind. Die Konstruktion gelingt wie folgt.

Konstruktion 4.10 (Bestimmung des zweiten Endpunktes eines Durchmessers). Zuerst verbindet man die Punkte S_1 und M miteinander zur Geraden $g := MS_1$. Man konstruiere anschließend die Parallele zur Geraden g durch den Punkt M_G . Dabei entstehen die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 der Geraden g mit dem gegebenen Kreis um den Mittelpunkt M_G .⁴⁴ Jetzt zieht man jeweils die Geraden S_1Q_1 und S_1Q_2 und schneidet sie mit der Zentralen $M_G M$. Besitzen die Kreise unterschiedliche Radien, so erhält man zwei Schnittpunkte A_2 und A_1 . Besitzen die sie den gleichen Radius, so existiert nur ein Schnittpunkt A_1 . Jetzt zieht man die Geraden Q_1A_1 oder (sofern existent) Q_2A_2 . Ihr jeweils gleicher Schnittpunkt mit der Geraden g ist der gesuchte Punkt S_2 .

Die Abbildung 4.7 zeigt die Konstruktion. Der Kreis, welcher durch M und S_1 bestimmt ist, ist in grau gestrichelt dargestellt.

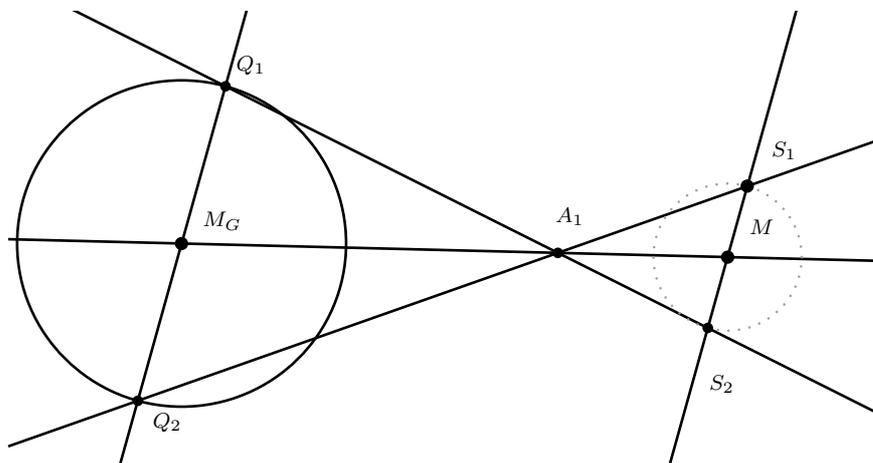


Abbildung 4.7.: Konstruktion des diametralen Punktes zum gegebenen Kreispunkt S_1

Erläuterung zur Konstruktion. Zunächst sind nach Satz 4.6 die Punkte A_1 und A_2 Ähnlichkeitszentren beider Kreise. Mithilfe des Strahlensatzes erkennt man, dass der

⁴⁴Die Lösung der Parallelenkonstruktion ist beispielsweise in [Ste33, S. 68ff.] zu finden.

Durchmesser $\overline{Q_1Q_2}$ ähnlich auf den Durchmesser $\overline{S_1S_2}$ mit diesen Ähnlichkeitszentren abgebildet wird, weshalb $\overline{S_1S_2}$ ein Durchmesser des gegebenen Kreises um M_1 ist.

Es ist anzumerken, dass die Konstruktion die Bestimmung einer Parallelen zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt erfordert. Wie man diese allein mit Lineal konstruiert, ist bei Fiedler nicht angegeben, aber notwendig.

Nun ist man in der Lage, jeden beliebigen Durchmesser des Kreises, welcher durch den Mittelpunkt M und den Kreisperipheriepunkt S_1 gegeben ist, zu konstruieren. Der gegebene Kreis sei wieder um dem Mittelpunkt M_G beschrieben und es gelte $M \neq M_G$. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen seien die Radien beider Kreise ab sofort ebenfalls verschieden.

Konstruktion 4.11 (Bestimmung eines beliebigen Durchmessers). Man bestimme wie in der Konstruktion 4.10 das innere Ähnlichkeitszentrum A_1 und das äußere Ähnlichkeitszentrum A_2 der durch die zwei Punkte sowie des gegebenen Kreises. Seien Q_1 und Q_2 die zwei Endpunkte eines beliebigen Durchmessers des gegebenen Kreises mit dem Mittelpunkt M_G . Die Schnittpunkte der Geraden Q_1A_2 und Q_2A_1 sowie Q_1A_1 und Q_2A_2 sind jeweils die gesuchte Endpunkte in dem durch die Punkte S_1 und M bestimmten Kreis mit dem zu Q_1Q_2 parallelen Durchmesser durch den Punkt M . Je nach Wahl von Q_1 (also auch Q_2) können beliebige Durchmesser konstruiert werden.

Da die Ähnlichkeitspunkte A_1 und A_2 wie in Konstruktion 4.10 nur mithilfe des Lineals konstruierbar sind, lässt sich durch die in Konstruktion 4.11 erhaltene Ähnlichkeitsabbildung jeder Durchmesser des Kreises gegeben durch M und S_1 bestimmen.

Nun ist man der Lage, die von Steiner angeführte Grundkonstruktion allein mit dem Zirkel durchzuführen. Sei ein Kreis $\mathcal{K}(M, d(M, S_1))$ gegeben durch den Mittelpunkt M und einen Punkt S_1 (der Kreis jedoch nicht gezeichnet), ein gezeichneter Kreis mitsamt Mittelpunkt M_G gegeben sowie eine Gerade g , welche den Kreis \mathcal{K} schneidet vorgegeben. Mithilfe der vorherigen Konstruktionen gelingt es, die zwei Schnittpunkte G_1 und G_2 der Geraden g mit dem Kreis \mathcal{K} zu bestimmen.

Die Konstruktion nach [Fie82a, S. 22] funktioniert wie folgt, wobei Ergänzungen vorgenommen wurden:

Konstruktion 4.12 (Geradenschnittpunkte mit einem Kreis). Zunächst bestimme man gemäß Konstruktion 4.10 das innere Ähnlichkeitszentrum A_1 und äußere Ähnlichkeitszentrum A_2 des Kreises \mathcal{K} und des um M_G bestimmten Kreises.

Anschließend bestimme man den Schnittpunkt der vorgegebenen Geraden g mit Geraden MS_1 und erhalte somit den Punkt K . Dieser wird mithilfe des äußeren Ähnlichkeitszentrums ähnlich auf den zu M_1S parallelen Durchmesser im Kreis um M_G auf den Punkt K_D abgebildet (Man ziehe die Gerade KA_2 und schneide sie mit dem Paralleldurchmesser im Punkt K_D). Nun ziehe man die zur Geraden g parallele Gerade durch K_D und bestimme ihre Schnittpunkte Q_1 und Q_2 mit dem Kreis um M_G . Die durch die Geraden Q_1M_G und Q_2M_G im Kreis um den Punkt M_G festgelegten Durchmesser kann man parallel in den Bildkreis \mathcal{K} abbilden nach Konstruktion 4.11. Damit sind die gesuchten Schnittpunkte G_1 und G_2 gefunden.

Die Abbildung 4.8 zeigt die Konstruktion 4.12. Auch hier wurde der durch die Punkte gegebene Kreis gepunktet in grau dargestellt. Steiner benutzt wie Fiedler in seiner Konstruktion der obigen Geradenschnittpunkt konstruktion ebenfalls Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsabbildungen. Für die Spezialfälle gleicher Radien oder Mittelpunkte der oben beteiligten Kreise sind die Konstruktionen oben anzupassen.

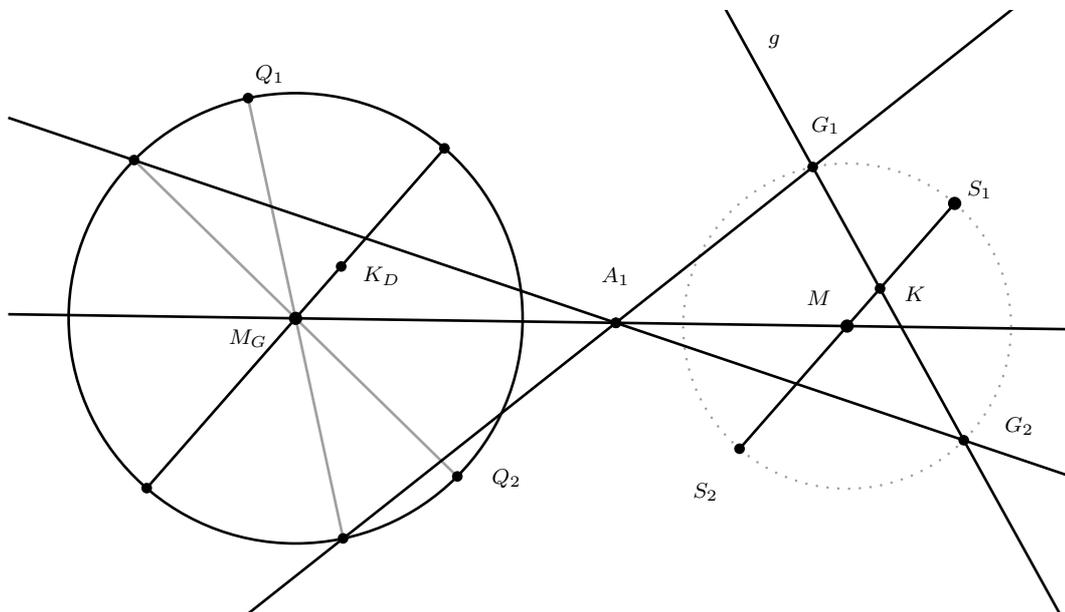


Abbildung 4.8.: Konstruktion der Schnittpunkte S_1 und S_2 einer Geraden mit einem Kreis unter Verwendung des Lineals

4.5. Die zyklografischen Bilder von Raumgeraden und Ebenen

Wie bereits in Abschnitt 2.5 beschrieben, erklärt Fiedler, wie sich Raumgeraden zyklografisch abbilden lassen. Dies führt auf das Konzept der sogenannten linearen Kreisreihen, welches im Folgenden näher erläutert werden soll. Anschließend werden die Bildkreise projizierender Ebenen betrachtet und in diesem Kontext das Konzept der planaren Kreissysteme motiviert. Der letzte Abschnitt dieses Absatzes widmet sich verschiedenen Konstruktionsaufgaben und deren Lösungen.

4.5.1. Die linearen Kreisreihen

Die Definition einer linearen Kreisreihe

Fiedler definiert die lineare Kreisreihe wie folgt:

Wir wollen die Gesamtheit der Kreise, welche die Punkte einer geraden Linie abbilden, oder welche ihre Mittelpunkte in einer Geraden, der gemeinsamen Centrale, haben und einen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt in dieser besitzen, als eine lineare Kreisreihe bezeichnen. [Fie82a, S. 17]

Auf Grundlage dieses Zitates kann man eine Definition des Begriffs der linearen Kreisreihe wie folgt angeben: Es sei \mathcal{T} die Tafel Ebene und I eine unendliche Indexmenge. Man betrachte eine Familie

$$R := (\mathcal{K}_i)_{i \in I}$$

von Kreisen \mathcal{K}_i mit $i \in I$ in der Tafel Ebene. Lässt sich genau ein Punkt finden, der für alle Kreise der Kreisfamilie R ein gemeinsamer äußerer bzw. innerer Ähnlichkeitspunkt ist, so bezeichnet man R als *lineare Kreisreihe*. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, auch Fernpunkte als Ähnlichkeitszentren zuzulassen. Die Erkenntnisse aus Abschnitt 3.1.2 besagen, dass die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise stets auf der gemeinsamen Zentrale liegt. Dies wiederum zeigt, dass alle Kreise einer linearen Kreisreihe eine gemeinsame Zentrale besitzen. Zur Veranschaulichung ist in der Abbildung 4.9 ein Beispiel einer linearen Kreisreihe mit dem Ähnlichkeitszentrum S dargestellt. Darin ist in grau die gemeinsame Zentrale der Kreise angedeutet.

Es gilt die Aussage von

Satz 4.13. *Sind drei Kreise mit einem gemeinsamen Ähnlichkeitszentrum bekannt, so ist ihre Kreisreihe bekannt.*

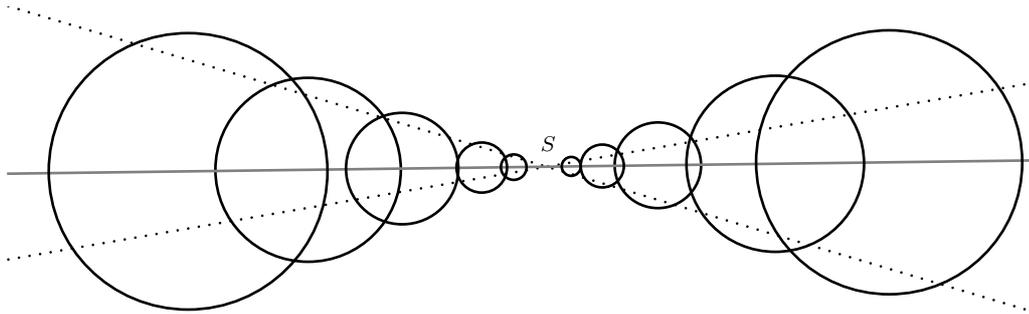


Abbildung 4.9.: Lineare Kreisreihe R mit dem Ähnlichkeitszentrum S

Beweis. Zwei Kreise sind nicht ausreichend, da sie zwei Ähnlichkeitspunkte besitzen können. Der dritte Kreis legt das Ähnlichkeitszentrum und somit die lineare Kreisreihe eindeutig fest. \square

Ziel ist es, eine Verbindung des linearen Kreisreihenkonzeptes zur Zyklusografie herzustellen, indem die Kreise einer linearen Kreisreihe als Bildkreise von Raumpunkten interpretiert werden. Man wird sehen, dass sich durch sie Raumgeraden darstellen lassen. Dass diese Beziehung besteht, wird im nächsten Abschnitt verdeutlicht.

Die Darstellung von Raumgeraden durch zyklusografische Bilder

In der Tat stellt sich heraus, dass lineare Kreisreihen die zyklusografischen Bilder von Raumgeraden darstellen. Um dies einzusehen, werden mehrere Raumgeraden in verschiedenen Lagen in Bezug auf die Tafel Ebene \mathcal{T} untersucht.

Man betrachte eine zur Tafel Ebene \mathcal{T} lotrecht gelegene Gerade g mit dem Durchstoßpunkt S , dann gilt

Satz 4.14. *Das zyklusografische Bild der Geraden g ist eine lineare Kreisreihe R konzentrischer Kreise, wobei der Durchstoßpunkt S der Geraden g der gemeinsame Ähnlichkeitspunkt der Kreise der linearen Kreisreihe R ist. Umgekehrt repräsentiert eine Kreisreihe, welche aus konzentrischen Kreisen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt S besteht, eine zur Tafel lotrechte Gerade g mit dem Durchstoßpunkt S .*

Beweis. Aufgrund der Tatsache, dass für jeden beliebigen Punkt P der Geraden g die Orthogonalprojektion von P auf die Tafel Ebene mit dem Durchstoßpunkt S der Geraden g zusammenfällt, folgt die Aussage des Satzes. \square

Die Abbildung 4.10 zeigt eine lineare Kreisreihe als zyklusografisches Bild einer auf der Tafel lotrecht stehenden Raumgeraden. In diesem Fall sind alle Kreise konzentrisch und S der gemeinsame Ähnlichkeitspunkt aller Kreise der linearen Kreisreihe.

Würde man die orientierte zyklografische Abbildung anwenden, so würden sich immer zwei Kreise mit gleichem Mittelpunkt und Radius mit jeweils entgegengesetzter Orientierung überlagern.

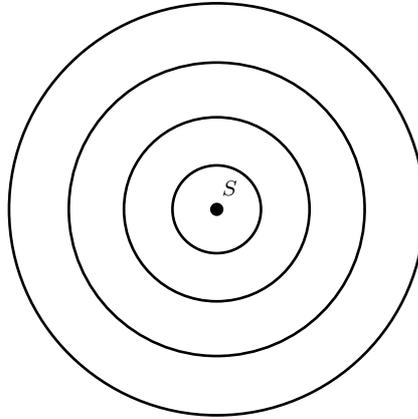


Abbildung 4.10.: Zyklografisches Bild einer Geraden, welche im rechten Winkel auf der Tafel Ebene steht und den Durchstoßpunkt S besitzt

Die Untersuchung der zyklografischen Bildkreise von Raumgeraden wird nun fortgesetzt. Dazu wird eine Raumgerade g betrachtet, welche parallel zur Tafel Ebene verläuft, und die Bildkreise der Punkte auf ihr untersucht. Folgender Satz beschreibt die Familie der Bildkreise:

Satz 4.15. *Das zyklografische Bild einer Geraden g , welche parallel zur Tafel Ebene T verläuft, ist eine Familie F von Kreisen gleicher Radien, welche ihre Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Zentrallen besitzen. Umgekehrt beschreibt eine derartige Familie von Kreisen zwei zur Tafel Ebene parallel verlaufende Geraden.*

Beweis. Die Aussage erhält man sofort, da nach der Definition der zyklografischen Abbildung die Mittelpunkte der Bildkreise auf der orthogonalen Parallelprojektion g_1 der Geraden g , also auf einer gemeinsamen Zentrallen liegen. Aufgrund der Parallelität der Geraden g folgt die Gleichheit der Kreisradien. Da den Kreisen keine Orientierung zugeordnet wurde, existieren zwei zur Tafel Ebene parallele Geraden, welche auf die gemeinsame Zentrallen orthogonal abbilden und den gleichen Abstand zur Tafel besitzen. \square

Es ist zu beachten, dass die im Satz 4.15 beschriebene Kreisfamilie keine lineare Kreisreihe im eigentlichen Sinne der Definition ist, da ihr gemeinsamer Ähnlichkeitspunkt aufgrund der gleichen Radien der Kreise ein Fernpunkt ist und die inneren

Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise paarweise verschieden sind. Lässt man Fernpunkte ebenfalls als Ähnlichkeitspunkte zu, so kann man die Kreisfamilie F ebenfalls als eine lineare Kreisreihe auffassen.

Möchte man erreichen, dass eine derartige Kreisreihe eine Raumgerade eindeutig beschreibt, so muss die zycklografische Abbildung angewendet werden, welche den Bildkreisen eine Orientierung gibt. In diesem Fall müssen alle Kreise gleichorientiert sein, da die Raumgerade nur auf einer Seite der Tafel ebene verläuft.

Die Abbildung 4.11 zeigt das zycklografische Bild zweier zur Tafel parallelen Geraden. Die gemeinsame Zentrale der Bildkreise ist g_1 . Der Radius eines beliebigen Kreises dieser Kreisfamilie entspricht dem Abstand der zwei Raumgeraden von der Tafel ebene.

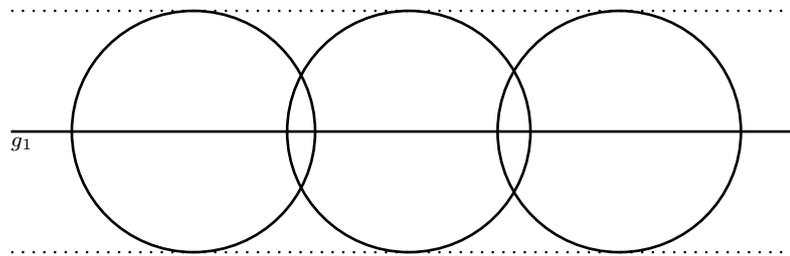


Abbildung 4.11.: Zycklografisches Bild einer Geraden, welche parallel zur Tafel ebene verläuft

Nachdem zwei spezielle Lagen betrachtet wurden, soll im Folgenden das zycklografische Bild $Z(g)$ einer Geraden g untersucht werden, welche die Tafel ebene in einem bestimmten Winkel schneidet. Dazu wird der in Abschnitt 3.2.1 eingeführte Begriff der Tafelneigung eines projizierenden Strahls auf beliebige Raumgeraden übertragen. Dazu definiert man: Sei \mathcal{T} die Tafel ebene, g eine die Tafel \mathcal{T} schneidende Raumgerade, g_1 die orthogonale Projektion der Geraden g auf der Tafel ebene und S der Durchstoßpunkt von g mit der Tafel ebene. Als *Tafelneigung* α_g der Geraden g bezeichnet man die Winkelmaßzahl des Winkels

$$\alpha_g := \sphericalangle(g, g_1).$$

Dabei ist der kleinere der beiden Winkel, der von den Geraden g und g_1 im Scheitel S eingeschlossen wird, zu nehmen. In den Grenzfällen, also der Lage einer Geraden, die senkrecht auf der Tafel steht, ordnet man dieser die Tafelneigung $\alpha_g = 90^\circ$, einer zur Tafel parallelen Geraden die Tafelneigung $\alpha_g = 0^\circ$ zu.

Einfach beginnend wird das zyklografische Bild einer Geraden g untersucht, welche eine Tafelneigung von $\alpha_g = 45^\circ$ besitzt. Bezeichnet man mit S den Durchstoßpunkt der Geraden g in der Tafel ebene, mit P einen beliebigen von S verschiedenen Punkt auf der Geraden g , mit P_1 seinen orthogonal auf die Tafel projizierten Bildpunkt, so folgt wegen der Lage der Geraden g , dass $\angle(PSP_1) = 45^\circ$ gilt. Sei Q ein weiterer Punkt auf der Geraden g und Q_1 seine orthogonale Projektion auf die Tafel ebene, so ergibt sich nach Umlegung der Raumgeraden g um ihre Orthogonalprojektion g_1 die in der Abbildung 4.12 dargestellte Situation. Darin ist die umgelegte Gerade g (entsprechend Fiedlers Notation) mit (g) bezeichnet.

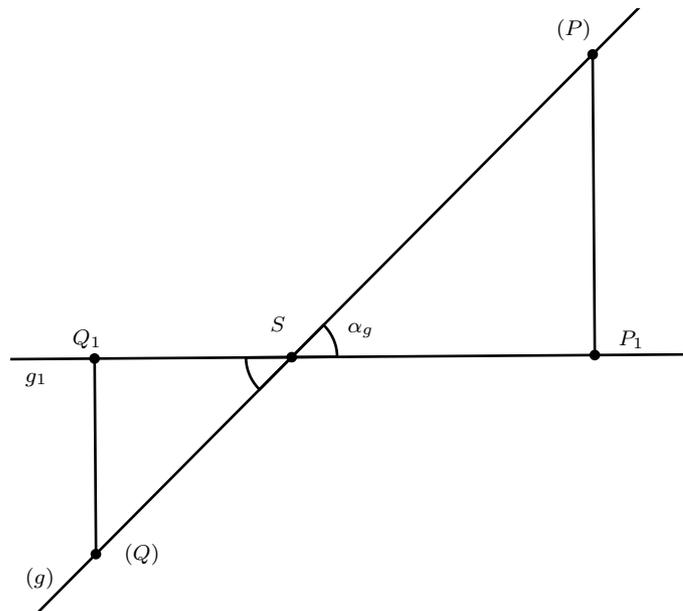


Abbildung 4.12.: Umlegung einer Geraden mit der Tafelneigung α_g in die Tafel ebene

Da die Tafelneigung $\alpha_g = 45^\circ$ beträgt, sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle(Q)SQ_1$ und $\triangle(P)SP_1$ gleichschenkelig. Das bedeutet, dass für jede beliebige Wahl des Punktes Q auf der Geraden g die Gleichheit

$$d(S, Q_1) = d(Q_1, (Q))$$

besteht. Der Abstand des orthogonal projizierten Punktes auf die Tafel zum Raumpunkt besitzt stets den gleichen Abstand wie dieser orthogonalprojizierte Punkt zum Durchstoßpunkt der Geraden, auf dem der Raumpunkt liegt. Kurz formuliert ist also der Abstand des besagten Punktes zur Tafel ebene identisch mit dem Abstand seines Lotfußpunktes auf der Tafel zum Durchstoßpunkt. Damit erhält man die Aussage des folgenden Satzes gemäß [Fie82a, S. 17].

Satz 4.16. *Es sei g eine Raumgerade mit der Tafelneigung $\alpha_g = 45^\circ$ und dem Durchstoßpunkt S . Das zyklografische Bild $Z(g)$ der Geraden g ist eine Familie von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Zentralen liegen und alle durch den Punkt S verlaufen. Die Kreise in der Tafelebene berühren die zur Zentralen senkrechte Gerade durch den Punkt S . Umgekehrt beschreibt eine solche Familie von Kreisen zwei Raumgeraden, welche eine Tafelneigung von 45° besitzen und durch den Punkt S verlaufen.*

Der in dem Satz beschriebene Punkt S ist das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum aller Kreise.

Beweis. Der Satz ist mit den oben erklärten Vorüberlegungen klar. Die Existenz zweier Geraden zu einer linearen Kreisreihe ergibt sich aus dem Grund, dass den Kreisen der Kreisreihe keine Orientierung zugeordnet ist. \square

Eine Familie von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Zentralen liegen und die alle durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen, bezeichnet man als *parabolisches Kreisbüschel* (vgl. [Aum15, S.48]). Die Abbildung 4.13 zeigt das zyklografische Bild einer Geraden mit einer Tafelneigung von 45° und dem Durchstoßpunkt S . Die Bezeichnung »parabolisches Kreisbüschel« wird bei Fiedler nicht explizit erwähnt.

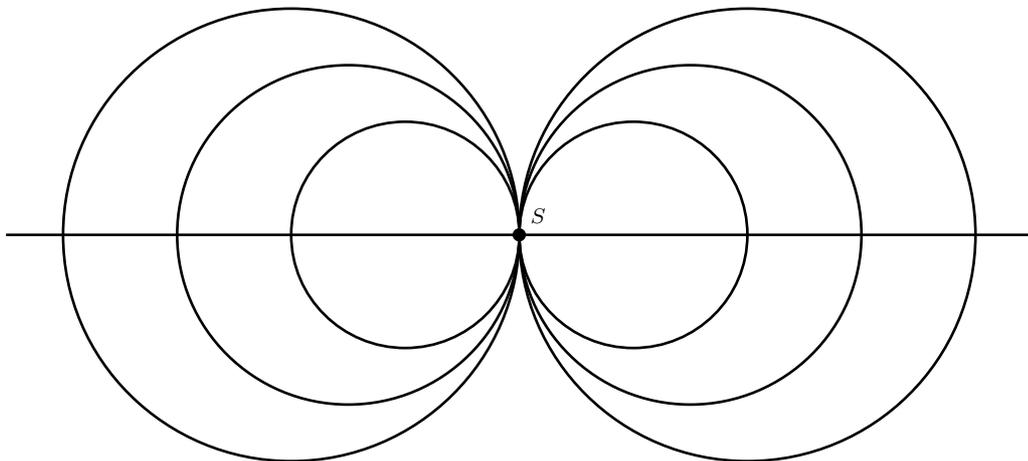


Abbildung 4.13.: Zyklografisches Bild einer zur Tafel um 45° geneigten Geraden – parabolisches Kreisbüschel

Für Geraden g , welche eine Tafelneigung von $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ bzw. $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ besitzen, ergibt sich eine Kreisreihe, die mit der Kreisreihe aus der Abbildung 4.9

vergleichbar ist.

Insgesamt zeigte dieser Abschnitt, dass lineare Kreisreihen zur Darstellung von Geraden verwendet werden können. Abschließend sei bemerkt, dass lineare Kreisreihen für zueinander parallele Geraden deckungsgleich sind, nur ihre jeweilige Zentrale ist parallel verschoben, da die Geraden parallel verschoben sind. Diesen Zusammenhang stellt Fiedler als weitere Eigenschaft linearen Kreisreihen in [Fie82a, S. 17] heraus.

Der Modul einer linearen Kreisreihe

Im vorherigen Abschnitt wurde der Begriff der Tafelneigung für beliebige Raumgeraden diskutiert. Man hat gesehen, dass sich Geraden durch lineare Kreisreihen beschreiben lassen, welche verschiedene Charakteristika in Abhängigkeit der verschiedenen Lagen der Geraden aufweisen. Man betrachte erneut die Abbildung 4.12, welche die Umlegung einer Geraden g mit der Tafelneigung α_g in die Tafel Ebene um die orthogonal projizierte Gerade g_1 zeigt. Man bezeichnet die konstante Zahl

$$\cot(\alpha_g) = \frac{d(S, P_1)}{d(P_1, (P))}$$

als *Modul der linearen Kreisreihe* der Geraden g . Ist g eine projizierende Gerade, verläuft also durch den Augpunkt C , so überträgt sich die Formel

$$\cot(\alpha_g) = \frac{d(S, C_1)}{d(C_1, (C))}$$

unmittelbar.

Es ist nicht direkt einsichtig, weshalb sich Fiedler hier für den Kotangens zur Definition des Modulbegriffs entscheidet; so hätte man auch beispielsweise mit dem Tangens arbeiten können. Es wird im folgenden Abschnitt im Kontext der Untersuchung zyklografischer Bilder von Ebenen ein weiterer Modulbegriff eingeführt. Durch Wahl der Kontangensfunktion wird sich an dieser Stelle eine einfache Formel ergeben, welche beide Modulbegriffe verbindet.

4.5.2. Die planaren Kreissysteme

Die Definition eines planaren Kreissystems

Um den Begriff des planaren Kreissystems gemäß Fiedler zu definieren, werden im ersten Schritt die Bildpunkte einer projizierenden Ebene E untersucht (s. [Fie82a, S. 22ff.]). Wie in Kapitel 3 dieser Arbeit erklärt wurde, ist eine solche Ebene E durch

das Zentrum C sowie ihrer Spurgerade q' , welche zugleich die Fluchtgerade ist, in der Tafelebene \mathcal{T} festgelegt. Die Idee ist nun, die Ebene E als eine Schar in ihr liegender projizierender Geraden zu interpretieren. Da diese Geraden in der Ebene E liegen, befinden sich alle ihre Durchstoßpunkte Q' auf der Spurgeraden q' der Ebene E . Folgende Abbildung 4.14 verdeutlicht den beschriebenen Sachverhalt; die in der Ebene E befindlichen Geraden sind in grau dargestellt.

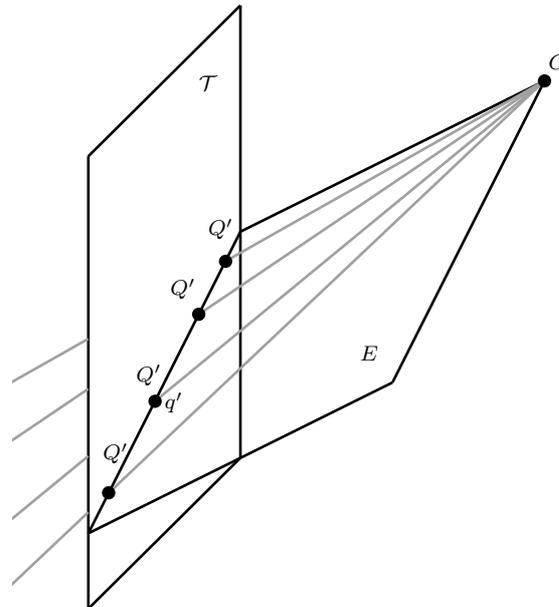


Abbildung 4.14.: Projizierende Geraden in der Ebene E mit ihren Durchstoß- bzw. Fluchtpunkten Q'

Es gilt der folgende

Satz 4.17. *Haben zwei verschiedene lineare Kreisreihen R_1 und R_2 den Distanzkreis gemeinsam und liegen ihre Ähnlichkeitszentren auf der Geraden q' , so sind zwei Ebenen durch sie bestimmt, wovon eine projizierend ist.*

Beweis. Die Kreisreihen R_1 und R_2 repräsentieren gemäß der Sätze des vorherigen Abschnittes insgesamt maximal vier Raumgeraden, wovon jeweils für jede Kreisreihe nur eine Gerade g_1 und g_2 betrachtet wird. Dies sollen die Geraden sein, welche durch den Augpunkt verlaufen (die anderen Geraden sind symmetrisch zur Tafelebene). Da beide Kreisreihen den Distanzkreis \mathcal{D} umfassen und die Geraden deshalb tatsächlich durch den Augpunkt verlaufen, sind die Geraden g_1 und g_2 projizierend. Aufgrund der Tatsache, dass die linearen Kreisreihen verschieden sein sollten, haben sie verschiedene Ähnlichkeitspunkte S_1 und S_2 in der Tafelebene, welche die

Durchstoßpunkte der zugehörigen Geraden sind. Damit ist durch die Gerade S_1S_2 die Spur der projizierenden Ebene und damit die Ebene selbst festgelegt. Gemäß der Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt existiert eine zweite Ebene, die durch das gleiche planare System gegeben ist. Diese ist jedoch nicht projiziert, aber symmetrisch zur ersten Ebene in Bezug auf die Tafelenebene. \square

Da es unendlich viele Geraden in einer projizierenden Ebene E durch den Augpunkt gibt, existieren auch unendliche viele lineare Kreisreihen, welche die Ebene E festlegen. Eine solche Familie von linearen Kreisreihen soll *planares Kreissystem* heißen. Bei Fiedler ist dementsprechend ein planares Kreissystem »das System aller Bildkreise der Ebene« [Fie82a, S. 23]. Es sei angemerkt, dass das planare Kreissystem eindeutig eine Ebene festlegt, sofern man mit orientierten Kreisen arbeitet. In der Abbildung 4.15 ist ein solches dargestellt, wobei zwei lineare Kreisreihen angedeutet sind.⁴⁵

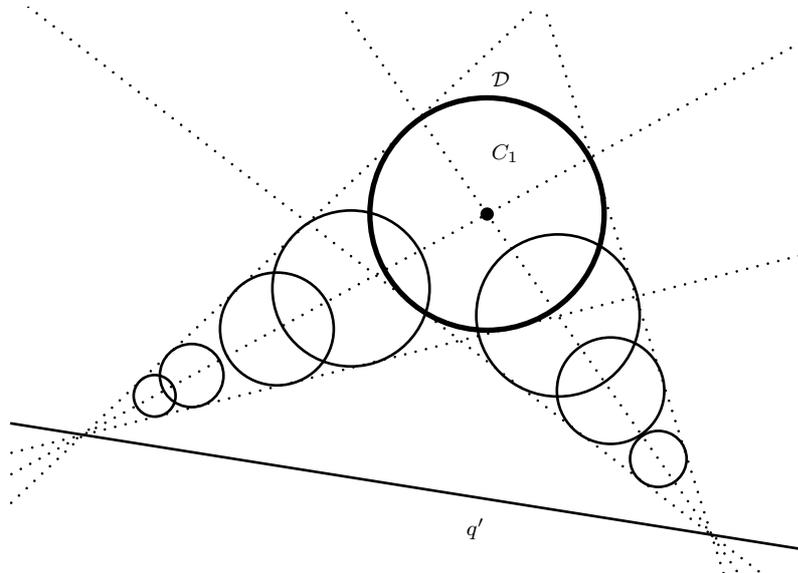


Abbildung 4.15.: Planares Kreissystem einer projizierenden Ebene E , gegeben durch die sogenannte Ähnlichkeitsachse q' , auf der die gemeinsamen Ähnlichkeitszentren der linearen Kreisreihen liegen, und den Distanzkreis \mathcal{D}

An dieser Stelle soll noch eine Anmerkung zum Satz von Monge gemacht werden. Diese ist nicht bei Fiedler zu finden, zeigt aber, wie sich ebene Sachverhalte mit der Zyklografie einsehen lassen. Im Abschnitt 4.3.2 hat man gesehen, dass die äußeren Ähnlichkeitszentren dreier Kreise mit paarweise verschiedenen Radien und Mittelpunkten auf einer Gerade liegen. Diese Aussage kann wie folgt erweitert werden:

⁴⁵Im Unterschied zur Zyklografie sei bemerkt, dass man Ebenen in der Darstellenden Geometrie häufig durch ihre Spur- und Fluchtgerade darstellt.

Satz 4.18. *Es sei eine Familie von linearen Kreisreihen gegeben, deren Ähnlichkeitszentren auf einer Geraden s liegen und die einen Kreis gemeinsam haben. Wählt man zwei beliebige aber verschiedene Kreise aus den Reihen in derselben Halbebene bezüglich der Geraden s aus, welche einen verschiedenen Radius besitzen, und bildet ihr äußeres Ähnlichkeitszentrum, so liegt dieses ebenfalls auf der Geraden s .*

Beweis. Man betrachte eine der beiden durch die linearen Kreisreihen beschriebenen Ebenen E . Wählt man zwei beliebige Kreise dieser linearen Kreisreihen in der gleichen Halbebene von s aus, so lassen sich diese als die Bildkreise zweier Punkte P_1 und P_2 der Ebene E auffassen. Da der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise zugleich der Durchstoßpunkt einer Geraden g ist, welche in der Ebene E liegt und durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft, folgt die Behauptung. \square

Der Modul eines planaren Kreissystems

Im Abschnitt 4.5.1 wurde der Modul einer linearen Kreisreihe R als die Zahl $\cot(\alpha_g)$ definiert, wobei der Winkel α_g die Tafelneigung der zur Reihe R gehörigen Geraden beschreibt. Aufgrund der zur Tafel Ebene symmetrischen Lage beider Geraden ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Geraden, beide repräsentieren die gleiche lineare Kreisreihe und haben den gleichen Modul. Durchstoßpunkt, Modul und ein Punkt einer Geraden legen diese eindeutig fest. Geht man also von einer projizierenden Geraden aus, so genügen der Durchstoßpunkt und der Modul zur eindeutigen Beschreibung einer Geraden. Dieses Konzept wird nachfolgend auf eine projizierende Ebene übertragen.

Zunächst wird in Analogie zur Tafelneigung einer Geraden der Begriff der Tafelneigung einer (projizierenden) Ebene eingeführt (s. [Fie82a, S. 24]). Dazu wird eine projizierende Ebene E betrachtet. Es sei H der Schnittpunkt einer in E liegenden Geraden durch den Augpunkt C mit der Tafel Ebene, welche einen rechten Winkel mit der Spur s der Ebene E einschließt⁴⁶. Man bezeichnet den Winkel

$$\alpha = \angle(CHC_1),$$

wobei C_1 der Hauptpunkt ist, als die *Tafelneigung der Ebene E* .

In der Abbildung 4.16a) ist die Definition der Tafelneigung einer Ebene in einer räumlichen Darstellung veranschaulicht. Durch Umlegung der Ebene, die durch die Punkte C_1, H und C bestimmt ist, um die Gerade C_1H in der Tafel Ebene erhält man die Darstellung aus Abbildung 4.16b). Hier ist (C) die Umlegung des Augpunktes um eben diese Achse.

⁴⁶Eine solche Gerade wird als *Falllinie der Ebene E durch den Punkt C* bezeichnet.

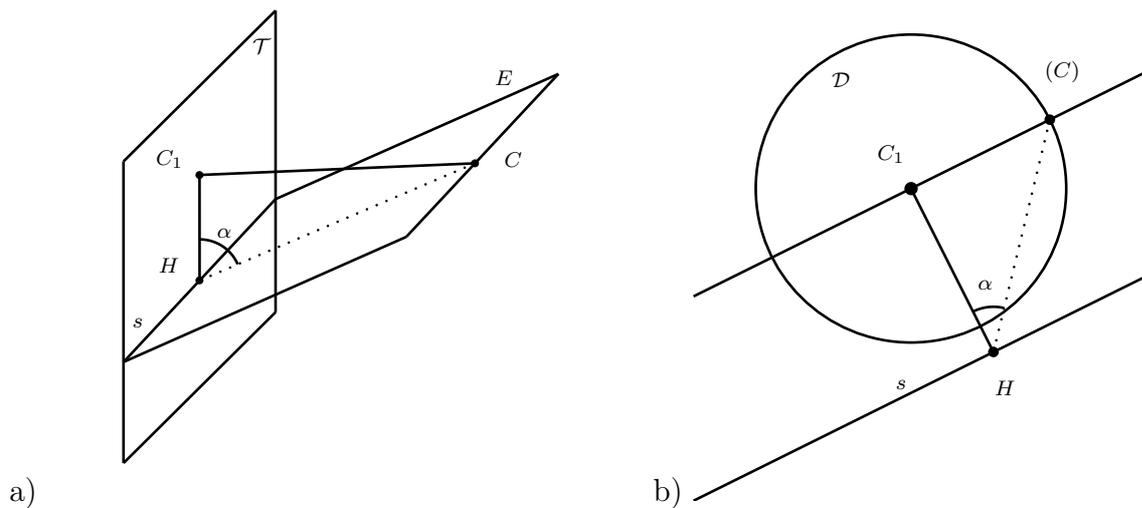


Abbildung 4.16.: Tafelneigung einer projizierenden Ebene E

Wählt man einen beliebigen Punkt Q auf der Spurgerade s der Ebene E in der Tafelenebene, so ist $g = CQ$ eine projizierende Gerade, welche in der Ebene E liegt und ihren Durchstoßpunkt im Punkt Q besitzt. Fiedler bezeichnet den Winkel

$$\theta = \angle(HC_1Q)$$

mit Scheitel im Hauptpunkt C_1 als *Abweichung* der Geraden g von der Falllinie CH .

Die Abbildung 4.17 zeigt die Abweichung θ der Geraden g , die Tafelneigung α der Ebene E sowie die Tafelneigung β der Geraden g , die man durch die Umlegung um die parallelprojizierte Gerade g_1 – welche durch C_1Q gegeben ist – erhält. Der Punkt $(C)_1$ beschreibt darin die Umlegung des Augpunktes C um die Gerade g_1 , der Punkt $(C)_2$ ergibt sich durch Umlegung des Augpunktes C um die Gerade C_1H .

Aus der Abbildung 4.17 entnimmt man, dass die Gleichheit

$$\cot(\beta) = \frac{d(Q, C_1)}{d(C_1, (C)_1)} = \frac{d(Q, C_1)}{d(C_1, C)} \quad (4.1)$$

besteht. Man bestimmt weiter das Verhältnis

$$\cos(\theta) = \frac{d(C_1, H)}{d(C_1, Q)}.$$

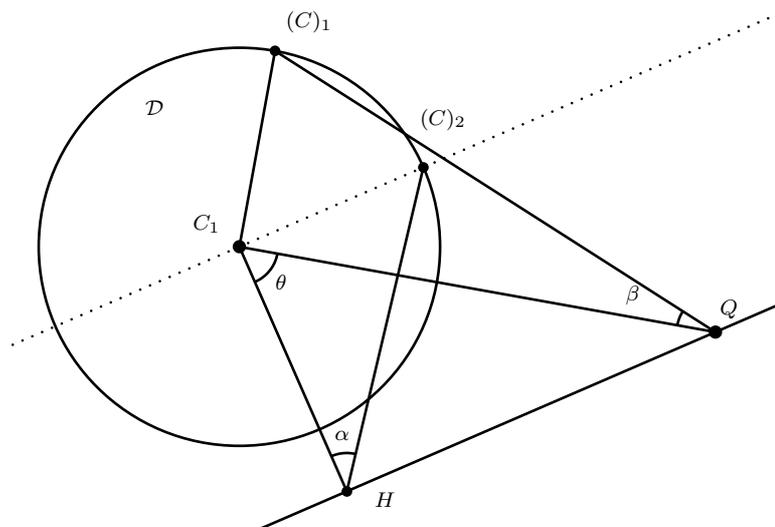


Abbildung 4.17.: Tafelneigung einer projizierenden Ebene E

Das Produkt aus diesen beiden Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta) \cdot \cot(\beta) &= \frac{d(C_1, H)}{d(C_1, Q)} \cdot \frac{d(Q, C_1)}{d(C_1, C)} \\
 &= \frac{d(C_1, H)}{d(C_1, C)} \\
 &= \frac{d(C_1, H)}{d(C_1, (C)_2)} \\
 &= \cot(\alpha).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Da die Tafelneigung der Ebene E konstant gleich α ist, ist der Wert $\cot(\alpha)$ ebenfalls konstant. Fiedler bezeichnet diesen Wert als den *Modul des planaren Kreissystems*. Das bedeutet, dass man den Modul des Kreissystems berechnen kann, sofern eine Gerade in der (projizierenden) Ebene des planaren Kreissystems mit ihrer Abweichung und Tafelneigung bekannt ist. In diesem Fall berechnet man mit der Tafelneigung dieser Gerade und des Moduls der durch diese Gerade gegebenen linearen Kreisreihe den Modul des planaren Kreissystems. Da der Punkt Q auf der Spur s beliebig gewählt war, gilt dies für jede die Tafel schneidende Gerade. Dadurch ist der Begriff Modul des planaren Kreissystems wohldefiniert.

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn die Punkte Q und H zusammenfallen, man also die Falllinie der Ebene E durch den Punkt C als projizierende Gerade betrachtet. Fiedler macht in diesem Kontext darauf aufmerksam, dass

Durch die lineare Reihe, die [...] [der] Falllinie entspricht, [...] das ganze

[planare Kreis-]system gegeben [ist]. [Fie82a, S. 24]

Denn fällt die projizierende Gerade CQ mit der Falllinie CH zusammen, so besteht mit obigen Bezeichnungen die Winkelgleichheit $\alpha = \beta$ der Tafelneigungen und es gilt $\theta = 0^\circ$ für die Abweichung. Damit ergibt sich

$$\cot(\alpha) = \cos(\theta) \cdot \cot(\beta) = 1 \cdot \cot(\beta) = \cot(\beta).$$

Das Ergebnis ist im folgenden Satz gesichert:

Satz 4.19. *Sei S ein planares Kreissystem einer projizierenden Ebene E , der Winkel α die Tafelneigung der Ebene E und β die Tafelneigung der Falllinie in der Ebene E durch den Punkt C . Der Modul $\cot(\beta)$ dieser Falllinie stimmt mit dem Modul $\cot(\alpha)$ des planaren Kreissystem der Ebene E überein. Insbesondere ist durch den Modul der linearen Kreisreihe der Falllinie das planare Kreissystem und damit die Ebene E gegeben.*

Beweis. Dies folgt aus den obigen Überlegungen zum Modul eines planares Kreissystems. □

Die Aussage des Satzes 4.19 überträgt sich sinngemäß auf beliebige Ebenen, die die Tafel schneiden. In der oben beschriebenen Theorie zur Einführung des Moduls eines planaren Systems waren projizierende Strahlen sowie eine projizierende Ebene vorausgesetzt, sodass man den Hauptpunkt als Scheitel von Falllinie und Gerade für den Winkel der Abweichung aufgefasst hat. Fiedler teilt in diesem Kontext folgende leicht nachvollziehbare Aussage mit:

Es erhellt aber sofort, dass jeder andere Punkt der Ebene Cq' [das ist die projizierende Ebene mit der Spur q'] in gleicher Weise der Scheitel eines in ihr liegenden Strahlbüschels ist und daher auch sein Bildkreis gemeinsamer Kreis eines Büschels linearer Kreisreihen [in der obigen Darstellung war der gemeinsame Kreis der Distanzkreis], deren Nullkreise [das sind die Ähnlichkeitszentren der Kreisreihen, Fiedler fasst Punkte als Kreise vom Radius Null auf] in q' gelegen sind. Da aber die Strahlen dieses Büschels einzeln den Strahlen des Büschels aus C als ihren projizierenden Parallelstrahlen parallel sind und somit durch gleiche und parallele lineare Kreisreihen dargestellt werden [...], so genügt es, das projizierende Büschel näher zu betrachten, um das System der Bildkreise aller Punkte der Ebene oder das planare Kreissystem näher zu untersuchen. [Fie82a, S. 23]

Dass also jede Ebene (nicht zwingend projizierend) durch Kreisreihen beschrieben werden kann, fasst er in dieser Feststellung zusammen:

Es ist auch sofort ersichtlich, dass für eine Ebene, die das Centrum C [das ist der Augpunkt] nicht enthält, die wir also durch ihre Spur s und ihre Fluchtlinie q' bestimmt denken, das System der Bildkreise dem System der Bildkreise der parallelen projizierenden Ebene gleich und nur in der Richtung der Normale vom Centrum des Distanzkreises auf die Spur s und die Fluchtlinie q' [...] verschoben ist. [Fie82a, ebd.]

4.5.3. Sätze über lineare Kreisreihen und planare Kreissysteme

Fiedler widmet den Artikel 28 seines Buches [Fie82a, S. 25] einer Untersuchung der linearen Kreisreihen eines planaren Kreissystems in Abhängigkeit der Tafelneigung α bzw. des Moduls des planaren Kreissystems, welches durch $\cot(\alpha)$ gegeben ist.

In der Abbildung 4.18 ist der Aufriss der Tafelenebene \mathcal{T} dargestellt. Der Distanzkreis ist in grau gezeichnet, die Aufrisse der Falllinien der Ebenen E_1, E_2 und E_3 mit ihren Tafelneigungen α_1, α_2 und α_3 sind erkennbar.

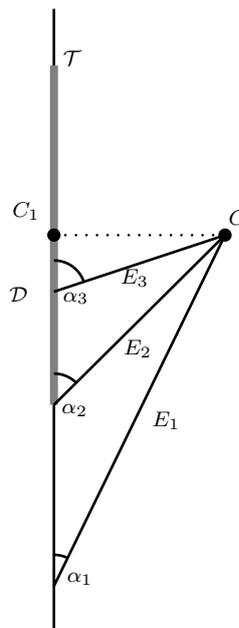


Abbildung 4.18.: Tafelneigungen dreier projizierender Ebenen E_1, E_2 und E_3

Man hat die folgende Aussage:

Satz 4.20. Sei α die Tafelneigung einer projizierenden Ebene E und s ihre Spur in der Tafelenebene. Es gilt für

- $\alpha < 45^\circ$: Der Distanzkreis besitzt keine Schnittpunkte mit der Spur s der Ebene E . (in der Abbildung 4.18 durch E_1 repräsentiert)

- $\alpha = 45^\circ$: Der Distanzkreis berührt die Spur s der Ebene E . (in der Abbildung 4.18 durch E_2 repräsentiert)
- $\alpha > 45^\circ$: Der Distanzkreis schneidet die Spur s der Ebene E . (in der Abbildung 4.18 durch E_3 repräsentiert)

Gleichermaßen lässt sich aus der relativen Lage des Distanzkreises und der Spur der Ebene auf den Neigungswinkel der projizierenden Ebene E schließen.

Beweis. Es sei mit H der Schnittpunkt der Falllinie der Ebene E durch den Punkt C in der Tafel Ebene \mathcal{T} bezeichnet. Der Punkt C_1 sei der Hauptpunkt. Dann gilt mit α als Tafelneigung der Ebene die Gleichung

$$\cot(\alpha) = \frac{d(C_1, H)}{d(C, C_1)}.$$

Da für die Bildmengen der Cotangensfunktion

$$\cot(\alpha) \in \begin{cases} (1, \infty), & \text{wenn } \alpha \in (0^\circ, 45^\circ) \\ \{1\}, & \text{wenn } \alpha = 45^\circ \\ (0, 1), & \text{wenn } \alpha \in (45^\circ, 90^\circ) \end{cases}$$

gilt, folgt die Behauptung. □

Sei eine projizierende Ebene E mit der Tafelneigung α bzw. dem Modul ihres planaren Kreissystems $\cot(\alpha)$ gegeben.

Man betrachte zunächst den Fall, dass $\alpha > 45^\circ$ gilt. Weiter sei der Winkel θ der Abweichung zweier verschiedener Strahlen CS_1 und CS_2 , wobei S_1 und S_2 ihre Durchstoßpunkte in der Tafel sind, in der Ebene E so gewählt, dass $\cos(\theta) = \cot(\alpha)$ gelte. Da die Tafelneigung der Ebene $\alpha > 45^\circ$ und somit $\cot(\alpha) \in (0, 1)$ ist, existiert ein derartiger Winkel $\theta \in (0, 90^\circ)$, der die Gleichung erfüllt. Dann folgt mit dem Zusammenhang aus Formel (4.2), dass die projizierenden Geraden CS_1 und CS_2 die Tafelneigung

$$\cot(\beta) = 1 \iff \beta = 45^\circ$$

besitzen. Bei Fiedler liest man

Wenn $\alpha > 45^\circ$, so gibt es zwei gleiche reelle Werthe der Abweichung θ , für welche $\cos \theta = \cot \alpha$ und somit $\cot \alpha = 1$ [dies ist ein Fehler, α muss durch β ersetzt werden, vgl. [Fie82a, S. 264]] wird, so dass die zugehörigen linearen

Reihen aus Kreisen bestehen, die sich im Fusspunkte des Strahles berühren; der Distanzkreis schneidet aus Q' [dies ist ebenfalls eine fehlerhafte Bezeichnung und sollte gemäß Fiedler durch q' als Spurgrade der Ebene ersetzt werden, vgl. [Fie82a, S. 264]] diese Fusspunkte heraus. [Fie82a, S. 25]

Man fasst die Aussage zu einem Satz wie folgt zusammen:

Satz 4.21. *Es seien E eine projizierende Ebene mit der Tafelneigung $\alpha > 45^\circ$, CS_1 und CS_2 zwei in ihr liegende projizierende Strahlen, die die Tafel Ebene in der Spur s der Ebene E in den Punkten S_1 und S_2 schneiden. Es gelte weiter für die Abweichung θ der Strahlen CS_1 und CS_2 die Bedingung*

$$\cos(\theta) = \cot(\alpha).$$

In diesem Fall berühren die Kreise der beiden linearen Kreisreihen der Strahlen CS_1 und CS_2 den Distanzkreis \mathcal{D} in ihren jeweiligen Ähnlichkeitszentren S_1 und S_2 .

Beweis. Wie oben beschrieben, gilt für die Tafelneigungen der beiden projizierenden Strahlen jeweils $\beta = 45^\circ$. Mithilfe von Satz 4.16 folgt dann, dass die Bildkreise der Strahlen CS_1 und CS_2 jeweils durch die Durchstoßpunkte S_1 und S_2 verlaufen. Da alle projizierenden Strahlen, deren Durchstoßpunkte auf dem Distanzkreis liegen, um 45° zur Tafel geneigt sind, müssen die Punkte S_1 und S_2 als Punkte, die zugleich auf der Spurgraden s der Ebene E liegen, die entsprechenden Berührungspunkte sein. Es gilt also die behauptete Aussage des Satzes. \square

Die Abbildung 4.19 verbildlicht die Situation, die in Satz 4.21 beschrieben ist. Die grauen Kreise sind beliebig ausgewählte Kreise der linearen Kreisreihen der Geraden CS_1 und CS_2 mit der Abweichung

$$\theta = \arccos(\cot(\alpha)).$$

Im nächsten Schritt beschreibt Fiedler den Fall der Tafelneigung der Ebene von $\alpha = 45^\circ$:

Für $\alpha = 45^\circ$ vereinigen sie [die Kreise der linearen Reihe des planaren Kreisystems] sich in den den [sic!] Falllinien der Ebene entsprechenden linearen Reihen, d. h. sie bilden nun lineare Reihen berührender Kreise mit der Spur oder Ähnlichkeitsaxe als jeweiliger gemeinsamer Tangente; das ganze System besteht aus den Kreisen, die seine Spur oder Ähnlichkeitsaxe berühren. [Fie82a, ebd.]

Auch diese Aussage Fiedlers wird in einem Satz zusammengefasst:

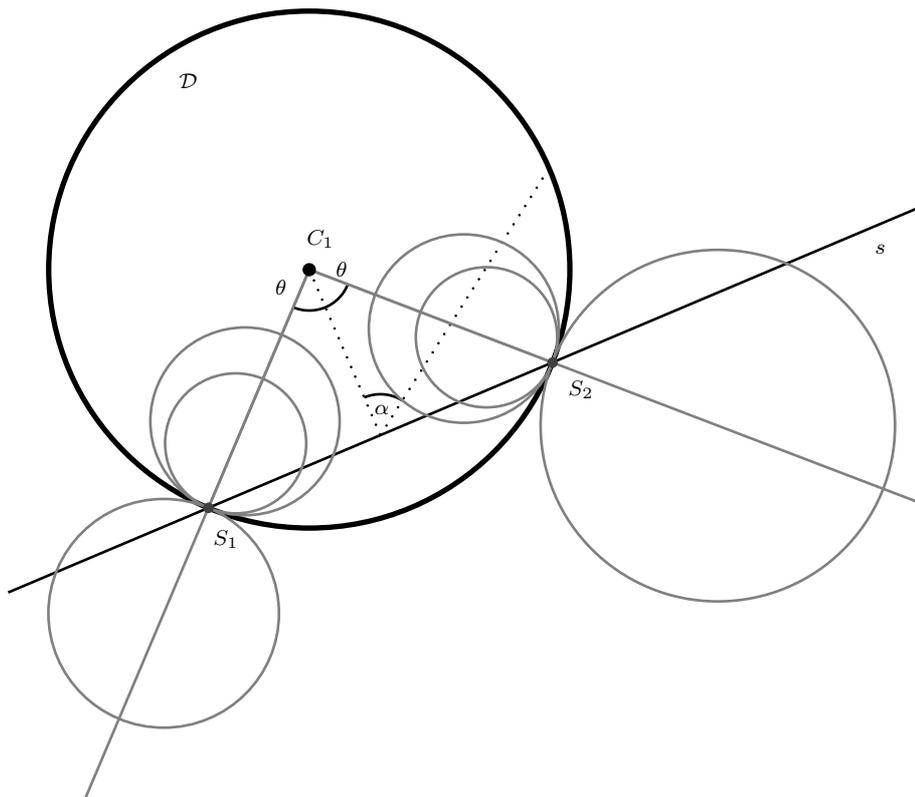


Abbildung 4.19.: Lineare Kreisreihen, welche den Distanzkreis berühren

Satz 4.22. *Es sei E eine projizierende Ebene mit einer Tafelneigung von $\alpha = 45^\circ$ sowie s die Spur der Ebene E . Die zycklografischen Bilder beliebiger Strahlen durch den Augpunkt C in der Ebene E sind lineare Kreisreihen, deren Kreise die Spurgerade s berühren.*

Beweis. Man betrachte einen beliebigen Punkt P der Ebene E , welcher nicht in der Tafelebene liegt. Bezeichnet man mit P_1 seine orthogonale Projektion auf die Tafelebene und mit H den Schnittpunkt der Falllinie durch P in der Ebene E , so ergibt sich aufgrund der Tafelneigung von $\alpha = 45^\circ$ der Ebene E die folgende Äquivalenz

$$1 = \cot(45^\circ) = \frac{d(P_1, H)}{d(P, P_1)} \iff d(P_1, H) = d(P, P_1).$$

Also berührt jeder Bildkreis eines derartigen Punktes P die Spurgerade s , in welcher der Punkt H liegt. Es folgt, dass die zycklografischen Bildkreise jeder in der Ebene E liegenden projizierende Gerade CS mit dem Durchstoßpunkt S die Spurgerade s berühren. \square

In der Abbildung 4.20 ist die Aussage des Satzes 4.22 verdeutlicht. Die grauen Kreise sind Kreise linearer Kreisreihen zweier beliebiger Strahlen der Ebene E durch den Augpunkt C und den Durchstoßpunkt S .

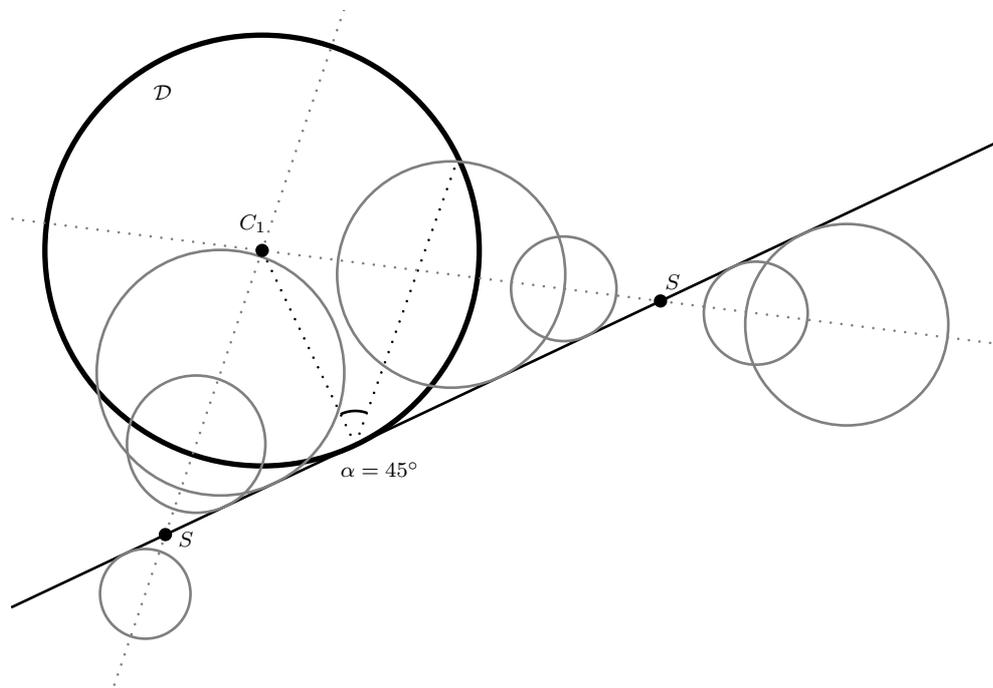


Abbildung 4.20.: Lineare Kreisreihen, die die Spur s der Ebene E berühren

Es bleibt der letzte Fall zu diskutieren, bei welchen die Tafelneigung der projizierenden Ebene E einen Winkel von $\alpha < 45^\circ$ besitzt. In diesem Fall lehrt Satz 4.20, dass der Distanzkreis die Spurgerade s der Ebene E nicht schneidet. Dass dies gleichermaßen für jeden Kreis der linearen Kreisreihen des planaren Kreissystem dieser Ebene gilt, besagt der nächste Satz:

Satz 4.23. *Sei E eine projizierende Ebene mit einer Tafelneigung von $\alpha < 45^\circ$ und der Spurgeraden s . Es gibt keinen Kreis einer linearen Kreisreihe des planaren Kreissystems der Ebene E , der einen gemeinsamen Punkt mit der Spur s besitzt.*

Beweis. Der Beweis von Satz 4.20 (Fall $\alpha < 45^\circ$) überträgt sich sinngemäß; dabei ist der Augpunkt C mit Hauptpunkt C_1 durch einen beliebigen anderen Punkt P der Ebene und seine orthogonale Projektion P_1 auf der Tafel zu ersetzen. \square

Fiedler fasst die bisher erzielten Ergebnisse zu den linearen Kreisreihen planarer Kreissysteme mit verschiedenen Tafelneigungen wie folgt zusammen:

[...] in planaren Systemen der ersten Art [gemeint sind die Ebenen mit einer Tafelneigung von $\alpha > 45^\circ$] schneiden alle Kreise die Axe reell, in solchen der

zweiten [das sind die der Ebenen mit einer Tafelneigung von $\alpha < 45^\circ$] schneiden sie sie nicht. [Fie82a, S. 25]

Im nächsten Schritt wird der Begriff des Schnittwinkels σ einer Geraden mit einem Kreis erklärt. Sei dazu $\mathcal{K}(M, r)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie g eine Gerade, die den Kreis in zwei Punkten schneidet, von denen einer der beiden Schnittpunkte mit S bezeichnet wird. Als *Schnittwinkel σ des Kreises \mathcal{K} mit der Geraden g* fasst man den kleineren der beiden Winkel auf, den die Gerade g mit der Tangenten t im Punkt S einschließt. Errichtet man das Lot l auf der Geraden g im Punkt S , so ist der Winkel, der von l und dem Berührradius r im Punkt S eingeschlossen wird, gleich dem Schnittwinkel. Die Abbildung 4.21 visualisiert die Definition des Schnittwinkels σ .

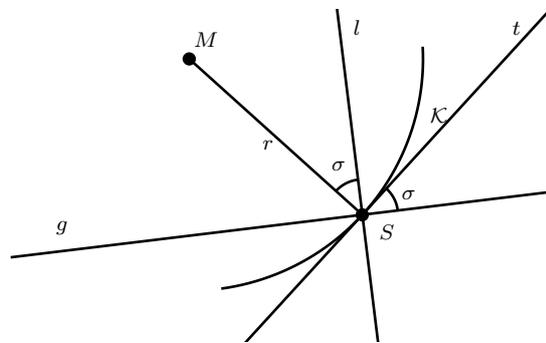


Abbildung 4.21.: Schnittwinkel eines Kreises \mathcal{K} mit einer Geraden g

Nun wird ein Zusammenhang zwischen einer einen Kreis schneidenden Geraden zum Schnittwinkel hergestellt:

Satz 4.24. Sei $\mathcal{K}(M, r)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r . Weiter sei g eine Gerade, die den Kreis im Winkel σ schneidet und den Abstand $0 < x < r$ zum Kreismittelpunkt besitzt. Dann entspricht das Verhältnis aus dem Abstand der Geraden g vom Mittelpunkt des Kreises und dem Radius r des Kreises dem Kosinus des Schnittwinkels der Geraden g mit dem Kreis, es gilt also die Gleichung

$$\frac{x}{r} = \cos(\sigma).$$

Beweis. Der Winkel, den die Gerade g mit dem Radius im Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis einschließt, beträgt

$$180^\circ - 90^\circ - \sigma = 90^\circ - \sigma.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{x}{r} = \sin(90^\circ - \sigma) = \cos(\sigma),$$

also die Behauptung. □

Man betrachte die Abbildung 4.22, die den Beweis veranschaulicht. Darin ist die Strecke, an welcher der Abstand der Geraden g zum Kreismittelpunkt M bestimmt wird, sowie der Radius r gestrichelt eingezeichnet.

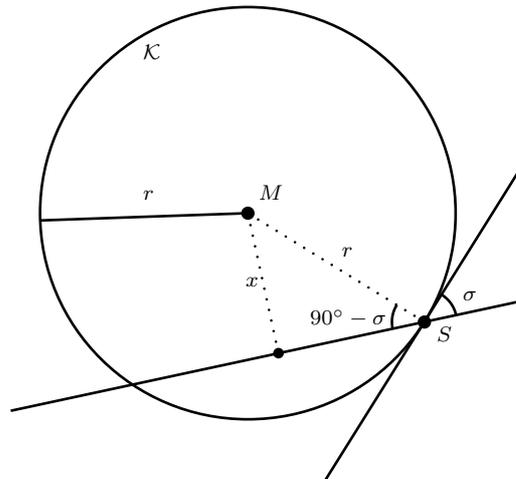


Abbildung 4.22.: Skizze zum Satz 4.24 – Schnittwinkel eines Kreises mit einer Geraden

Mithilfe des soeben diskutierten Satzes 4.24 kann man nun den folgenden Satz nachvollziehen:

Satz 4.25. *Es sei E eine projizierende Ebene mit der Spur s und der Tafelneigung $\alpha > 45^\circ$. Weiter sei CS ein beliebiger projizierender Strahl in der Ebene E , der die Tafel im Punkt S schneidet. Jeder Kreis der linearen Kreisreihe der Geraden CS schneidet die Spur im gleichen Winkel σ . Der Kosinus des Schnittwinkels stimmt mit dem Modul des planaren Kreissystems der Ebene E überein, sodass also die Gleichung*

$$\cos(\sigma) = \cot(\alpha)$$

gilt.

Beweis. Sei P ein beliebiger Punkt auf dem Strahl CS , P_1 seine orthogonale Projektion auf die Tafel und H der Schnittpunkt der Falllinie durch P in der Ebe-

ne E . Dann hat der Bildkreis $Z(P)$ des Punktes P den Radius $r = d(P, P_1)$ und der Winkel $\alpha = \angle(PHP_1)$ beschreibt die Tafelneigung des Strahls CS . Nun sei $x = d(P_1, s) = d(P_1, H)$ der Abstand des Mittelpunktes des Bildkreises $Z(P)$ von der Spurgeraden s . Da der Winkel α für jeden Punkt P auf der Geraden CS konstant ist, folgt mithilfe von Satz 4.24 die Gleichung

$$\cot(\alpha) = \frac{d(P_1, H)}{d(P, P_1)} = \frac{x}{r} = \cos(\sigma).$$

Da die Tafelneigung der Ebene E konstant ist, ist auch der Schnittwinkel σ für jeden Kreis mit der Spurgeraden identisch. \square

4.5.4. Konstruktionsaufgaben und deren Lösungen

Im Abschnitt 4.5.3 wurden verschiedene Sätze und Aussagen über planare Kreisysteme und lineare Kreisreihen zusammengetragen. Die erworbenen Erkenntnisse sollen im Folgenden genutzt werden, um Konstruktionsaufgaben zu lösen, die in Zusammenhang mit Kreisen stehen. Man wird erkennen, dass die Zyklografie in Verbindung mit der Parallel- und Zentralprojektion ein geeignetes Mittel ist, um die verschiedenen Konstruktionsschritte nachvollziehen zu können. In Fiedlers *Cyklografie* werden u. a. die unten aufgeführten Aufgaben behandelt, welche nur eine Auswahl darstellen. Zu vielen Konstruktionen gibt er im Anhang zu seinem Buch Figuren an, jedoch nur die Konstruktionen, die in der Tafelebene durchgeführt werden. Auf eine Visualisierung der räumlichen Situation wird bei Fiedler verzichtet; sie wird in dieser Arbeit zum leichteren Verständnis an bestimmten Stellen ergänzt. Diese 13 Aufgaben werden nun nachfolgend diskutiert:

- (1) Konstruktion eines Kreises einer linearen Kreisreihe mit gegebenem Mittelpunkt
- (2) Konstruktion der Kreise einer linearen Kreisreihe mit gegebenem Radius
- (3) Konstruktion der Kreise einer linearen Kreisreihe mit gegebener Tangente
- (4) Konstruktion der Kreise einer linearen Kreisreihe, welche eine Gerade unter einem bestimmten Winkel schneiden
- (5) Konstruktion der Kreise einer linearen Kreisreihe, die durch einen bestimmten Punkt verlaufen
- (6) Konstruktion der Kreise einer linearen Kreisreihe, die einen vorgegebenen Kreis berühren

- (7) Konstruktion der Kreise zweier linearen Kreisreihen, die einen gemeinsamen vorgegebenen Ähnlichkeitspunkt besitzen
- (8) Konstruktion der Kreise zweier linearer Kreisreihen, die mit einem vorgegebenen Kreis einen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt besitzen
- (9) Konstruktion der linearen Kreisreihe der Schnittgeraden zweier Ebenen, welche durch ihre planaren Kreissysteme gegeben sind
- (10) Konstruktion des Bildkreises des Schnittpunktes einer Ebene mit einer Geraden
- (11) Konstruktion des Bildkreises des Schnittpunktes dreier Ebenen
- (12) Konstruktion von Kreisen eines planaren Kreissystems, welche eine gegebene Gerade in der Tafalebene berühren sollen
- (13) Konstruktion von Kreisen, die drei sich je paarweise in verschiedenen Punkten schneidende Geraden in Winkeln mit einerlei Kosinuswert schneiden sollen

Aufgaben über eine lineare Kreisreihe

Die ersten sechs der oben angegebenen Aufgabenstellungen betreffen die Konstruktion von Kreisen einer linearen Kreisreihe. Diese werden von Fiedler in Artikel 30 beschrieben (s. [Fie82a, S. 27]), anschließend diskutiert und gelöst. Es wird sich zeigen, welche Bedeutung die Zyklografie besitzt, um die durchgeführten Konstruktionen hinsichtlich ihrer Korrektheit zu verstehen.

Die nachfolgenden Konstruktionen sind auf der Grundlage von [Fie82a, S. 27ff.] dargestellt. Fiedler geht in der Regel davon aus, dass die linearen Kreisreihen durch den Ähnlichkeitspunkt sowie den Distanzkreis gegeben sind. So wird also von linearen Kreisreihen ausgegangen, deren repräsentierte Geraden die Tafalebene schneiden.

Im Unterschied zu Fiedlers *Cyklographie* wird nachfolgend zunächst die Konstruktion durchgeführt und anschließend deren Korrektheit nachvollzogen. Bei Fiedler geht die Konstruktion mit deren räumlichen Interpretation einher.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –
 Konstruktion eines Kreises einer linearen Kreisreihe mit gegebenem
 Mittelpunkt

Es sei eine lineare Kreisreihe R durch ihren Ähnlichkeitspunkt Q und den Kreis \mathcal{D} mit dem Mittelpunkt C_1 gegeben. Das Ziel besteht darin, einen Kreis der linearen Kreisreihe R zu konstruieren, welcher einen fest vorgegebenen von den Punkten C_1 und Q verschiedenen Mittelpunkt P – der auf der Geraden C_1Q liegt – besitzt. Dieses Problem löst die folgende

Konstruktion 4.26. Man wählt zunächst einen beliebigen Durchmesser im Kreis \mathcal{D} , welcher jedoch nicht auf der Geraden C_1Q liegt. Ein Endpunkt dieses Durchmessers mit dem Kreis \mathcal{D} sei mit S bezeichnet. Anschließend konstruiert man die zu diesem Durchmesser parallele Gerade durch den gegebenen Punkt P und bestimmt ihren Schnittpunkt A mit der Geraden SQ . Der Kreis $\mathcal{K}(P, d(A, P))$ mit dem gewünschten Mittelpunkt P durch den Punkt A ist der gesuchte Kreis.

Die Abbildung 4.23 zeigt das Resultat der Konstruktion. Darin sind die zueinander parallelen Geraden sowie der Lösungskreis \mathcal{K} grau dargestellt; der vorgegebene Kreis \mathcal{D} ist in fett gezeichnet.

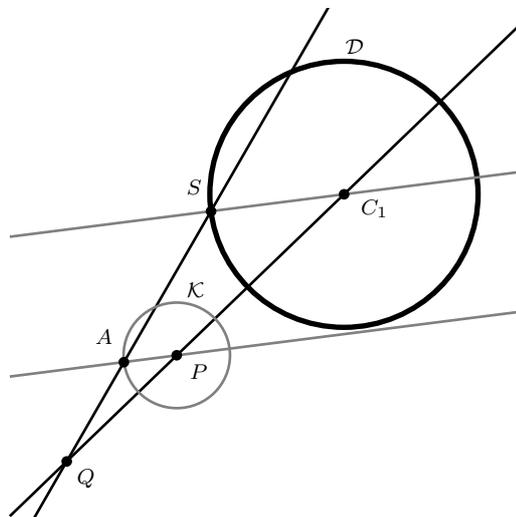


Abbildung 4.23.: Lösung der ersten Aufgabe über lineare Kreisreihen

Erläuterung zur Konstruktion. Dass die Konstruktion den gesuchten Kreis liefert, ist direkt einsehbar: Durch die Konstruktion der zu C_1S parallelen Gerade durch den Punkt P und den daraus erhaltenen Punkt A , wird offensichtlich, dass der solcherart bestimmte Kreis \mathcal{K} zum Kreis \mathcal{D} mit dem Ähnlichkeitszentrum Q ähnlich gelegen ist.

Aus diesem Grund ist der konstruierte Kreis \mathcal{K} ein Kreis der vorgegebenen Kreisreihe R .

Es sei abschließend bemerkt, dass die Konstruktion für jeden beliebigen Punkt $P \neq Q$ und $P \neq C_1$ auf der Geraden C_1Q eine Lösung liefert und sich daher der gesuchte Kreis finden lässt.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion von Kreisen einer gegebenen linearen Kreisreihe mit gegebenem Radius

Wieder sei eine lineare Kreisreihe R durch den Ähnlichkeitspunkt Q , der kein Fernpunkt ist, und den Kreis \mathcal{D} mit dem Mittelpunkt C_1 gegeben. Die Aufgabenstellung verlangt, diejenigen Kreise der linearen Kreisreihe R zu konstruieren, die einen festen, vorgegebenen Radius r besitzen. Außerdem sei der triviale Fall, dass $Q = C_1$, also der Ähnlichkeitspunkt zugleich der Mittelpunkt des Kreises \mathcal{D} ist, ausgeschlossen. In einer räumlichen Übersetzung der Aufgabenstellung sind demnach die zyklografischen Bildkreise zweier Punkte auf einer Geraden gesucht, die einen bestimmten, vorgeschriebenen Abstand zur Bildtafel besitzen.

Konstruktion 4.27. Man konstruiere den zur Geraden C_1Q senkrechten Durchmesser des Kreises \mathcal{D} und verlängere ihn zur Geraden d . Einen der Schnittpunkte der Geraden d mit dem Kreis \mathcal{D} bezeichne man mit S . Anschließend zeichne man den Hilfskreis $\mathcal{K}_1(C_1, r)$ mit Mittelpunkt C_1 und vorgegebenem Radius r . Dies liefert zwei Schnittpunkte S_1 und S_2 mit der Geraden d . Nun bestimme man die zur Geraden C_1Q parallelen Geraden durch die Punkte S_1 bzw. S_2 und bezeichne sie mit g_1 und g_2 . Weiter sei D der Schnittpunkt der Geraden g_1 mit der Geraden SQ sowie E der Schnittpunkt der Geraden g_2 mit der Geraden SQ . Abschließend bestimme man die zur Geraden d parallelen Geraden durch die zuvor konstruierten Punkte D und E . Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Gerade C_1Q seien mit M_1 und M_2 bezeichnet. Die beiden Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, d(M_1, D))$ mit Mittelpunkt M_1 durch den Punkt D und $\mathcal{K}_2(M_2, d(M_2, E))$ mit Mittelpunkt M_2 durch den Punkt E sind die gesuchten Kreise mit dem Radius r .

Erläuterung zur Konstruktion. Offenbar ist Q das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum der konstruierten Kreise mit dem gegebenen Kreis \mathcal{D} , weshalb folgt, dass sie Kreise der gegebenen linearen Kreisreihe sind. Da sie den gleichen Radius wie der Hilfskreis um C_1 besitzen und dies der gewünschte Radius r ist, sind die konstruierten tatsächlich die gesuchten Kreise der Aufgabe. Diese Konstruktion liefert die maximal zwei möglichen Lösungskreise.

Man betrachte die Zeichnung aus der Abbildung 4.24, welche die Konstruktion visualisiert. In grau ist der Hilfskreis mit dem Radius r um den Punkt C_1 dargestellt. Gestrichelt sind die zur Geraden C_1Q parallelen Geraden g_1 und g_2 .

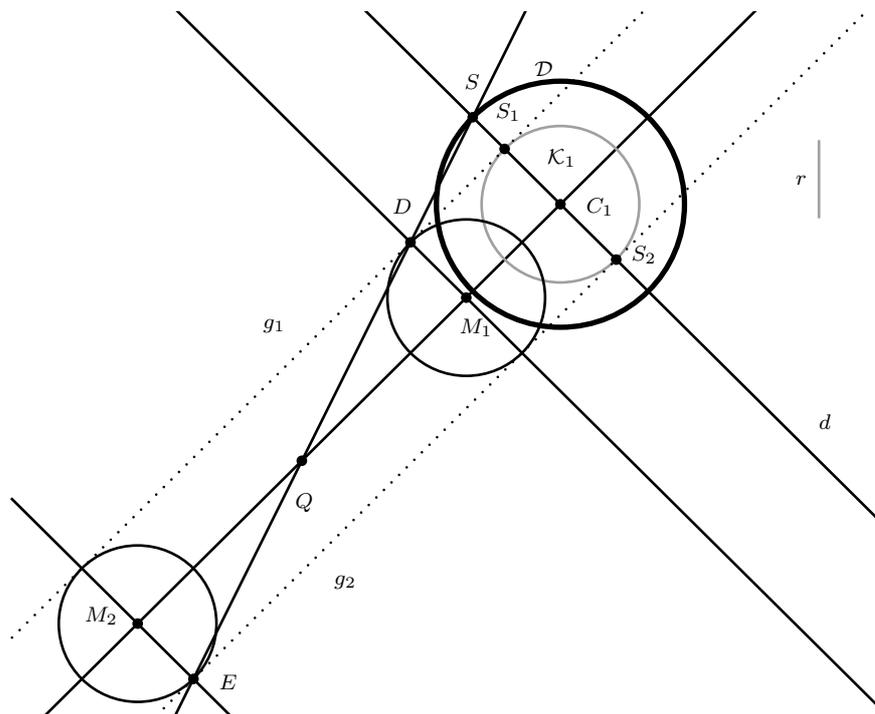


Abbildung 4.24.: Lösung der zweiten Konstruktionsaufgabe über eine gegebene lineare Kreisreihe

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion von Kreisen einer linearen Kreisreihe, die eine vorgegebene Tangente berühren

Es sei eine lineare Kreisreihe R durch den Ähnlichkeitspunkt Q und den Kreis \mathcal{D} mit dem Mittelpunkt C_1 gegeben. Gesucht sind die Kreise der linearen Kreisreihe R , welche eine fest vorgegebene Gerade s berühren.

Konstruktion 4.28. Im ersten Schritt konstruiere man das Lot auf die Gerade C_1Q durch den Punkt C_1 und bezeichne einen der beiden Schnittpunkte dieses Lotes mit dem Kreis \mathcal{D} mit (C) – die Bezeichnung erschließt sich in der nachfolgenden Erläuterung zu dieser Konstruktion. Anschließend bestimme man die senkrechte Gerade zur gegebenen Geraden s durch den Punkt C_1 und bezeichne mit X ihren Schnittpunkt mit der Geraden s . Nun bestimme man den Kreis \mathcal{K} um den Punkt C_1 mit Radius der Länge $d(C_1, X)$. Dieser liefert zwei Schnittpunkte A_1 und A_2 mit der Geraden $C_1(C)$. Der Schnittpunkt der Geraden s mit der Gerade C_1Q sei mit S bezeichnet. Nachfolgend konstruiere man die Gerade $(C)Q$ und bestimme ihre Schnittpunkte H und F mit den Geraden A_1S und A_2S . Die Lotfußpunkte M_1 und M_2 auf der Geraden C_1Q durch F und H sind die gesuchten Mittelpunkte der Kreise, die Längen $d(M_1, F)$ und $d(M_2, H)$ ihre Radien.

In der Abbildung ist das Ergebnis der Konstruktion dargestellt. In grau ist der Hilfskreis durch C_1 , mit dickeren Linien der vorgegebene Kreis \mathcal{D} sowie die gegebene Gerade s visualisiert. Aufgrund der Übersichtlichkeit ist der Hilfspunkt X mit der zugehörigen Lotgeraden nicht gezeigt.

Um die Korrektheit der Konstruktion einzusehen, wird die Interpretation Fiedlers aus [Fie82a, S. 27f.] herangezogen. Diese nutzt die Zyklografie; man stellt sich vor, dass die Konstruktion in der Tafel Ebene durchgeführt wurde.

Erläuterung zur Konstruktion. Man interpretiert den gegebenen Kreis \mathcal{D} als Distanzkreis, den Punkt C_1 als Hauptpunkt und die Gerade s als die Spurgrade zweier Ebenen E_1 und E_2 , die in einem Winkel von 45° zur Tafel geneigt sind. In dieser räumlichen Interpretation sind die gesuchten Kreise die Bildkreise der jeweiligen Schnittpunkte der Ebenen E_1 und E_2 mit der Geraden CQ . Dass diese Kreise tatsächlich die gesuchten sind, ist unmittelbar klar, denn CQ ist eine durch die lineare Kreisreihe R repräsentierte Raumgerade und der Bildkreis eines jeden Punktes einer um 45° geneigten Ebene berührt die Spurgrade dieser Ebene (vgl. Satz 4.22). Der in der Konstruktion bestimmte Punkt S wird als gemeinsamer Schnittpunkt der Tafel Ebene, der Ebenen E_1 und E_2 sowie der zur Tafel normalen Ebene durch die

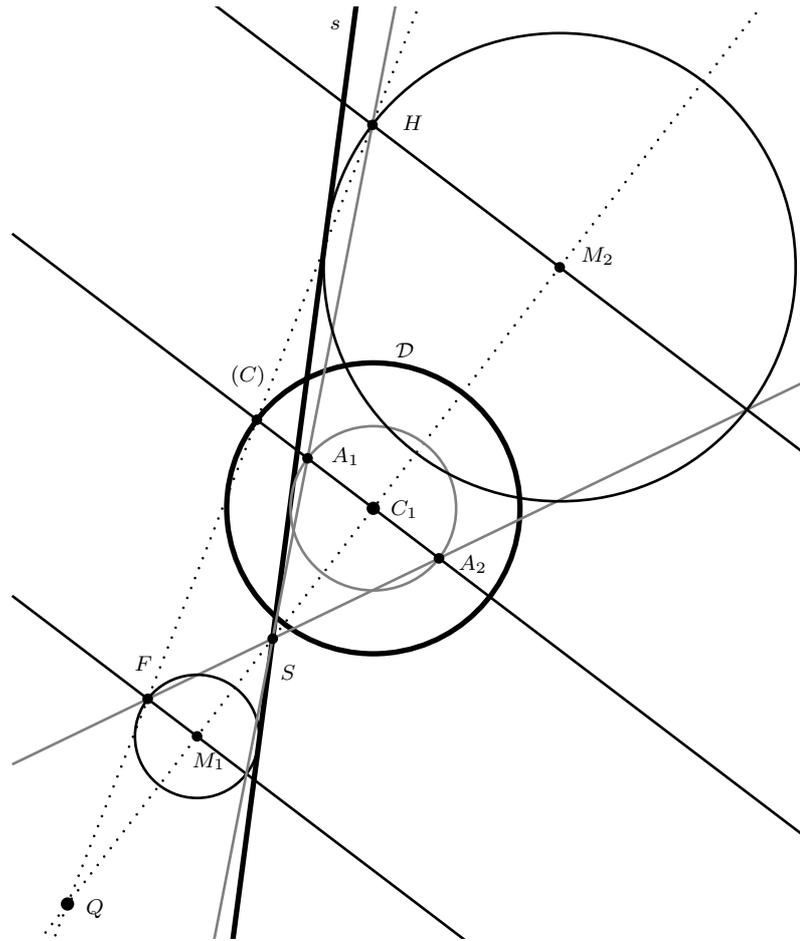


Abbildung 4.25.: Lösung der dritten Aufgabe über lineare Kreisreihen

Punkte C, C_1 und Q aufgefasst. Als Bildkreis der zur Tafel symmetrischen Schnittpunkte der Ebenen E_1 und E_2 mit der Geraden CC_1 kann der Kreis um C_1 mit dem Abstand $d(s, C_1)$ interpretiert werden (da er C_1 als Mittelpunkt besitzt und die Gerade s berühren muss), weshalb die Punkte A_1 und A_2 die zwei Umlegungen jener Schnittpunkte um die Gerade C_1Q sind. Damit liegen diese Punkte als Umlegungspunkte räumlich in den Ebenen E_1 und E_2 . Des Weiteren ist die Gerade $(C)Q$ die Umlegung der projizierenden Gerade CQ um die Gerade C_1Q in die Tafel Ebene. Letztlich ist die Gerade SA_1 die Umlegung der Schnittgeraden der Ebene E_1 mit der Ebene CC_1Q (auf dieser Schnittgeraden muss einer der gesuchten Schnittpunkte liegen, weil sie alle gemeinsamen Punkte der Ebene CC_1Q , in welcher die Gerade CQ liegt, und der Ebene E_1 enthält) um C_1Q , sodass der Schnittpunkt der Geraden $(C)Q$ mit SA_1 den umgelegten Punkt H eines Punktes des ersten Lösungskreises liefert. Analog verläuft die Argumentation für den Punkt F . Da die Mittelpunkte der gesuchten Kreise auf der Gerade C_1Q liegen müssen – welche zugleich die Gera-

de, um welch umgelegt wurde, ist – sind die Punkte M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Lösungskreise.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion von Kreisen einer linearen Kreisreihe, die eine vorgegebene Gerade unter einem festen Winkel θ schneiden, der durch den Kosinus des Winkels θ gegeben ist

Es wird wieder eine lineare Kreisreihe R betrachtet, welche durch den Kreis \mathcal{D} mit dem Mittelpunkt C_1 sowie dem Ähnlichkeitspunkt Q bestimmt ist. Weiter sei die Größe

$$v = \cos(\theta) = \frac{a}{b}$$

durch ein Verhältnis zweier Strecken a und b vorgegeben. Nun werden diejenigen Kreise der linearen Kreisreihe R konstruiert, die eine gegebene Gerade s unter dem Winkel $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ schneiden, für den gilt $v = \cos(\theta)$. Es sei x die Strecke, die die Länge des Abstandes der Geraden s vom Mittelpunkt C_1 repräsentiert, also auf dem Lot zur Geraden s durch den Punkt C_1 liegt. Dann kann mit den Strecken a , b und x unter Anwendung des Strahlensatzes eine Strecke der Länge r mit folgendem Verhältnis konstruieren:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{b} = \frac{x}{r} \left(\iff r = \frac{bx}{a} \right).$$

Hierbei ist $a, r \neq 0$. Nun kann man die folgende Konstruktion zur Lösung der Aufgabenstellung durchführen:

Konstruktion 4.29. Im ersten Schritt bildet man die parallele Gerade zur Geraden s durch den Punkt C_1 , einer der Schnittpunkte mit dem Kreis \mathcal{D} sei der Punkt (C) . Anschließend konstruiere man den Hilfskreis \mathcal{K} mit dem Mittelpunkt C_1 und dem oben bestimmten Radius r und bezeichne seine Schnittpunkte mit der Geraden $(C)C_1$ mit A_1 und A_2 . Weiter sei S der Schnittpunkt der Geraden C_1Q mit der gegebenen Geraden s . Nun konstruiere man die Geraden A_1S und A_2S und bezeichne ihre Schnittpunkte mit der Geraden $(C)Q$ mit S_1 und S_2 . Durch diese Schnittpunkte legt man die zu $(C)C_1$ parallelen Gerade und erhält mit der Geraden C_1Q die Schnittpunkte P_1 und P_2 . Die Kreise mit dem Mittelpunkt P_1 durch den Punkt S_1 sowie Mittelpunkt P_2 und S_2 sind die gesuchten Lösungskreise.

Die Abbildung 4.26 zeigt die Lösungskreise in grau, die zu $(C)C_1$ parallelen Geraden durch die Punkte S_1 und S_2 sind gepunktet dargestellt. Mit dicken Linien sind die gegebene Gerade s sowie der Kreis \mathcal{D} dargestellt. Die konstruierten Kreise schneiden

die Gerade s in diesem Beispiel in einem Winkel von 30° , welcher durch den Wert

$$v = \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bzw. durch zwei Strecken mit den Längen $\sqrt{3}$ und 2 gegeben ist.

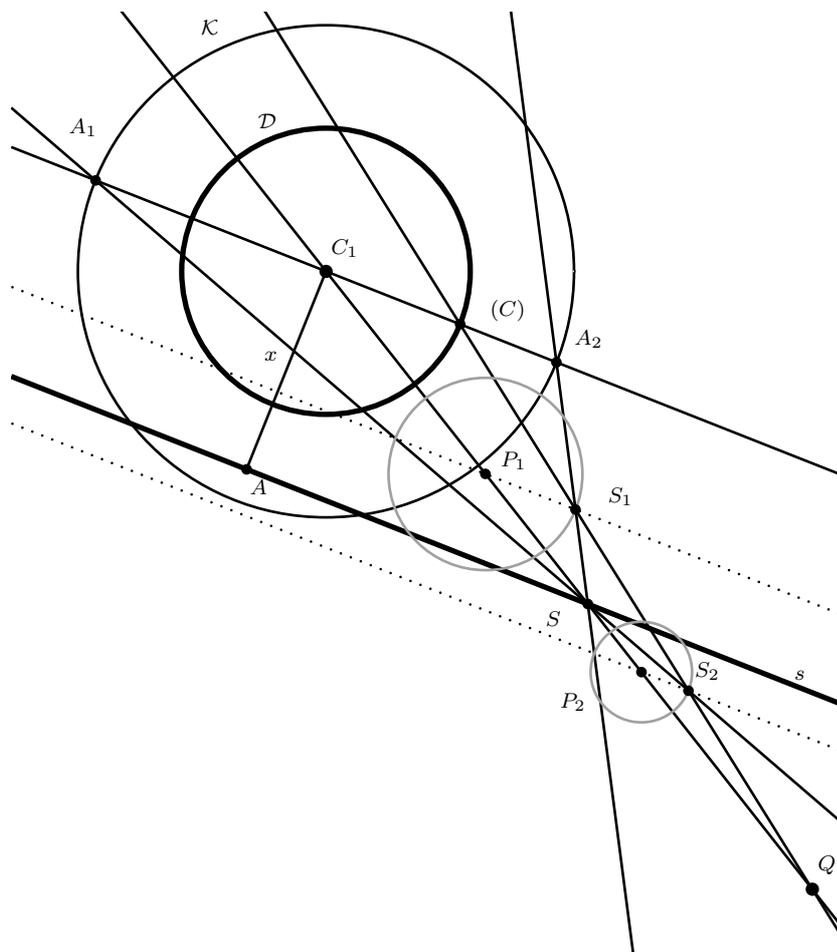


Abbildung 4.26.: Auflösung der vierten Konstruktionsaufgabe

Da Fiedler darauf verweist, dass die Konstruktion (und damit auch die Erläuterung derselben) ähnlich zur dritten Konstruktionsaufgabe verlaufe, wird an dieser Stelle eine eigene Interpretation der Konstruktion gegeben. Dabei ist darauf zu achten, dass diesmal die Punkte (C) , C_1 und der Kreis \mathcal{D} nicht als Umlegung des Punktes C , Hauptpunkt und Distanzkreis zu interpretieren sind. Um jedoch in den Bezeichnungen den Bezug zur Literatur zu erhalten, wurden diese unverändert gelassen.

Erläuterung zur Konstruktion. Die Idee der Konstruktion besteht darin, diejenigen Kreise zu konstruieren, die zur linearen Kreisreihe R gehören und zugleich Kreise

eines bestimmten planaren Kreissystems P sind. Zunächst interpretiert man die Gerade s als die Spur einer im Raum liegenden projizierenden Ebene E , welche eine Tafelneigung von mehr als 45° besitzt. Der konstruierte Hilfskreis mit dem Radius r wird als Distanzkreis aufgefasst. Da der Radius dieses Kreises aus dem gegebenen Kosinus sowie dem Abstand der Spur ermittelt wurde, liefert der Satz 4.25, dass das planare Kreissystem P der Ebene E (welches durch den Hilfskreis und die Spur s repräsentiert wird) den Modul $\cot(\alpha) = \cos(\theta)$ besitzt. Der gleiche Satz erklärt dann, dass jede lineare Kreisreihe des planaren Kreissystems P ihren Ähnlichkeitspunkt auf der Spur s besitzt und sämtliche ihrer Kreise die Spur s unter dem gleichen Winkel θ schneiden.

Nun müssen die Kreise gefunden werden, die zu einer linearen Kreisreihe des planaren Kreissystems P und zur einer linearen Kreisreihe R gehören. Dazu wurden der Schnittpunkt S der Geraden C_1Q und s konstruiert. Die Konstruktion der parallelen Durchmesser durch die Punkte S_1 und S_2 der Kreismittelpunkten auf der Geraden $C_1S = C_1Q$ zeigt, dass die Kreise tatsächlich den Ähnlichkeitspunkt Q (und aus diesem Grund zur Reihe R gehören) und den zweiten Ähnlichkeitspunkt S besitzen und somit Kreise des planaren Systems P sind (und deshalb die Gerade im gewünschten Winkel schneiden). Man hat also die Kreise gefunden.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion der Kreise einer linearen Kreisreihe, die durch einen Punkt P verlaufen

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, Kreise einer linearen Kreisreihe zu ermitteln mit der Einschränkung, dass sie durch einen fest vorgegebenen Punkt P verlaufen sollen. Dazu sei der Punkt P vorgegeben und die lineare Kreisreihe wieder durch den Kreis \mathcal{D} mit dem Mittelpunkt C_1 und den Ähnlichkeitspunkt Q als Ähnlichkeitspunkt bestimmt. Man konstruiert⁴⁷ die gesuchten Kreise gemäß der folgenden

Konstruktion 4.30. Zunächst bestimme man die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 der Geraden QP mit dem Kreis \mathcal{D} . Anschließend bestimme man die zu den Geraden C_1Q_1 und C_1Q_2 parallelen Geraden durch den Punkt P . Ihre Schnittpunkte P_1 und P_2 mit der Geraden QC_1 sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, welche durch $\mathcal{K}_1(P_1, d(P_1, P))$ und $\mathcal{K}_2(P_2, d(P_2, P))$ gegeben sind.

In der Abbildung 4.27 sind die grau dargestellten Lösungskreise gezeigt, die durch P gezeichneten Parallelen sind als gepunktete Geraden zu erkennen.

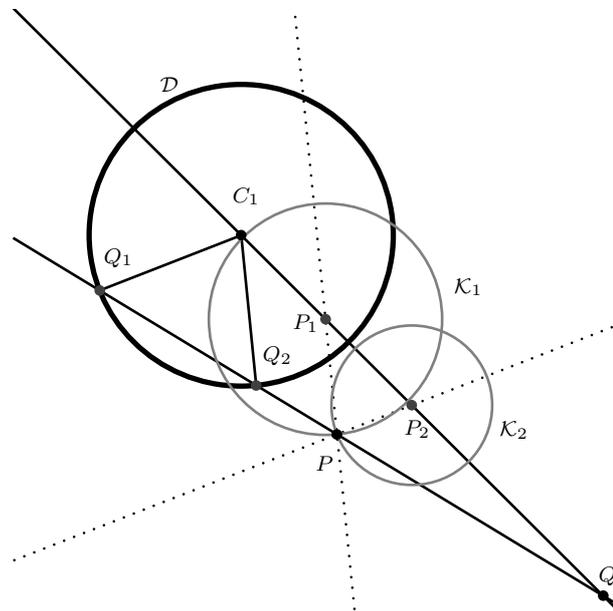


Abbildung 4.27.: Auflösung der fünften Konstruktionsaufgabe

⁴⁷Es wird davon ausgegangen, dass sämtliche Schnittpunkte in der Konstruktion existieren, also Spezialfälle ausgenommen sind.

Erläuterung zur Konstruktion. Dass die Konstruktion die Lösungskeise liefert, ist aufgrund der Konstruktion der parallelen Radien offensichtlich. Da beide Kreise konstruktionsbedingt durch P verlaufen, sind sie die gesuchten.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion der Kreise einer gegebenen linearen Kreisreihe, die einen vorgegebenen Kreis berühren

Bevor diese Aufgabe behandelt werden kann, wird eine Konstruktion angegeben, mit deren Hilfe die Bildkreise der Schnittpunkte eines projizierenden Strahls mit einem zyklografischen Kegel bestimmt werden können. In [Fie82a, S. 18] wird aufgezeigt, wie diese durchzuführen ist.

Sei dazu Q ein gegebener Punkt in der Tafelebene. Gesucht sind die Bildkreise der Schnittpunkte eines projizierenden Strahles CQ mit einem zyklografischen Doppelkegel \mathfrak{K} , dessen Spitze M in der gleichen Halbebene bezogen auf die Tafel wie der Augpunkt C liegt und Mantelfläche über die Tafel hinweg verlängert ist. Zusätzlich werden der Distanzkreis \mathcal{D} mit dem Mittelpunkt C_1 sowie der Bildkreis $Z(M)$ – man bezeichnet ihn als Spurkreis des Kegels \mathfrak{K} – mitsamt seines Mittelpunktes M_1 als bekannt vorausgesetzt. Außerdem sei davon ausgegangen, dass die Abstände $d(M, M_1) \neq d(C, C_1)$ verschieden sind.

Konstruktion 4.31. Zunächst bestimme man mithilfe von Konstruktion 3.4 den äußeren Ähnlichkeitspunkt M' der Kreise $Z(M)$ und \mathcal{D} . Anschließend zeichne man die Gerade $M'Q$ und bestimme ihre maximal zwei möglichen Schnittpunkte S_1 und S_2 mit dem Kreis $Z(M)$. Nun konstruiere man die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Geraden M_1S_1 und M_1S_2 mit C_1Q . Die Kreise $\mathcal{K}_1(P_1, d(P_1, S_1))$ und $\mathcal{K}_1(P_2, d(P_2, S_2))$ sind die gesuchten Lösungskreise.

Es ist zu bemerken, dass die Konstruktion gleichermaßen durchgeführt werden kann, wenn die Spitze des zyklografischen Doppelkegels auf der anderen Seite der Tafel liegt; in diesem Fall ist nicht das äußere, sondern das innere Ähnlichkeitszentrum zu wählen.

Im Abschnitt 7.4.1 wird eine ähnliche Konstruktion vorgestellt, die sich an [Adl06] orientiert. Die dort verwendete Methode, um die Korrektheit der Konstruktion einzusehen, ist die Parallelprojektion. Um die oben beschriebene Konstruktion 4.31 nachvollziehen zu können, verwendet Fiedler die Zentralprojektion und Erkenntnisse über lineare Kreisreihen, wie sich nun zeigen wird. Es wird davon ausgegangen, dass die Konstruktionen in der Tafelebene geschehen.

Erläuterung zur Konstruktion. Zunächst sieht man wegen der Definition des zentralperspektivischen Abbildungsverfahrens ein, dass die Schnittpunkte K_1 und K_2 des zyklografischen Doppelkegels \mathfrak{K} mit dem projizierenden Strahl CQ auf den Punkt Q zentralprojiziert werden. Da weiter der Punkt M als Kegelspitze auf jeder Mantellinie des Doppelkegels \mathfrak{K} liegt, müssen all ihre Zentralprojektionen durch den Punkt

M' verlaufen. Somit ergibt sich sofort, dass die Gerade MQ die Zentralprojektion der beiden Mantellinien m_1 und m_2 , auf denen die oben genannten Schnittpunkte liegen, ist. Da Punkte der Tafel Ebene Fixpunkte der Zentralprojektion sind, müssen die Schnittpunkte S_1 und S_2 als gemeinsame Punkte der Geraden $M'Q$ mit dem Kreis $Z(M)$ die Schnittpunkte der Mantellinien m_1 und m_2 mit der Tafel sein.

Das Korollar 4.5 lehrt, dass die gesuchten Bildkreise Berührungskreise des Spurkreises $Z(M)$ sind. Da die Mantellinien um 45° zur Tafel geneigte Strahlen sind, ergibt Satz 4.16 zusammen mit den bisherigen Erkenntnissen dieser Erläuterung, dass die Punkte S_1 und S_2 die Berührungspunkte der gesuchten Bildkreise sind. Da sie eine geradentreue Abbildung ist, folgt unmittelbar, dass die Strahlen M_1S_1 und M_1S_2 die Parallelprojektionen der Mantellinien m_1 und m_2 sind. Dies, zusammen mit der Tatsache, dass alle Kreise der linearen Kreisreihe der Geraden CQ ihren Mittelpunkt auf der gemeinsamen Zentrale C_1Q haben (da Q ihr Ähnlichkeitspunkt ist), liefert, dass die konstruierten Punkte P_1 und P_2 die gesuchten Mittelpunkte und \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 die gesuchten Kreise sind.

In der Abbildung 4.28 sind die konstruierten Bildkreise der Schnittpunkte der Geraden CQ durch den Doppelkreisegel \mathfrak{K} in grau dargestellt. In verstärkten Linien sind die gegebenen Kreise \mathcal{D} und $Z(M)$ gezeigt. Die Kreise des in der Abbildung 4.28 dargestellten Beispiels lassen schließen, dass die Gerade CQ den Doppelkegel \mathfrak{K} auf der Seite der Tafel, auf welcher der Augpunkt C nicht liegt, schneidet. Deshalb liegen die Bildkreise der Durchstoßpunkte erwartungsgemäß (vgl. die Überlegungen des Satzes 4.3) außerhalb des Kreises $Z(M)$.

Jetzt kann die Lösung der eigentlichen Konstruktionsaufgabe angegeben werden. Sei dazu die gegebene lineare Kreisreihe durch den Kreis \mathcal{D} mit dem Mittelpunkt C_1 und den Ähnlichkeitspunkt Q bestimmt. Der Kreis \mathcal{M} mit dem Mittelpunkt M_1 ist der vorgegebene Kreis, der von den zu bestimmenden Kreisen der linearen Kreisreihe berührt werden soll. Damit sowohl äußeres und inneres Ähnlichkeitszentrum der beiden gegebenen Kreise existieren, sei von verschiedenen Radien und Nicht-Konzentrität ausgegangen. Nun zur Auflösung des Konstruktionsproblems:

Konstruktion 4.32. Man konstruiere mithilfe von Konstruktion 3.4 den äußeren Ähnlichkeitspunkt M' sowie den inneren Ähnlichkeitspunkt $M^{*'}$ der beiden Kreise \mathcal{D} und \mathcal{M} . Die Konstruktion wird nun ausgehend vom Punkt M' fortgesetzt. Man bestimme die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Geraden $M'Q$ mit dem Kreis \mathcal{M} . Die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Geraden C_1Q mit den Geraden M_1S_1 und M_1S_2 sind Mittelpunkte der gesuchten Kreise; die Punkte S_1 und S_2 liegen auf ihrer Peripherie, weshalb die gesuchten Kreise gefunden sind. Erneute Durchführung der Konstruktion ausgehend vom Punkte $M^{*'}$ liefert die verbleibenden Kreise.

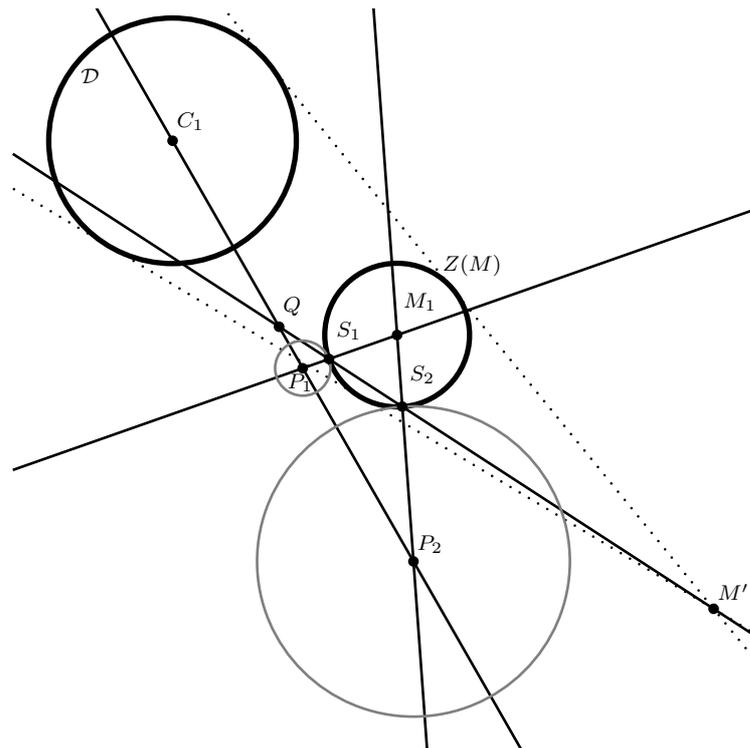


Abbildung 4.28.: Konstruktion der Bildkreise der Kegeldurchstoßpunkte eines projizierenden Strahls durch Q mit einem zyklografischen Kreiskegel mit der Spitze M , welcher durch den Bildkreis $Z(M)$ gegeben ist

In der Abbildung 4.29 ist die Lösung der sechsten Konstruktion Aufgabe gezeigt. In grau sind die konstruierten Berührungskreise dargestellt. Dabei wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Punkte dargestellt, die ausgehend vom äußeren Ähnlichkeitszentrum konstruiert wurden. Die beiden verbleibenden Lösungskreise sind ebenfalls eingezeichnet.

Erläuterung zur Konstruktion. Unter Beachtung der zuvor erklärten Konstruktion 4.28 ist die Auflösung der Aufgabenstellung leicht nachvollziehbar. Man interpretiere den zu berührenden Kreis M als den Spurkreis zweier zyklografischer Doppelkegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 , die in symmetrischer Lage zur Tafel Ebene sind. Nun ermittelt man die Bildkreise derjenigen Punkte der Raumgeraden CQ (die durch die lineare Kreisreihe durch D und Q repräsentiert wird), in denen diese die beiden zyklografischen Doppelkegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 schneidet. Diese sind offenbar die gesuchten Kreise. Die Konstruktion 4.28, auf der die Lösung der sechsten Konstruktion Aufgabe beruht, leistet das Gewünschte.

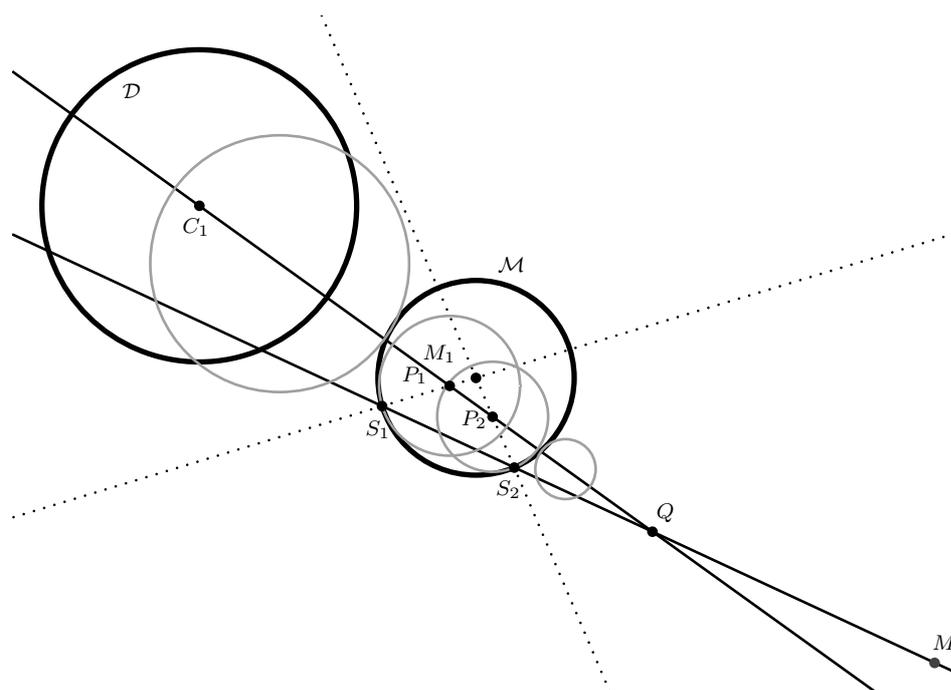


Abbildung 4.29.: Konstruktion der Berührungskreise zu einem vorgegebenen Kreis \mathcal{M} einer linearen Kreisreihe, welche durch den Kreis \mathcal{D} und den Ähnlichkeitspunkt Q gegeben ist

Aufgaben über zwei lineare Kreisreihen

Fiedler untersucht in [Fie82a, S. 32ff.] zwei gegebene lineare Kreisreihen. In diesem Kontext behandelt er die Probleme (s. [Fie82a, S. 32]): Zu zwei linearen Kreisreihen konstruiere man

- (1) zwei Kreise je einer Kreisreihe, welche einen vorgegebenen Ähnlichkeitspunkt besitzen,
- (2) die Kreise der jeweiligen Kreisreihen, die mit einem gegebenen Kreis einen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt besitzen,

Des Weiteren sollen lineare Kreisreihen gefunden werden, welche

- 3) [...] einen gegebenen Modul haben und einem ebenen Systeme von gegebenem andern Modul und einer Ähnlichkeitsaxe von vorgeschriebener Richtung angehören; 4) [...] eine gegebene Gerade der Tafel unter vorgeschriebenem, d.h. durch seinen \cos . bestimmten Winkel schneiden, oder die einem ebenen Systeme von gegebenem Modul und gegebener Ähnlichkeitsaxe angehören (Art. 27); oder, was nur eine andere Form des vorigen, aber doch wohl erwähnenswerth ist, 5) [...] mit drei beliebigen Kreisen der Tafel eine gemeinsame Ähnlichkeitsaxe haben, etc. [Fie82a, S. 32]

Um zu verstehen, wie er diese Aufgaben behandelt und welche räumliche Interpretationen zu deren Lösung beitragen, werden im Rahmen dieser Arbeit nachfolgend die ersten beiden Konstruktionen gezeigt.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion je eines Kreises aus zwei gegebenen linearen Kreisreihen, die einen gemeinsamen vorgegebenen Ähnlichkeitspunkt besitzen

Das Ziel dieser Aufgabenstellung ist es, insgesamt zwei Kreise zweier gegebener linearer Kreisreihen L_1 und L_2 , welche jeweils durch einen Kreis \mathcal{D} mit Mittelpunkt C_1 und einen Kreis \mathcal{R} mit Mittelpunkt R_1 und den Ähnlichkeitspunkten A_1 und A_2 gegeben sind, zu bestimmen. Dabei sollen diese beiden zu bestimmenden Kreise einen vorgegebenen Ähnlichkeitspunkt M besitzen. Man kann davon ausgehen, dass beide Kreise denselben Radius besitzen, andernfalls konstruiert man mithilfe von Konstruktion 4.27 einen der maximal zwei möglichen Kreise der linearen Kreisreihe L_2 , der den Radius des Kreises \mathcal{D} besitzt. Die gestellte Aufgabe löst man nun wie folgt:

Konstruktion 4.33. Man bestimme durch Parallelverschiebung der Geraden C_1R_1 und R_1A_2 die vierte Ecke E des Parallelogramms $C_1R_1A_2E$. Im nächsten Schritt bestimme man den Punkt K als den Schnittpunkt der Geraden A_1M mit der Parallelen zur Geraden MA_2 durch den Punkt E . Der Schnittpunkt der Geraden MA_1 mit EA_2 sei mit O bezeichnet. Anschließend konstruiere man die vierte Ecke Z des Parallelogramms MKC_1Z durch Parallelverschiebung der Geraden MK und C_1K . Die Mittelpunkte M_1 und M_2 der gesuchten Kreise werden als Schnittpunkte der Geraden MZ mit den Geraden C_1A_1 und C_1O erhalten. Mithilfe der Konstruktion 4.26 lassen sich aus diesen Mittelpunkten die gesuchten Kreise konstruieren.

In der Abbildung 4.30 ist die beschriebene Konstruktion dargestellt. Die gestrichelten Linien dienen zur Bestimmung des Punktes E , die grauen Strecken des Punktes Z . Die grauen Kreise sind die gesuchten Lösungskreise. Mit dicken Linien sind die zwei vorgegebenen Kreise gezeigt.

Nun wird mithilfe der zyklografischen sowie der zentralperspektivischen Abbildung nachvollzogen, weshalb die Konstruktion 4.33 tatsächlich die gesuchten Kreismittelpunkte bzw. Kreise liefert.

Erläuterung zur Konstruktion. Die auf der Zyklografie basierende Idee der Konstruktion besteht – räumlich betrachtet – darin, die Bildkreise der Schnittpunkte einer Geraden g zu bestimmen (s. Abbildung 4.31), welche die durch die linearen Kreisreihen L_1 und L_2 bestimmten Geraden g_1 und g_2 schneidet und durch den Punkt M verläuft (es wird nur ein Vertreter der jeweils zwei möglichen Geraden betrachtet). Zunächst überlegt man sich, wie die Gerade g erhalten werden kann: Sie ist die Schnittgerade der zwei Ebenen E_1 und E_2 , welche jeweils durch den Punkt M sowie

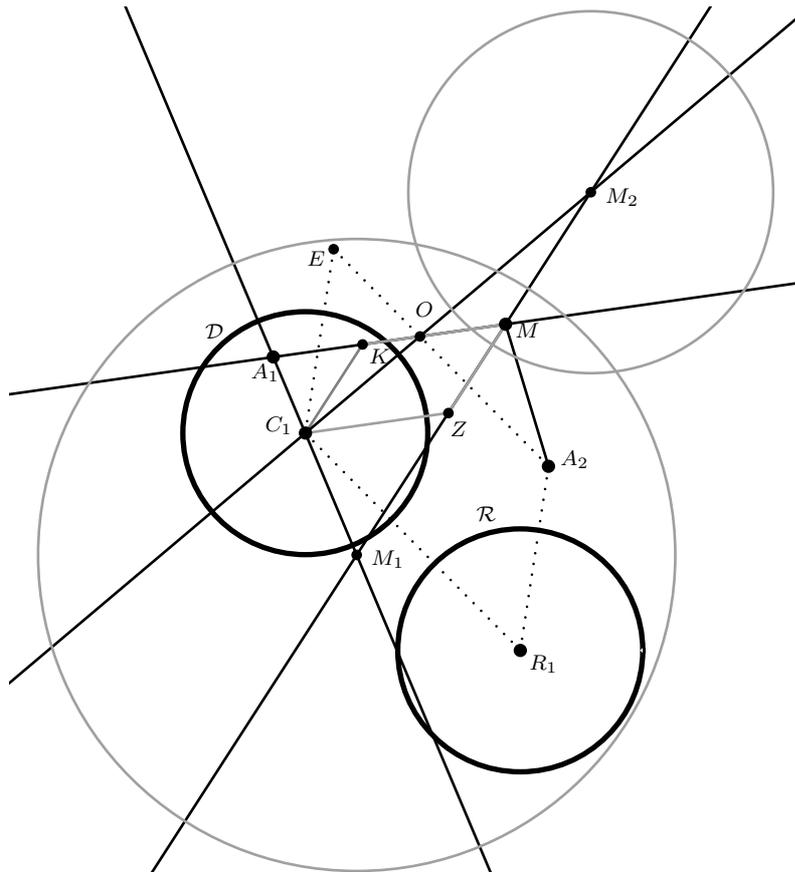


Abbildung 4.30.: Auflösung der ersten Konstruktionsaufgabe über zwei linearen Reihen – Konstruktion zweier Kreise zweier Reihen mit dem Ähnlichkeitspunkt M

durch die beiden Geraden g_1 bzw. g_2 gegeben sind.⁴⁸

Im ersten Schritt wird der durch obige Parallelogrammkonstruktion bestimmte Punkt E räumlich gedeutet. Dazu wird die lineare Kreisreihe L_2 , welche durch den Kreis \mathcal{R} mit dem Mittelpunkt R_1 und dem Punkt A_2 festgelegt ist, räumlich als die Gerade $g_2 = RA_2$ durch einen Punkt R (der in R_1 orthogonalprojiziert ist und den gleichen Abstand zur Tafel wie der Punkt C besitzt) sowie den Punkt A_2 interpretiert. Die lineare Kreisreihe L_1 ist durch den Distanzkreis \mathcal{D} , den Hauptpunkt C_1 sowie den Durchstoßpunkt A_1 bestimmt und soll räumlich als die projizierende Gerade $g_1 = CA_1$ aufgefasst werden. Durch die Parallelverschiebung der Strecke $\overline{R_1A_2}$ in den Punkt C_1 , welche durch die erste Parallelogrammkonstruktion erreicht wird, wurde der Punkt E bestimmt. Räumlich entspricht dies der Parallelverschiebung der Geraden $g_2 = RA_2$, sodass der Augpunkt C auf ihr liegt. Da die beiden gegebenen Kreise zwei gleiche Radien besitzen, ihre Raumpunkte dementsprechend gleich weit

⁴⁸Im Abschnitt 4.6 wird eine derartige Gerade näher betrachtet. Dort wird man erfahren, dass die Gerade g Transversale zu den Geraden g_1 und g_2 durch den Punkt M genannt wird.

von der Tafel Ebene entfernt sind, ist der Punkt E der Durchstoßpunkt der parallelverschobenen Geraden. Die Abbildung 4.40 auf Seite 147 macht dies verständlich. Der Punkt S in dieser Abbildung ist hier der Punkt A_1 , der Punkt Q'_1 entspricht dem Punkt E . Nach den Erkenntnissen aus Kapitel 3 ist der Punkt E somit der Fluchtpunkt der Geraden g_2 , woraus folgt, dass die Gerade g_2 auf die Gerade EA_2 zentralprojiziert wird.

Zudem erkennt man sofort aufgrund der Definition der beiden eingangs genannten Ebenen, dass die Gerade MA_1 als Spurgerade der Ebene E_1 und die Gerade MA_2 als Spurgerade der Ebene E_2 verstanden werden kann. Da die Ebene E_1 projizierend ist (sie enthält per Definition den Punkt C , da sie durch die Gerade CA_1 bestimmt ist), ist ihre Spurgerade zugleich ihre Fluchtgerade. Aufgrund der Sätze 3.9 und 3.10 ist die Fluchtlinie der Ebene E_2 durch die Parallelverschiebung der Geraden MA_2 (also ihre Spur) in den Punkt E gegeben, der als Fluchtpunkt der Geraden RA_2 erkannt worden ist. Da die Ebene E_1 projizierend ist und die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2 trivialerweise in der Ebene E_1 liegt, muss die Spurgerade $MA_1 = MK$ der Ebene E_1 gleichermaßen die Zentralprojektion der Schnittgeraden g beider Ebenen sein – vorausgesetzt, diese verläuft nicht lotrecht zur Tafel Ebene. Demnach sind die Zentralprojektionen der Schnittpunkte der Geraden g mit g_1 und g_2 auf der Geraden $MA_1 = MK$ zu finden. Des Weiteren ist der konstruierte Schnittpunkt K der Fluchtpunkt der Geraden g . Dies ist ersichtlich, da dieser Fluchtpunkt einerseits auf der Geraden MA_1 liegen muss, andererseits auf der Fluchtlinie der Ebene E_2 (denn die Gerade g liegt in E_2).

Da A_1 der Durchstoßpunkt der Geraden g_1 mit der Tafel Ebene ist, ist dieser die Zentralprojektion des Schnittpunktes von g und g_1 , der Punkt O als Schnittpunkt der Geraden MK (Zentralprojektion der Geraden g) und EA_2 (Zentralprojektion der Geraden g_2) ist die Zentralprojektion der Schnittpunktes der Geraden g und g_2 .

Im letzten Schritt dieser Konstruktionserläuterung wird der Punkt Z räumlich interpretiert. Er ist ein Endpunkt der Strecke C_1K , wenn der Punkt K in den Punkt M verschoben wird. Diese Verschiebung liefert den Punkt Z , welcher die orthogonale Projektion eines Punktes auf der Geraden g ist, der den gleichen Abstand zur Tafel hat wie der Augpunkt zur Tafel Ebene (vgl. die obige Argumentation; in der Abbildung 4.40 auf Seite 147 ist für den hier beschriebenen Fall der Punkt Q'_1 durch den Punkt K und der Punkt S durch den Punkt M zu ersetzen). Somit ist die Gerade MZ die orthogonalprojizierte Gerade g , auf der die gesuchten Kreismittelpunkte liegen müssen. Es ist damit sofort klar, dass der Punkt M_1 der orthogonalprojizierte Schnittpunkt der Geraden g und g_1 und M_2 der orthogonalprojizierte Punkt des Schnittpunktes der Geraden g und g_2 ist. Abschließend sei angemerkt, dass der

Punkt M_2 auch als Schnittpunkt der Geraden MZ mit R_1A_2 erhalten werden kann.

Zur besseren Übersicht sind nochmals alle relevanten obigen Strecken und Punkte mit ihren jeweiligen perspektivischen Deutungen zusammengefasst:

Objekt in der Tafel	projektive Interpretation
Punkt E	Fluchtpunkt der Geraden g_2
Gerade $MK = MA_1$	Zentralprojektion der Gerade g
Punkt K	Fluchtpunkt der Geraden g
Punkt A_1	Fluchtpunkt (und Durchstoßpunkt) der Geraden g_1 (nach Satz 3.8) Zentralprojektion des Schnittpunktes der Geraden g_1 und g
Punkt O	Zentralprojektion des Schnittpunktes der Geraden g_2 und g
Punkt Z	Orthogonalprojektion des Verschwindungspunkt der Geraden g
Gerade MZ	Orthogonalprojektion der Geraden g

Die Abbildung 4.31 verdeutlicht die Idee der Konstruktion. In grau ist die orthogonale Projektion der Schnittpunkte der Geraden g und g_1 sowie g und g_2 dargestellt.

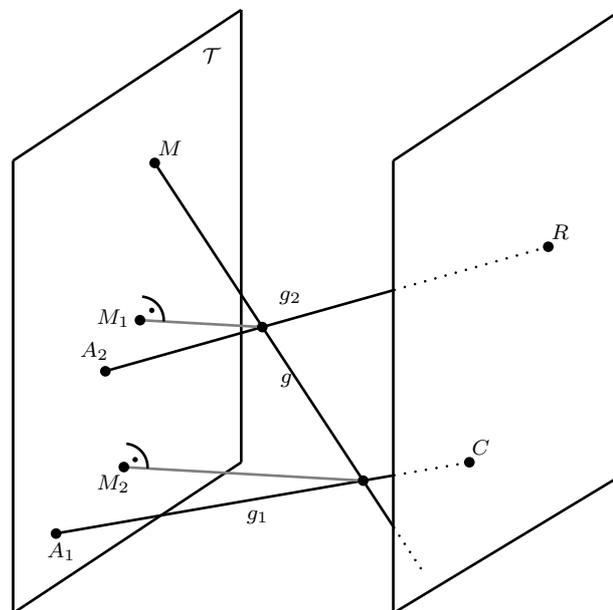


Abbildung 4.31.: Räumliche Interpretation der Lösungskonstruktion

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion der Kreise zweier linearer Kreisreihen, die mit einem vorgegebenen Kreis einen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt besitzen

Bei dieser Aufgabe geht es um die Bestimmung von vier Kreisen, wovon jeweils zwei zu zwei verschiedenen linearen Kreisreihen gehören sollen. Dabei sind die Kreise so zu bestimmen, dass sie jeweils mit einem fest vorgegebenen Kreis \mathcal{M} ein gemeinsames Ähnlichkeitszentrum besitzen. Konkret sind die Kreise \mathcal{L}_{1a} der linearen Kreisreihe L_1 und \mathcal{L}_{2a} der linearen Kreisreihe L_2 Lösungskreise, wenn sie mit \mathcal{M} ein gemeinsames Ähnlichkeitszentrum besitzen. Gleichermäßen sind die Kreise \mathcal{L}_{1b} der linearen Kreisreihe L_1 und \mathcal{L}_{2b} der linearen Kreisreihe L_2 Lösungskreise, wenn sie mit \mathcal{M} ein gemeinsames (nicht zwingend mit dem zum ersten identischen) Ähnlichkeitszentrum besitzen. Dass es tatsächlich maximal zwei Kreispaare gibt, wird die räumliche Interpretation der nachfolgenden Lösungskonstruktion bestätigen.

Seien also zwei lineare Kreisreihen L_1 und L_2 durch den Kreis \mathcal{D} mit Mittelpunkt C_1 und Ähnlichkeitspunkt A_1 sowie durch den Kreis \mathcal{R} mit Mittelpunkt R_1 und Ähnlichkeitszentrum A_2 bestimmt. Gemäß obiger Bezeichnungen sei der gegebene Kreis, mit dem die zu bestimmenden Kreise ein gemeinsames Ähnlichkeitszentrum besitzen sollen, mit \mathcal{M} benannt, sein Mittelpunkt sei M_1 . Es wird wie in der Aufgabe zuvor davon ausgegangen, dass die beiden Kreise \mathcal{R} bzw. \mathcal{D} der linearen Kreisreihen denselben Radius besitzen.

Die gesuchten Kreise liefert nachfolgende

Konstruktion 4.34. Man bestimme mithilfe von Konstruktion 3.4 das innere und äußere Ähnlichkeitszentrum M^* und M' der beiden Kreise \mathcal{D} und \mathcal{M} – sofern existent. Anschließend bestimme man die zur Geraden C_1R_1 parallele Gerade l durch den Punkt A_2 . Nun konstruiere man die Punkte S^* und S' als Schnittpunkte der beiden Geraden A_1M^* und A_1M' mit der Geraden l . Die Schnittpunkte P_1^* und P_1 der Geraden C_1S^* und C_1S' mit der Geraden R_1A_2 liefern die Mittelpunkte zweier Kreise \mathcal{L}_{2b} und \mathcal{L}_{2a} der linearen Kreisreihe R_2 . Ihre Radien ermittelt man mithilfe von Konstruktion 4.26. Abschließend bestimmt man auf der Geraden C_1A_1 die Mittelpunkte der verbleibenden Kreise der linearen Kreisreihe R_1 . Man erhält sie als Schnittpunkte P_2^* und P_2 der Geraden $P_1^*M_1$ und P_1M_1 mit der Gerade C_1A_1 . Wieder liefert die Konstruktion 4.26 die Radien der Kreise \mathcal{L}_{1a} und \mathcal{L}_{1b} . Das Kreispaar der Kreise

\mathcal{L}_{1a} und \mathcal{L}_{2a}

sowie das Kreispaar

$$\mathcal{L}_{1b} \text{ und } \mathcal{L}_{2b}$$

von Kreisen der linearen Kreisreihen L_1 und L_2 haben mit dem Kreis \mathcal{M} jeweils einen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt, sind also die gesuchten.

In der Abbildung 4.32 ist die Konstruktion dargestellt. Die mit dicken Linien gezeigten Kreise sind die gegebenen und die grauen Kreise die Lösungskreise.

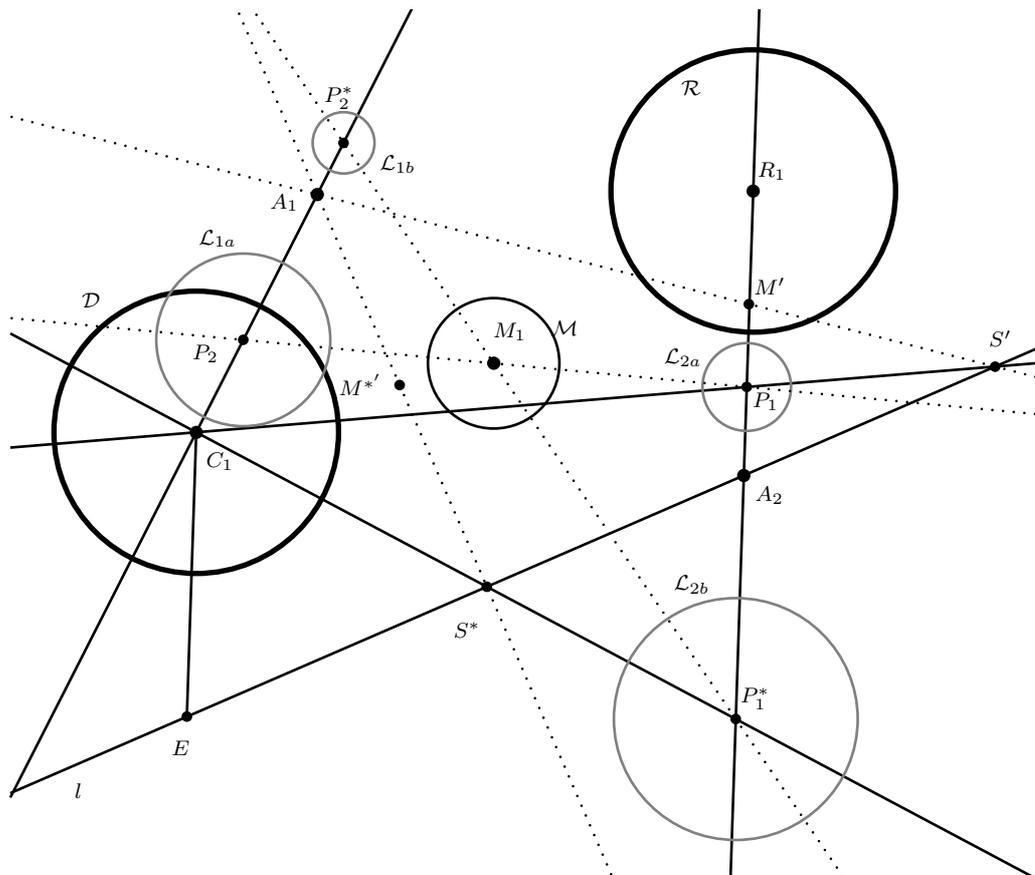


Abbildung 4.32.: Auflösung der zweiten Konstruktionsaufgabe über zwei lineare Kreisreihen – Konstruktion von Kreispaaren, die mit einem vorgegebenen Kreis das gleiche Ähnlichkeitszentrum besitzen

Mithilfe des zyklografischen Abbildungsverfahrens in Verbindung mit der Zentralprojektion wird nun verifiziert, dass die dargestellte Konstruktion die gesuchten Lösungskreise liefert. Dabei ist die Zeichenebene die Tafel Ebene.

Erläuterung zur Konstruktion. Räumlich betrachtet ist der Kreis \mathcal{M} das zyklografische Bild zweier zur Tafel spiegelsymmetrisch liegender Raumpunkte M und M^*

– es gilt also

$$Z(M) = Z(M^*) = \mathcal{M}.$$

Die lineare Kreisreihe L_1 wird durch eine Gerade $g_1 = CA_1$, welche durch den Augpunkt C und den Punkt A_1 verläuft, die lineare Kreisreihe L_2 durch eine Gerade $g_2 = RA_2$ durch einen Raumpunkt R mit $Z(R) = \mathcal{R}$ und A_2 repräsentiert. Dabei hat der Punkt R den gleichen Abstand zur Tafelenebene wie der Augpunkt C , er soll in der Verschwindungsebene liegen. Der Kreis \mathcal{D} wird als Distanzkreis aufgefasst.

Zur Lösung der Konstruktionsaufgabe sind die Bildkreise der Schnittpunkte zweier Geraden t_1 und t_2 mit den Geraden g_1 und g_2 zu bestimmen. Dabei sollen die Geraden t_1 und t_2 die beiden Geraden g_1 und g_2 treffen und durch M gehen bzw. die Geraden g_1 und g_2 treffen und durch M^* verlaufen. Aus diesem Grund wird ersichtlich, dass es höchstens zwei Lösungspaare aus jeweils zwei Kreisen zu dieser Konstruktionsaufgabe gibt (s. Abbildung 4.33).

Der in der Abbildung 4.30 dargestellte Punkt E wird als vierte Ecke des Parallelogramms $C_1R_1A_2E$ erhalten, weshalb er nach den Überlegungen in der Erläuterung zur Konstruktion 4.33 der Fluchtpunkt der Raumgeraden g_2 ist. Da diese Gerade durch den Punkt A_2 verläuft, muss die Gerade $l = EA_2$ ihre Zentralprojektion sein.

Weiter ist aufgrund von Satz 4.6 bekannt, dass die Ähnlichkeitszentren $M^{*'}$ und M' der Kreise \mathcal{D} und \mathcal{M} die zentralprojizierten Punkte der Raumpunkte M^* und M sind.

Da die Schnittpunkte der Gerade g_1 mit den Geraden t_1 und t_2 jeweils im Punkt A_1 zentralprojiziert sind (die Punkte liegen auf der Gerade g_1 und diese ist projizierend), zeigt sich, dass die Geraden $M'A_1$ sowie $M^{*'}A_1$ die zentralperspektivischen Bildgeraden der beiden Raumgeraden t_1 bzw. t_2 sind. Somit sind die Schnittpunkte S^* und S' die zentralprojizierten Bildpunkte der Schnittpunkte der Geraden t_1 und t_2 mit der Geraden g_2 .

Abschließend werden die parallelprojizierten Bildpunkte der zu den Punkten S^* und S' gehörigen Raumpunkte bestimmt. Exemplarisch wird dies am Punkt S^* verdeutlicht, überträgt sich aber sinngemäß auf den Punkt S' . Der Raumpunkt des Punktes S^* liegt einerseits auf der Geraden g_2 , andererseits auf der projizierenden Geraden CS^* , somit ist der Schnittpunkt P_1^* der orthogonalprojizierten Geraden g_2 – also R_1A_2 – und der orthogonalprojizierten Geraden CS^* – also C_1S^* – der gesuchte Mittelpunkt des ersten Lösungskreises.

Da nun damit P_1M_1 die Orthogonalprojektion der Raumgeraden t_2 ist, ergibt sich der Schnittpunkt dieser Geraden mit C_1A_1 – also der Orthogonalprojektion

der Raumgeraden g_1 – der zweite Mittelpunkt P_2^* eines zu bestimmenden Kreises. Die Begründung für den Punkt P_2 verläuft analog. Zusammengefasst sind also die Punkte P_1^* und P_2^* die orthogonalen Projektionen der Schnittpunkte der Geraden g_1 und g_2 mit t_1 und damit tatsächlich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise.

In der Tabelle sind die räumlichen Interpretationen der Geraden und Punkte dieser Konstruktionserläuterung zusammengefasst:

Objekt in der Tafel	projektive Interpretation
Punkt E	Fluchtpunkt der Geraden g_2
Punkt S'	Zentralprojektion des Schnittpunktes der Geraden t_1 und g_2
Punkt S^*	Zentralprojektion des Schnittpunktes der Geraden t_2 und g_2
Gerade $l = EA_2$	Zentralprojektion der Geraden g_2
Gerade $M'A_1$	Zentralprojektion der Geraden t_1
Gerade M^*A_1	Zentralprojektion der Geraden t_2
Gerade R_1A_2	Orthogonalprojektion der Geraden g_2
Gerade C_1A_1	Orthogonalprojektion der Geraden g_1
Gerade C_1S^*	Orthogonalprojektion der Geraden CS^*
Gerade P_1M_2	Orthogonalprojektion der Geraden t_2

In der Abbildung 4.33 ist die oben beschriebene Idee der Lösungskonstruktion visualisiert. Die quadratisch dargestellten Punkte sind die Schnittpunkte entsprechender Geraden zur Konstruktion der Mittelpunkte der Lösungskreise.

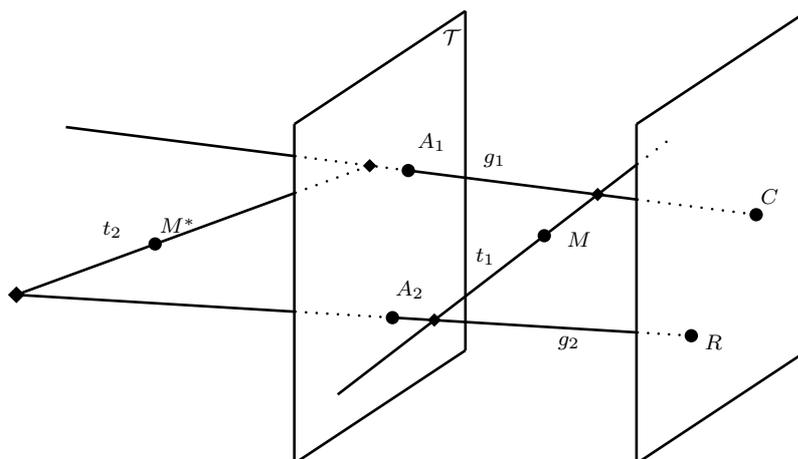


Abbildung 4.33.: Räumliche Interpretation der Lösungskonstruktion

Schnitte von Geraden und Ebenen

In den Artikeln 53-56 in [Fie82a, S. 49-53] erörtert Fiedler die Konstruktionsprobleme (9)-(13), welche am Anfang dieses Abschnittes beschrieben wurden. Diese werden nun vorgestellt. Es stellt sich heraus, dass Lösungen der vorherigen Konstruktionsprobleme benutzt werden müssen.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Schnittgerade zweier Ebenen – Konstruktion der linearen Kreisreihe der Schnittgeraden zweier Ebenen, welche durch ihre planaren Kreissysteme gegeben sind

Es seien zwei nicht zueinander parallele und nicht zur Tafel senkrecht oder parallel liegende Ebenen E_1 und E_2 im Raum gegeben, wovon die erste als projizierend angenommen wird, also durch ihre Spur s_1 und den Augpunkt C bzw. in der Tafel durch den Hauptpunkt C_1 definiert ist. Die zweite sei durch einen Raumpunkt P bzw. in der Tafel durch den Punkt P_1 und ihre Spur s_2 bestimmt. Der Punkt P soll dabei in der Verschwindungsebene, also der zur Tafel parallelen Ebene durch den Augpunkt C , liegen. Somit ist aufgrund der Tatsache, dass der Augpunkt C und der Raumpunkt P den gleichen Abstand zur Tafel besitzen, garantiert, dass die zycklografischen Bildkreise $Z(P)$ und $Z(C) = \mathcal{D}$ den gleichen Radius r besitzen. Um das zycklografische Bild der beiden Ebenen E_1 und E_2 – also die lineare Kreisreihe ihrer Schnittgeraden – zu bestimmen, geht man wie folgt vor:

Konstruktion 4.35. Man bezeichne den Schnittpunkt der Geraden s_1 und s_2 mit S . Anschließend bestimme man den Schnittpunkt M der Parallelen zu s_1 durch den Punkt C_1 mit der Parallelen zur Geraden s_2 durch den Punkt P_1 . Der Kreis $\mathcal{K}(M, r)$ mit dem soeben konstruierten Mittelpunkt M und dem Radius $r = d(C, C_1)$ gegeben durch den Distanzkreis zusammen mit dem Punkt S definieren die lineare Kreisreihe der Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2 .

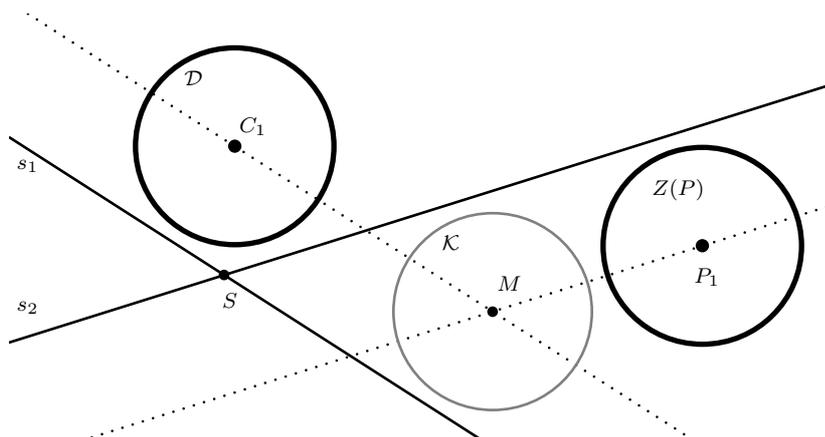


Abbildung 4.34.: Konstruktion der linearen Kreisreihe der Schnittgeraden zweier Ebenen, welche durch ihre planaren Kreissysteme bestimmt sind

Es ist in der Abbildung 4.34 die Konstruktion dargestellt. Die gegebenen Kreise der planaren Kreissysteme sind in dicken Linien, die Parallelen der Geraden aus der

Konstruktionsbeschreibung gepunktet erkennbar. Ein Lösungskreis der bestimmten linearen Kreisreihe ist in grau gezeichnet.

Erläuterung zur Konstruktion. Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Spurgeraden der Ebenen E_1 und E_2 . Da die Schnittgerade in diesen beiden Ebenen liegt, muss dieser Punkt der Durchstoßpunkt jener Schnittgeraden und damit der Ähnlichkeitspunkt ihrer beschreibenden linearen Kreisreihe sein.

Weiter erkennt man, dass die zur Spur s_1 parallele Gerade durch den Punkt C_1 die orthogonale Projektion der Verschwindungslinie der Ebene E_1 auf der Tafel darstellt. Gleichmaßen ist die Parallele zur Spur s_2 durch P_1 die orthogonale Projektion Verschwindungslinie der Ebene E_2 auf der Tafel (deshalb sollte der Punkt P in der Verschwindungsebene liegen). Demnach ist M der gesuchte Mittelpunkt.

Man sieht in der Abbildung 4.35 eine räumliche Darstellung der Erläuterung der Konstruktion. Auf Hilfslinien wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet, jedoch die Schnittgerade beider Ebenen, also die Gerade der zugehörigen linearen Kreisreihe der Lösung in grau eingezeichnet.

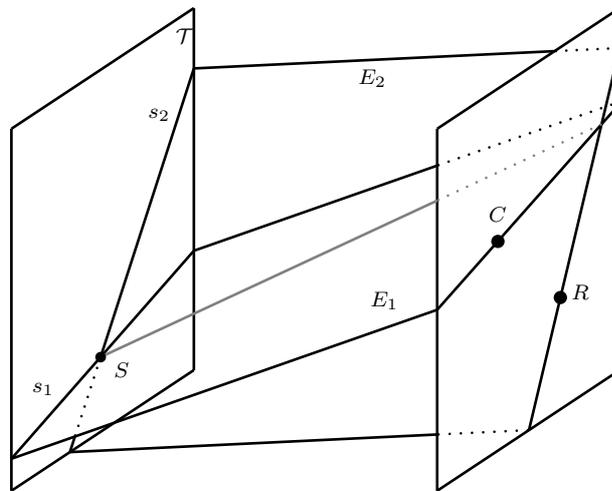


Abbildung 4.35.: Räumliche Ansicht der Lösungskonstruktion

Abschließend sei angemerkt, dass man den Fluchtpunkt der Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2 leicht finden kann. Er ist der Schnittpunkt der Geraden s_1 und der Parallelen zur Geraden MS durch den Hauptpunkt C_1 . Es ist klar, dass dies der Fluchtpunkt ist, da man ihn räumlich durch Parallelverschiebung der betreffenden Gerade in den Augpunkt erhält. In dem hier vorliegenden Fall muss also die parallelverschobene Schnittgerade in der Ebene E_1 liegen (da sie die Schnittgerade

der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist), weshalb ihr Fluchtpunkt auf der Spur s_1 liegen muss.

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –
 Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden –
 Konstruktion des Bildkreises des Schnittpunktes einer Ebene mit einer
 Geraden

In diesem Abschnitt wird diskutiert, wie der Bildkreis des Schnittpunktes P einer nicht zur Tafel parallelen Ebene E und einer nicht zur Tafel parallelen Raumgerade g bestimmt werden kann. Außerdem sei vorausgesetzt, dass die Gerade nicht in der Ebene E liege. Es soll zusätzlich davon ausgegangen werden, dass die Ebene E projizierend ist, also durch den Distanzkreis \mathcal{D} sowie ihre Spur s gegeben ist. Die Gerade g soll durch ihren Durchstoßpunkt S in der Tafel sowie ihren Schnittpunkt R (mit der Orthogonalprojektion R_1) mit der Verschwindungsebene bestimmt sein. Diesen bezeichnet man als *Verschwindungspunkt* der Geraden g .

Zunächst bestimmt man die Zentralprojektion P' des Schnittpunktes P : Da die Ebene E projizierend ist und der Punkt P in ihr liegt, muss der Punkt P' auf der Spurgeraden s liegen. Nun betrachtet man die Ebene F , welche durch die beiden Geraden CR und $RP = RS$ aufgespannt wird. Da die Punkte C und R in der Verschwindungsebene liegen und diese zur Tafel parallel ist, muss die Spur der Ebene F parallel zur Geraden CR verlaufen⁴⁹. Da der Punkt S in der Tafel Ebene und zugleich in der Ebene F liegt, ist die Spur der Ebene F durch die Parallele p zur Geraden C_1R_1 durch den Punkt S gegeben. Nach Konstruktion liegt der projizierende Strahl CP durch den Schnittpunkt P in der Ebene F ; zusammen mit der ersten Feststellung ist also der Schnittpunkt der Parallelen p mit der Spur s der gesuchte Punkt P' . Die Orthogonalprojektion P_1 des Punktes P , also den Mittelpunkt seines zyklografischen Bildkreises sowie den zugehörigen Radius, erhält man dann mit obigen Bezeichnungen aus der folgenden

Konstruktion 4.36.

- Zur Mittelpunktsskonstruktion: Man bestimme den Schnittpunkt P_1 der Geraden C_1P' und SR_1 .
- Zur Konstruktion des Kreises: Da der Durchstoßpunkt der Geraden g , der Kreis $Z(R)$ ihrer linearen Kreisreihe sowie nun der Punkt P_1 bekannt sind, lässt sich mithilfe der Konstruktion 4.26 der gesuchte Kreis konstruieren.

In der Abbildung 4.36 ist die Konstruktion dargestellt. Der Lösungskreis ist in grau visualisiert (die Hilfslinien zur Konstruktion des Kreises der gegebenen line-

⁴⁹Die Schnittgeraden einer Ebene, welche zwei parallele Ebenen schneidet, sind zueinander parallel.

ren Kreisreihe mit dem Mittelpunkt P_1 wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit entfernt).

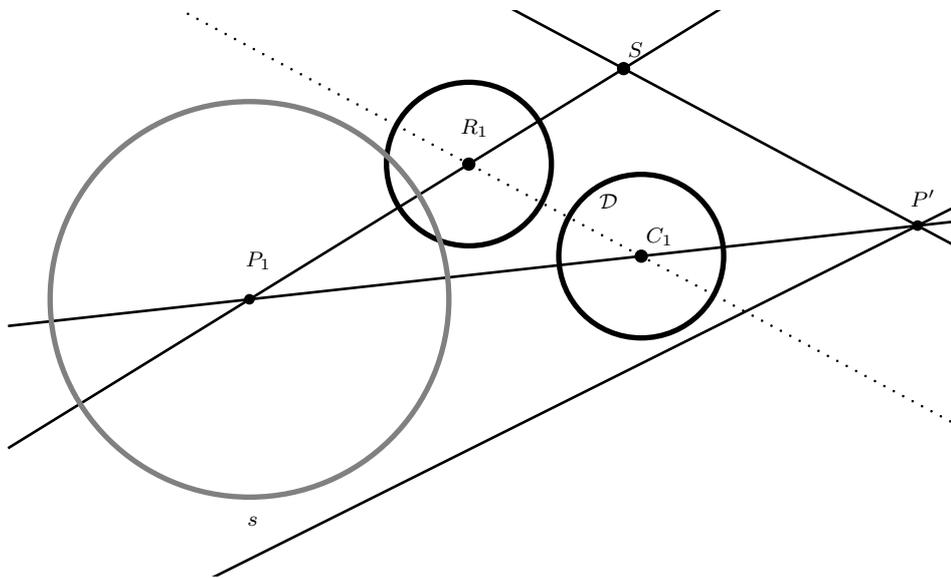


Abbildung 4.36.: Konstruktion des Bildkreises des Schnittpunktes P einer Ebene E und einer Geraden g

Erläuterung zur Konstruktion. Da der zweite Teil der Konstruktion klar ist, wird nur die Mittelpunktskonstruktion erläutert: Die Geradentreue der Orthogonalprojektion liefert, dass die Gerade SR_1 die orthogonale Projektion der Gerade RS ist. Demnach liegt auf ihr der Punkt P_1 . Gleichmaßen ist die Gerade C_1P' die orthogonale Projektion der Geraden CP' , auf welcher der Punkt P liegt. Somit ist der Punkt P_1 der Schnittpunkt der Geraden C_1P' und SR_1 .

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –
 Schnittpunkt dreier sich schneidender Ebenen –
 Konstruktion des Bildkreises des Schnittpunktes dreier Ebenen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie der Bildkreis dreier sich in einem Punkt M schneidenden Ebenen E , E_1 und E_2 gefunden werden kann. Es wird davon ausgegangen, dass die projizierende Ebene E durch ihre Spur s und den Augpunkt bzw. Hauptpunkt, die Ebene E_1 durch ihre Spur s_1 und die orthogonale Projektion r^1 ihrer Verschwindungslinie r_1 und die Ebene E_2 durch ihre Spur s_2 und die orthogonale Projektion r^2 ihrer Verschwindungslinie r_2 gegeben sind.

Die Schnittpunkte der Verschwindungslinien und Spuren dieser Ebenen seien mit Q , R und S bzw. \bar{Q} , \bar{R} und \bar{S} bezeichnet. Zum besseren Verständnis betrachte man dazu die räumliche Darstellung der Abbildung 4.37. Da die Spurgeraden s , s_1 und s_2 parallel zu den Verschwindungslinien r , r_1 und r_2 sind und die orthogonale Projektion teilverhältnistreu ist, sind die Dreiecke $\triangle QRS$ und $\triangle \bar{Q}\bar{R}\bar{S}$ zueinander ähnlich und besitzen den Ähnlichkeitspunkt M . Gleichermäßen offenbart die Abbildung, dass durch die Punkte $RS\bar{R}\bar{S}$ die Ebene E_1 und durch die anderen Punkte im gleichen Sinne die Ebenen E und E_2 gegeben sind. Deshalb ist der Punkt M sogleich der Schnittpunkt der drei Ebenen.

Diese Idee ermöglicht es jetzt auf der Tafelebene den Punkt M_1 als orthogonale Projektion des Punktes M zu konstruieren:

Konstruktion 4.37. Man bestimme die Parallele r^0 zur Spur s durch den Hauptpunkt C_1 . Man bezeichnet die Schnittpunkte der Geraden r , r^1 und r^2 mit Q , R und S und die der Geraden s , s_1 und s_2 mit \bar{Q}^1 , \bar{R}^1 und \bar{S}^1 . Der Schnittpunkt M_1 der Geraden $Q\bar{Q}^1$ und $R\bar{R}^1$ liefert den Lösungspunkt.

Erläuterung zur Konstruktion. Die obigen Überlegungen zeigten, dass der Schnittpunkt M als Schnitt der Geraden $Q\bar{Q}$ und $R\bar{R}$ erhalten wurde. Da die Geraden $Q\bar{Q}^1$ und $R\bar{R}^1$ deren orthogonalen Projektionen sind, muss M_1 der gesuchte Punkt sein.

Der Mittelpunkt M_1 des gesuchten Bildkreises $Z(M)$ des Schnittpunktes M ist gefunden; es fehlt die Bestimmung des Radius. Dieser ist jedoch leicht zu ermitteln: Der Radius des Bildkreises entspricht dem Abstand des Punktes M von der Tafelebene \mathcal{T} bzw. der Länge der Strecke $\overline{M_1M}$. Diese Strecke ist durch eine Umlegung leicht zu bestimmen. Dazu betrachte man die projizierende Gerade CM mit Schnittpunkt M' in der Tafel, welcher zugleich die Zentralprojektion des Punktes M ist. Die Gerade C_1M_1 ist die Orthogonalprojektion der Geraden CM , weshalb ihr Schnittpunkt in der Spur s der Ebene E mit dem Punkt M' zusammenfällt. Die

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion von Kreisen eines planaren Kreissystems, welche eine gegebene Gerade in der Tafel Ebene berühren sollen

Im Folgenden soll die Frage beantwortet werden, wie sich diejenigen Kreise eines planaren Kreissystems finden lassen, welche eine vorgegebene Gerade t in der Tafel Ebene berühren. Dazu wird davon ausgegangen, dass das planare Kreissystem S durch den Distanzkreis \mathcal{D} bzw. den Hauptpunkt C_1 sowie dessen Spur s der zugehörigen Ebene E in Raum gegeben ist.

In Abschnitt 4.5.3 wurde erklärt, dass jeder zyklografische Bildkreis einer Raumebene mit einer Tafelneigung von 45° die Spur dieser Ebene berührt (s. Satz 4.20, Punkt 2 bzw. Satz 4.22). Diese Tatsache kann nun wie folgt genutzt werden, um die gesuchten Kreise zu bestimmen: Man betrachte die zwei Ebenen E_1 und E_2 , welche eine Tafelneigung von 45° zur Tafel Ebene und die Gerade t als Spur besitzen. Alle Bildkreise von Punkten dieser beiden Ebenen sind Berührkreise der Geraden t . Da jedoch zur Lösung der Aufgabe nur diejenigen dieser Punkte von Bedeutung sind, welche zugleich in der Ebene E liegen, müssen die Schnittgeraden g_1 der Ebenen E und E_1 sowie g_2 der Ebenen E und E_2 bestimmt werden. Die Bildkreise der linearen Kreisreihen dieser beiden Geraden leisten dann das Gewünschte. Die Konstruktion ist wie folgt durchzuführen:

Konstruktion 4.38. Man bestimme zunächst die Tangenten t_1 und t_2 des Distanzkreises \mathcal{D} , welche parallel zur Geraden t verlaufen. Man bezeichne ihre Schnittpunkte mit der Geraden s mit Q'_1 und Q'_2 . Der Schnittpunkt der Geraden t und s sei mit S bezeichnet. Der jeweils vierte Punkt R_1 bzw. R_2 der Parallelogramme $C_1Q'_1SR_1$ bzw. $C_1Q'_2SR_2$ ist der gesuchte Mittelpunkt eines Bildkreises der linearen Reihen; der Punkt S ist ihr Ähnlichkeitspunkt. Die Radien dieser Bildkreise stimmen mit dem des Distanzkreises überein (die Orientierung ebenfalls).

Die Abbildung 4.39 zeigt die Bildkreise einer der beiden linearen Kreisreihen (die zweite ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt). Die zur gegebenen Geraden t parallelen Geraden t_1 und t_2 sind gestrichelt dargestellt. Einige Kreise der konstruierten linearen Kreisreihe sind in grau angedeutet.

Erläuterung zur Konstruktion. Da die Ebenen E_1 und E_2 jeweils um 45° zur Tafel geneigt sind, berühren ihre Fluchtgeraden den Distanzkreis. Zusammen mit der Tatsache, dass die Fluchtgeraden parallel zu den Spuren der entsprechenden Ebenen liegen, ergibt sich, dass die Geraden t_1 und t_2 die Fluchtlinien der Ebenen E_1 und E_2 sind. Die linearen Kreisreihen der Geraden g_1 und g_2 , welche die Berührkreise

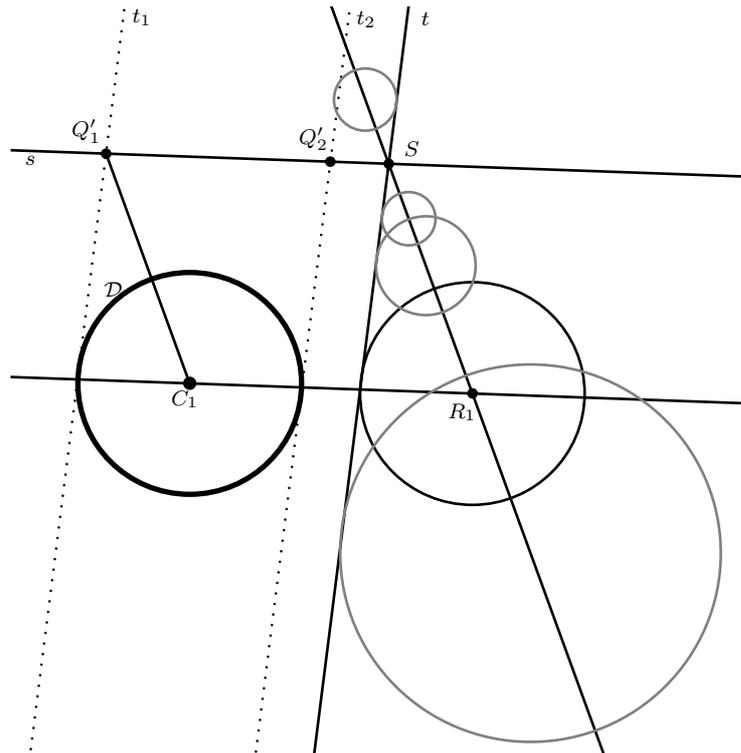


Abbildung 4.39.: Berührungskreise des planaren Kreissystemes S , die die gegebene Geraden t berühren

abbilden, liegen nach Konstruktion vollständig in je einer der Ebenen E_1 und E_2 , sodass nach Satz 3.10 ihre beiden Fluchtpunkte auf je einer der Geraden t_1 und t_2 liegen. Zusätzlich liegen die Geraden in der Ebene E , sodass die Schnittpunkte Q'_1 und Q'_2 von t_1 und t_2 mit der Spur s (welche zugleich die Spur und Fluchtgerade der Ebene E ist) die Fluchtpunkte der beiden Geraden sind. Ebenfalls folgt aus der Tatsache, dass die beiden Geraden in der Ebene E liegen, dass ihre Durchstoßpunkte in der Spur s liegen. Es ergibt sich also sofort, dass der Punkt S auf der Geraden t der Durchstoßpunkt beider Geraden sein muss (er ist nach Lage der beiden Ebenen E_1 und E_2 der gemeinsame Punkt der drei beteiligten Raumebenen). Dass die Parallelogrammkonstruktion den gesuchten Mittelpunkt liefert, ergibt sich leicht aus der Tatsache, dass die Gerade $g_1 = RS$ und ihre parallele Gerade CQ'_1 in der Ebene E liegen. Die Abbildung 4.40 zeigt die Konstruktion des Punktes R_1 räumlich. Das Parallelogramm ist mit verstärkten Linien verdeutlicht.

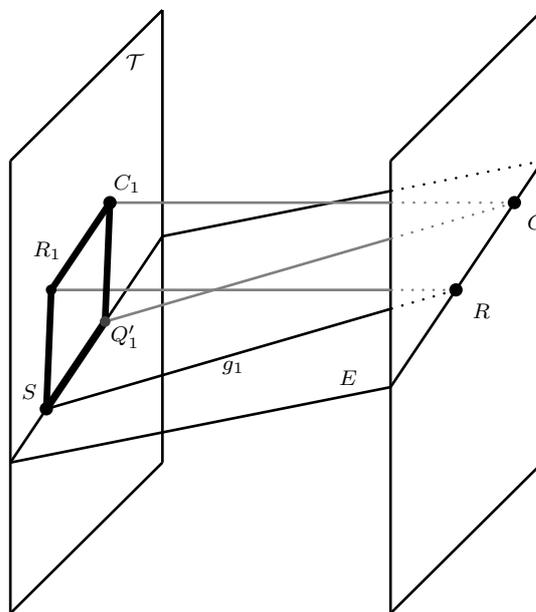


Abbildung 4.40.: Parallelogrammkonstruktion zur Bestimmung des Punktes R_1 –
räumliche Darstellung

– KONSTRUKTIONSAUFGABE –

Konstruktion von Kreisen, die drei sich schneidende Geraden in Winkeln mit einerlei Kosinuswert schneiden sollen

Es seien drei verschiedene, sich schneidende Geraden s_1 , s_2 und s_3 in der Ebene gegeben. Es sind die Mittelpunkte von Kreisen gesucht, sodass diese Kreise die drei gegebenen Geraden unter Winkeln mit gleichem Kosinus schneiden.

Die auf der Zyklografie beruhende Idee, um dieses Problem zu lösen, ist es, Ebenen durch die drei in der Tafelebene liegenden Geraden s_1 , s_2 und s_3 mit der gleichen Neigung zur Tafel zu legen. Aufgrund der Überlegungen aus Satz 4.25 ist das zyklografische Bild ihres gemeinsamen Schnittpunktes ein Lösungspunkt. Da es für jede dieser Geraden je zwei Ebenen E_1, E'_1 und E_2, E'_2 sowie E_3, E'_3 in symmetrischer Lage gibt, welche die gleiche Tafelneigung besitzen, erhält man die folgenden Kombinationen der Ebenen, die auf ihren Schnittpunkt untersucht werden müssen:

$$E_1, E_2, E_3; \quad E'_1, E_2, E_3; \quad E_1, E'_2, E_3 \quad \text{und} \quad E_1, E_2, E'_3.$$

Weitere Kombinationen müssen zur Lösung der Aufgabe nicht betrachtet werden, denn so ist beispielsweise aufgrund der symmetrischen Lage der Ebene der Schnittpunkt der Ebenen E_1, E_2, E_3 zur Tafel symmetrisch zum Schnittpunkt der Ebenen E'_1, E'_2, E'_3 , weshalb sein zyklografisches Bild und damit der Lösungskreis identisch sind.

Betrachtet man die Orthogonalprojektionen der Schnittgeraden zweier Ebenen auf der Tafel, so sind diese durch die Winkelhalbierenden der entsprechenden Spurgeraden dieser Ebenen gegeben. Deshalb folgt die Tatsache, dass sich je drei solcher Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden, man also auf diese Weise vier Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 erhält.

Jeder der die drei Geraden schneidende Kreis um M_1 schneidet diese im Winkel mit gleichem Kosinuswert. Gleiches gilt für die verbleibenden Mittelpunkte. Dass es unendlich viele Kreise sind, die die Ausgangsgeraden unter gleichem Kosinuswert schneiden, ergibt sich aus der Tatsache, dass es unendlich viele gleichgeneigte Ebenen durch die gegebenen Geraden gibt.

In der Abbildung 4.41 ist die Bestimmung der gesuchten Punkte gezeigt. Die verstärkt dargestellten Geraden sind die gegebenen Geraden, in grau-gestrichelt sind die Winkelhalbierenden gezeigt.

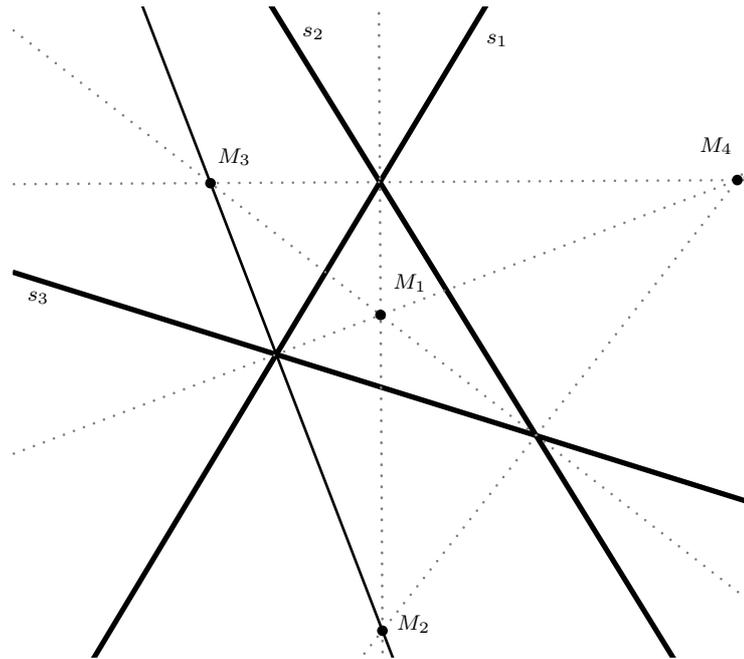


Abbildung 4.41.: Konstruktion der Mittelpunkte der Kreise, die drei gegebene Geraden unter den Winkeln des gleichen Kosinuswertes schneiden

4.6. Die Transversalen zu drei gegebenen Geraden

Im vorherigen Abschnitt wurden u. a. Lösungskonstruktionen, die Fragestellungen zu zwei gegebenen linearen Kreisreihen betreffen, vorgestellt. Zentral hierbei war die Idee, eine Gerade durch einen Punkt zu finden, welche zugleich die repräsentierenden Geraden der beiden gegebenen linearen Kreisreihen schneidet. Jetzt soll eine solche Gerade betrachtet werden, welche jedoch drei gegebene Geraden schneidet. Dazu seien drei (nicht parallele) windschiefe Geraden g , g_2 und g_3 im Raum gegeben. Gesucht ist eine Gerade, die diese drei Geraden schneidet. Fiedler bezeichnet sie als *Transversale zu den Geraden g , g_1 und g_2* . Man erhält sie, indem man einen Punkt P auf der Geraden g fixiert und zwei Ebenen E_1 und E_2 wählt, welche durch den Punkt P und die Geraden g_1 und g_2 bestimmt sind. Die Schnittgerade der beiden Ebenen ist die gesuchte Transversale und ihre Existenz ist gesichert, da die drei gegebenen Geraden nach Voraussetzung windschief sind. Da der fixierte Punkt P beliebig auf der Geraden g verschoben werden kann, gibt es unendlich viele Transversalen zu den drei Geraden.

Die Artikel 42 und 43 in [Fie82a, S.36-38] widmet Fiedler einer Untersuchung der Menge aller Transversalen zu drei windschiefen Geraden in Bezug auf die Fläche, die sie bilden. Allgemein bezeichnet man eine Fläche, die durch Bewegung von Geraden entsteht, als *Regelfläche*. Dies wird im Abschnitt 6.2 vertieft. Auch Fiedler

verwendet diesen Begriff, um die genannte Fläche zu umschreiben. Er beschreibt vorrangig, welche Eigenschaften diese Regelfläche in Bezug auf ihre Durchstoßpunkte und Fluchtpunkte in der Tafelebene besitzt. Dies soll nun nachfolgend aufgearbeitet werden.

Seien drei windschiefe, nicht parallele Raumgeraden g , g_1 und g_2 gegeben. Da nun im Folgenden keine Lösungskonstruktion zu einer konkreten Aufgabenstellung gegeben werden soll, werden Fiedlers Notationen benutzt. Die Gerade g wird als projizierende Gerade angenommen, sodass ihr Durchstoßpunkt zugleich der Fluchtpunkt Q' ist. Mit der üblichen Bezeichnung C für den Augpunkt der Projektion lässt sich $g = CQ'$ schreiben. Die zwei anderen Geraden g_1 und g_2 seien durch ihre Durchstoßpunkte S^1 und S^2 und ihre Fluchtpunkte Q'_1 sowie Q'_2 bestimmt. Da aufgrund ihrer Definition alle möglichen Transversalen dieser drei Geraden insbesondere die Gerade g schneiden, ist klar, dass die Zentralprojektionen aller Transversalen durch den Punkt Q' verlaufen müssen.

Wenn nun t eine solche Transversale ist, so schneidet sie die Gerade g , deren Schnittpunkt in Q' zentralprojiziert ist (da die Gerade g projizierend ist), die Gerade g_1 in einem Punkt P^1 und die Gerade g_2 in einem weiteren Punkt P^2 . Angenommen, die Zentralprojektion des ersten Schnittpunktes sei (nach Fiedlers Notation) mit $P^{1'}$ und die des zweiten Punktes mit $P^{2'}$ bezeichnet. Das Ziel ist, mithilfe dieser Punkte den Durchstoßpunkt S^t sowie den Fluchtpunkt Q'_t der Transversalen t herauszufinden.

Man bestimme zunächst die Gerade $P^{1'}Q'_2$. Räumlich kann sie als die Zentralprojektion einer Geraden interpretiert werden, die durch den Schnittpunkt P^1 (welcher auf der Geraden g_1 liegt) verläuft und zugleich parallel zur Geraden g_2 ist. Dies liegt daran, dass Q'_2 der Fluchtpunkt der Geraden g_2 ist und alle Geraden mit gleichem Fluchtpunkt parallel zueinander sind.

Den Durchstoßpunkt S^* der soeben bestimmten Geraden erhält man als Schnittpunkt der Geraden $P^{1'}Q'_2$ – welche ihre Zentralprojektion ist – mit der jener Geraden, welche durch Parallelverschiebung der Geraden durch die Fluchtpunkte Q'_1 und Q'_2 in den Durchstoßpunkt S^1 der Geraden s_1 bestimmt ist. Das ist auf Grundlage von Satz 3.11 leicht nachvollziehbar (denn die Gerade g_1 und die durch die Gerade $P^{1'}Q'_2$ repräsentierte Raumgerade liegen in einer Ebene). Da die Transversale t nach Annahme durch den Punkt P^1 verläuft und zudem die Gerade g_2 schneidet, liegt sie in einer Ebene E , welche durch den Punkt P^1 und die Gerade g_2 charakterisiert ist. Dementsprechend liegt der Durchstoßpunkt S^t der Transversalen t in der Spurgeraden der Ebene E , welche durch S^*S^2 gegeben ist. Der Schnittpunkt dieser Spurgeraden mit $P^{1'}Q'$ als Zentralprojektion von t liefert den gesuchten Durchstoß-

punkt S^t der Transversalen t . Der Fluchtpunkt Q'_t der Geraden t ergibt sich sofort als Schnittpunkt von $P^{1'}Q'$ mit der zur Geraden S^*S^2 parallelen Geraden durch Q'_2 .

In der Abbildung 4.42 ist die oben beschriebene Konstruktion des Flucht- und Spurpunktes einer Transversalen durch die drei windschiefen Geraden ausgehend vom Punkt $P^{1'}$ dargestellt. Erwartungsgemäß findet man diesen Punkt als Zentralprojektion des auf g_1 liegenden Punktes P^1 auf der Geraden $S^1Q'_1$. Alle Parallelen, die in der Konstruktion angegeben sind, sind als gestrichelte Linien gezeigt.

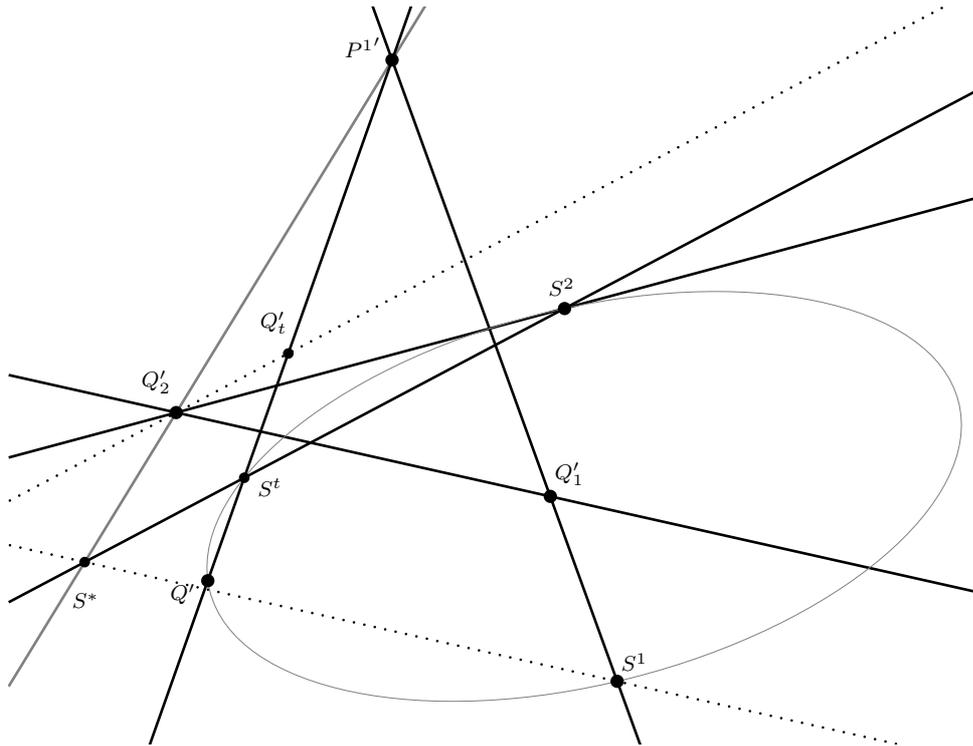


Abbildung 4.42.: Konstruktion der Spurkurve der Transversalen zu drei windschiefen Raumgeraden sowie des Fluchtpunktes einer Transversalen

Wie bereits eingangs erwähnt, schneidet jede Transversale die Gerade g , weshalb jede Zentralprojektion einer jeden Transversalen durch den Punkt Q' verläuft. Dreht man also die oben konstruierte Bildgerade $P^{1'}Q'$ um den Punkt Q' , so erhält man eine Schar von Geraden, welche allesamt Zentralprojektionen von Transversalen sind. Damit bewegt sich der Punkt $P^{1'}$ auf der Geraden Q'_1S^1 . Die Spurkurve des Durchstoßpunktes, die bei dieser Bewegung entsteht, ist in der Abbildung 4.42 in grau visualisiert. Trivialerweise verläuft sie durch die Punkte S^1 , S^2 und Q' als Punkte der Geraden g , g_1 und g_2 .

Es seien zwei Dinge abschließend angemerkt: Zunächst wurde oben erklärt, wie sich die Transversale dreier windschiefer Geraden durch einen auf einer jener Geraden fixierten Punkt finden lässt. Sie ist die Schnittgerade zweier Ebenen. Eine

weitere Möglichkeit, zu drei gegebenen Geraden g , g_1 und g_2 eine Transversale zu finden, ohne einen Punkt zu fixieren, ist die folgende: Man lege eine Ebene E so in den Raum, dass die Gerade g vollständig in ihr liegt. Da nun die Geraden g_1 und g_2 nicht parallel zur Geraden g verlaufen, besitzt die Ebene E jeweils einen Schnittpunkt P_1 bzw. P_2 mit den beiden Geraden. Somit ist die Gerade t , welche durch die soeben konstruierten Punkte verläuft, eine Transversale der drei windschiefen Geraden. Alle anderen Transversalen erhält man durch Rotation der Ebene E um die Gerade g . Fiedler erklärt, dass die durch die Transversalen gebildete Fläche

als einfaches Hyperboloid oder Hyperboloid mit einem Mantel bezeichnet [wird und] [...] eine der Flächen zweiten Grades [ist.] [Fie82a, S. 38]

Dass es sich tatsächlich um ein (einschaliges) Hyperboloid handelt, kann auch in [HCV32, S. 13] nachgelesen werden. Dort wird mit der Tatsache gearbeitet, dass einschalige Hyperboloide aus zwei Scharen von Geraden erzeugt werden, wobei die Scharen selbst aus windschiefen Geraden bestimmt sind. Dies wird im Abschnitt 6.2 zum Thema Regelflächen genauer erklärt und dieser Sachverhalt nachgewiesen.

4.7. Die Harmonikalen

Fiedler widmet die Artikel 47 und 48 in [Fie82a, S. 42ff.] einer Einführung des Begriffs der *Harmonikalen*. Dabei handelt es sich um Geraden, die eine bestimmte Lage in Bezug auf ein Dreieck besitzen. Er beginnt mit der Untersuchung der fünften Konstruktionsaufgabe über zwei lineare Kreisreihen. Anschließend betrachtet er drei gegebene (nicht konzentrische) Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 unterschiedlicher Radien und diskutiert die Lage ihrer Ähnlichkeitszentren. Im Abschnitt 4.3.2 wurde diesbezüglich erklärt, dass die äußeren Ähnlichkeitszentren dreier nichtkonzentrischer Kreise unterschiedlicher Radien stets auf einer Geraden liegen (Satz von Monge).

An dieser Stelle erweitert er das Argument auf die Lage der inneren Ähnlichkeitszentren. Es wird mit der zyklografischen Abbildung gearbeitet. Seien dazu die Raumpunkte P_1 , P_2 und P_3 sowie die ihnen entsprechend zur Tafelenebene orthogonalsymmetrischen Punkte P_1^* , P_2^* und P_3^* gegeben, sodass für ihre zyklografischen Bilder

$$\begin{aligned} Z(P_1) &= Z(P_1^*) = \mathcal{K}_1, \\ Z(P_2) &= Z(P_2^*) = \mathcal{K}_2, \\ Z(P_3) &= Z(P_3^*) = \mathcal{K}_3 \end{aligned}$$

gilt. Zum Beweis der bereits diskutierten Teilaussage des Satzes von Monge hat man die Ebenen betrachtet, welche durch die Punkte P_1 , P_2 und P_3 bzw. P_1^* , P_2^* und P_3^* auf der gleichen Seite der Tafelebene gegeben sind. In ihrer gemeinsamen Spur liegen die Ähnlichkeitszentren der drei gegebenen Kreise, demnach sind sie in einer Geraden.

Jetzt wird jeweils ein Punkt betrachtet, der auf der jeweils anderen Seite der Tafelebene liegt, die anderen beiden auf der gleichen Seite. Das liefert die Paare

- P_1, P_2, P_3^* und P_1^*, P_2^*, P_3 ,
- P_1, P_2^*, P_3 und P_1^*, P_2, P_3^* sowie
- P_1^*, P_2, P_3 und P_1, P_2^*, P_3^* .

Jedes der obigen Paare dreier Punkte beschreibt Ebenen, die jeweils die gleiche Spur haben. Das gleiche Argument wie beim Beweis des Satzes von Monge, zusammen mit der Tatsache, dass das innere Ähnlichkeitszentrum zweier zyklografischer Kreise durch den Schnitt der Geraden durch ihre Raumpunkte auf verschiedenen Seiten der Tafel erhalten wird (s. die Überlegungen aus Abschnitt 4.2), liefert Fiedlers Aussage:

Die sechs Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen liegen also viermal zu dreien in einer Geraden [es sind also vier Geraden (die Spuren der jeweiligen Ebenen durch die Raumpunkte), in denen jeweils drei Ähnlichkeitszentren liegen] oder drei Kreise haben vier Ähnlichkeitsachsen. [Fie82a, S. 43]

Für die Existenz der Ähnlichkeitszentren muss vorausgesetzt werden, dass die Kreise unterschiedliche Radien und Mittelpunkte besitzen – Fiedler erwähnt dies nicht explizit. Er erklärt ebenfalls nicht, dass die Aussage obiger Überlegungen als Satz von Monge bekannt ist.

Oben erwähnte Aussage komplettiert den Satz von Monge, dessen zweite Teilaussage mit obigen Voraussetzungen an die Kreise auch wie folgt nach formuliert werden kann:

[...] Jede Gerade durch zwei innere Ähnlichkeitszentren geht durch ein äußeres Ähnlichkeitszentrum. [Aum15, S. 28]

Demnach sind durch drei wie oben beschriebene Kreise vier planare Kreissysteme gegeben.

Es wird noch eine weitere Aussage über die drei Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 gegeben, die zyklografisch nachgewiesen werden soll. Fiedler formuliert sie wie folgt:

Die Verbindungslinien der Mittelpunkte [der drei gegebenen Kreise] mit den Ähnlichkeitspunkten der jeweiligen beiden anderen Kreise schneiden sich viermal zu drei in einem Punkte oder sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks. [Fie82a, S. 44]

Seien wie oben \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 drei nichtkonzentrische Kreise unterschiedlicher Radien mit den Mittelpunkten M_1 , M_2 und M_3 . Mit A_{ij} und I_{ij} seien die äußeren und inneren Ähnlichkeitszentren der Kreise \mathcal{K}_i und \mathcal{K}_j mit $i, j = 1, 2, 3$ und $i \neq j$ bezeichnet. In einem Satz kann man dann die Aussage wie folgt formulieren:

Satz 4.39. *Je drei Geraden der Form M_iA_{jk} bzw. M_iI_{jk} mit $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$ und $i, j = 1, 2, 3$ durch die Kreismittelpunkte der gegebenen Kreise und die Ähnlichkeitszentren der anderen beiden Kreise treffen sich in je einem Punkt.*

Folgende Abbildung 4.43 zeigt die Aussage des Satzes 4.39. Die in dem Satz genannten Schnittpunkte (in der Darstellung mit größeren Punkten visualisiert) der Geraden werden mit Q_1 , Q_2 , Q_3 und Q_4 bezeichnet, wobei letzterer in der Darstellung als Schnittpunkt der Geraden M_1A_{23} , M_2A_{13} und M_3I_{12} nicht abgebildet ist.

Beweis. Gemäß Fiedlers Argumentation betrachtet man zunächst die Geraden

$$\begin{aligned} g_1 &:= M_1I_{23}, \\ g_2 &:= M_2I_{13}, \\ g_3 &:= M_3I_{12}. \end{aligned}$$

Diese Geraden können dann als orthogonale Projektionen von Schnittgeraden von je zwei Ebenen auf die Tafel Ebene interpretiert werden. Dies wird anhand der Geraden g_1 verdeutlicht: Die Gerade g_1 ist die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2 , welche durch die Raumpunkte P_1, P_2^*, P_3 bzw. P_1, P_2, P_3^* gegeben sind. Denn offenbar verläuft diese Schnittgerade durch den beider Ebenen gemeinsamen Punkt P_1 , weshalb der Mittelpunkt M_1 des Kreises $Z(P_1) = \mathcal{K}_1$ auf ihrer orthogonalen Projektion gelegen ist. Des Weiteren liegt die Gerade $P_2^*P_3$ nach Konstruktion in der Ebene E_1 sowie die Gerade $P_2P_3^*$ in der Ebene E_2 . Als Verbindungsgerade der Raumpunkte der zyklografischen Bilder

$$Z(P_2) = Z(P_2^*) = \mathcal{K}_2 \text{ und } Z(P_3) = Z(P_3^*) = \mathcal{K}_3$$

ist ihr gemeinsamer Durchstoßpunkt in der Tafel Ebene gerade das innere Ähnlichkeitszentrum der Kreise \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 . Demnach verläuft die Schnittgerade der Ebenen

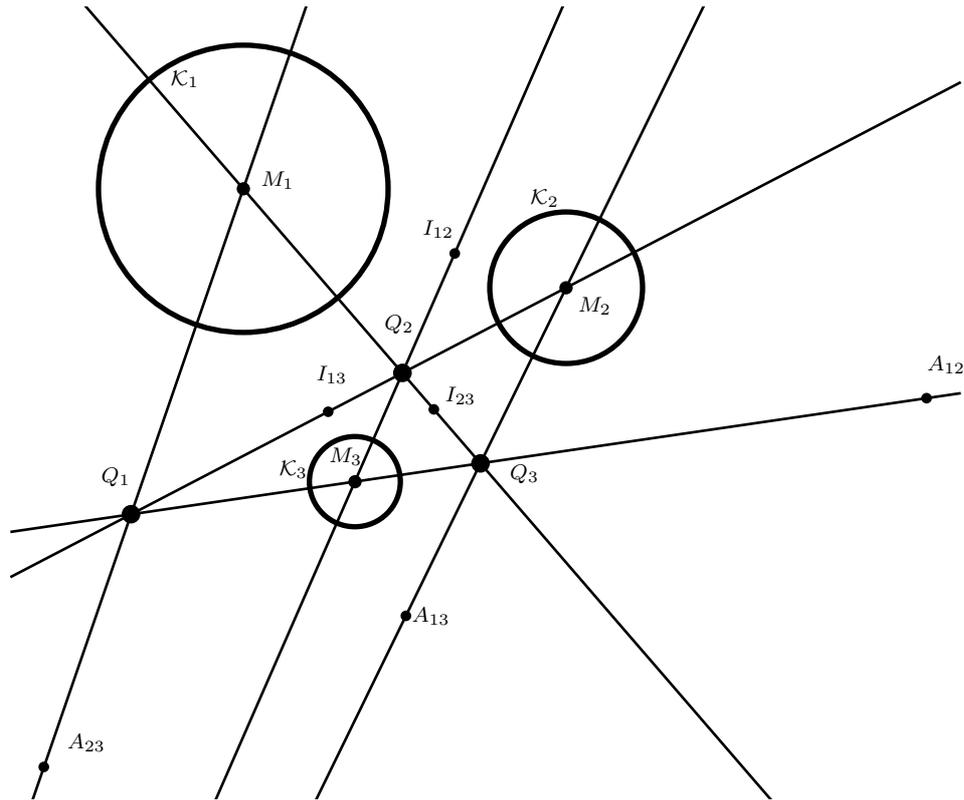


Abbildung 4.43.: Die Schnittpunkte Geraden durch die Mittelpunkte der Kreise und die Ähnlichkeitszentren

E_1 und E_2 durch die Punkte P_1 und I_{23} , woraus sich sofort ergibt, dass die Gerade M_1I_{23} ihre Orthogonalprojektion sein muss. Gleichermäßen sieht man ein, dass die Gerade M_1I_{23} die Orthogonalprojektion der Schnittgerade der beiden Ebenen durch die Punkte P_1^*, P_2^*, P_3 bzw. P_1^*, P_2, P_3^* ist. Für die Geraden g_2 und g_3 überlegt man sich wie oben, dass sie die Orthogonalprojektion der Schnittgeraden der Ebenen durch die Punkte

$$P_2, P_1, P_3^* \text{ und } P_2, P_1^*, P_3 \text{ bzw. } P_2^*, P_1, P_3^* \text{ und } P_2^*, P_1^*, P_3$$

und

$$P_3, P_1, P_2^* \text{ und } P_3, P_1^*, P_2 \text{ bzw. } P_3^*, P_1, P_2^* \text{ und } P_3^*, P_1^*, P_2$$

sind. Zur vereinfachten Darstellung werden die Schnittgeraden und Ebenen als Mengen aufgefasst. Dabei beschreibt $P_iP_jP_k$ die Ebene, die durch die drei Punkte P_i, P_j und P_k definiert wird. Dann kann man die Schnittgeraden als Schnittmengen wie

folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= P_1P_2^*P_3 \cap P_1P_2P_3^*, \\
 s_2 &= P_2P_1P_3^* \cap P_2P_1^*P_3 \\
 &= P_1P_2P_3^* \cap P_1^*P_2P_3, \\
 s_3 &= P_3P_1P_2^* \cap P_3P_1^*P_2 \\
 &= P_1P_2^*P_3 \cap P_1^*P_2P_3.
 \end{aligned}$$

Demnach liegen die (nicht parallelen) Geraden s_1 und s_2 vollständig in der Ebene $P_1P_2P_3^*$, haben also einen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt liegt aber zugleich in den anderen beiden Ebenen, also auf der Geraden s_3 . Somit schneiden sich die drei Ebenen in einem Punkt Q_2 , dessen Orthogonalprojektion einer der im Satz erwähnten Schnittpunkte ist.

Dieser Beweis für einen Schnittpunkt überträgt sich sinngemäß auf die anderen Geraden durch die Mittel- und Ähnlichkeitspunkte der Kreise. \square

Man erinnere sich an die Konstruktion 3.16 sowie die Abbildung 3.14. Dort wurde zu drei gegebenen Punkten der vierte Punkt konstruiert, sodass eine harmonische Gruppe vorliegt. Betrachtet man die Abbildung 4.43 und überträgt die Bezeichnungen wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
 M_1 = Q', & Q_1 = Q'_1, & Q_2 = A', \\
 I_{23} = C', & M_3 = S_1, & M_2 = S_2,
 \end{array}$$

und $Q_3 = B'$, so wird unmittelbar klar, dass Fiedler Aussage, dass

[...] je zwei dieser Punkte [die in Satz 4.39 beschriebenen] mit dem Mittelpunkt und dem Ähnlichkeitspunkte ihrer Verbindungslinie eine harmonische Gruppen bilden; [...] [Fie82a, S. 44]

richtig ist. Die Geraden, auf denen die besagten harmonischen Punkte liegen, nennt er (hier angepasst) die *Harmonikalen der Punkte Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 in Bezug auf das Dreieck der Kreiszentren M_1, M_2 und M_3 .*

5. Die Grundlagen der Kreisgeometrie

Dieses Kapitel behandelt Begriffe der Kreisgeometrie, welche für die Zyklografie und die Behandlung des Apollonischen Berührproblems von Bedeutung sind. Es werden die Kreisinverson, der Begriff der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, die gemeinschaftliche Potenz sowie das Konzept des Pols und der Polaren eingeführt. Damit in Verbindung stehende Sätze und Eigenschaften werden ebenfalls ausgearbeitet. Darüber hinaus wird erklärt, was man unter einem Potenzkreis zu drei Kreisen versteht und wie mit dessen Hilfe ein rechtwinklig schneidender Kreis zu drei Kreisen konstruiert werden kann. Den Schluss bildet die Einführung des Ähnlichkeitskreises, der für spätere Zwecke benötigt wird.

5.1. Die Kreisinverson

5.1.1. Die Definition der Inverson an einem Kreis und die Konstruktion inverser Punkte

Über den genauen Ursprung der auch als Spiegelung am Kreis bezeichneten Kreisinverson herrscht Uneinigkeit⁵⁰. So liest man in Aumanns Lehrbuch über die Kreisgeometrie, dass dieses Abbildungsverfahren auf Jakob Steiner zurückgeht, da er es vermutlich erstmals 1824 studierte. (vgl. [Aum15, S. 58]). Hermann Schmidt erklärt in seinem Buch über die Kreispiegelung, dass die Inverson am Kreis auf Julius Plücker zurückzuführen sei, da er sie 1834 entdeckte (vgl. [Sch50, S. 9]). Letztlich liest man bei Hartshorne in seinem Buch *Geometry: Euclid and Beyond* aus dem Jahr 2000, dass die Grundlagen des dritten Buches von Euklids Elementen vollständig ausreichen, um die Theorie der Kreisinverson aufzubauen. Die Griechen waren aber offenbar an dieser geometrischen Transformation nicht interessiert, da

⁵⁰Diese Bezeichnung ergibt sich aus dem Grund, dass die Geradenspiegelung als eine spezielle Inverson am Kreis aufgefasst werden kann. So stellt man sich die Geradenspiegelung als eine Spiegelung an einem Kreis mit dem Radius $r = \infty$ vor.

sie bei Abbildung weder Längen und Abstände noch Proportionen des Objektes erhält (vgl. [Har00, S. 334]). Zunächst wird festgelegt, was unter der Inversion am Kreis zu verstehen ist.

Es sei dazu $\mathcal{K}(M, r)$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie P ein von M verschiedener Punkt der Ebene. Dann bezeichnet man den auf der Halbgeraden MP^+ liegenden Punkt \hat{P} als das zu P inverse Bild unter Spiegelung am Inversionskreis \mathcal{K} , wenn die Gleichung

$$d(M, P) \cdot d(M, \hat{P}) = r^2$$

erfüllt ist.⁵¹ Alternativ kann man die Inversion als eine Koordinatentransformation auffassen. Das bedeutet, dass ein Punkt $P = (x, y) \neq (0, 0)$ der Ebene in einen Punkt $\hat{P} = (\hat{x}, \hat{y})$ durch Inversion am Kreis $\mathcal{K}((0, 0), r)$ mit Mittelpunkt $M = (0, 0)$ und Radius r durch die Zuordnungsvorschrift

$$(x, y) \mapsto \frac{r^2 \cdot (x, y)}{x^2 + y^2}$$

überführt werden kann. Beide Festlegungen beschreiben die gleiche Inversion, wobei sich letztere für Untersuchungen mithilfe von Koordinaten anbietet. Darüber hinaus kann sie benutzt werden, um den Inversionsbegriff auf höhere Dimensionen zu erweitern. In Folgenden wird jedoch die erste Definition verwendet. Mithilfe von Zirkel und Lineal lässt sich der inverse Punkt \hat{P} zu jedem vom Kreismittelpunkt M verschiedenen Punkt P wie folgt konstruieren. Sei dazu zunächst der Punkt P im Inneren des Inversionskreises \mathcal{K} gelegen.

Konstruktion 5.1 (Kreisspiegelung eines Punktes im Inneren des Kreises). Zunächst zeichne man die Halbgerade MP^+ und dazu die Senkrechte l im Punkt P . Man erhält zwei Schnittpunkte S_1 und S_2 mit dem Kreis \mathcal{K} . Nun betrachte man die Senkrechte g zur Gerade MS_1 im Punkt S_1 und bestimme den Schnittpunkt \hat{P} mit der Geraden MP^+ . Dieser ist der gesuchte inverse Punkt zum Punkt P . Alternativ kann man aus Symmetriegründen auch die gleiche Konstruktion ausgehend vom Punkt S_2 ausführen.

Man sieht anhand der Definition der Kreis inversion unmittelbar ein, dass wenn der Punkt P innerhalb des Kreises liegt, also $d(M, P) < r$ ist, folgt:

$$d(M, \hat{P}) = \frac{r^2}{d(M, P)} > \frac{r^2}{r} = r,$$

⁵¹Die Bezeichnung MP^+ beschreibt dabei die Halbgerade von M aus, die den Punkt P enthält.

der zum Punkt P inverse Punkte \hat{P} durch Inversion am Kreis \mathcal{K} also außerhalb des Kreises \mathcal{K} liegt. Ist umgekehrt P außerhalb desselben Kreises, so ist der Spiegelpunkt innerhalb des Kreises. Des Weiteren folgt unmittelbar aus der Definition, dass alle Punkte, die auf dem Kreis \mathcal{K} liegen, Fixpunkte der Inversion sind.

Um den inversen Punkt eines Punktes zu bestimmen, welcher außerhalb des Spiegelkreises \mathcal{K} liegt, führt man die Konstruktion 5.1 in umgekehrter Reihenfolge aus. Es gelingt, den dazu notwendigen Punkt S_1 zu finden, indem man mit dem Satz des Thales arbeitet. Man hat die

Konstruktion 5.2 (Kreisspiegelung eines Punktes außerhalb des Kreises). Man bestimme den Mittelpunkt M_1 der Strecke \overline{MP} und ziehe den Kreis \mathcal{K}_T mit Mittelpunkt M_1 und Radius $\overline{M_1P}$. Man bezeichne seine Schnittpunkte mit dem Spiegelkreis mit S_1 und S_2 . Nun fällt man das Lot l zur Geraden MP vom Punkt S_1 . Der so erhaltene Schnittpunkt \hat{P} ist der inverse Punkt zu P .

Erläuterung zu den Konstruktionen 5.1 und 5.2. Man sieht ein, dass die beiden beschriebenen Konstruktionen den gesuchten Punkt liefern, wenn man die beiden Dreiecke $\triangle MPS_1$ sowie $\triangle M\hat{P}S_1$ untersucht. Es zeigt sich, dass diese ähnlich sind, da beide die Seite r , den Winkel bei M gemeinsam haben und beide rechtwinklig sind. Damit gilt die Äquivalenz

$$\frac{r}{d(M, \hat{P})} = \frac{d(M, P)}{r} \iff d(M, P) \cdot d(M, \hat{P}) = r^2,$$

wie gewünscht (vgl. [Aum15, S. 58-60]).

Die Inversionskonstruktionen 5.1 und 5.2 sind in den Abbildungen 5.1a) und 5.1b) veranschaulicht. Der Thaleskreisbogen \mathcal{K}_T , der zur Konstruktion des Punktes S_1 nötig ist, ist in der Abbildung 5.1b) grau gestrichelt visualisiert.

Die Kreisinversion eröffnet die Möglichkeit, ein Konstruktionsproblem in ein äquivalentes Problem zu transformieren. Anschließend kann es gelöst werden und abschließend die erhaltende Lösung zurück übertragen werden. Das bedeutet: Liegt ein geometrisches Problem vor, für welches eine konstruktive Lösung gefordert ist, so kann es unter Umständen einfacher sein, die Ausgangssituation der Problemstellung mithilfe der Kreisinversion in ein äquivalentes Problem zu übertragen, die Konstruktion durchzuführen und anschließend mithilfe von Inversion wieder zurückzuübertragen. Dies funktioniert, da die Inversion eine Involution ist, also bei zweifacher Anwendung am gleichen Inversionskreis wieder auf die ursprüngliche Situation führt. Wichtige elementare Sätze zur Kreisinversion arbeitet Fiedler in seiner *Cyklographie*

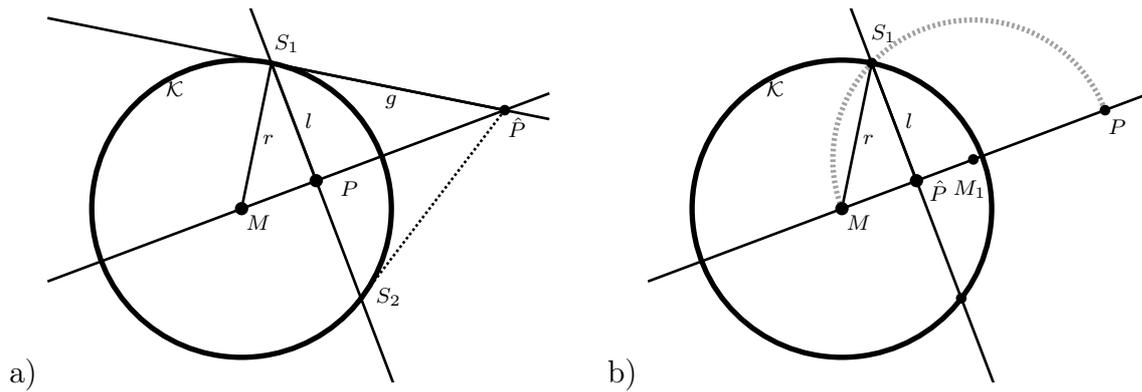


Abbildung 5.1.: a) Spiegelung des Punktes P , innerhalb des Kreises \mathcal{K} , b) Spiegelung des Punktes P , außerhalb des Kreises \mathcal{K}

auf mehreren Seiten im Kontext der Kreisbüschel heraus (s. [Fie82a, S. 80-82]). Fiedler bezeichnet dabei den Inversionskreis als *Directrixkreis* (z.B. [Fie82a, S. 81f.]) und die Kreisinverson als Abbildung durch *reziproke Radien*.

Dass die Kreisinverson eine zielführende Strategie bei der Lösung von Konstruktionsproblemen sein kann, sieht man so: Ist ein Inversionskreis \mathcal{K}_I gegeben sowie ein weiterer Kreis \mathcal{K}_1 , welcher nicht durch Mittelpunkt des Inversionskreises verläuft, dann ist sein inverses Bild wieder ein Kreis. Schneidet dieser Kreis \mathcal{K}_1 den Inversionskreis, so sind diese Schnittpunkte Fixpunkte der Inverson, wie bereits oben erwähnt. Bei Fiedler liest man diesbezüglich:

[...] so entspricht einem Kreise nach reciproken Radien wieder ein Kreis. Die Schnittpunkte solcher entsprechenden Kreise liegen nothwendig auf dem Directrixkreise. [Fie82a, S. 81]

Der Mittelpunkt des Inversionskreises, der bei der Kreisspiegelung ausgeschlossen ist, kann durch Erweiterung der euklidischen Ebene durch einen weiteren Punkt auf einen uneigentlichen Punkt abgebildet werden, wie man leicht aus der Konstruktion 5.1 schließt.⁵²

Interessanter ist der Fall, wenn ein an einem Inversionskreis \mathcal{K}_I zu spiegelnder Kreis \mathcal{K}_2 betrachtet wird, welcher durch den Mittelpunkt des Inversionskreises \mathcal{K}_I verläuft, aber den Mittelpunkt nicht umfasst. Man kann dann zeigen, dass dieser Kreis auf eine Gerade durch Inverson gespiegelt wird. Bei Fiedler findet man dazu folgende Aussage:

⁵²Durch Hinzufügen eines uneigentlichen Punktes zur euklidischen Ebene (sog. Ein-Punkt-Kompaktifizierung), wie es durch die Kreisinverson motiviert ist, wird diese zur *konformen Ebene*. Man kann sie als Inzidenzgeometrie beschreiben und nennt sie auch Möbiusgeometrie. Hierin lassen sich Sätze der Inverson vereinfachen bzw. vereinheitlichen.

Den Kreisen durch den Mittelpunkt der Directrix [das ist der Inversionskreis] entsprechen nach reciproken Radien gerade Linien, nämlich für jeden die Potenzlinie zwischen ihm und dem Directrixkreise. [Fie82a, S. 82]

Das heißt insbesondere, dass das inverse Bild des Kreises \mathcal{K}_2 eine Gerade ist, die durch die Schnittpunkte des zu spiegelnden Kreises mit dem Inversionskreises verläuft, sofern diese existieren.

Beispielsweise kann man das Apollonische Berührproblem (vgl. Kapitel 7) als klassisches geometrisches Problem behandeln. Dabei sollen Berührkreise an geometrische Objekte, wie Geraden oder Kreise, konstruiert werden. Dabei kann es unter Umständen einfacher sein, eine Berührgerade zu konstruieren, welche dann mit Inversion wieder in einen Berührkreis transformiert wird.

In dieser Arbeit werden die sogenannten Potenzkreise zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen im Abschnitt 5.5 eingeführt und mithilfe des Konzepts der Kreisbüschel, das im Abschnitt 6.3 erörtert wird, auf zwei Kreise übertragen, die nicht zwingend gemeinsame Punkte haben müssen. Fiedler nutzt die Potenzkreise, um die Sätze der Kreis inversion gemäß des oben angegebenen Ortes einzuführen. In dieser Arbeit wird an der betreffenden Stelle (s. Abschnitt 6.5) darauf eingegangen.

Da die Theorie der Kreisbüschel noch nicht ausgearbeitet ist, werden exemplarisch Beweise der obigen Aussagen Fiedlers gezeigt, welche bei [Aum15, S. 65f.] sinngemäß zu finden sind. Zunächst wird die erste Aussage als Satz formuliert:

Satz 5.3. *Gegeben sei ein Kreis \mathcal{K} sowie ein Inversionskreis \mathcal{K}_I , an welchem der Kreis \mathcal{K} gespiegelt wird. Der Kreis \mathcal{K} verlaufe dabei nicht durch den Kreismittelpunkt des Kreises \mathcal{K}_I . Das am Kreis \mathcal{K}_I gespiegelte Bild von \mathcal{K} bezüglich der Kreis inversion ist ein Kreis.*

Beweis. Die Idee ist, mit einer zentrischen Streckung zu arbeiten. Hier wird der Fall dargestellt, wenn der Kreis \mathcal{K}_I innerhalb des Kreises \mathcal{K} liegt. Sei dazu r_I der Radius und M_I der Mittelpunkt des Inversionkreises \mathcal{K}_I . Nun ziehe man eine Gerade g , welche den zu spiegelnden Kreis \mathcal{K} mit dem Mittelpunkt M in zwei Punkten A und B schneidet. Dann wird eine zentrische Streckung $Z(M_I; k)$ mit einem Streckfaktor

$$k = \frac{r^2}{p}$$

und dem Streckzentrum M_I durchgeführt, wobei

$$p = d(M_I, A) \cdot d(M_I, B)$$

sei. Da eine zentrische Streckung einen Kreis auf einen Kreis abbildet, liefert die zentrische Streckung Z des Kreises \mathcal{K} einen Kreis \mathcal{K}_Z mit einem Mittelpunkt M_Z . Der Radius $r_I = MA$ wird auf einen parallelen Radius $r_Z = M_ZA_Z$ gestreckt (bzw. gestaucht). Folgende Rechnung ergibt sich für die Streckenverhältnisse

$$\frac{d(M_I, A_Z)}{d(M_I, B)} = \frac{d(M_I, M_Z)}{d(M_I, M)} = \frac{r^2}{p} = \frac{r^2}{d(M_I, A) \cdot d(M_I, B)}.$$

Multiplikation mit dem Nenner des letzten Terms der Gleichungskette liefert:

$$d(M_I, A_Z) \cdot d(M_I, A) = r^2,$$

sodass die Punkte A und A_Z zueinander inverse Punkte bezüglich des Inversionskreises sind. Der Kreis \mathcal{K}_Z ist somit der zum Kreis \mathcal{K} inverse Kreis in Bezug auf den Inversionskreis \mathcal{K}_I , was zu zeigen war. \square

Der Beweis des Satzes 5.3 wird nochmals in dieser Arbeit im Kontext Kreisbüschel und der Potenzkreise zu zwei Kreisen behandelt, dann im Sinne Fiedlers.

Nun zu der zweiten Aussage, die vor allem für die Behandlung von Konstruktionsaufgaben einen Mehrwert besitzt. Auch hier orientiert sich die Darstellung an [Aum15, S. 65]. Es gilt die Aussage des nächsten Satzes:

Satz 5.4. *Es sei \mathcal{K}_I der Inversionskreis mit dem Mittelpunkt M_I . Weiter sei \mathcal{K} ein Kreis durch den Mittelpunkt M_I des Inversionskreises, aber ohne den Mittelpunkt M_I . Der Kreis \mathcal{K} wird auf eine Gerade g abgebildet, die nicht durch M_I verläuft.*

Beweis. Es ist zunächst zu zeigen: Sind L und P zwei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, \hat{L} und \hat{P} ihre inversen Punkte bezüglich des Inversionskreises \mathcal{K}_I , dann sind die beiden Dreiecke

$$\triangle M_I L P \text{ und } \triangle M_I \hat{L} \hat{P}$$

zueinander ähnlich. Dies ergibt sich unmittelbar aus den gleich großen Winkeln $\angle(LM_I P) = \angle(\hat{L}M_I \hat{P})$ mit dem Scheitel M_I und der Gleichung

$$r^2 = d(M_I, L) \cdot d(M_I, \hat{L}) = d(M_I, P) \cdot d(M_I, \hat{P}) \iff \frac{d(M_I, L)}{d(M_I, P)} = \frac{d(M_I, \hat{L})}{d(M_I, \hat{P})},$$

weshalb die beiden Dreiecke in einem Seitenverhältnis und einem Winkel übereinstimmen. Man betrachte zur Verdeutlichung die Abbildung 5.2.

Da die Kreisinvolution eine Involution ist, zeigt man, dass eine Gerade g , welche nicht durch den Punkt M_I verläuft, auf einen Kreis abgebildet wird, welcher durch

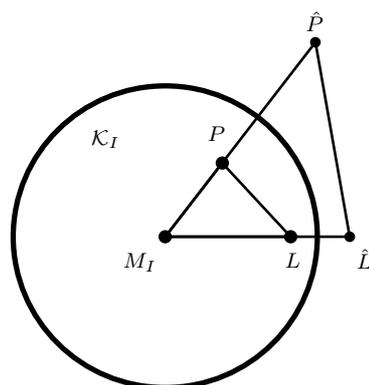


Abbildung 5.2.: Ähnliche Dreiecke für zueinander inverse Punkte

den Punkt M_I (ohne diesen Punkt) verläuft. Dazu fällt man das Lot vom Punkt M_I zur Geraden g und bezeichne den Lotfußpunkt auf der Geraden g mit L . Weiter sei der Punkt P ein beliebiger Punkt der Geraden g und \hat{P} sein inverser Punkt bezüglich der Spiegelung am Kreis \mathcal{K}_I . Der zum Lotfußpunkt L inverse Punkt soll dementsprechend \hat{L} heißen. Nun wird werden die beiden Dreiecke

$$\triangle M_I L P \text{ und } \triangle M_I \hat{L} \hat{P}$$

betrachtet. Diese sind zueinander ähnlich, wie man oben gesehen hat. Da L ein Lotfußpunkt ist, ist das Dreieck $\triangle M_I L P$ rechtwinklig bei L . Demnach ist das Dreieck $\triangle M_I \hat{L} \hat{P}$ ähnlich mit einem rechten Winkel bei \hat{P} , weshalb dieser Punkt auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{M_I \hat{L}}$ liegt. Also ist dieser Thaleskreis das Bild der Geraden g unter Inversion am Kreis \mathcal{K}_I . Veranschaulicht ist der Beweis in der Abbildung 5.3. Darin ist der beschriebene Thaleskreis über der Strecke $\overline{M_I \hat{L}}$ gestrichelt dargestellt.

□

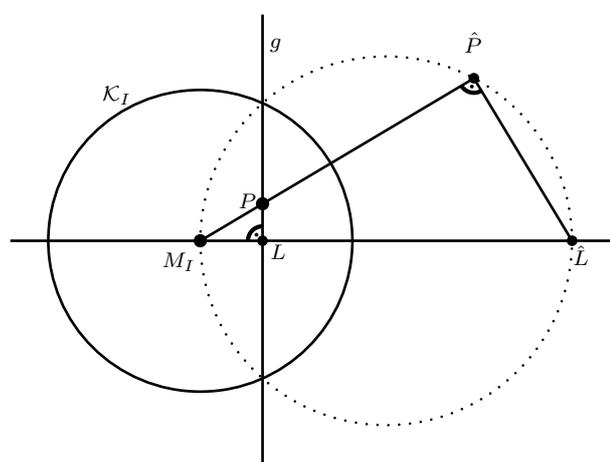


Abbildung 5.3.: Das zu einer Geraden g , welche nicht durch den Mittelpunkt des Inversionkreises verläuft, inverse Bild

Abschließend sind in der folgenden Tabelle verschiedene geometrische Objekte und worauf sie durch Inversion am Kreis abgebildet werden zusammengefasst.

Der Mittelpunkt des Inversionskreises sei mit M bezeichnet.

Objekt	abgebildet auf
Gerade durch M (ohne den Punkt M)	die Gerade wird auf sich selbst abgebildet
Gerade nicht durch M	wird auf einen Kreis abgebildet, der durch M verläuft
Kreis durch M (ohne den Punkt M)	wird auf eine Gerade abgebildet, die nicht durch M verläuft
Kreis nicht durch M	wird auf einen Kreis abgebildet
Kreis der den Inversionskreis rechtwinklig schneidet	der Kreis wird auf sich selbst abgebildet

Es sei bemerkt, dass sich die Eigenschaften der Kreisinverson durch ein alternatives Vorgehen erhalten lassen. So kann man sie im Kontext der stereografischen Projektion erarbeiten. Beispielsweise erkennt man, dass ein Kreis, der nicht durch einen der Pole auf der Kugel geht, durch stereografische Projektion auf Geraden abgebildet wird. Dies kann beispielsweise vertiefend in der Quelle [Aum15, S. 163-167] nachgelesen werden.

5.1.2. Zusammenhang der Inversion zu harmonischen Gruppen

Orientiert an [Aum15, S. 62] soll nun in einem Satz der Zusammenhang der Kreisinverson zur harmonischen Teilung, die im Abschnitt 3.1.2 besprochen wurde, hergestellt werden. Dazu sei zunächst folgender Sachverhalt festgehalten:

Satz 5.5. *Sei $\mathcal{K}(M, r)$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Weiter sei P ein von M verschiedener Punkt, der nicht auf dem Kreis liegt, mit dem inversen Bild \hat{P} sowie S_1 und S_2 die Schnittpunkte von \mathcal{K} mit der Geraden MP . Dann gilt*

$$\mathfrak{D}(S_1, S_2; P, \hat{P}) = -1.$$

Die Punkte S_1, S_2, P und \hat{P} bilden also eine harmonische Gruppe.

Die Abbildung 5.4 illustriert die in Satz 5.5 beschriebene Situation.

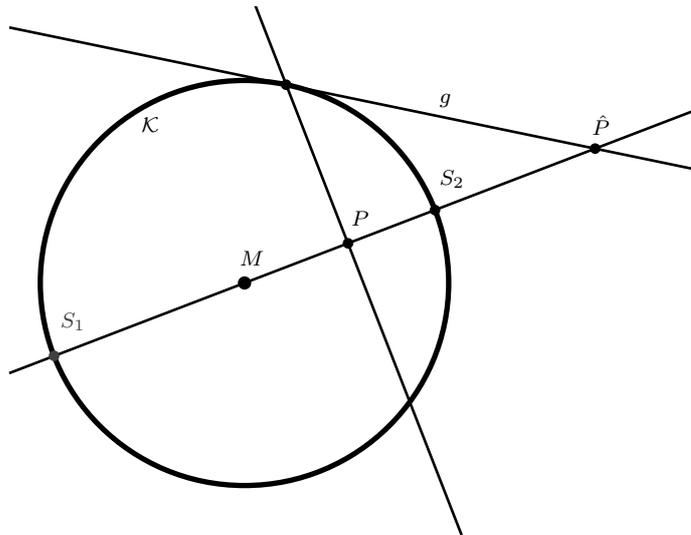


Abbildung 5.4.: Harmonische Gruppe durch Inversion am Kreis \mathcal{K}

Beweis. Um einzusehen, dass die Aussage von Satz 5.5 wahr ist, ist eine Rechnung notwendig. Zunächst erkennt man, dass die folgenden Streckenlängen gemäß nachfolgender Gleichungen ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} d(S_1, P) &= d(M, P) + r, \\ d(S_2, \hat{P}) &= d(M, \hat{P}) - r, \\ d(S_2, P) &= r - d(M, P), \\ d(S_1, \hat{P}) &= r + d(M, \hat{P}). \end{aligned}$$

Da die Punkte P und \hat{P} nach Voraussetzung invers zueinander sind, gilt nach Multiplikation mit 2 aufgrund der Definition

$$d(M, P) \cdot d(M, \hat{P}) = r^2 \iff 2 \cdot d(M, P) \cdot d(M, \hat{P}) = 2r^2.$$

Daraus folgt nach Subtraktion von r^2 und $d(M, P) \cdot d(M, \hat{P})$ auf beiden Seiten der Gleichung

$$d(M, P) \cdot d(M, \hat{P}) - r^2 = r^2 - d(M, P) \cdot d(M, \hat{P}).$$

Nun fügt man eine »nahrhafte Null« in Form des Terms

$$-d(M, P) \cdot r + d(M, \hat{P}) \cdot r$$

auf beiden Seiten der Gleichung ein. Das ermöglicht es, den Term zur äquivalenten Gleichung

$$[d(M, P) + r][d(M, \hat{P}) - r] = [r - d(M, P)][r + d(M, \hat{P})]$$

umzuformen. Setzt man nun die obigen Gleichungen darin ein, so entsteht

$$d(S_1, P) \cdot d(S_2, \hat{P}) = d(S_2, P) \cdot d(S_1, \hat{P}) \iff \frac{d(S_1, P)}{d(S_2, P)} = \frac{d(S_1, \hat{P})}{d(S_2, \hat{P})}.$$

Es folgt somit die Behauptung, da es sich um das zu beweisende Verhältnis handelt. \square

Es ist anzumerken, dass auch die Umkehrung des Satzes 5.5 gilt, wie in [Aum15, S. 62] nachgelesen werden kann. Zudem sieht man ein, dass die Aussage richtig bleibt, wenn man den inversen Punkt zum Mittelpunkt M des Kreises, also den uneigentlichen Punkt, nimmt. Denn beachtet man für diesen Fall die Abbildung 5.1, so erkennt man, dass die dort dargestellte Tangente g mit der Parallelen zur Geraden MP durch den Punkt S_1 zusammenfällt. Mit den Überlegungen aus Abschnitt 3.1.1 ist es sinnvoll, dem Punkt M den Fernpunkt \mathbf{F} der Geraden MP zuzuweisen. In Verbindung mit Satz 3.3 und der Tatsache, dass M der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} ist, folgt die Gültigkeit der Behauptung.

5.2. Die Begriffe Pol und Polare eines Kreises

Eng im Zusammenhang mit dem in Abschnitt 5.1.1 definierten Begriff der Kreisinvolution stehen die Begriffe *Pol* und *Polare*. Fiedler verweist in der Einleitung seiner *Cyklografie* darauf, dass »die Lehre von Pol und Polare beim Kreise schon dem Apollonius bekannt gewesen sei« [Fie82a, S. 1].⁵³

5.2.1. Die Definition von Pol und Polare

Sei $\mathcal{K}(M, r)$ ein vorgegebener Kreis mit Mittelpunkt M sowie Radius r und P ein vom Mittelpunkt verschiedener Punkt. Die Lotgerade zur Strecke MP durch den zu P inversen Punkt \hat{P} bezeichnet man als die *Polare* zum *Pol* P . In der Abbildung 5.1a) beispielsweise bildet die Gerade l die Polare zum Pol \hat{P} .⁵⁴

⁵³Einen Beleg dafür gibt er nicht an.

⁵⁴Es ist anzumerken, dass man den Pol- und Polarenbegriff im Allgemeinen für Kegelschnitte definiert und die hier dargestellte Situation für den Kreis nur ein Spezialfall darstellt. Dieser wird für nachfolgende Betrachtungen ausreichend sein.

Die Definition sowie die Tatsache, dass Punkte, welche auf dem Kreis liegen Fixpunkte bezüglich der Kreisinverson darstellen, zeigt, dass für solche Punkte die Polaren gerade die Tangenten an den Kreis im fraglichen Punkt bilden. Die Aussage des Satzes 5.5 überträgt sich sinngemäß auf Pole und Polaren bezüglich eines Kreises.

Sei $\mathcal{K}(M, r)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein von M verschiedener Punkt A als Pol gegeben. Die zum Punkt A gehörige Polare bestimmt man wie folgt erklärt.

Konstruktion 5.6. Es werden die folgenden Fälle nach Lage des Pols unterschieden:

- (i) Bestimmung der Polaren a zum Pol A zu einem gegebenen Kreis \mathcal{K} , wobei A innerhalb des Kreises liegt:

Man bestimme den zu A inversen Punkt \hat{A} mithilfe von Konstruktion 5.1 und errichte das Lot zur Geraden MA durch diesen Punkt.

- (ii) Bestimmung der Polaren a zum Pol A zu einem gegebenen Kreis \mathcal{K} , wobei A außerhalb des Kreises liegt:

Man bestimme den zu A inversen Punkt \hat{A} mithilfe von Konstruktion 5.2 und errichte das Lot zur Geraden MA durch diesen Punkt.

- (iii) Bestimmung der Polaren a zum Pol A zu einem gegebenen Kreis \mathcal{K} , wobei A auf des Kreises liegt:

Man bestimme die Tangente an \mathcal{K} durch den Punkt A .

Erläuterung zur Konstruktion. Die Korrektheit der Konstruktion ist unmittelbar aufgrund der Definition von Pol und Polare mithilfe der Kreisinverson gegeben.

5.2.2. Der Schnitt zweier Kreise

Im Folgenden wird ein Satz diskutiert, der das Konzept von Pol und Polare in Verbindung zu zwei sich orthogonal schneidenden Kreisen bringt. Daraus kann direkt ein Zusammenhang für die Kreisinverson gefolgert werden.

Zunächst wird erklärt, was man unter dem Schnittwinkel zweier sich schneidender Kreise versteht. Seien dazu \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zwei sich schneidende Kreise; einer der Schnittpunkte sei S . Man bestimme nun die Tangenten t_1 an den Kreis \mathcal{K}_1 und t_2 an den Kreis \mathcal{K}_2 im Punkt S . Als *Schnittwinkel* α der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 bezeichnet man den kleineren der beiden von t_1 und t_2 eingeschlossenen Winkel mit dem Scheitel S . Einen Spezialfall stellt die Situation dar, dass die Tangenten rechtwinklig zueinander stehen, dann beträgt der Schnittwinkel $\alpha = 90^\circ$. Aufgrund der

symmetrischen Lage der Schnittpunkte der Kreise in Bezug auf ihre Zentrale ist es unerheblich, welchen Schnittpunkt man gewählt hat. In der Abbildung 5.5 ist die Definition veranschaulicht.

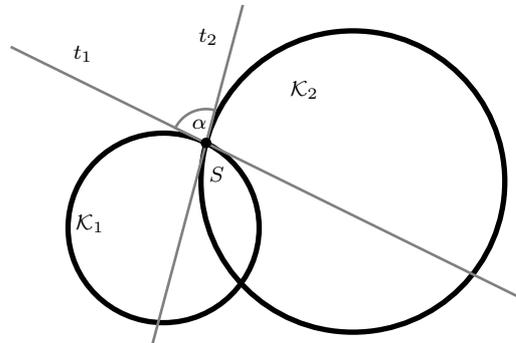


Abbildung 5.5.: Schnittwinkel α zweier sich schneidender Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2

Beträgt der Wert des Schnittwinkels zweier Kreise $\alpha = 90^\circ$, so sagt man, dass sich jene Kreise *orthogonal schneiden*. In Zusammenhang lassen sich die Begriffe Pol und Polare mit zwei sich orthogonal schneidenden Kreisen durch folgende Aussage Fiedlers in Artikel 70 seiner *Cyklographie* bringen:

Die Polare eines Punktes A im einen Kreise $\mathbf{P}^{(1)}$ [gemeint ist ein auf dem Kreis $\mathbf{P}^{(1)}$ liegender Punkt A] in Bezug auf den andern Kreis $\mathbf{P}^{(2)}$ von zwei orthogonal schneidenden geht durch den andern Endpunkt B seines Durchmessers. [Fie82a, S. 70]

Den Beweis liefert Fiedler direkt im Anschluss an diese Aussage. Dieser wird hier dargestellt. Zunächst sei die Aussage in einem Satz formuliert.

Satz 5.7. Seien $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ zwei sich orthogonal schneidende Kreise. Zudem sei A ein beliebiger Punkt auf dem Kreis \mathcal{K}_1 . Mit p sei die Polare zum Punkt A in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_2 bezeichnet. Dann schneidet die Polare p den Kreis \mathcal{K}_1 in einem Punkt B , welcher auf der Geraden AM_1 liegt. Der Punkt B ist also der Diametralpunkt des Punktes A bezüglich des Kreises \mathcal{K}_1 .

Beweis. Sei S einer der beiden Schnittpunkte der beiden Kreise miteinander. Zieht man die Gerade AM_2 , so erhält man einen Schnittpunkt E mit dem Kreis \mathcal{K}_1 . Da sich die Kreise nach Voraussetzung orthogonal schneiden, ist die Gerade M_2S eine Tangente an den Kreis \mathcal{K}_1 . Damit ist der Sekanten-Tangenten-Satz anwendbar, welcher die Gleichung

$$d(M_2, A) \cdot d(M_2, E) = d^2(M_2, S) = r_1^2$$

liefert. Damit ist erkannt, dass E der zu A inverse Punkt in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_2 ist. Sei nun B der zweite Schnittpunkt der Geraden AM_1 mit dem Kreis \mathcal{K}_1 , dann ist die Strecke \overline{AB} ein Durchmesser des Kreises \mathcal{K}_1 . Interpretiert man diesen Kreis als Thaleskreis zum Durchmesser \overline{AB} , so stellt man fest, dass der Winkel $\angle(BEA)$ ein rechter ist. Somit zeigt sich, dass die Gerade BE die Polare zum Punkt A in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_2 ist. \square

In der Abbildung 5.6 ist die Aussage des Satzes 5.7 veranschaulicht. Man sieht die Polare in grau abgebildet und die zum Durchmesser \overline{AB} gehörige Gerade des Kreises \mathcal{K}_1 gepunktet dargestellt.

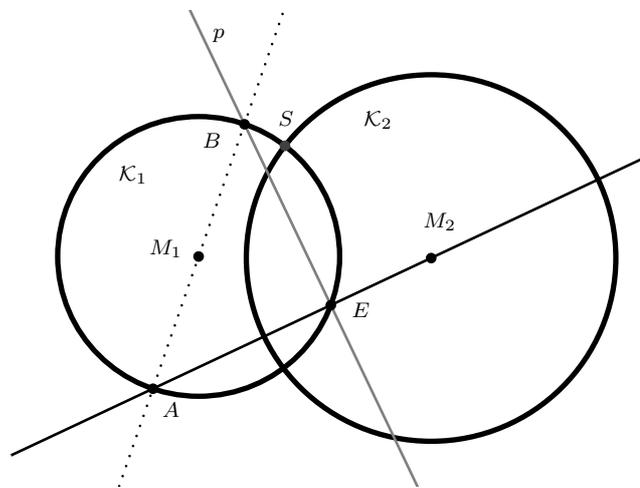


Abbildung 5.6.: Orthogonal schneidende Kreise und die Polare p zum Pol A , die den Diametralpunkt B zum Punkt A im Kreis \mathcal{K}_1 liefert

Aus der soeben nachgewiesenen Tatsache des Satzes 5.7 kann man einen grundlegenden Sachverhalt für die Kreisinverson ableiten. So gilt mit obigen Bezeichnungen die Aussage von

Korollar 5.8. *Der Kreis \mathcal{K}_1 wird bei Inversion an \mathcal{K}_2 auf sich selbst abgebildet, somit sind Kreise, die den Inversionkreis orthogonal schneiden, Fixkreise einer Inversion.*

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Satz 5.7, da der Punkt A auf dem Kreis \mathcal{K}_1 unter der Inversion am Kreis \mathcal{K}_2 auf den Punkt E des Kreises \mathcal{K}_1 abgebildet wird. \square

Einen weiteren wichtigen Satz, der rechtwinklig schneidende Kreise mit harmonischen Verhältnissen in Verbindung bringt, diskutiert Fiedler in [Fie82a, S. 70]. Er besagt:

Jeder Durchmesser des einen Kreises wird vom andern harmonisch geteilt, wenn er reell⁵⁵ geschnitten wird. [Fie82a, S. 70]

Die in dem Zitat genannte Aussage, welche Fiedler ohne Beweis angibt, lässt sich sogar als Äquivalenz formulieren und wie folgt präzise aufschreiben und beweisen:

Satz 5.9. *Es seien $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ zwei sich schneidende Kreise. Sind P_1 und P_2 sowie Q_1 und Q_2 die Schnittpunkte der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mit der Zentrale M_1M_2 , so bilden die Punkte P_1, P_2, Q_1 und Q_2 genau dann eine harmonische Gruppe, wenn sich die Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ rechtwinklig schneiden. Die Aussage bleibt für jeden anderen Kreis, der durch die Punkte P_1 und P_2 geht, richtig.*

Beweis. Trennen sich die Punkte P_1, P_2, Q_1 und Q_2 harmonisch, so gilt die Verhältnigleichheit

$$\frac{d(P_1, Q_1)}{d(Q_1, P_2)} = \frac{d(P_1, Q_2)}{d(Q_2, P_2)}$$

ohne Berücksichtigung des Vorzeichens. Beschreibt man die Abstände in dieser Verhältnisgleichung mit den gegebenen Mittelpunkten und Radien der Kreise, so gilt:

$$\begin{aligned} d(P_1, Q_1) &= d(P_1, M_2) - r_2, \\ d(Q_1, P_2) &= r_2 - d(P_2, M_2), \\ d(P_1, Q_2) &= r_2 + d(P_1, M_2), \\ d(Q_2, P_2) &= r_2 + d(P_2, M_2). \end{aligned}$$

Setzt man dies in die obige Verhältnisgleichung ein, multipliziert mit den Nennern beider Brüche, löst die Klammern auf und fasst die entstehenden Terme zusammen, so ergibt sich die folgende Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} \frac{d(P_1, M_2) - r_2}{r_2 - d(P_2, M_2)} &= \frac{r_2 + d(P_1, M_2)}{r_2 + d(Q_2, M_2)} \\ \iff [d(P_1, M_2) - r_2][r_2 + d(P_2, M_2)] &= [r_2 + d(P_1, M_2)][r_2 - d(P_2, M_2)] \\ \iff 2d(P_1, M_2) \cdot d(P_2, M_2) &= 2r_2^2 \\ \iff d(P_1, M_2) \cdot d(P_2, M_2) &= r_2^2. \end{aligned}$$

⁵⁵Besitzen zwei Kreise im gewohnten Sinne zwei Schnittpunkte, so sagt man, dass sie sich reell schneiden. Im Gegensatz dazu definiert man imaginäre Schnitte von Kreisen. Dies lässt sich motivieren, indem man zwei Kreise durch die sie bestimmenden Gleichungen $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$ und $x_2^2 + y_2^2 = r_2^2$ beschreibt. Berechnet man ihre Schnittpunkte mithilfe eines Gleichungssystems und erhält keine reellen, sondern komplexe Lösungen, so schneiden sich die Kreise nicht im gewöhnlichen Sinne, sie schneiden sich imaginär.

Legt man nun in den Schnittpunkt durch den Kreismittelpunkt M_2 des Kreises \mathcal{K}_2 eine Tangente an den Kreis \mathcal{K}_1 , so gilt nach dem Tangentensatz

$$d^2(M_2, B) = d(P_1, M_2) \cdot d(P_2, M_2),$$

wenn B der Berührungspunkt jener Tangenten ist. Zusammen mit obiger Rechnung folgt aufgrund der Postivität der beteiligten Größen

$$d(M_2, B) = r_2.$$

Man schließt also, dass der Berührungspunkt B einer Tangente an den Kreis \mathcal{K}_1 zugleich der Schnittpunkt der beiden gegebenen Kreise ist. Da eine Tangente rechtwinklig zum Radius ihres Berührungspunktes ist, stehen die Radien r_1 und r_2 im rechten Winkel zueinander. Somit folgt aus der Tatsache der harmonischen Teilung der Punkte P_1 , P_2 , Q_1 und Q_2 die Rechtwinkligkeit der Radien r_1 und r_2 im Punkt B . Da alle Folgerungen Äquivalenzen sind, gilt auch die Rückrichtung dieser Aussage. Da in dem Beweis weder der Mittelpunkt M_1 noch der Radius r_1 des Kreises \mathcal{K}_1 eingegangen sind und lediglich von Bedeutung war, dass die Punkte P_1 und P_2 auf dem Kreis \mathcal{K}_1 liegen, gilt die Aussage für jeden beliebigen Kreis durch diese beiden Punkte. \square

Fiedler behauptet, dass sich auf Grundlage des Satzes 5.7 eine Konstruktion ergibt, die es ermöglicht, einen Kreis zu bestimmen, der durch einen gegebenen Punkt verläuft und zwei vorgegebene Kreise rechtwinklig schneidet. Er verweist auf die Möglichkeit der Konstruktion, die in [Fie82a, S. 70] gezeigt wird, gibt sie aber im Buch nicht an. Jedoch ist die unmittelbare Konstruktion nicht möglich: Beachtet man obiges Zitat aus Fiedlers *Cyklographie*, welches zum Satz 5.7 gehört, oder den Satz selbst, so stellt man fest, dass die Orthogonalität der schneidenden Kreise als Voraussetzung dient. Diese ermöglicht im Beweis die Anwendung des Sekanten-Tangenten-Satzes. Es ist nun aber zu beachten, dass aus der gemäß des Satzes durchzuführenden Konstruktion mit Pol und Polare und der Tatsache, dass die Punkte A und B diametral liegen, nicht auf den orthogonalen Schnitt der beiden Kreise geschlossen werden kann; dies ist offenbar die Folgerung in Rückrichtung.

Es stellt sich aber heraus, dass gilt: Seien \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zwei sich schneidende Kreise und A ein Punkt auf dem ersten Kreis. Weiter sei S einer der beiden Schnittpunkte der gegebenen Kreise. Es wird vorausgesetzt, dass die Strecke \overline{AB} ein Durchmesser des Kreises \mathcal{K}_1 ist und die Polare p zum Punkt A in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_2 durch den Punkt B verläuft. Sei mit E der Schnittpunkt der Geraden AM_2 mit der Polare p bezeichnet. Da B der Diametralpunkt zum Punkt A ist und die Polare p defini-

tionsgemäß orthogonal zu der Geraden AM_2 steht, muss der Punkt E auf dem Kreis \mathcal{K}_1 liegen, wie die Umkehrung des Thalesatzes bestätigt. Wenn nun Q_1 und Q_2 die beiden Schnittpunkte des Kreises \mathcal{K}_2 mit der Geraden AM_2 sind, so bilden also aufgrund von Satz 5.9 die vier Punkte A , E , Q_1 und Q_2 eine harmonische Gruppe. Die Rechtwinkligkeit des Schnittes der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 ist nun eine Folgerung aus Satz 5.9.

Für seine Konstruktion setzt Fiedler voraus, dass der Leser Pole und Polare zu gegebenen Kreisen konstruieren kann. Letzteres wurde am Anfang dieses Kapitels in dieser Arbeit diskutiert. Darauf geht Fiedler nicht genauer ein. Diese Bestimmung des orthogonal schneidenden Kreises zu zwei Kreisen durch einen gegebenen Punkt soll an dieser Stelle nachgeholt werden: Seien P ein Punkt und \mathcal{K}_1 sowie \mathcal{K}_2 die gegebenen Kreise, dann konstruiert man den jene beiden Kreise rechtwinklig schneidenden Lösungskreis \mathcal{K}_L wie folgt:

Konstruktion 5.10. Man bestimme mithilfe von Konstruktion 5.6 die Polaren p_1 und p_2 zu den Kreisen \mathcal{K}_1 sowie \mathcal{K}_2 zum gegebenen Punkt P als Pol. Der Schnittpunkt – sofern existent – dieser beiden Geraden sei mit S bezeichnet. Man bestimmt den Mittelpunkt M der Strecke \overline{PS} und zeichne den Kreis $\mathcal{K}_L(M, d(M, S))$ mit dem Mittelpunkt M durch den Punkt S bzw. P . Dieser Kreis ist der gesuchte Lösungskreis.

Erläuterung zur Konstruktion. Die Konstruktion ist eine unmittelbare Folgerung der oben diskutierten Zusammenhänge. Offenbar ist der Punkt S nach Konstruktion der Diametralpunkt des Punktes P . Durch den Punkt S verlaufen die Polaren des Punktes P bezüglich der beiden gegebenen Kreise, sodass diese durch den Lösungskreis orthogonal geschnitten werden.

In der Abbildung 5.7 wird ein Beispiel gezeigt. Darin erkennt man den Kreis \mathcal{K}_L als jenen, der die beiden gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 rechtwinklig schneidet und durch den Punkt P verläuft.

5.2.3. Die Polarebene eines Pols in Bezug auf einen geraden Kreiskegel

Das in Abschnitt 5.2.1 für die Ebene beschriebene Konzept von Pol und Polare in Bezug auf einen Kreis lässt sich räumlich übertragen.

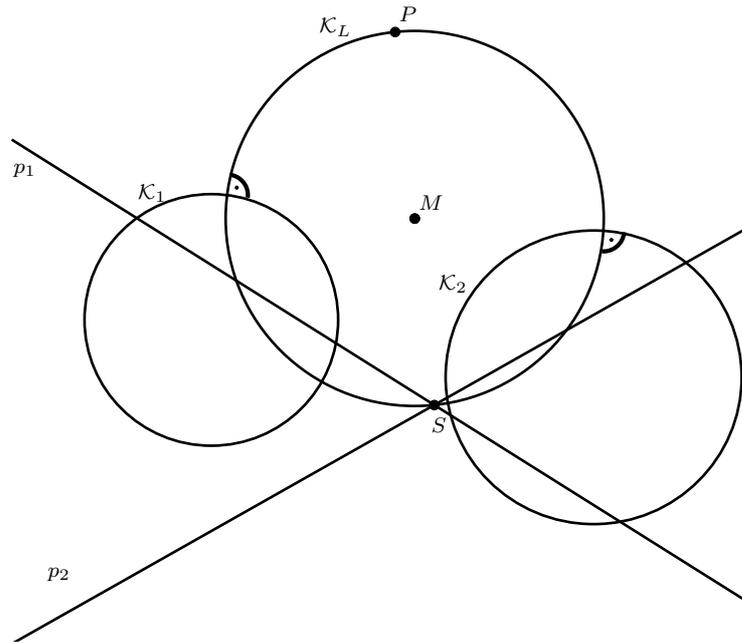


Abbildung 5.7.: Konstruktion eines Kreises \mathcal{K}_L , welcher die zwei gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 rechtwinklig schneidet und durch einen Punkt P verläuft, gemäß Konstruktion 5.10

Dazu definiert man die Polarebene eines Punktes bezüglich eines Kreiskegels.⁵⁶

Es sei P ein Punkt des Raums, $\mathfrak{K}(P)$ der gerade Kreiskegel seiner zyklografischen Abbildung sowie $Z(P)$ der zyklografische Bildkreis von P in der Tafel \mathcal{T} . Weiter sei Q ein vom Mittelpunkt P_1 des zyklografischen Bildes $Z(P)$ verschiedener Punkt der Tafel sowie p_Q die Polare zum Pol Q in Bezug auf den Kreis $Z(P)$ ebenfalls in der Tafelebene. Als *Polarebene des Pols Q in Bezug auf den Kreiskegel $\mathfrak{K}(P)$* sei die Ebene bezeichnet, welche die Gerade p_Q und den Punkt P enthält. Da die Kegelspitze P nicht in der Tafel und damit insbesondere nicht auf der Polaren p_Q liegt, ist diese Ebene eindeutig festgelegt.

Die Abbildung 5.8 zeigt die Polarebene zum Punkt Q bezüglich des Kreiskegels $\mathfrak{K}(P)$ in räumlicher Darstellung. Man erkennt die Polarebene in grau.

Stellt man sich eine senkrecht auf der Tafel stehende, senkrecht zur Polaren p_Q gelegene und außerhalb des Kreiskegels $\mathfrak{K}(P)$ liegende Ebene vor, welche als Projektionsfläche interpretiert werden soll, so lässt sich der Aufriss der Polarebene zeichnen.

⁵⁶Das Konzept der Pol und Polare wurde in der vorliegenden Arbeit für den Kreis eingeführt. So lässt sich das Prinzip in räumlicher Analogie auf das Konzept der Polarebene in Bezug auf eine Kugel verallgemeinern. Es wurde zusätzlich erwähnt, dass man den Pol- und Polarenbegriff für Kegelschnitte in der Ebene allgemeiner erklären kann. So lässt sich auch das räumliche Konzept verallgemeinern. Hier soll für die spätere Diskussion des Apollonischen Berührproblems der Pol- und Polarebenenbegriff für Kegel definiert werden.

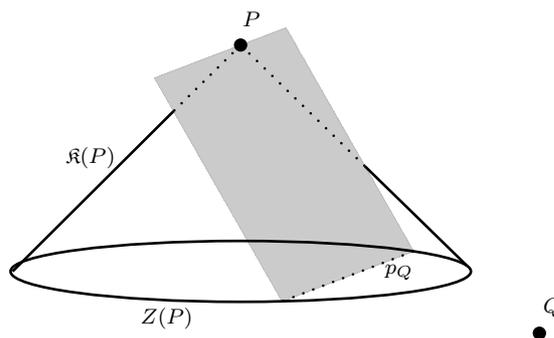


Abbildung 5.8.: Polarebene bezüglich eines Kegels $\mathfrak{K}(P)$ zu einem Pol Q in räumlicher Darstellung

Man erkennt diesen in der Abbildung 5.9.

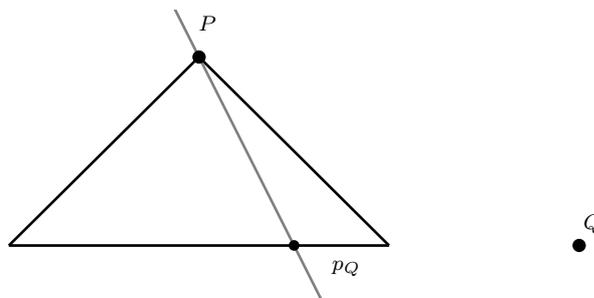


Abbildung 5.9.: Polarebene bezüglich eines Kegels $\mathfrak{K}(P)$ zu einem Pol Q in einer Aufrissdarstellung

5.3. Die Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises

5.3.1. Die Definition des geometrischen Potenzbegriffs

Bei der *Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis* weist man einem Punkt einen positiven, negativen Zahlenwert oder die Zahl Null entsprechend der Lage des Punktes in Relation zum Kreis zu. Bei ihrer Definition nutzt man den Sekanten-, Sehnen- bzw. Tangentensatz aus. Diese Sätze waren bereits in der Antike bekannt; so findet sich beispielsweise der Sehnensatz schon in Euklids Elementen wieder (vgl. [Tro23, S. 160] und s. Euklids Elemente, III. Buch, Satz 35). Jedoch schreibt man den Potenzbegriff selbst Steiner zu. Er führte ihn in einem Artikel ein, der im ersten Band

von Crelles Journal erschien, wie man in [Tro23, S. 161] nachliest. So schreibt er:

”Werden aus einem, in der Ebene eines Kreises M [...] willkürlich angenommenen Punkte P gerade Linien PAB, PCD gezogen, die den Kreis schneiden: so ist das Product (Rechteck) aus den Abständen des Punkts von den Durchschnittspunkten der schneidenden Linien eine beständige Größe; d. h. es ist

$$PA \times PB = PC \times PD = \dots!'$$

Dieses Product, für einen bestimmten Punct, in Bezug auf einen gegebenen Kreis, soll

’Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis,’

oder auch umgekehrt:

’Potenz des Kreises in Bezug auf den Punct [...]’ heißen.

[Ste26, S.164]

In dieser Arbeit wird eine andere Definition gewählt, die jedoch zur Steiner’schen äquivalent ist, was in [Ste26, S. 165] nachzulesen ist. Es sei dazu $\mathcal{K}(M, r)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r in der Ebene. Weiter sei P ein beliebiger Punkt. Dann definiert man die Potenz $p_{\mathcal{K}}(P)$ von P bezüglich des Kreises \mathcal{K} durch die Formel⁵⁷

$$p_{\mathcal{K}}(P) := d^2(M, P) - r^2.$$

Das obige Zitat Steiners zeigt, dass auch eine Formel angegeben werden kann, die ohne den Radius des Kreises auskommt. Auch Fiedler definiert den Begriff Potenz im Sinne Steiners – so liest man in Fiedlers *Cyklographie*:

Nun ist für einen Punkt und einen Kreis auf allen durch den Punkt gezogenen Secanten desselben das Product der vom Punkte aus gezählten Abschnitte constant, mit Berücksichtigung der Zeichen negativ für einen inneren und positiv für einen äusseren Punkt [...]; und man nennt dieses constante Product die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis. [Fie82a, S. 71]

Kurz formuliert, kann man dies wie folgt ausdrücken: Sei g eine Gerade durch den Punkt P , der nicht auf der Kreisperipherie eines Kreises \mathcal{K} liegt und den Kreis in

⁵⁷Diese Festlegung findet man beispielsweise in Coxeters Lehrwerk [Cox83, S. 34] von 1983. Bei Fiedler ist diese Notation nicht zu finden.

zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet. Dann hat man

$$p_{\mathcal{K}}(P) = \begin{cases} d(P, S_1) \cdot d(P, S_2), & \text{wenn } P \text{ im au\ss}erhalb des Kreises liegt \\ -d(P, S_1) \cdot d(P, S_2), & \text{wenn } P \text{ im innerhalb des Kreises liegt} \\ 0, & \text{wenn } P \text{ auf dem Kreis liegt.} \end{cases}$$

Der letzte Fall der Fallunterscheidung vervollst\u00e4ndigt die Definition f\u00fcr den Fall $P \in \mathcal{K}$. Der Sehnen- und Sekantensatz garantiert, dass diese Vorschrift wohldefiniert ist, also unabh\u00e4ngig von der speziellen Wahl der Geraden g . Nun ist zu pr\u00fcfen, dass die oben beschriebenen Zug\u00e4nge zum Potenzbegriff miteinander vereinbar, also \u00e4quivalent sind. Das wird nun nachgerechnet. Liegt der Punkt P zun\u00e4chst auf dem Kreis, so ist

$$d^2(M, P) - r^2 = r^2 - r^2 = 0.$$

Ist der Punkt P au\u00dferhalb des Kreises \mathcal{K} gelegen und w\u00e4hlt man speziell die Sekante $g = MP$, so ergibt sich

$$d(P, S_1) \cdot d(P, S_2) = [d(P, M) - r][d(P, M) + r] = d^2(M, P) - r^2.$$

Falls der Punkt P im Inneren des Kreises liegt, folgt unmittelbar

$$-d(P, S_1) \cdot d(P, S_2) = -[r - d(P, M)][r + d(P, M)] = d^2(M, P) - r^2,$$

womit die \u00c4quivalenz der obigen Festlegungen des Potenzbegriffs nachvollzogen ist (vgl. [Aum15, S. 40]).

5.3.2. Die Potenzgerade in Bezug auf zwei Kreise

Im Folgenden soll gekl\u00e4rt werden, welche Lage die Punkte besitzen, die in Bezug auf zwei gegebene Kreise die gleiche Potenz besitzen. Angenommen, es seien zwei Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 gegeben, welche verschiedene Mittelpunkte besitzen, also nicht konzentrisch sind. Gesucht ist die Menge der Punkte, welche in Bezug auf \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 die gleiche Potenz haben. Man hat den folgenden Zusammenhang:

Satz 5.11. *Es seien zwei Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 gegeben, wobei die beiden Mittelpunkte verschieden sein sollen, es gilt also $M_1 \neq M_2$. Alle Punkte, die in Bezug auf beide Kreise die gleiche Potenz besitzen, bilden eine Gerade, welche orthogonal auf der Zentrale M_1M_2 der beiden Kreise*

steht. Diese wird Potenzgerade der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 genannt.

Dieses Erkenntnis lässt sich auf den französischen Mathematiker L. Gaultier⁵⁸ zurückführen, der die Potenzgerade *axe radical* nannte, wie man in [Tro23, S. 161] nachliest. Julius Plücker (1801-1868), Poncelet und Steiner führten die Begriffe *Chordale*, *Linie der gleichen Potenzen* bzw. *gemeinschaftliche Sehne* ein (vgl. [Tro23, ebd.]). Den Satz 5.11 kann man analytisch beweisen, wie es beispielsweise in [Cox83, S. 36f.] geschieht. Orientiert an [Aum15, S. 41] wird nun die Korrektheit von Satz 5.11 unter Verwendung der Methoden der Elementargeometrie gezeigt. Der nachfolgende Beweis kann mithilfe der Abbildung 5.12 nachvollzogen werden.

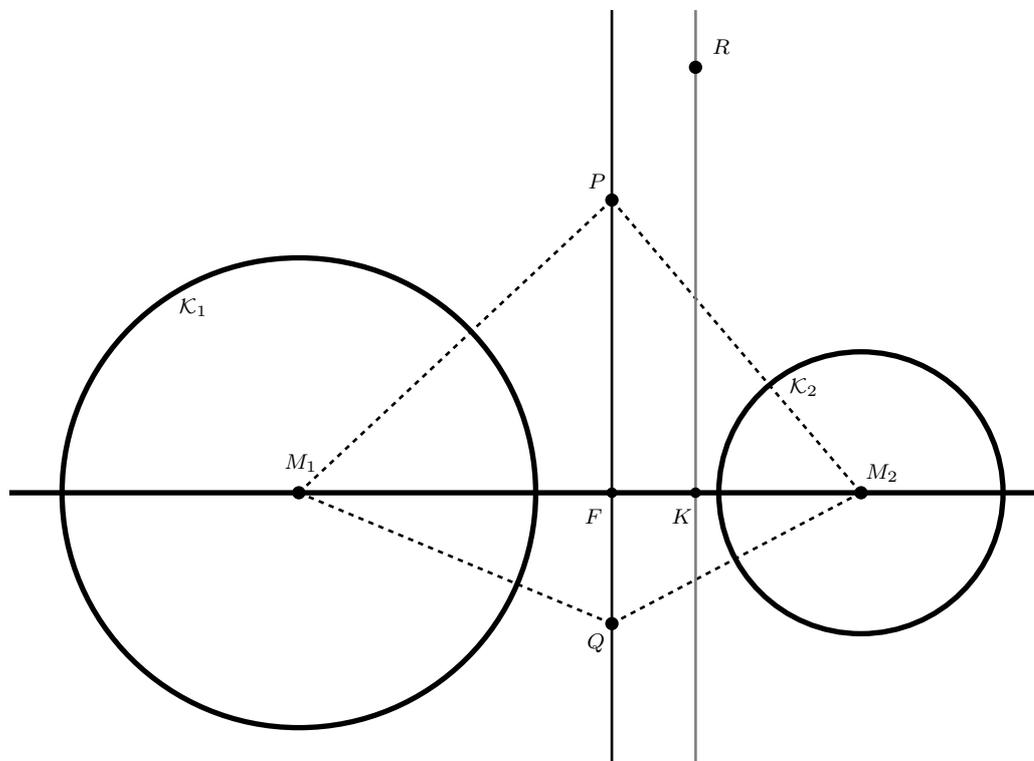


Abbildung 5.10.: Die Potenzgerade zu zwei Kreisen – Skizze zum Beweis von Satz 5.11

Beweis. Es sei P ein Punkt, der in Bezug auf die beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 die gleiche Potenz besitzt, es gelte also $p_{\mathcal{K}_1}(P) = p_{\mathcal{K}_2}(P)$. Weiter sei F der Schnittpunkt des Lotes zur Zentralen M_1M_2 durch den Punkt P mit der Zentralen M_1M_2 . Die Existenz der Geraden M_1M_2 ist gesichert, da die Kreise nach Voraussetzung nicht

⁵⁸Gaultier war Schüler an der École Polytechnique und Professor für Darstellende Geometrie am Conservatoire des Arts et Métiers in Paris.

konzentrisch sind. Es gelten dann die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 p_{\mathcal{K}_1}(P) = p_{\mathcal{K}_2}(P) &\iff d^2(M_1, P) - r_1^2 = d^2(M_2, P) - r_2^2 \\
 &\iff d^2(M_1, F) + d^2(F, P) - r_1^2 = d^2(M_2, F) + d^2(F, P) - r_2^2 \\
 &\iff d^2(M_1, F) - r_1^2 = d^2(M_2, F) - r_2^2 \\
 &\iff p_{\mathcal{K}_1}(F) = p_{\mathcal{K}_2}(F),
 \end{aligned}$$

da nach dem Satz des Pythagoras die beiden Gleichungen

$$d^2(M_1, P) = d^2(M_1, F) + d^2(F, P)$$

sowie

$$d^2(M_2, P) = d^2(M_2, F) + d^2(F, P)$$

für die beiden (nach Konstruktion) rechtwinkligen Dreiecke $\triangle M_1FP$ und $\triangle M_2FP$ gelten. Damit sieht man ein, dass sofern P ein Punkt ist, der sowohl in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_2 als auch den Kreis \mathcal{K}_1 die gleiche Potenz hat, auch der Lotfußpunkt des Lotes zur Zentrale der beiden Kreise durch den Punkt P die gleiche Potenz bezüglich beider Kreise besitzt. Damit bleiben zum Abschluss des Beweises zwei weitere Aussagen zu zeigen:

1. Jeder Punkt Q der Geraden FP besitzt die gleiche Potenz in Bezug auf die beiden Kreise.
2. Alle anderen Punkte, die nicht auf der Geraden FP liegen, besitzen unterschiedliche Potenzen in Bezug auf die beiden Kreise.

Der erste Teil ergibt sich durch die nachfolgende Rechnung. Sei Q ein Punkt der Geraden FP , also auf dem Lot zur Zentrale M_1M_2 durch die Punkte F und P gelegen, dann hat man die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 p_{\mathcal{K}_1}(F) = p_{\mathcal{K}_2}(F) &\iff d^2(M_1, F) - r_1^2 = d^2(M_2, F) - r_2^2 \\
 &\iff d^2(M_1, Q) - d^2(F, Q) - r_1^2 = d^2(M_2, Q) - d^2(F, Q) - r_2^2 \\
 &\iff d^2(M_1, Q) - r_1^2 = d^2(M_2, Q) - r_2^2 \\
 &\iff p_{\mathcal{K}_1}(Q) = p_{\mathcal{K}_2}(Q),
 \end{aligned}$$

wobei die Gleichungen

$$d^2(M_1, F) = d^2(M_1, Q) - d^2(F, Q)$$

und

$$d^2(M_2, F) = d^2(M_2, Q) - d^2(F, Q)$$

benutzt wurden, die sich durch Anwendung des Satzes von Pythagoras ergeben.

Nun zum zweiten Teil: Dass kein Punkt R , welcher nicht auf der Geraden PF liegt, auf der Potenzlinie liegt, ergibt sich aus der zu Beginn des Beweises angestellten Überlegung. Denn es müsste auch zu diesem Punkt der Lotfußpunkt K des Lotes zur Zentralen durch R zur Potenzlinie gehören. Es gilt

$$d^2(M_1, F) - r_1^2 = d^2(M_2, F) - r_2^2 \iff d^2(M_1, F) - d^2(M_2, F) = r_1^2 - r_2^2$$

und analog per Annahme

$$d^2(M_1, K) - r_1^2 = d^2(M_2, K) - r_2^2 \iff d^2(M_1, K) - d^2(M_2, K) = r_1^2 - r_2^2.$$

Durch Gleichsetzen und je nach Lage (links oder rechts der Lotgeraden PF) erhält man

$$\begin{aligned} & d^2(M_1, F) - d^2(M_2, F) \\ &= d^2(M_1, K) - d^2(M_2, K) \\ &= [d(M_1, F) \pm d(F, K)]^2 - [d(M_2, F) \mp d(F, K)]^2 \\ &= d^2(M_1, F) \pm 2 \cdot d(F, K)d(M_1, F) - d^2(M_2, F) \pm 2 \cdot d(M_2, F)d(F, K). \end{aligned}$$

Dies ergibt nach Zusammenfassen die folgende äquivalente Gleichung

$$0 = \pm 2 \cdot d(F, K)d(M_1, F) \pm 2 \cdot d(M_2, F)d(F, K).$$

Nun dividiert man beide Seiten der Gleichung mit 2. Haben beide Terme ein negatives Vorzeichen, so multipliziert man zusätzlich mit -1 und erhält

$$\begin{aligned} 0 &= d(F, K)d(M_1, F) + d(M_2, F)d(F, K) \\ &= d(F, K) \cdot [d(M_1, F) + d(F, K)]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $d(F, K) = 0$, also genau dann, wenn

$F = K$ ist. Es gilt also die Behauptung. \square

5.3.3. Die Konstruktion der Potenzgeraden zu zwei Kreisen

In diesem Abschnitt wird die Frage geklärt, wie sich eine Potenzgerade in Bezug auf zwei nicht-konzentrische Kreise konstruieren lässt. Dazu unterscheidet man vier mögliche Lagen der Kreise.

Im ersten Fall schneiden sich die Kreise, dann gelten die beiden Folgerungen aus dem im vorherigen Abschnitt gezeigten Satz 5.11:

Korollar 5.12. *Schneiden sich zwei nicht-konzentrische Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in zwei Punkten S_1 und S_2 , so ist die Gerade S_1S_2 die Potenzgerade der beiden Kreise.*

Beweis. Da die Schnittpunkte S_1 und S_2 jeweils auf beiden Kreisen liegen, ist offenbar

$$p_{\mathcal{K}_1}(S_1) = p_{\mathcal{K}_1}(S_2) = p_{\mathcal{K}_2}(S_1) = p_{\mathcal{K}_2}(S_2) = 0,$$

sodass in Verbindung mit Satz 5.11 die Aussage des Korollars Gültigkeit erlangt. \square

Im zweiten Fall berühren sich die Kreise in einem Punkt:

Korollar 5.13. *Berühren sich zwei nicht-konzentrische Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 im Punkt B so, dass sie auf jeweils verschiedenen Seiten ihrer gemeinsamen Tangente im Punkt B liegen, so ist ihre Potenzgerade durch die Lotgerade zur Zentralen der beiden Kreise im Berührungspunkt B , also durch ihre gemeinsame Tangente, gegeben.*

Beweis. Da die Gleichung

$$p_{\mathcal{K}_1}(B) = p_{\mathcal{K}_2}(B) = 0$$

besteht, ergibt sich Behauptung wie zuvor. \square

Im dritten Fall schneiden sich die beiden Kreise nicht und zusätzlich liegt keiner der Kreise in dem jeweils anderen. Um die Potenzgerade zu konstruieren, ist die Bestimmung der inneren gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise notwendig: Dazu seien $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ sich nicht-schneidende Kreise.

Konstruktion 5.14 (Bestimmung der gemeinsamen inneren Tangenten). Zunächst bestimme man unter Anwendung der Konstruktion 3.4 das innere Ähnlichkeitszentrum A_i . Anschließend bestimme man den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{M_1A_i}$.

Man ziehe den Kreis $\mathcal{K}_T(M, d(M, M_1))$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $d(M, M_1)$ und bestimme seine Schnittpunkte S_1 und S_2 mit dem Kreis \mathcal{K}_1 . Die Geraden S_1A_i und S_2A_i sind die gemeinsamen inneren Tangenten der beiden Kreise.

In der Abbildung 5.11 sind die inneren gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 dargestellt. Gepunktet gezeigt ist der Kreis über der Strecke $\overline{M_1A_i}$.

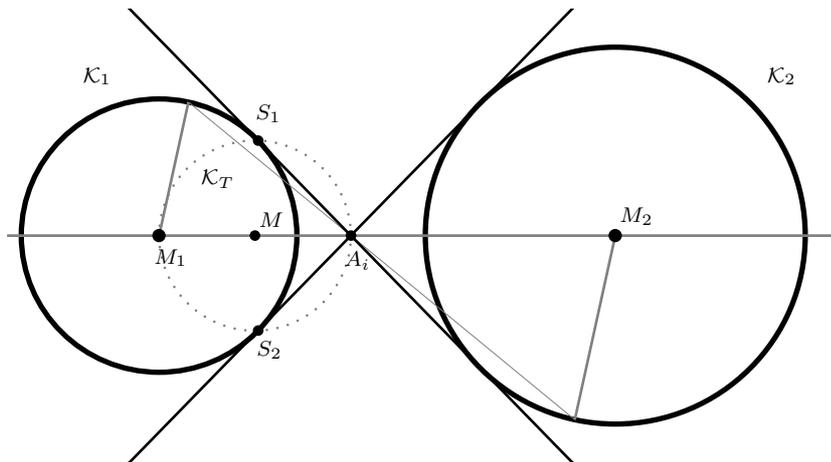


Abbildung 5.11.: Konstruktion der inneren Tangenten zu zwei Kreisen

Erläuterung zur Konstruktion. Zunächst geht jede innere Tangente zweier Kreise durch das innere Ähnlichkeitszentrum. Fasst man den Kreis \mathcal{K}_T als Thaleskreis über der Strecke $\overline{M_1A_i}$ auf, so ist der jeweils eingeschlossene Winkel der beiden Geraden bei S_1 und S_2 mit den Radien $\overline{M_1S_1}$ und $\overline{M_1S_2}$ ein rechter. Da die Strecken $\overline{M_1S_1}$ und $\overline{M_1S_2}$ Radien des Kreises \mathcal{K}_1 sind, folgt, dass die Geraden S_1A_i und S_2A_i die gesuchten Tangenten sind.

Es ist nun möglich, die Potenzgerade für zwei beliebige nicht-konzentrische Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in den nachfolgenden Lagen zu bestimmen:

Konstruktion 5.15 (Potenzgerade). Seien $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ zwei nicht konzentrische Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 . Zur Konstruktion der Potenzgeraden unterscheidet man vier Fälle:

- (i) die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 schneiden sich:
Seien S_1 und S_2 die beiden Schnittpunkte der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 . Man zeichne die Gerade S_1S_2 (gemeinsame Tangente), sie ist die gesuchte Potenzgerade.
- (ii) die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 berühren sich im Punkt B :
Man zeichne die Lotgerade zur Zentralen M_1M_2 der beiden Kreise durch den Berührungspunkt B , sie ist die gesuchte Potenzgerade.

(iii) die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 schneiden sich nicht und es ist $r_1 + r_2 < d(M_1, M_2)$, die Kreise liegen also nicht ineinander:

Man bestimme die zwei inneren Tangenten der beiden Kreise mithilfe von Konstruktion 5.14. Nun betrachte man eine der inneren Tangenten t sowie ihre Berührungspunkte B_1 und B_2 . Anschließend bestimme man den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{B_1B_2}$. Abschließend konstruiere man das Lot zur Geraden M_1M_2 durch den Punkt M . Dies ist die gesuchte Potenzgerade.

(iv) die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 schneiden sich nicht und es ist $r_1 + r_2 > d(M_1, M_2)$, die Kreise liegen also ineinander:

In diesem Falle zeichnet man einen beliebigen Kreis, welcher die beiden Kreise jeweils in zwei Punkten schneidet. Man verbindet die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Kreis \mathcal{K}_1 durch die Gerade s und die Schnittpunkte mit \mathcal{K}_2 werden durch die Gerade l verbunden. Die Lotgerade zur Zentralen M_1M_2 durch den Schnittpunkt K der Geraden g und l ist die gesuchte Potenzgerade.

In der Abbildung 5.12a) ist der Sachverhalt aus Konstruktion 5.15(i) und in der Abbildung 5.12b) der zweite Teil von Konstruktion 5.15 dargestellt; die Potenzgerade ist in grau eingezeichnet.

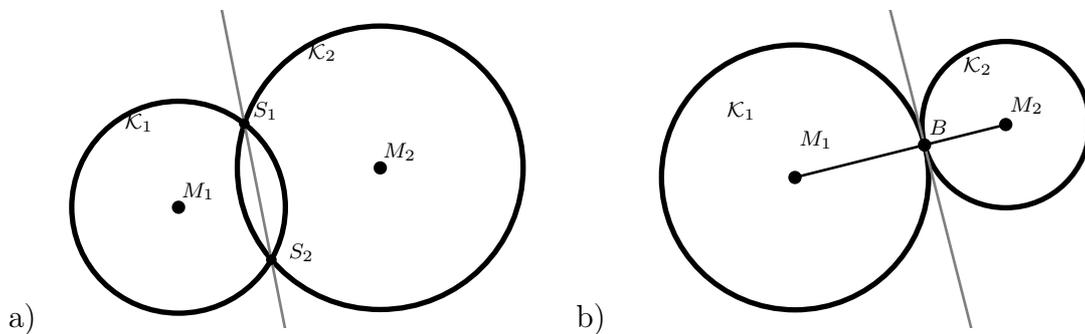


Abbildung 5.12.: Potenzgerade zweier Kreise, welche sich schneiden bzw. berühren – Skizze zu den Konstruktionen 5.15(i) und 5.15(ii)

Die in der Abbildung 5.13 dargestellte Situation zeigt das Ergebnis der Konstruktion 5.15(iii). Der gestrichelt dargestellte Kreis ist ein Hilfsthaleskreis zur Bestimmung einer inneren gemeinsamen Tangente der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 . Ebenfalls ist die Potenzgerade in grau gezeichnet.

Erläuterung zur Konstruktion. Die Konstruktionen (i) und (ii) sind unmittelbar aufgrund der Korollare 5.12 und 5.13 klar. Für den dritten Fall der Konstruktion gilt für die Schnittpunkte S_{1a} und S_{2a} mit dem einen sowie S_{1b} und S_{2b} mit dem

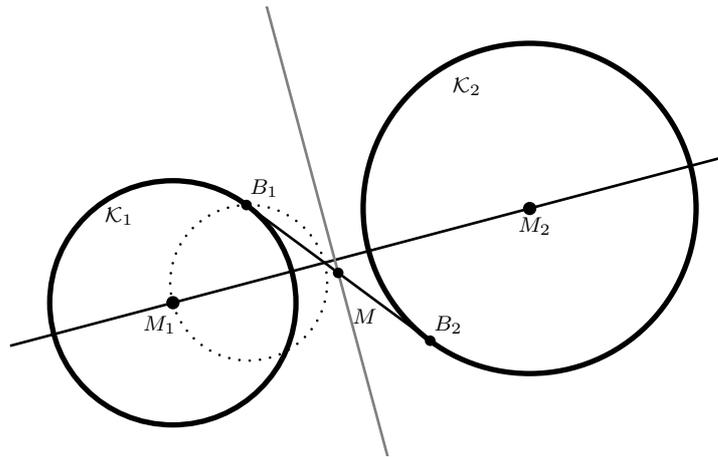


Abbildung 5.13.: Potenzgerade zweier Kreise, welche keine gemeinsamen Punkte haben – Skizze zur Konstruktion 5.15(iii)

anderen Kreis und der Zentrale

$$d^2(M, B_1) = d(M, S_{1a}) \cdot d(M, S_{2a}) = d(M, S_{1b}) \cdot d(M, S_{2b}) = d^2(M, B_2),$$

wie man mit dem Tangentensatz einsieht. Also ist auf die oben beschriebene Weise die Potenzgerade gefunden. Dass die Konstruktion (iv) die Potenzgerade liefert, ist nach dem Sekantensatz klar. Da die Sekantenabschnitte von K aus in Bezug auf den grauen Kreis für jede Gerade gleich sind, die Geraden g und l aber die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 schneiden, hat der Punkt K die gleiche Potenz in Bezug auf die beiden Kreise.

In der Abbildung 5.14 sieht man das Ergebnis der Konstruktion 5.15(iv); in grau ist der beliebig gewählte Hilfskreis eingezeichnet, der beide Kreise schneidet.

Für die beiden Fälle, in denen die Kreise sich nicht schneiden und entweder ineinander liegen oder nicht, kann man die Potenzgerade auch auf eine andere Weise erhalten; dies wird in [Fie82a, S. 73] bei Fiedler beschrieben. Seien $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 sowie den Radien r_1 und r_2 zwei derartige Kreise.

Konstruktion 5.16. Man zeichne einen Kreis \mathcal{K} , welche die beiden gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in den Punkten A, B sowie P und Q schneidet und dessen Mittelpunkt nicht auf der Zentralen M_1M_2 liegt. Dann sind die Geraden AB und PQ nicht parallel; ihr Schnittpunkt sei mit S bezeichnet.⁵⁹ Die zur Zentralen M_1M_2 senkrechte Gerade durch den Punkt S ist die Potenzgerade zu den beiden Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 .

⁵⁹Tatsächlich wären die AB und PQ parallel, wenn der Mittelpunkt des Kreises \mathcal{K} auf der Zentralen M_1M_2 läge.

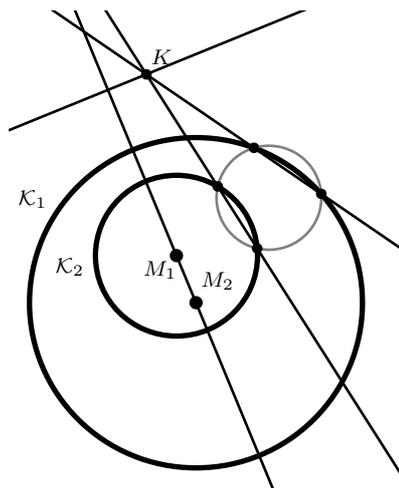


Abbildung 5.14.: Potenzgerade zweier Kreise, welche keine gemeinsamen Punkte besitzen – Skizze zur Konstruktion 5.15(iv)

Offenbar ist diese Konstruktion mit der oben beschriebenen Konstruktion 5.15(iv) vergleichbar und kann diese ersetzen. Dies zeigt sich auch in der nachfolgenden Konstruktionserläuterung, in der es nicht notwendig ist, auszuschließen, dass die beiden sich nicht schneidenden Kreise ineinanderliegen.

Den Punkt S , der Sekantenschnittpunkt der Kreise, bezeichnet Fiedler als *Konvergenzpunkt*. In der Abbildung 5.15 ist die Konstruktion visualisiert. Die Potenzgerade ist in grau und der Hilfskreis \mathcal{K} gestrichelt dargestellt.

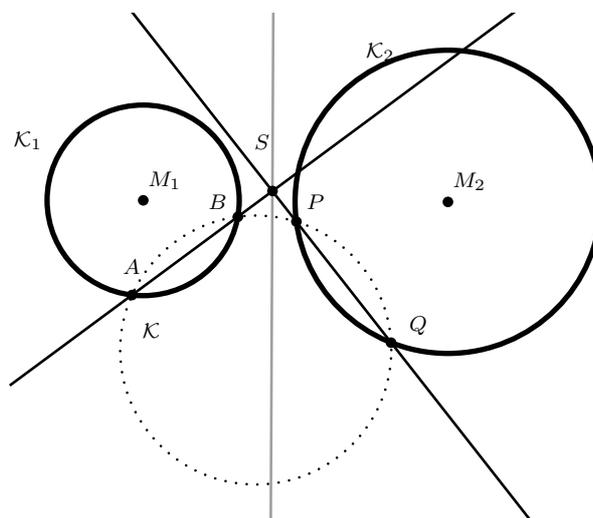


Abbildung 5.15.: Bestimmung der Potenzgerade zweier Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mithilfe eines Hilfskreises \mathcal{K} gemäß Konstruktion 5.16

Erläuterung zur Konstruktion. Gemäß Korollar 5.12 sind die Geraden AB und PQ

die Potenzgeraden der Kreispaare \mathcal{K}_1 und \mathcal{K} sowie \mathcal{K}_2 und \mathcal{K} . Demnach hat der Punkt S die gleiche Potenz in Bezug auf alle drei Kreise. Abschließend rechtfertigt der Satz 5.11 die Konstruktion der senkrechten Geraden zur Zentrale M_1M_2 durch den Punkt S , um die Potenzgerade der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zu erhalten.

5.3.4. Die gemeinschaftliche Potenz eines Ähnlichkeitspunktes zu zwei Kreisen

Man hat bereits gesehen, dass alle Punkte, die in Bezug auf zwei gegebene Kreise dieselbe Potenz besitzen, auf einer Geraden – der sogenannten Potenzgeraden – liegen. Nun soll der Begriff der gemeinschaftlichen Potenz eingeführt werden (vgl. [Fie82a, S. 78]). Dazu betrachtet man zwei verschiedene Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mit unterschiedlichen Mittelpunkten M_1 und M_2 und unterschiedlichen Radien r_1 und r_2 . Mithilfe von Konstruktion 3.4 bestimmt man das äußere und innere Ähnlichkeitszentrum A_a und A_i der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 .

Nun kann der Begriff der *gemeinschaftlichen Potenz eines Ähnlichkeitspunktes in Bezug auf die beiden Kreise* eingeführt werden: Man zeichnet eine Gerade g durch das äußere Ähnlichkeitszentrum, welche die beiden Kreise schneidet. Der Kreis \mathcal{K}_1 soll in den Punkten A_1 und B_1 , der Kreis \mathcal{K}_2 in den Punkten A_2 und B_2 geschnitten werden, so wie in der Abbildung 5.16 dargestellt. Des Weiteren bestimmt man eine Gerade k durch den inneren Ähnlichkeitspunkt A_i , die die beiden Kreise schneidet, und bezeichnet mit C_1, D_1 und C_2, D_2 ihre Schnittpunkte mit dem Kreis \mathcal{K}_1 bzw. dem Kreis \mathcal{K}_2 , so wie in der Abbildung 5.16 erkennbar.

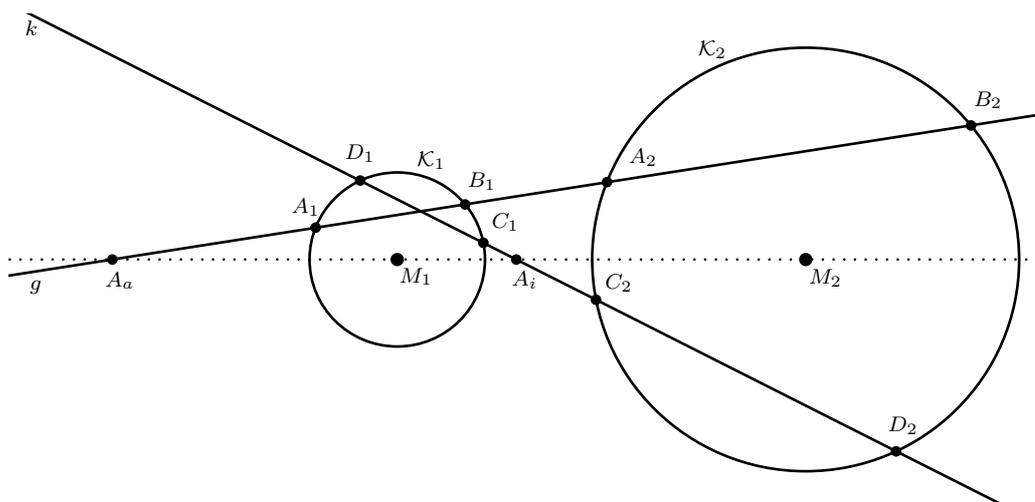


Abbildung 5.16.: Der Schnitt der beiden Geraden k und g mit den Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 und die Beschriftungen der Schnittpunkte

Dann beweist man den folgenden Satz, der bestimmte Produkte von Streckenabschnitten auf den Geraden g und k in Verbindung bringt:

Satz 5.17 (Gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise). *Mit den obigen Bezeichnungen gelten die beiden Gleichungen*

$$d(A_a, A_1) \cdot (A_a, B_2) = d(A_a, A_2) \cdot d(A_a, B_1)$$

und

$$d(A_i, C_1) \cdot (A_i, D_2) = d(A_i, C_2) \cdot d(A_i, D_1).$$

Die Zahl aus der ersten Gleichung soll äußere, die aus der zweiten Gleichung innere gemeinschaftliche Potenz in Bezug auf die beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 heißen. Für sie sollen entsprechend die Notationen

$$p_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(A_a) \text{ bzw. } p_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(A_i)$$

verwendet werden.⁶⁰ Die jeweiligen Produkte in beiden Gleichungen sind für jede Wahl einer die Kreise schneidenden Gerade g bzw. k gleich.

Beweis. Es wird der Beweis für das äußere Ähnlichkeitszentrum geführt, für das innere Ähnlichkeitszentrum geht man analog vor.

Zunächst zieht man zusätzlich zur Geraden g eine Gerade g' , die ebenfalls die beiden Kreise schneiden soll, und bezeichnet ihre Schnittpunkte mit den Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mit A'_1, B'_1 und A'_2, B'_2 gemäß der Skizze in der Abbildung 5.17a). Durch Einzeichnen von Sehnen in die beiden Kreise entstehen zwei Vierecke $A'_1A_1B_1B'_1$ und $A'_2A_2B_2B'_2$. Diese beiden Vierecke sind zueinander ähnlich, da sie durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum A_a erhalten wurden. Deshalb sind entsprechende Winkel in den beiden Vierecken gleich groß.

Jetzt wird nachvollzogen, dass die Vierecke $V_1 := B'_1A'_2A_2B_1$ und $V_2 := A'_1B'_2A_2B_1$ Sehnenvierecke sind, also Kreise existieren, die durch die Eckpunkte der Vierecke gezeichnet werden können. Dazu verwendet man einen Satz aus der elementaren Kreisgeometrie, der besagt, dass ein Viereck genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen.

- Das Viereck V_1 ist ein Sehnenviereck:

Benutzt man diese Tatsache, so sind die Winkelsummen der eingezeichneten

⁶⁰Fiedler verwendet diese Notation nicht.

Winkel aus der Abbildung 5.17a)

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

und

$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

und man findet die vier Winkel α, β, γ und δ wie abgebildet in dem Viereck V_1 (grau hervorgehoben) wieder. Man erkennt sofort, dass die gegenüberliegenden Seiten in diesen Vierecken in der Summe 180° ergeben. In der Abbildung wurde der Kreis über dem Sehnenviereck V_1 gestrichelt angedeutet.

- Das Viereck V_2 ist ein Sehnenviereck:

Nun benutzt man die soeben bewiesene Tatsache, dass V_1 ein Sehnenviereck ist. In der Abbildung 5.17b) wurden gleich große Winkel eingezeichnet. Da die Winkel ε in den Dreiecken $\triangle A'_1 B'_1 A_1$ und $\triangle A'_2 B'_2 A_2$ wegen Ähnlichkeit gleich groß sind, findet man ihn auch im Dreieck $\triangle A'_1 B'_1 B_1$ bei B_1 aufgrund des Umfangswinkelsatzes wieder. Die Winkelsumme von 180° im Dreieck $\triangle A'_1 B'_1 B_1$ liefert, dass $x = 180^\circ - \beta - \varepsilon$ gilt. Somit gilt für die im Viereck V_2 gegenüberliegenden Winkel

$$x + \varepsilon + \beta = 180^\circ - \beta - \varepsilon + \varepsilon + \beta = 180^\circ.$$

Für die beiden verbleibenden Winkel verfährt man genauso.

Da nun also das Viereck V_2 ein Sehnenviereck ist (der Kreis ist angedeutet), liefert der Sekantensatz zusammen mit der Definition der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis die Behauptung des Satzes. \square

Es sei abschließend verdeutlicht, dass die oben eingeführte gemeinschaftliche Potenz zu zwei Kreisen nur für die Ähnlichkeitspunkte sinnvoll definiert werden kann. Dies erkennt man im Beweis daran, dass mit einer zentrischen Streckung gearbeitet wird. Deshalb kann man den gemeinschaftlichen Potenzbegriff auch nur für die Streckzentren der beiden Kreise, also ihre Ähnlichkeitspunkte einführen.

Im Kapitel 6 werden die sogenannten Kreisbüschel im Kontext der Untersuchung von Hyperbeln eingeführt. Diese erlauben es, das Konzept der *Potenzkreise* für zwei sich schneidende Kreise auf Kreise zu erweitern, die keine gemeinsamen Punkte haben. Dort wird man sehen, dass die Radien dieser Potenzkreise mit dem soeben eingeführten Begriff der gemeinschaftlichen Potenz in Verbindung stehen. Außerdem

wird es gelingen, das Konzept des Potenzkreises für zwei Kreise mit dem Konzept des Potenzkreises für drei gegebene Kreise zusammenzuführen, weshalb sich die Bezeichnung *Potenzkreis* rechtfertigt.

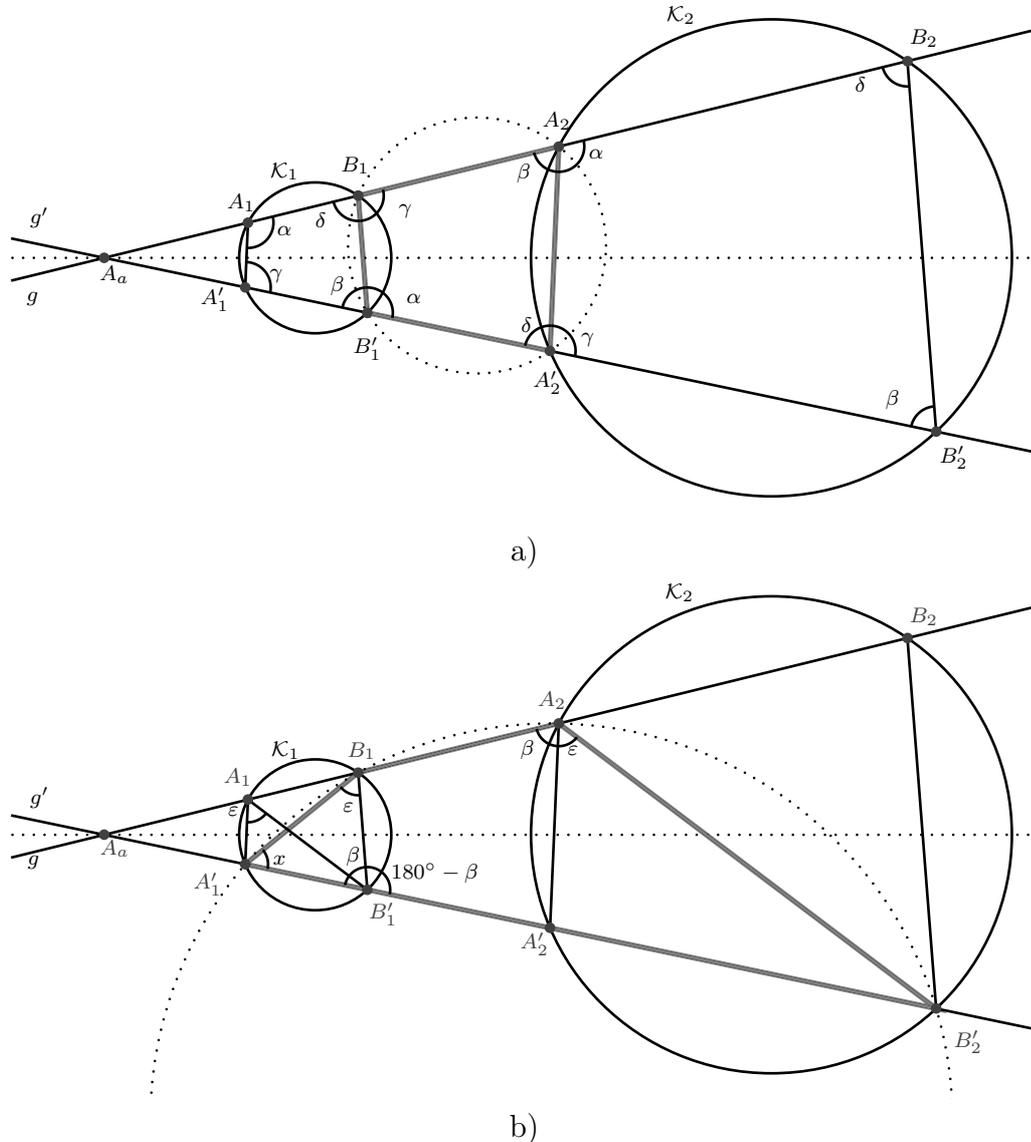


Abbildung 5.17.: Beweisskizzen zum Satz 6.25

5.4. Der Potenzkreis und das Potenzzentrum zu drei Kreisen und ihre Eigenschaften

Es seien drei Kreise $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ und \mathcal{K}_3 unterschiedlicher Mittelpunkte gegeben. Der nachfolgende Satz beschreibt die Lage des Punktes, in dem sich die Potenzgeraden

dieser drei Kreise schneiden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Potenzgeraden paarweise nicht parallel zueinander sind – die Kreismittelpunkte liegen demnach nicht auf einer Zentralen. Konkreter gilt der nachfolgende

Satz 5.18. *Schneiden sich die drei Potenzgeraden p_1 , p_2 und p_3 der Kreispaaire \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 ; \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_3 sowie \mathcal{K}_2 , \mathcal{K}_3 , dann schneiden sie sich in einem gemeinsamen Punkt Z und es gilt*

$$p_{\mathcal{K}_1}(Z) = p_{\mathcal{K}_2}(Z) = p_{\mathcal{K}_3}(Z),$$

also die Potenzgleichheit des Punktes Z in Bezug auf die gegebenen drei Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 .

Beweis. Es gelten für jeden Punkt der Potenzgeraden p_1 und p_2 und damit insbesondere für ihren Schnittpunkt Z die Gleichungen

$$p_{\mathcal{K}_1}(Z) = p_{\mathcal{K}_2}(Z) \quad \text{und} \quad p_{\mathcal{K}_1}(Z) = p_{\mathcal{K}_3}(Z).$$

Diese beiden Gleichungen zusammen liefern

$$p_{\mathcal{K}_2}(Z) = p_{\mathcal{K}_3}(Z),$$

weshalb der Punkt Z in Bezug auf die drei gegebenen Kreise die gleiche Potenz besitzt. Demnach schneiden sich alle Potenzgeraden in diesem Punkt. \square

Der Schnittpunkt Z erhält die Bezeichnung *Potenzzentrum* oder *Radikalzentrum der Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3* und der Kreis

$$\mathcal{K}_P \left(Z, \sqrt{|p_{\mathcal{K}_1}(Z)|} \right)$$

mit dem Potenzzentrum Z als Mittelpunkt und der Quadratwurzel aus der zu allen Kreisen betragsmäßig identischen Potenz als Radius wird *gemeinsamer Potenzkreis der Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3* genannt. Bei TROPFKE in [Tro23, S. 161] erfährt man, dass der im Satz 5.18 beschriebene Zusammenhang vermutlich erstmalig bei MONGE Erwähnung fand. Die Abbildung 5.18 zeigt den Potenzkreis \mathcal{K}_P sowie das Potenzzentrum Z der drei gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 getrichelt. Darüber hinaus erkennt man die Potenzgeraden p_1 , p_2 und p_3 in grau.

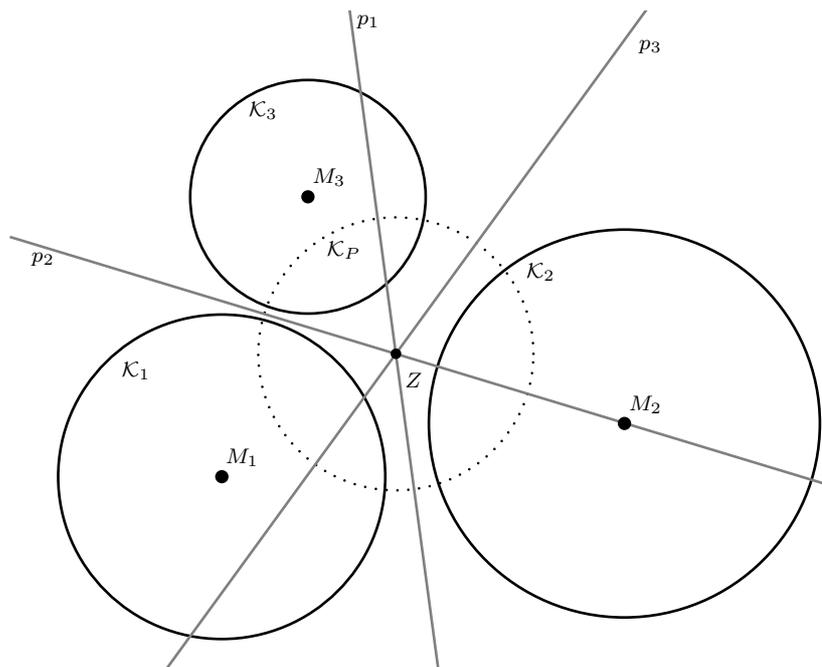


Abbildung 5.18.: Das Potenzzentrum Z und der Potenzkreis \mathcal{K}_P zu den drei Kreisen \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3

Der Kreis, der drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet

Die Aufgabe, den Kreis zu finden, welcher drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet, wird in Fiedlers *Cyklografie* nicht gestellt. Doch lässt die Abbildung 5.18 vermuten, dass der soeben eingeführte Potenzkreis der Kreis ist, der diese Aufgabenstellung löst. Das wird nun näher untersucht. Ebenso wird am Ende des Abschnittes diskutiert, wie viele derartige, rechtwinklig schneidende Kreise es maximal geben kann.

Im ersten Schritt überlegt man sich folgende Aussage, die über die Lage der Mittelpunkte sich rechtwinklig schneidender Kreise Auskunft gibt. Es gilt

Satz 5.19. *Schneiden sich zwei Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ mit den verschiedenen Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radien r_1 und r_2 orthogonal, so befindet sich der Mittelpunkt des einen Kreises nicht im anderen Kreis.*

Beweis. Es sei S einer der beiden Schnittpunkte der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 . Dann ergibt der Pythagorassatz zusammen mit $r_1 = d(M_1, S)$ und $r_2 = d(M_2, S)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} d^2(M_1, M_2) &= d^2(M_1, S) + d^2(M_2, S) \\ &= r_1^2 + r_2^2. \end{aligned}$$

Es folgt sofort, da die Radien beider Kreise von Null verschieden sind,

$$\begin{aligned} d^2(M_1, M_2) &= r_1^2 + r_2^2 > r_1^2, \\ d^2(M_1, M_2) &= r_1^2 + r_2^2 > r_2^2, \end{aligned}$$

woraus die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} d(M_1, M_2) &> r_1, \\ d(M_1, M_2) &> r_2 \end{aligned}$$

resultieren und sich damit die Aussage der Satzes ergibt. □

Anschließend zeigt man für zwei gegebene Kreise, dass der sie orthogonal schneidende Kreis seinen Mittelpunkt auf der Potenzgeraden der beiden Kreise besitzen muss.

Satz 5.20. *Schneidet ein Kreis zwei gegebene Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 rechtwinklig, so liegt sein Mittelpunkt auf der Potenzgeraden der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 .*

Beweis. Es seien S_1 und S_2 je einer der beiden Schnittpunkte des orthogonal schneidenden Kreises $\mathcal{K}(M, r)$ mit dem Mittelpunkt M und Radius r mit je einem der beiden gegebenen Kreise. Da \mathcal{K} ein Kreis ist, muss $r = d(M, S_1)$ und $r = d(M, S_2)$ sein, also nach der Definition der Potenz und gemäß dem Tangentensatz

$$d^2(M, S_1) = d^2(M, S_2) \iff p_{\mathcal{K}_1}(M) = p_{\mathcal{K}_2}(M)$$

gelten. Die obige Äquivalenz gilt, da die Potenz nach Satz 5.19 positiv ist. Also folgt aus der Annahme des rechtwinkligen Schnittes, dass der Mittelpunkt M des Kreises \mathcal{K} in Bezug auf die gegebenen Kreise die gleiche Potenz besitzt. Er liegt also auf der Potenzgeraden der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 und diese ist eindeutig bestimmt, wie man im Beweis zum Satz 5.11 gesehen hat. □

Tatsächlich löst der Potenzkreis die Aufgabe, einen Kreis zu bestimmen, der drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet. Es gilt die folgende Aussage über den Potenzkreis zu drei Kreisen, die mit \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 bezeichnet sind:

Satz 5.21. *Liegt das Potenzzentrum der drei Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 außerhalb jedes dieser Kreise und sei \mathcal{K}_P der zugehörige Potenzkreis, dann schneidet der Potenzkreis \mathcal{K}_P jeden der Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 rechtwinklig.*

Beweis. Es sei Z das Potenzzentrum und $\mathcal{K}_P(Z, r)$ der Potenzkreis der drei Kreise $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ und \mathcal{K}_3 mit dem Mittelpunkt Z und dem Radius

$$r := \sqrt{p_{\mathcal{K}_1}(Z)} = \sqrt{p_{\mathcal{K}_2}(Z)} = \sqrt{p_{\mathcal{K}_3}(Z)}.$$

Die Zahl r ist wohldefiniert, da nach Annahme das Potenzzentrum Z außerhalb der gegebenen Kreise liegt, weshalb die Potenz des Punktes Z in Bezug auf sie stets positiv ist.

Es sei weiter S_i je einer der beiden Schnittpunkte mit einem der gegebenen Kreise $\mathcal{K}_i(M_i, r_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Der Sekanten-Tangenten-Satz liefert dann zusammen mit der Wahl des Radius des Potenzkreises

$$r^2 = p_{\mathcal{K}_i}(Z) = d^2(Z, S_i)$$

für alle $i = 1, 2, 3$. Mit der Definition der Potenz gilt aber auch zugleich

$$p_{\mathcal{K}_i}(Z) = r^2 = d^2(M_i, Z) - r_i^2 \iff d^2(M_i, Z) = r^2 + r_i^2$$

für alle $i = 1, 2, 3$, woraus nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras die Orthogonalität der Radien r_i der gegebenen Kreise zum Radius r des Potenzkreises, also die Behauptung, folgt. \square

Es sei angemerkt, dass, wenn das Potenzzentrum innerhalb einer der Kreise liegt, man keinen die Kreise orthogonal schneidenden Kreis finden kann. Dies ergibt sich, daraus, dass der Mittelpunkt des gesuchten Kreises nur auf den Potenzgeraden liegen und dieser nur außerhalb der gegebenen Kreise sein darf, wie die Sätze 5.20 und 5.19 bestätigen. Es ergibt sich außerdem daraus, dass es nur einen derartigen Kreis geben kann: Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muss auf den Potenzgeraden liegen (s. Satz 5.20); da es nur maximal einen Schnittpunkt dieser Geraden geben kann, kann auch nur ein solcher orthogonal schneidender Kreis existieren. Wenn also drei Kreise $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ und \mathcal{K}_3 gegeben sind, so findet man den Kreis, der alle drei Kreise senkrecht schneidet – sofern existent – mit den oben erlangten Erkenntnissen so:

Konstruktion 5.22. Man bestimmt mithilfe zweier Potenzgeraden das Potenzzentrum Z . Liegt dieses außerhalb der gegebenen Kreise, setzt man die Konstruktion wie folgt fort (sonst existiert der gesuchte Kreis nicht): Man zeichnet eine Gerade durch den Punkt Z , welche (mindestens) einen der Kreise in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet. Da das Produkt $d(Z, S_1) \cdot d(Z, S_2)$ der Potenz des Punktes Z in Bezug

auf jeden der Kreise gleich ist, muss man den Kreis mit dem Radius

$$\sqrt{d(Z, S_1) \cdot d(Z, S_2)}$$

um den Punkt Z zeichnen (der Radius kann mit dem Höhensatz konstruiert werden), welcher der gesuchte Kreis ist.

5.5. Die Potenzkreise zu zwei Kreisen

In diesem Abschnitt geht es um die Potenzkreise zu zwei Kreisen, welche von den Potenzkreisen zu drei Kreisen aus dem Abschnitt 5.4 zu unterscheiden sind.

Fiedler definiert den Begriff des *Potenzkreises* wie folgt:

Man nennt diese um die Ähnlichkeitspunkte S, S^* von zwei sich schneidenden Kreisen durch die Schnittpunkte derselben beschriebenen Kreise die Potenzkreise [...]. [Fie82a, S. 63]

Da es unter Umständen für zwei sich schneidende Kreise ein inneres und ein äußeres Ähnlichkeitszentrum gibt, unterscheidet man zwischen inneren und äußeren Potenzkreis.

Seien zwei sich schneidende Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ mit den verschiedenen Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radien r_1 und r_2 gegeben. Ihre Schnittpunkte seien S_1 und S_2 . Dann konstruiert man den äußeren Potenzkreis \mathcal{K}_{P_a} und den inneren Potenzkreis \mathcal{K}_{P_i} entsprechend obiger Definition Fiedlers wie folgt

Konstruktion 5.23 (Potenzkreise). Man zeichne die Zentrale M_1M_2 und bestimme mithilfe von Konstruktion 3.4 auf ihr das äußere sowie das innere Ähnlichkeitszentrum A_a und A_i (in Fiedlers Definition mit S und S^* bezeichnet). Den inneren Potenzkreis \mathcal{K}_{P_i} erhält man, indem man den Kreis um A_i mit dem Radius $d(A_i, S_1)$ konstruiert. Analog ergibt sich der äußere Potenzkreis als Kreis um A_a mit dem Radius $d(A_a, S_1)$.

Die Abbildung 5.19 zeigt die Potenzkreise zu zwei gegebenen sich schneidenden Kreisen in grau.

Erläuterung zur Konstruktion. Wie in der Abbildung 5.19 zu erkennen ist, verlaufen beide Potenzkreise durch beide Kreisschnittpunkte S_1 und S_2 . Diese Tatsache ergibt sich aufgrund der Achsensymmetrie mit der Zentralen M_1M_2 als Symmetrieachse. Da die Ähnlichkeitspunkte auf dieser Achse liegen, folgt, dass $d(A_i, S_1) = d(A_i, S_2)$ und $d(A_a, S_1) = d(A_a, S_2)$ gilt.

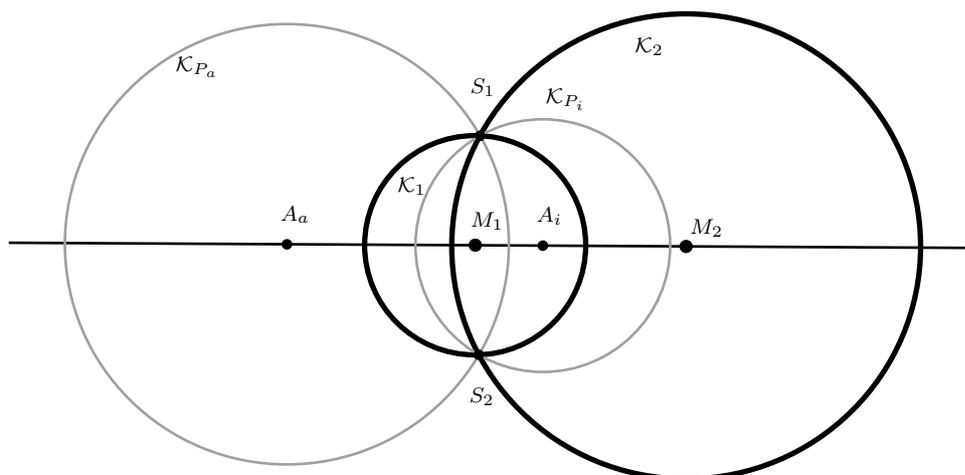


Abbildung 5.19.: Der äußere und innere Potenzkreis zu zwei sich schneidenden Kreisen

Im Kapitel 6 werden im Rahmen der Untersuchung einer Hyperbel im zyklografischen Kontext bzw. der Einführung der Kreisbüschel Eigenschaften der Potenzkreise ausgearbeitet. Man wird sehen, dass sich diese stets rechtwinklig schneiden und den Schnittwinkel der beiden Kreise, zu denen sie gehören, halbieren.

5.6. Der Ähnlichkeitskreis zu zwei Kreisen

Für spätere Zwecke wird jetzt zum Abschluss des Kapitels ein weiterer charakteristischer Kreis in Bezug auf zwei Kreise eingeführt. Dazu seien zwei nicht-konzentrische Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ unterschiedlicher Radien gegeben. Den *Ähnlichkeitskreis* der beiden Kreise erhält man durch die folgende Konstruktion:

Konstruktion 5.24. Man bestimme unter Anwendung von Konstruktion 3.4 den äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkt A_a und A_i der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 auf der Zentralfachse M_1M_2 . Man bestimme den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{A_aA_i}$. Der Kreis $\mathcal{K}(M, d(M, A_a))$ mit dem Mittelpunkt M durch den Punkt A_a ist der Ähnlichkeitskreis der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 .

Die Abbildung 5.20 zeigt den Ähnlichkeitskreis \mathcal{K} zu den beiden in grau dargestellten Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 . Über die Nützlichkeit des Ähnlichkeitskreises und seine Eigenschaften wird man im Abschnitt 6.4 erfahren.

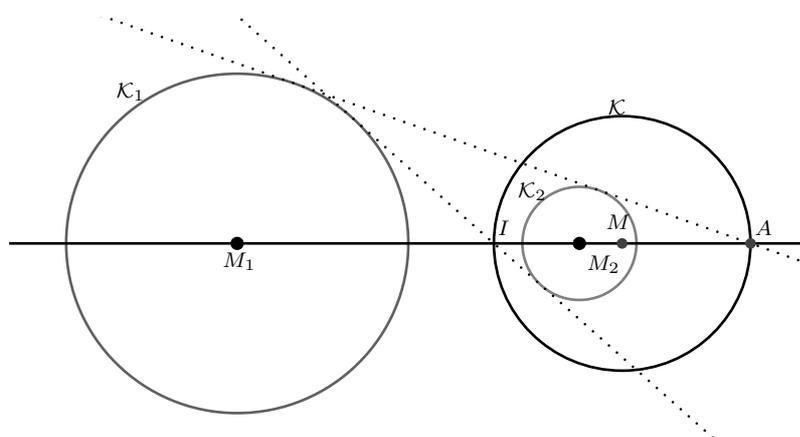


Abbildung 5.20.: Der Ähnlichkeitskreis \mathcal{K} zu den Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2

6. Die Hyperbel und Kreisbüschel

In diesem Kapitel werden die Kegelschnitte mit besonderem Fokus auf die Hyperbel behandelt. Im Gegensatz zu Fiedlers *Cyklographie* wird sie hier zunächst unabhängig vom zyklografischen Abbildungsverfahren betrachtet und als Ortskurve definiert. Dies ist ein konventioneller Zugang; eine Verbindung zur Zyklografie wird im Anschluss hergestellt. Darüber hinaus wird der Begriff des Kreisbüschels als Schar von Kreisen mit einer gemeinsamen Eigenschaft eingeführt. Man wird erkennen, dass es Kreisbüschel gibt, die als zyklografische Bilder einer Hyperbel aufzufassen sind. Es werden Aussagen über die Kreisbüschel formuliert und diskutiert. Außerdem werden die Inversion am Kreis und der Potenzbegriff mit diesem Konzept verbunden, so wie die Idee des Potenzkreises auf Kreise erweitert, die disjunkt sind. Als Fortführung der Definition des Ähnlichkeitskreises aus Abschnitt 5.6 werden Aussagen über ihn getroffen.

6.1. Die Hyperbel

Die Kegelschnitte nehmen eine besondere Rolle in der Darstellenden und Projektiven Geometrie ein. Möchte man einen Kreis im Raum auf eine Tafel Ebene mithilfe der Zentralprojektion abbilden, so stellt sich heraus, dass sein Bild in der Regel kein Kreis, sondern beispielsweise eine Ellipse sein wird.⁶¹ Praktisch kann dieser Effekt auftreten, wenn man den Schatten einer runden Münze auf einer ebenen Oberfläche betrachtet, der mit einer punktförmigen Lichtquelle erzeugt wird, sofern die Münze nicht auf dieser ebenen Oberfläche liegt. Natürlich können auch andere geometrische Figuren bei dieser Projektion entstehen: Liegt ein Kreis vollständig in einer Ebene, in welcher der Augpunkt liegt (also in einer projizierenden Ebene), so ergibt sich trivialerweise eine Strecke als sein zentralprojiziertes Bild.

In diesem Abschnitt soll der Kegelschnitt Hyperbel aufgrund seiner Bedeutung

⁶¹Es können auch andere geometrische Objekte, etwa Kreise, Hyperbeln oder Parabeln entstehen. Diese sogenannten Kegelschnitte lassen sich also durch Projektionen erhalten, weshalb sie für die Projektive Geometrie von Bedeutung sind. Eine Zusammenstellung der Kegelschnittkurven und wie sie projektiv erzeugt werden können, ist beispielsweise in [Wol55, S. 192f.] oder [HHL16, S. 124ff.] zu finden.

für die Zyklografie vorgestellt werden. Dabei wird von einer Ortskurvendefinition ausgegangen. Das bedeutet, dass die Kurve als Menge von Punkten einer Ebene aufgefasst wird, die zu vorgegebenen Referenzobjekten einen bestimmten Abstand besitzen sollen. Das Beweiskonzept der Dandelinischen Kugeln dient anschließend als Hilfsmittel, um zu zeigen, dass sich die definierte Ortskurve als Schnittkurven eines Kreiskegels mit einer Ebene in bestimmter Lage interpretieren lassen, was schlussendlich die Bezeichnung Kegelschnitt rechtfertigt. Darüber hinaus wird eine kurze biografische Anmerkung zum Namensgeber dieses Ansatzes gegeben.

Abschließend wird der Zusammenhang dieser Kurve mit der Zyklografie hergestellt, indem der Schnitt zweier Kreiskegel betrachtet wird.

6.1.1. Die Hyperbel als Ortskurve

Zur Definition der Hyperbel seien zwei verschiedene Punkte B_1 und B_2 – die sogenannten *Brennpunkte* – in der Ebene sowie eine konstante reelle Zahl $c > 0$ festgelegt. Ein Punkt P gehört genau dann zur *Hyperbel* \mathcal{H} , wenn die betragsmäßige Differenz der Abstände des Punktes P zu den Brennpunkten dem Wert c entspricht. Somit lässt sich die Hyperbel als Menge der Punkte P der Ebene auffassen, welche die Gleichung

$$|d(B_1, P) - d(B_2, P)| = c$$

erfüllen. Auf diese Weise lässt sich die Hyperbel als Ortskurve interpretieren. Es ist zu bemerken, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, die Hyperbel einzuführen. Beispielsweise kann man auch als Definition die Gleichung

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.1}$$

mit $a, b > 0$ zu Grunde legen. In dieser algebraischen Beschreibung ist die Hyperbel als die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, die die Gleichung \mathcal{H} erfüllen. Unter Anwendung des Satzes von Pythagoras sowie mehrerer Äquivalenzumformungen lässt sich zeigen, dass diese Definition mit der obigen gleichwertig ist. Die hier vorgestellte Ortskurvendefinition eignet sich jedoch besser dazu, unmittelbar die Beweisidee der Dandelinischen Kugeln anzuwenden, um einen räumlichen Bezug zu der ebenen Hyperbelkurve herzustellen.

In der Abbildung 6.1 ist eine Hyperbel \mathcal{H} mit ihren Symmetrieachsen – man bezeichnet sie als *Haupt- und Nebenachse* (gepunktet) – und ihren zwei Ästen⁶² dargestellt. Der Punkt C_1 als Schnittpunkt beider Achsen wird als *Mittelpunkt der Hyperbel \mathcal{H}* bezeichnet. Die Punkte M und M^* bilden die *Scheitelpunkte der Hyperbel \mathcal{H}* .

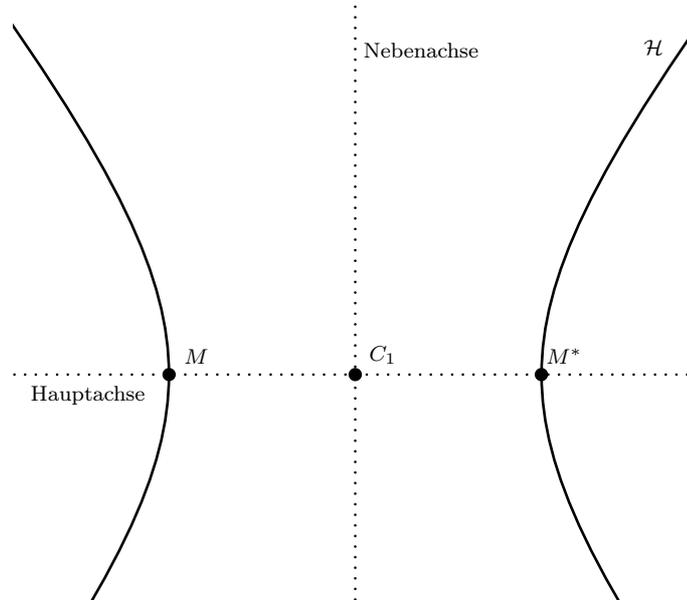


Abbildung 6.1.: Achsen mit ihren Bezeichnungen, der Mittelpunkt C_1 sowie die Scheitelpunkte M und M^* der Hyperbel \mathcal{H}

Fiedler definiert in seiner *Cyklographie* die Hyperbel unmittelbar mit Hilfe eines räumlichen bzw. zyklografischen Zugangs. Dazu betrachtet er zwei gerade Doppelkreisegel mit parallelen Achsen und mit gleichem Öffnungswinkel von 90° , deren Spitzen in der Tafel Ebene liegen und deren Spitzen die einzigen gemeinsamen Punkte mit der Tafel Ebene sind. Er untersucht die Schnittlinie dieser beiden Doppelkreisegel, welche er als Hyperbel bezeichnet. Im Folgenden wird man erkennen, dass diese Definition (nahezu) gleichwertig⁶³ zu der hier angegebenen ist. Die durch den beschriebenen Spezialfall bezüglich der Lage der Doppelkreisegel erhaltene Hyperbel soll im Folgenden *gleichseitige Hyperbel* genannt werden. Darüber hinaus untersucht

⁶²Dass sich zwei Äste ergeben, lässt sich erkennen, wenn man die Gleichung \mathcal{H} für die Hyperbel nach der Variablen y auflöst. Die Symmetrieeigenschaft prüft man durch jeweiliges Einsetzen der Größen $-x$ und $-y$ für x und y nach. In beiden Fällen bleibt die Gleichung \mathcal{H} unverändert, sodass sie die Achsensymmetrie der Hyperbel zur x - und y -Achse ergibt.

⁶³Tatsächlich lassen sich über den Schnitt zweier gerader parallelachsiger Doppelkreisegel mit einem rechten Winkel als Öffnungswinkel in oben beschriebener Lage lediglich Hyperbeln erzeugen, die Spezialfälle der obigen, allgemeineren Definition sind. Diese Hyperbeln werden bei Fiedler als gleichseitige Hyperbeln bezeichnet. Genauer wird dies im Abschnitt 6.3.3 behandelt.

Fiedler die zyklusografischen Bildkreise dieser Hyperbel auf bestimmte Eigenschaften. Dies leitet dann unmittelbar zum Konzept der Kreisbüschel über, welches im Abschnitt 6.3 näher betrachtet wird.

6.1.2. Die Hyperbel als Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel

Tatsächlich handelt es sich bei der Hyperbel um einen Kegelschnitt im eigentlichen Sinne der Bezeichnung: Das bedeutet, dass eine Hyperbel als Schnittkurve erhalten werden kann, wenn ein Doppelkreiskegel mit Ebenen in bestimmten Winkeln in Bezug auf seine Achse geschnitten werden.

Um dies nachvollziehen zu können, kann man auf die *Konica* verweisen, von der eine deutsche Übersetzung von Arthur Czwalina existiert (s. [Czw67]). Diese Übersetzung erschien erstmalig im Jahre 1926. Bei diesem wichtigen Werk Apollonius' handelt es sich um eine ausführliche Auseinandersetzung mit Kegelschnitten und wie sie erzeugt werden können. Im Rahmen dieser Arbeit soll das Verfahren der Dandelinischen Kugeln benutzt werden, welches auf Germinal Pierre Dandelin zurückgeht. Da er auch Beiträge zur Darstellenden Geometrie leistete, soll zunächst ein kurzer biografischer Auszug auf Grundlage der Quelle [JE12] zweier Autoren der University of St. Andrews Scotland gegeben werden.

Germinal Pierre Dandelin

Dandelin war ein französisch/belgischer Mathematiker, der im Jahre 1794 geboren wurde und 1847 starb. Er wuchs in Burgund, im östlichen Frankreich, mit fünf Geschwistern auf. Bemerkenswert sind seine vielseitigen Interessen, nicht nur an der Mathematik: Er hatte ebenso eine Affinität zur Literatur und Musik. So schrieb er mit seinem Freund Adolphe Quetelet (1796-1874) ein Libretto, also einen Text für eine Oper. Auf diese Weise konnte er jene beiden Interessen vereinen. Quetelet, der seit dem Jahr 1815 Lehrer für Mathematik in Gent war, nahm großen Einfluss auf Dandelin, was sich in Dandelins Ausbildung und akademischer Leistung zeigen wird: Nachdem die Familie aus politischen Gründen nach Gent ziehen musste, besuchte Dandelin im Anschluss an die Grundbildung ab 1807 ein Lycée, wo er Quetelet kennenlernte. Die dortige Ausbildung ist mit dem Gymnasium vergleichbar. Aufgrund politischer Umstände meldete sich Dandelin zum Militärdienst, kehrte jedoch später zum Lycée zurück und gewann einen Mathematikpreis im Jahre 1813 – im Alter von 19 Jahren. Er setzte seine Ausbildung mit einem Studium an der École Polytechnique in Paris fort. Auch hier zwangen die politischen Gegebenheiten – der Kampf

der Allianz gegen Napoleon –, bei dem Dandelin beteiligt war, Dandelin aufgrund einer Verletzung zur Unterbrechung seines Studiums.

Nach der Schlacht bei Waterloo 1815 kehrte Dandelin nach Gent zurück und wurde ein Jahr später niederländischer Bürger. Dort verfolgte er eine militärische Karriere. Dennoch beschäftigte er sich weiterhin mit Mathematik und löste elementare Probleme der Geometrie. In diesem Zusammenhang publizierte er zwei Abhandlungen. Eine weitere folgte im Jahr 1822.

Die Freundschaft zu Quetelet und sein Einfluss ermöglichten es Dandelin 1825, an der Universität von Liège zu lehren. Er war dort fünf Jahre als Professor für Bauingenieurwesen tätig. Die politischen Umstände der 1830er Jahre – die Belgische Revolution – veranlassten Dandelin wieder dazu, Aufgaben für das Militär zu übernehmen. Im Jahre 1835 wurde er nach Namur an das Athémée (das ist ein Gymnasium) berufen, um Astronomie und Physik zu lehren.

In seinen letzten Lebensjahren war er Mitglied in zwei Komitees. Eines davon untersuchte den Zusammensturz eines Bahntunnels bei Kuntich (Belgien).

Besonders hervorzuheben ist Dandelins Verdienst für die Darstellende Geometrie. Seine Idee, die Schnittkurve eines Kegels mit einer Ebene unter Verwendung von Berührungskugeln zu ermitteln und diese mit den Brennpunkten der Schnittkurve zu verbinden, veröffentlichte er in seinem wichtigen Werk »*Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique*« im Jahre 1822. Das Interesse seiner Auseinandersetzung mit den Kegelschnitten könnte durch Quetelet beeinflusst worden sein, denn dieser promovierte 1819 mit einer Dissertation über dieses Thema. Des Weiteren ist die Untersuchung von Schnittkurven räumlicher Objekte eine der Kernaufgaben der Darstellenden Geometrie, die an der École Polytechnique gelehrt wurde. Wie bereits angekündigt, soll der Ansatz Dandelins im anschließenden Abschnitt benutzt werden, um die Hyperbelkurve als Kegelschnitt zu identifizieren.

Die Dandelinischen Kugeln

Man betrachte einen geraden Doppelkreiskegel K (hier wird kein Frakturbuchstabe als Bezeichnung benutzt, um einer Verwechslung mit einem zyklografischen Doppelkreiskegel vorzubeugen) und eine Ebene E . Diese soll einen Neigungswinkel besitzen, der kleiner als der halbe Öffnungswinkel des Doppelkreiskegels K ist, und nicht durch seine Spitze verlaufen. Es wird nun gezeigt, dass die mit dem Kegel K gemeinsamen Punkte der Ebene, sofern sie den Doppelkegel K schneidet, auf einer Hyperbel liegen.

Es wird dazu mit einem leicht nachvollziehbaren Satz begonnen, der nachfolgend benötigt wird (vgl. [SS17, S. 77]):

Satz 6.1. *Es sei eine Kugel R sowie ein Punkt P , welcher nicht auf der Kugel R und nicht in ihrem Inneren liegt, gegeben. Die Tangentenabschnitte aller Tangenten an die Kugel R durch den Punkt P sind gleich lang.*

Beweis. Der Beweis benutzt die Tatsache, dass sämtliche Tangenten an die Kugel orthogonal zu dem zugehörigen Berührradius gelegen sind, sowie den Satz des Pythagoras. Denn bezeichnet man mit r der Radius der Kugel R , mit M ihren Mittelpunkt und mit B den Berührungspunkt einer Tangente an die Kugel R durch den Punkt P , so ist die Länge des Tangentenabschnittes gegeben durch die Gleichung

$$d^2(P, B) = d^2(M, P) - r^2.$$

Also sind die Tangentenabschnitte aller Tangenten an die Kugel R durch den Punkt P von gleicher Länge. \square

Die Aussage des Satzes 6.1 kann jetzt benutzt werden, um nachzuweisen, dass eine Hyperbel als Schnittkurve eines Doppelkreiskegels mit einer geeignet liegenden Ebene verstanden werden kann. Dazu wird die Textgrundlage [HHL16, S.148] verwendet.

Man betrachte einen geraden Doppelkreiskegel K sowie eine Ebene E , die den Doppelkegel wie oben beschrieben schneidet. Nun beschreibe man zwei Kugeln (dies sind die sogenannten *Dandelinischen Kugeln*) K_1 und K_2 in je einer der Kegelhälften wie folgt ein: Die Kugel K_1 soll die Ebene E im Punkt B_1 und die Kugel K_2 im Punkt B_2 berühren. Dabei schneidet die erste Kugel den Kreis \mathcal{K}_1 und letztere den Kreis \mathcal{K}_2 aus dem Kegel K aus (es sind die Berührkreise der Kugel und des Doppelkreiskegels K gemeint; vgl. Abbildung 6.2, worin die genannten Kreise gestrichelt dargestellt sind).

Jetzt wird die Mantellinie m_1 durch die Kegelspitze und einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve der Ebene und des Doppelkreiskegels betrachtet. Diese schneidet die beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in je einem Punkt B'_1 bzw. B'_2 . Man definiert jetzt die folgenden Strecken

$$\begin{aligned} g_1 &:= \overline{B_1P}, \\ g_2 &:= \overline{B'_1P}, \\ g_3 &:= \overline{B_2P}, \\ g_4 &:= \overline{B'_2P}. \end{aligned}$$

Die Strecke g_1 liegt in der Ebene E und trifft deshalb die einbeschriebene Kugel K_1 tangential im Punkt B_1 ; die Strecke g_2 liegt als Mantellinie nach Konstruktion

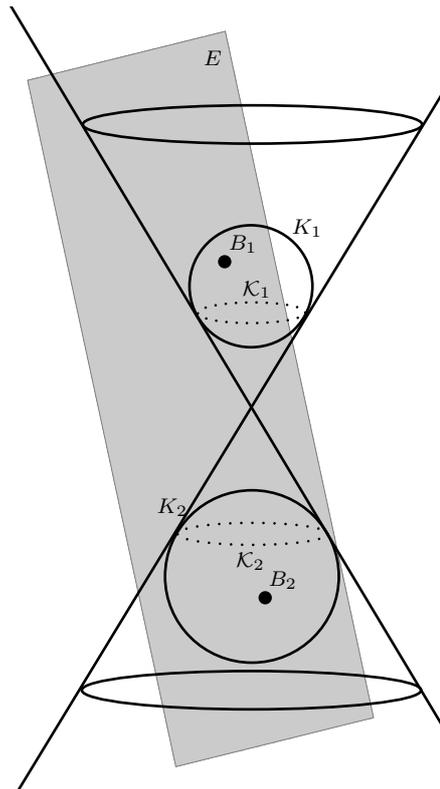


Abbildung 6.2.: Darstellung der Dandelinischen Kugeln im Doppelkreiskegel K

ebenfalls tangential an der Kugel K_1 . Nach Satz 6.1 sind entsprechend die Strecken g_1 und g_2 gleich lang. Analog zeigt man mit der Kugel K_2 die Gleichheit der Streckenlängen der beiden Strecken g_3 und g_4 . Jetzt definiert man den Abstand der Punkte B'_1 und B'_2 als die Zahl

$$c := d(B'_1, B'_2).$$

Mit dieser Bezeichnung erhält man sofort

$$\begin{aligned} d(B_1, P) - d(B_2, P) &= |g_1| - |g_3| = d(B'_1, P) - d(B'_2, P) \\ &= d(B'_1, B'_2) \\ &= c. \end{aligned}$$

Eine analoge Wahl eines beliebigen Punktes auf dem zweiten Ast der Schnittkurve liefert

$$d(B_2, P) - d(B_1, P) = c,$$

sodass in jeder der beiden Lagen für jeden beliebigen Punkt P der Schnittkurve die Ortskurvendefinition der Hyperbel

$$|d(B_1, P) - d(B_2, P)| = c$$

gilt.

Die Ergebnisse obiger Untersuchung mithilfe der Dandelinischen Kugeln fasst der folgende Satz zusammen:

Satz 6.2. *Die gemeinsamen Punkte einer einen geraden Doppelkreiskegel schneidenden und nicht durch die Kegelspitze verlaufenden Ebene mit einem Neigungswinkel, der kleiner als halbe Öffnungswinkel des Kegels ist, liegen auf einer Hyperbel.*

Beweis. Der Satz ergibt sich aus den oben dargestellten Überlegungen. □

Gegenstand des Kapitels 7 ist das sogenannte Apollonische Berührproblem. Dort wird eine analytische Beschreibung eines geraden Doppelkreiskegels ausgearbeitet und damit der Satz 7.1 bewiesen, in dem erklärt wird, dass die Schnittkurve zweier gerader Doppelkreiskegel mit paralleler Achse und gleichem Öffnungswinkel in einer Ebene liegen. Das zeigt in Verbindung mit Satz 6.2, dass sich eine Hyperbel ebenfalls als Schnitt zweier gerader Doppelkreiskegel mit paralleler Achse auffassen lässt. Für weitere Betrachtungen in diesem Kapitel wird dieser Sachverhalt als nachgewiesen vorausgesetzt.

6.2. Die Regelflächen

Dieser Abschnitt dient der näheren Betrachtung von Regelflächen. Dabei handelt es sich um Flächen, die im einfachsten Fall durch Rotation einer Geraden um eine vorgegebene Achse entstehen. Genauer bezeichnet man eine Fläche F als *Regelfläche*, wenn man durch jeden Punkt auf ihr eine Gerade legen kann, die vollständig in dieser Fläche F liegt. Als einfachstes Beispiel denke man an einen Zylinder der Höhe h und Radius r ohne Deckflächen: Er entsteht, wenn man einen Vektor der Form

$$g: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

im Abstand r vom Ursprung um die z -Achse in einem kartesischen Koordinatensystem rotieren lässt.

In den folgenden beiden Absätzen sollen zwei für die Zyklografie wichtige Regelflächen behandelt werden, deren zyklografische Bildkreise relevante Eigenschaften für die Lösung von Konstruktionsaufgaben mit sich bringen. Erstere wurde bereits im Abschnitt 4.2 eingeführt, jedoch nicht als Regelfläche angegeben.

6.2.1. Der Kreiskegel

Bereits aus Abschnitt 4.2 bekannt ist der (Doppel-)kreiskegel. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass es sich bei dieser Fläche um eine Regelfläche handelt. Insbesondere kann der zyklografische Doppelkreiskegel, dessen Öffnungswinkel definitionsgemäß immer 90° beträgt, durch eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem mit der Parametrisierung

$$k: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}$$

erhalten werden, indem diese um die z -Achse rotiert wird. Die Gerade k ist eine um 45° zur xy -Ebene geneigte Gerade, die die z -Achse im Punkt $P = (0, 0, h)$ schneidet. Interpretiert man also den Punkt P als einen Raumpunkt und die xy -Ebene als Tafelebene \mathcal{T} , so ist die durch die Rotation der Geraden h erhaltene Regelfläche der zyklografische Doppelkreiskegel $\mathfrak{K}(P)$ des Punktes P .

Die besonderen Eigenschaften des zyklografischen Kegels in Verbindung mit der zyklografischen Abbildung hat man in Abschnitt 4.2, insbesondere im Korollar 4.5, gesehen. Dort wurde gezeigt, dass der zyklografische Bildkreis eines jeden Punktes auf der Mantelfläche des zyklografischen Doppelkreiskegels den Grundkreis des Kegels in der Tafelebene berührt.

6.2.2. Das einschalige Rotationshyperboloid

Als weiteres Beispiel für eine Regelfläche wird nun das Rotationshyperboloid eingeführt. Dabei unterscheidet man das sogenannte einschalige und zweischalige Rotationshyperboloid, wovon das erstere nun näher vorgestellt wird.⁶⁴

Man betrachte dafür die Menge \mathcal{H} , die wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x^2 - z^2 = 1\}.$$

⁶⁴Man beachte, dass das zweischalige Rotationshyperboloid keine Regelfläche ist.

Aus Abschnitt 6.1 ist bereits bekannt, dass die Gleichung $x^2 - z^2 = 1$ eine Hyperbel festlegt, sodass die Menge \mathcal{H} aufgrund der Bedingung $y = 0$ eine in der xz -Ebene liegende Hyperbel mit den Scheitelpunkten $S_1 = (1, 0, 0)$ und $S_2 = (-1, 0, 0)$ beschreibt. Lässt man die Hyperbel \mathcal{H} um die z -Achse rotieren, so entsteht in der xy -Ebene ein Kreis, welcher *Kehlkreis* genannt wird, mit der bestimmenden Gleichung $x^2 + y^2 = 1$, sodass jeder Punkt $P = (x, y, z)$ der entstehenden Drehfigur die Gleichung

$$R: x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

erfüllt. Die Gesamtheit all dieser Punkte bildet ein sogenanntes *einschaliges Rotationshyperboloid*. Es wird nun gezeigt, dass die auf diese Weise erzeugte Fläche eine Regelfläche ist. Dazu der folgende

Satz 6.3. *Das einschalige Rotationshyperboloid ist eine Regelfläche, wird also durch Geraden erzeugt.*

Der nachfolgende (korrigierte) Beweis orientiert sich an Knörrers Lehrbuch [Knö06, S. 264f.] aus dem Jahre 2006 und verwendet Methoden der Analytischen Geometrie.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass durch jeden Punkt eines einschaligen Rotationshyperboloides eine Gerade gefunden werden kann, die vollständig in dieser Fläche liegt. Zunächst sei ein einschaliges Rotationshyperboloid, wie oben erklärt, durch die Menge

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

beschrieben. Es ist nun zu zeigen, dass durch jeden Punkt $A \in H$ des einschaligen Rotationshyperboloids H eine Gerade g der Form

$$g = A + \mathbb{R}v = \{A + \alpha v \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

mit einem Richtungsvektor $v = (v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ gelegt werden kann, die vollständig im Hyperboloid H liegt.

Es sei $A = (a_1, a_2, a_3) \in H$ ein beliebiger Punkt des einschaligen Rotationshyperboloides H , der aufgrund der Drehsymmetrie desselben, welche direkt aus seiner Erzeugung folgt, um die z -Achse in den Punkt $P = (p_1, 0, p_3)$ gedreht wird. Der Punkt P liegt im Rotationshyperboloid H , und es gilt $p_1 = a_1$ und $p_3 = a_3$. Nun wird eine durch den Punkt P verlaufende Gerade h konstruiert, die im Rotations-

hyperboloid H liegt, welche durch die Gleichung

$$h = P + \mathbb{R}v$$

beschrieben wird. Soll die Gerade h im Hyperboloid H liegen, so muss jeder ihrer Punkte die Bestimmungsgleichung des Hyperboloides H erfüllen. Setzt man also die Punkte der Gerade in die Gleichung für H ein, so ergibt sich durch Aufpunkt und Richtungsvektor ausgedrückt

$$(p_1 + \alpha v_1)^2 + (p_2 + \alpha v_2)^2 - (p_3 + \alpha v_3)^2 = 1$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Da der Punkt P in der xz -Ebene liegt, also $p_2 = 0$ gilt, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$(p_1 + \alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 - (p_3 + \alpha v_3)^2 = 1.$$

Löst man die Klammern auf und klammert den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ aus, so erhält man

$$p_1^2 - p_3^2 + 2\alpha(p_1 v_1 - p_3 v_3) + \alpha^2(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) = 1$$

als äquivalente Darstellung der Gleichung. Da der Punkt P der Geraden h auf dem Hyperboloid H liegen soll, muss $p_1^2 - p_3^2 = 1$ sein, weshalb sich die Gleichung zu

$$2\alpha(p_1 v_1 - p_3 v_3) + \alpha^2(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) = 0$$

weiter vereinfacht. Diese Gleichung ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ nur genau dann erfüllt, wenn die beiden Bedingungen

$$p_1 v_1 - p_3 v_3 = 0 \text{ und } v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$$

zugleich gelten. Die zweite Gleichung $v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0 \iff v_1^2 + v_2^2 = v_3^2$ des Gleichungssystems zeigt an, dass $v_3 \neq 0$ gilt und der Richtungsvektor v somit normiert werden kann. Deshalb wähle man $v_3 = 1$ und bestimme die verbleibenden Komponenten des Richtungsvektors. Es entsteht das neue, vereinfachte Gleichungssystem

$$p_1 v_1 - p_3 = 0 \text{ und } v_1^2 + v_2^2 - 1 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgert man die Lösung

$$v_1 = \frac{p_3}{p_1};$$

setzt man diese in die zweite Gleichung ein und benutzt, dass die Gleichung $p_1^2 - p_3^2 = 1$ gilt, einerseits $p_1 \neq 0$ ist und andererseits

$$\frac{p_3^2}{p_1^2} < 1$$

gilt, so erhält man die Lösungen

$$v_1 = \frac{p_3}{p_1},$$

$$v_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{p_3^2}{p_1^2}}.$$

Damit kann man die zwei Geraden durch den Punkt P , die vollständig im Rotationshyperboloid H liegen, wie folgt angeben:

$$h = P + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{p_3}{p_1} \\ \pm \sqrt{1 - \frac{p_3^2}{p_1^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun lassen sich diese Geraden in den ursprünglichen Punkt A zurückdrehen und man erhält die gesuchten Geraden. \square

Für die zyklografische Abbildung ist das einschalige Rotationshyperboloid von besonderer Bedeutung. Wie bereits eingangs angedeutet, wird man im Abschnitt 7.1 bei der Lösung des Apollonischen Berührproblems sehen, dass eine Hyperbel als Schnitt zweier gerader parallelachsiger Doppelkreisegel erhalten werden kann. Wird diese Schnittkurve auf eine bestimmte Weise in die Tafel Ebene, in der die Grundkreise der Kreisegel liegen, umgelegt und auf eine andere Weise wieder in den Raum aufgerichtet, so erhält man die sogenannte konjugierte Hyperbel, deren Hauptachse in der Tafel Ebene liegt. Legt man nun einen Kreis \mathcal{K}_S mit dem Mittelpunkt auf dieser Achse durch die zwei Schnittpunkte der konjugierten Hyperbel in die Tafel Ebene, so erhält man den sogenannten in die Tafel umgelegten *Scheitelkreis*. Lässt man die Hyperbel nun um die z -Achse rotieren, so entsteht nach obiger Erklärung ein einschaliges Rotationshyperboloid, dessen in die Tafel umgelegter Scheitelkreis der Hyperbel mit dem Kehlkreis des Hyperboloids übereinstimmt. Es wird sich her-

ausstellen, dass die zyklusografischen Bildkreise eines jeden Punktes des einschaligen Rotationshyperboloides den Kehlkreis rechtwinklig schneiden (s. Korollar 6.28). Dieser Zusammenhang legitimiert die Untersuchung dieser Regelfläche im Rahmen der Zyklusografie.

6.3. Das Kreisbüschelkonzept

In der Analysis werden Funktionenscharen untersucht. Das heißt, man definiert Funktionen f_t , die von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängig sind. Auf diese Weise bestimmt zum Beispiel die Abbildung

$$f_t(x) = tx$$

mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ eine Schar linearer Funktionen bzw. ein Geradenbüschel, welche bzw. welches aufgrund der Tatsache, dass die Gleichung $f(0) = t \cdot 0 = 0$ gilt, den Ursprung als gemeinsamen Punkt hat. Eigenschaften, die für alle Elemente einer Schar gelten, nennt man *Invarianten* dieser Schar. Damit hat man bereits eine Gemeinsamkeit aller Funktionen f_t dieser Schar herausgestellt.

Eine ähnliche Herangehensweise soll zur Definition eines Kreisbüschels verwendet werden.⁶⁵ Im Abschnitt 4.5 hat man bereits verschiedene Büschel im Sinne dieser Definition kennengelernt. Dazu erinnere man sich an den Fall, dass eine Raumgerade g die Tafel rechtwinklig im Punkt S schneidet. Ihre zyklusografischen Bildkreise $Z(g)$ wurden als konzentrische Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt S erkannt. Demnach ist durch diese Kreise das Kreisbüschel

$$Z_i(g) = \mathcal{K}(S, i) \quad \text{mit} \quad i \in \mathbb{R}^+$$

definiert. Des Weiteren wurde das sogenannte parabolische Kreisbüschel eingeführt, dessen Besonderheit darin liegt, dass alle Kreise des Büschels durch einen festen Punkt verlaufen und ihre Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Zentralen liegen. Wenn S dieser gemeinsame Punkt aller Kreise des Büschels ist – also die Invariante des Kreisbüschels –, so sah man, dass die Büschelkreise als die zyklusografischen Bilder einer Geraden g mit einer Tafelneigung von $\alpha = 45^\circ$ erhalten werden.

⁶⁵Fiedler verwendet die nachfolgenden Notationen nicht.

6.3.1. Das elliptische Kreisbündel

Nun soll ein weiteres Kreisbündel eingeführt werden: Das *elliptische Kreisbündel* ist die Menge der Kreise, die durch zwei in der Ebene festgelegte, verschiedene Punkte P_1 und P_2 verlaufen. Es stellt sich die Frage, wie die zugehörige Raumkurve l gewählt werden muss, sodass ihre zyklografische Abbildung $Z(l)$ ein elliptisches Kreisbündel erzeugt. Dass die Hyperbel die gesuchte Raumkurve l ist, wird im Folgenden erarbeitet. Zudem wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man die Hyperbelkurve als Schnittpunktkurve erhalten kann. Zunächst wird der folgende Satz diskutiert:

Satz 6.4. *Das zyklografische Bild einer im Raum befindlichen zur Tafel Ebene spiegelsymmetrisch gelegenen gleichseitigen Hyperbel (die Spur der Ebene, in der die Hyperbel liegt, ist die Nebenachse), welche als Schnittpunktcurve zweier parallelachsiger Doppelkreiskegel mit Öffnungswinkeln von 90° und ihren Spitzen P_1 und P_2 in der Tafel, sodass diese Punkte die einzigen gemeinsamen Punkte der beiden Doppelkreiskegel mit der Tafel sind, erhalten wird, ist ein elliptisches Kreisbündel. Sämtliche Bildkreise verlaufen durch die Punkte P_1 und P_2 .*

Beweis. Seien P_1 und P_2 zwei verschiedene, fest gewählte Punkte auf der Tafel Ebene. Sie sollen die Punkte sein, durch welche alle Bündelkreise verlaufen sollen. Man bezeichnet sie auch als *Grundpunkte des Kreisbündels*. Nun legt man zwei gerade Doppelkreiskegel K_1 und K_2 mit einem Öffnungswinkel von 90° , deren Achsen senkrecht auf der Tafel stehen, in den Raum. Ihre beiden Spitzen sollen in den Punkten P_1 und P_2 liegen. Aufgrund der Wahl der Öffnungswinkel und der zur Tafel senkrechten Achsen sind alle Mantellinien der beiden Kegel um 45° zur Tafel geneigt. Jetzt wird der Doppelkreiskegel K_1 betrachtet. Sei m eine beliebige Mantellinie dieses Doppelkreiskegels. Dann folgt, dass für jeden Punkt P auf der Mantellinie m der zyklografische Bildkreis $Z(P)$ durch den Punkt P_1 verläuft. Dies erkennt man leicht, denn wenn P_0 den Fußpunkt des Lotes zur Tafel Ebene durch den Punkt P beschreibt, so gilt für das rechtwinklige Dreieck $\triangle P_1 P_0 P$ mit rechten Winkel im Punkt P_0 unmittelbar die Gleichheit

$$d(P, P_0) = d(P_1, P_0).$$

Analog verläuft jeder Bildkreis $Z(Q)$ eines Punktes Q auf dem Doppelkreiskegel K_2 durch den Punkt P_2 (s. auch Korollar 4.5).

Sollen sämtliche Bildkreise durch die beiden Punkte P_1 und P_2 zugleich verlaufen, so müssen die Bildkreise der Schnittkurve der beiden Kreiskegel K_1 und K_2 betrachtet werden. Nach den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt ist diese

Schnittkurve eine zur Tafel spiegelsymmetrisch gelegene gleichseitige Hyperbel. \square

In der Abbildung 6.3 sieht man eine Aufrisszeichnung der beiden Kegel. Die Mantellinien des Kegels K_1 sind in grau, die des Kegels K_2 in schwarz dargestellt. Die gestrichelte Gerade ist als Ebene, in der die Schnitthyperbel beider Kegel liegt, zu verstehen. Man erkennt sofort aus Symmetriegründen, dass ihre Spur die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{P_1P_2}$ in der Tafel Ebene sein muss. Diese Spur ist zugleich die Symmetrieachse der Hyperbel bzw. die Nebenachse.

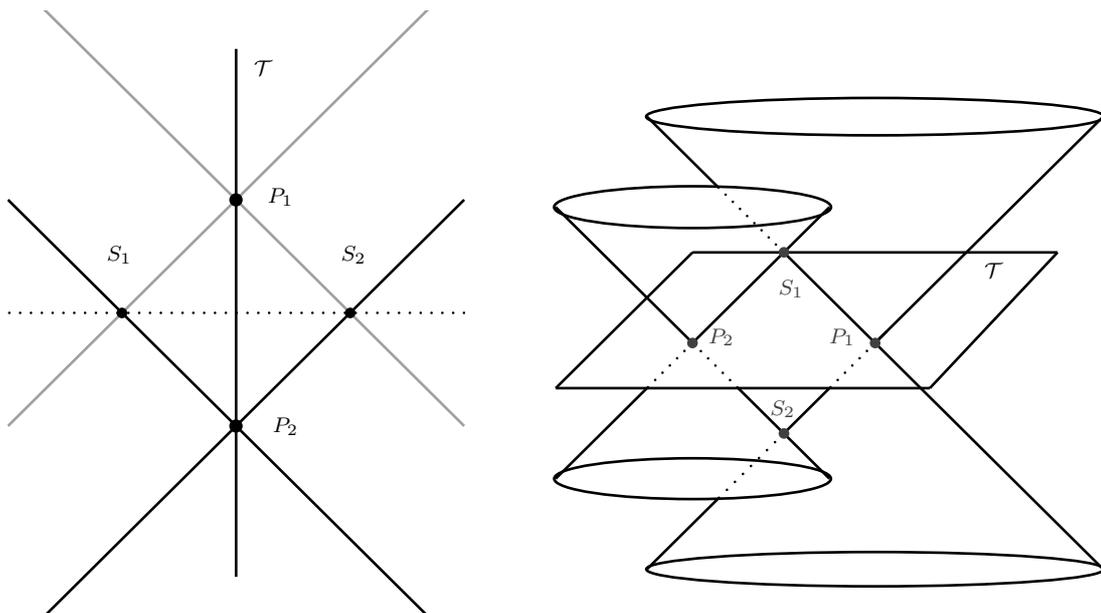


Abbildung 6.3.: Schnitt zweier Doppelkreiskegel mit Kegelspitzen in der Tafel Ebene – Aufriss und räumliche Darstellung; die Punkte S_1 und S_2 sind die Scheitelpunkte der Schnittpunktkurve der beiden Kegel (die zweite Abbildung zeigt die Situation um 90° im Uhrzeigersinn gedreht)

Fiedler zeigt in [Fie82a, S. 57f.] auf, wie man sowohl zyklografische Bildkreise einer gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} , erhalten als Schnittkurve zweier gerader, parallelachsiger Doppelkreiskegel K_1 und K_2 , deren Spitzen in der Tafel Ebene liegen und deren Achsen lotrecht zur Tafel sind und die einen Öffnungswinkel von 90° besitzen, als auch die Hyperbel selbst als Spurkurve konstruieren kann. Letzteres geschieht in einer räumlichen Interpretation als Umlegung der Schnittkurve der beiden Kreiskegel K_1 und K_2 in die Tafel Ebene. Es werden hierfür nachfolgend zwei Konstruktionen vorgestellt.

Gegeben seien in der Ebene die zwei Punkte P_1 und P_2 , die als Scheitelpunkte der Hyperbel \mathcal{H} verstanden werden sollen. Es wird nun der zyklografische Bildkreis

eines Punktes A der Hyperbel \mathcal{H} sowie in der anschließenden Konstruktion seine Umlegungspunkte in der Tafel ebene bestimmt. Aus letzterer lässt sich die gesamte Hyperbel \mathcal{H} erhalten. Zunächst zur Bestimmung des zycklografischen Bildkreises eines Punktes A der Hyperbel \mathcal{H} in der Tafel ebene:

Konstruktion 6.5. Als erstes bestimme man den Mittelpunkt C_1 der Strecke $\overline{P_1P_2}$ und errichte in diesem Punkt die Lotgerade s zu eben dieser Strecke. Anschließend zeichne man den Kreis $\mathcal{D}(C_1, d(C_1, P_1))$ mit Mittelpunkt C_1 durch den Punkt P_1 . Nun wähle man einen beliebigen Punkt F auf der Geraden s im Inneren des Kreises \mathcal{D} und zeichne durch diesen Punkt die zur Strecke $\overline{P_1P_2}$ parallele Gerade l . Die Schnittpunkte der Geraden l mit dem Kreis \mathcal{D} werden mit Q_1 und Q_2 benannt. Nachfolgend bilde man den Schnittpunkt A_1 der zur Strecke $\overline{Q_1C_1}$ parallelen Geraden durch den Punkt P_1 mit der Geraden s . Der Kreis

$$Z(A) = \mathcal{K}(A_1, d(A_1, P_1))$$

mit Mittelpunkt A_1 durch den Punkt P_1 ist der zycklografische Bildkreis eines Punktes A auf der Hyperbel \mathcal{H} , dessen Orthogonalprojektion auf der Tafel der Punkt A_1 ist.

Man erhält sofort die Umlegungen $(A)_1$ und $(A)_2$ der zwei Hyperbelpunkte, die den Lotfußpunkt A_1 in der Tafel ebene besitzen, um die Achse s in die Tafel ebene durch folgende Konstruktion:

Konstruktion 6.6. Man schneide den Kreis $Z(A)$ mit der zur Strecke $\overline{P_1P_2}$ parallelen Gerade durch den Punkt A_1 und erhalte auf diese Weise die Punkte $(A)_1$ und $(A)_2$. Dies sind die umgelegten Punkte der Raumpunkte der Hyperbel, die zum Fußpunkt A_1 gehören.

In der Abbildung 6.4 sind die Konstruktionen 6.5 und 6.6 durchgeführt. Die darin gezeigte gestrichelte Gerade ist die Parallele zur Strecke $\overline{Q_1C_1}$ durch den Punkt P_1 . Durch Verschiebung des Punktes F auf der Geraden s innerhalb des Kreises \mathcal{D} entsteht die Hyperbel als Ortskurve der Punkte $(A)_1$ und $(A)_2$.

Jetzt wird verifiziert, dass der konstruierte Kreis \mathcal{K} tatsächlich ein Bildkreis der gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} ist und die Punkte $(A)_1$ und $(A)_2$ die Umlegungspunkte, mit der sich die umgelegte Hyperbel \mathcal{H} erzeugen lässt.

Erläuterung zu den Konstruktionen 6.5 und 6.6. Wie bereits erklärt wurde, liegt die Schnittkurve der beiden zycklografischen Kegel K_1 und K_2 in einer Ebene und ist eine Hyperbel. Aufgrund der Lage der Kegel und der Tatsache, dass es sich um

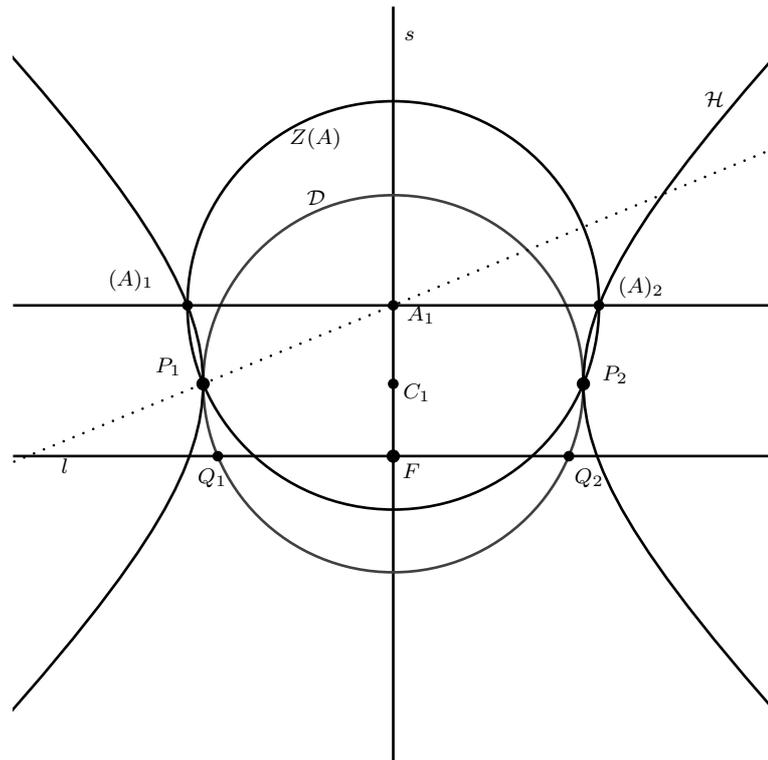


Abbildung 6.4.: Umlegung der Hyperbel (Schnittkurve der Doppelkreisegel K_1 und K_2) in die Tafel Ebene und Konstruktion der Punkte A_1 , $(A)_1$ und $(A)_2$

parallelachsige, gerade Kreiskegel mit gleichem Öffnungswinkel handelt, muss die Ebene E , in der die Hyperbel liegt, senkrecht auf der Tafel Ebene stehen, und ihre Spur s muss zur Strecke $\overline{P_1P_1}$ zwischen den beiden Kegelspitzen senkrecht sein. Zum leichteren Verständnis vergleiche man dazu die Abbildung 6.3. Nun stelle man sich vor, dass das Projektionszentrum C in der Ebene E so liegt, dass der Hauptpunkt C_1 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist und dass der Abstand des Punktes von C den Wert

$$\frac{d(P_1, P_2)}{2}$$

besitzt. Dementsprechend ist in der Abbildung 6.4 der Kreis \mathcal{D} als Distanzkreis zu verstehen. Bei der Umlegung der Ebene E fällt somit der Augpunkt C mit dem Punkt P_1 oder (je nach Drehung) mit dem Punkt P_2 zusammen. Ebenfalls zeigt die Abbildung 6.3, dass die umgelegte Hyperbel durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft. Sie sind die Scheitelpunkte der Hyperbel; sie sind nicht mit ihren Brennpunkten zu verwechseln.

Betrachtet wird im nächsten Schritt eine Ebene H , die sowohl zur Tafel Ebene als auch zur Ebene E orthogonal ist (deshalb ist ihre Spur die Gerade P_1P_2). Dreht man

diese Ebene mit einem Winkel von $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ)$ um die Gerade P_1P_2 , so schneidet die Ebene H aus der Hyperbel zwei Punkte A und B aus. Die Fluchtlinie der Ebene H ist parallel zu ihrer Spur und schneidet, da ihr Neigungswinkel kleiner als 45° ist, den Distanzkreis \mathcal{D} in zwei Punkten. Somit kann die zur Geraden P_1P_2 parallele Gerade l durch den Punkt F als Fluchtlinie der Ebene H verstanden werden.

Darüber hinaus schneidet die Ebene H aus den beiden Kegeln je zwei Mantellinien m_{1a} und m_{1b} sowie m_{2a} und m_{2b} aus, deren Fluchtpunkte nach Satz 3.14(ii) einerseits auf dem Distanzkreis liegen (da die Mantellinien um 45° zur Tafel geneigt sind), andererseits müssen ihre Fluchtpunkte auf der Geraden l liegen. So sieht man ein, dass die beiden Punkte Q_1 und Q_2 die Fluchtpunkte der genannten Mantellinien sind. Da die Punkte P_1 und P_2 die Durchstoßpunkte aller Mantellinien sind, müssen die Geraden

$$P_1Q_1, \quad P_1Q_2, \quad P_2Q_1, \quad \text{und} \quad P_2Q_2$$

die Zentralprojektionen der Mantellinien m_{1a} und m_{1b} sowie m_{2a} und m_{2b} sein. Nun liegt der Punkt A auf zwei dieser Mantellinien je eines Kegels, etwa auf den Geraden m_{1a} und m_{2b} , seine Zentralprojektion A' sowie seine Orthogonalprojektion auf der Tafel A_1 liegen in der Geraden s . Die Bestimmung des Lotfußpunktes funktioniert wie in der Konstruktion 3.12 beschrieben, weshalb A_1 die senkrechte Projektion des Punktes A sein muss.

Abschließend wird nun noch diskutiert, weshalb der Bildkreis den Radius $d(A_1, P_1)$ besitzt: Man weiß, dass die Gerade AP_1 eine Mantellinie ist, die eine Tafelneigung von 45° zur Tafel besitzt. Da der Punkt A_1 die Orthogonalprojektion des Punktes A in der Tafel Ebene ist, folgt die Rechtwinkligkeit des Dreiecks $\triangle P_1A_1A$ und sogar aufgrund des 45° -Winkels im Punkt P_1 seine Gleichschenkligkeit. Es ergibt sich somit

$$d(P_1, A_1) = d(A_1, A).$$

Der Konstruktionsschritt zur Bestimmung der Punkte $(A)_1$ bzw. $(A)_2$ rechtfertigt sich direkt, da die Umlegungspunkte sowohl auf der zur Geraden s senkrechten Geraden durch den Punkt A_1 als auch auf dem Bildkreis $Z(A)$ liegen müssen. Dies ist unmittelbar durch die Umlegung gegeben. Durch Verschiebung des Punktes F innerhalb des Kreises \mathcal{D} und damit der Geraden Q_1Q_2 erhält man in der räumlichen Vorstellung eine Ebenenschar, die die Punkte der Hyperbel erzeugt.

6.3.2. Involutionen

In verschiedenen mathematischen Problemstellungen werden sogenannte *Involutionen* bzw. *involutorische Abbildungen* untersucht. Dabei handelt es sich um Abbildungen, die bei Hintereinanderschaltung von sich selbst wieder das Ausgangselement liefern, die somit selbstinvers sind. Betrachtet man als Beispiel aus der Analysis die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \mapsto x^{-1},$$

so ist diese eine Involution auf der Definitionsmenge. Dazu prüft man mit den Potenzgesetzen für eine beliebige Zahl $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass

$$f(f(t)) = (t^{-1})^{-1} = t$$

gilt. Auf diese Weise lassen sich involutorische Punktpaare bilden. Denn hat man mit der Abbildung oben $f(t_1) = t_2$, so ist $f(t_2) = t_1$ und das Paar $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist ein *involutorisches Punktepaar der Involution f* . Derartige Involutionen findet man auch in der Projektiven Geometrie. Fiedler diskutiert eine davon in [Fie82a, S. 10] bei der Behandlung der Umlegung um eine Achse und der zentralperspektivischen Abbildung. Auch für die hier dargestellte Hyperbel bzw. das elliptische Kreisbüschel findet sich ein involutorischer Zusammenhang. Genauer:

Satz 6.7. *Es sei \mathcal{H} eine gleichseitige Hyperbel in der Ebene, die durch Umlegung der Schnittkurve zweier parallelachsiger, gerader Doppelkreisegel entstanden ist, deren Spitzen in der Tafelebene liegen, deren Achsen lotrecht zur Tafel und Öffnungswinkel 90° sind und n sei ihre Nebenachse. Sei weiter P_1 ein beliebiger vom Mittelpunkt der Hyperbel \mathcal{H} verschiedener Punkt auf der Nebenachse n und P ein Schnittpunkt der Senkrechten zur Nebenachse n im Punkt P_1 mit der Hyperbel \mathcal{H} . Weiter sei F_1 der Schnittpunkt der Tangente an die Hyperbel \mathcal{H} im Punkt P mit der Nebenachse n . Der Punkt F sei als Schnittpunkt der Senkrechten zur Nebenachse n durch den Punkt F_1 mit dem gleichen Hyperbelast, auf dem der Punkt P liegt, bestimmt. Die Punkte P_1 und F_1 bilden ein involutorisches Punktepaar auf der Nebenachse n .⁶⁶*

⁶⁶Wie bereits in der Fußnote 54 erwähnt, lässt sich das Konzept von Pol und Polare in Bezug auf einen Kreis auf andere Kegelschnitte, insbesondere auf die Hyperbel, übertragen. So konstruiert man in Analogie zur Definition die Polare zu einem Pol durch Tangentenkonstruktion. Die Aussage des Satzes kann dann aus dem Hauptsatz der Polarentheorie erhalten werden, der besagt, dass wenn ein Pol P auf der Geraden q liegt, dann der Pol Q zur Geraden q auf der Polaren von P liegt.

Die im Satz 6.7 anzuwendende Abbildung, die der Involution zu Grunde liegt, ist die Verkettung der beiden Abbildungen *Schnittpunkt der Senkrechten in einem Punkt auf der Nebenachse einer Hyperbel mit dieser Hyperbel* und *Schnittpunkt einer Tangente in einem Punkt der Hyperbel mit der Nebenachse dieser Hyperbel*. Kurz formuliert kann man sagen, dass Lotfußpunkte und Tangentenabschnitte auf der Nebenachse der Hyperbel involutorisch liegen.

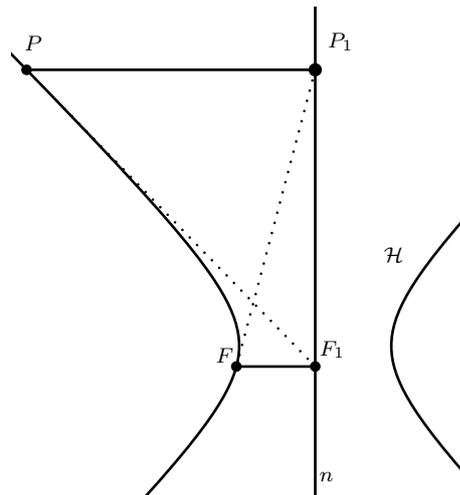


Abbildung 6.5.: Involution an einer Hyperbel mithilfe einer Tangenten- und Lotkonstruktion

Um den Satz 6.7 beweisen zu können, ist ein weiterer Satz nötig. Es wird mit einer Aussage begonnen, die sich mithilfe der räumlichen Interpretation der gleichseitigen Hyperbel als Schnittkurve zweier gerader Kreiskegel in der Lage, wie in Satz 6.7 beschrieben, leicht einsehen lässt. Dazu der folgende

Satz 6.8. *Seien F_1 und P_1 zwei Punkte auf der Nebenachse der umgelegten, gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} , die nach der Konstruktion aus Satz 6.7 bestimmt werden, sowie M einer der beiden Scheitelpunkte der Hyperbel \mathcal{H} . Der Winkel*

$$\alpha = \angle(P_1MF_1),$$

den die Geraden P_1M und MF_1 im Punkt M einschließen, ist ein rechter.

Beweis. Um dies einzusehen, betrachtet man die Hyperbel räumlich als Schnittkurve zweier parallelachsiger Doppelkreiskegel mit einem Öffnungswinkel von 90° in oben beschriebener Lage. Wie bereits bekannt, ist der Punkt M als Hyperbelscheitel (nach der Umlegung in die Tafel ebene) die Spitze eines der beiden sich schneidenden Doppelkreiskegel und der Punkt P_1 die orthogonale Projektion eines Punktes

P , der auf der Hyperbel liegt, auf der Tafelebene. Der Punkt C_1 sei der Mittelpunkt des Distanzkreises und der Augpunkt wie in der vorherigen Konstruktionserläuterung gewählt. Es werden nun der Durchstoßpunkt S_t sowie der Fluchtpunkt Q_t der Tangente an die (räumlich gelegene) Hyperbel im Punkt P bestimmt.

Dazu wird gemäß der Erläuterung zu den Konstruktionen 6.5 und 6.6 eine Hilfsebene H betrachtet, die durch den Hyperbelpunkt P verläuft und insgesamt vier Mantellinien aus den beiden Doppelkreis Kegeln ausschneidet. Ihre Fluchtpunkte seien gemäß der Erläuterung zu den Konstruktionen 6.5 und 6.6 mit Q_1 und Q_2 bezeichnet.

Jede beliebige Tangentialebene an die Hyperbel⁶⁷ hat eine Tafelneigung von 45° , da die Hyperbel in den Mantelflächen der beiden Doppelkreis Kegel liegt und diese als *gerade* Doppelkreis Kegel mit einem Öffnungswinkel von 90° angenommen wurden. Da deshalb die Tangentialebenen an die Hyperbel bzw. an die beiden Doppelkreis Kegel im Punkt P um 45° zur Tafel geneigt sind, verlaufen ihre Fluchtlinien tangential an den Distanzkreis und durch die Punkte Q_1 bzw. Q_2 (denn die Tangentialebenen berühren die Mantelflächen der Kegel in den oben beschriebenen Mantellinien). Da all jene Tangenten in der Lotebene zur Tafel durch die Nebenachse verlaufen, liegen die Fluchtpunkte sämtlicher Tangenten an die Hyperbel ebenfalls in der Nebenachse. Deshalb ist der Schnittpunkt der Tangente an den Distanzkreis im Punkte Q_1 mit der Nebenachse der Fluchtpunkt Q_t der Tangente in Punkt P an die Hyperbel und die Gerade Q_1Q_t die Fluchtgerade einer der Tangentialebenen. Da die Tangentialebenen an die Hyperbel (also gleichermaßen an die beiden Doppelkreis Kegel) durch den Punkt M verlaufen, erhält man den Durchstoßpunkt S_t der Tangenten an die Hyperbel im Punkt P als den Schnittpunkt der Parallelen zu Q_1Q_t mit der Nebenachse durch den Punkt M . Aufgrund der Tatsache, dass F_1 der Schnittpunkt der Tangente an die Hyperbel im Punkt P ist, also in der räumlichen Interpretation dem Durchstoßpunkt S_t entspricht, folgt mit den Bezeichnungen des Satzes

$$Q_1Q_t \parallel (MS_t = MF_1).$$

Die Parallelität

$$Q_tC_1 \parallel MP_1$$

der Geraden Q_tC_1 und MP_1 ergibt sich sofort aus der Konstruktion 3.12. Da die

⁶⁷Prinzipiell kann an eine Kurve in einem Punkt nur eine Tangente angelegt werden. In diesem Fall liegt die Hyperbel in den Mantelflächen der Doppelkreis Kegel, sodass für jeden Punkt der Hyperbel auch eine Tangentialebene bestimmt werden kann, nämlich die des jeweiligen Kegels in diesem Punkt.

Geraden Q_1Q_t und Q_tC_1 als Tangente und Radius des Distanzkreises zueinander senkrecht stehen, müssen auch die Geraden MF_1 und MP_1 senkrecht zueinander sein. \square

Jetzt kann man direkt die Aussage bezüglich der involutorischen Lage bestimmter Punkte auf der Nebenachse der Hyperbel einsehen, die am Anfang des Abschnittes formuliert wurde:

Beweis von Satz 6.7. Der Beweis beruht darauf, dass ein Punkt, welcher mithilfe der Hyperbel durch Lot- und Tangentenkonstruktion gemäß Satz 6.7 abgebildet wird, gleichermaßen durch die Konstruktion eines 90° -Winkels im Scheitelpunkt der Hyperbel abgebildet werden kann. Das heißt, wird ein Punkt P_1 der Nebenachse auf den Punkt F_1 der Nebenachse durch Orthogonalprojektion und Tangentenkonstruktion bezüglich der Hyperbel mit Scheitelpunkt M abgebildet, so kann dies ebenfalls gemäß Satz 6.8 erreicht werden, indem man eine im Punkt M rechtwinklig zur Geraden P_1M verlaufende Gerade konstruiert und diese mit der Nebenachse schneidet. Der auf diese Weise bestimmte Punkt ist der Punkt F_1 . Bildet man nun den Punkt F_1 wieder über die Orthogonal- und Tangentenkonstruktion ab, so kann man den somit erhaltenen Punkt wieder über die Konstruktion des rechten Winkels im Scheitel M erhalten. Demnach ist es der Punkt P_1 . \square

Die Konstruktion der involutorischen Punkte über die Konstruktion des rechten Winkels in einem Scheitel der Hyperbel liefert folgende direkt nachvollziehbare Folgerung aus Satz 6.8:

Korollar 6.9. *Bezeichnet man den Punkt C_1 als den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel (Schnittpunkt der Neben- und Hauptachse der Hyperbel), so gilt für zwei zueinander involutorische Punkte P_1 und F_1 (die vom Hyperbelmittelpunkt verschieden sind) auf der Nebenachse der Hyperbel, dass das Produkt aus den jeweiligen Abständen der involutorischen Punkte zum Mittelpunkt C_1 konstant ist und dem quadratischen Abstand des Mittelpunktes zum Scheitelpunkt M der Hyperbel entspricht. Kurz, es besteht der Zusammenhang*

$$d(P_1, C_1) \cdot P(F_1, C_1) = d^2(M, C_1). \quad (6.2)$$

besteht.

Beweis. Das Dreieck $\triangle P_1MF_1$ hat einen rechten Winkel im Punkt M , die Hypotenuse dieses Dreiecks ist die Strecke $\overline{P_1F_1}$ und die Höhe durch C_1M gegeben. Der Höhensatz liefert nun die Aussage des Korollars. \square

An dieser Stelle soll noch eine Konstruktion vorgestellt werden, die bei Fiedler nicht angegeben ist, sich jedoch leicht aus den oben diskutierten Sätzen ableiten lässt. Mit ihrer Hilfe gelingt es auf einfache Weise, die Tangente an eine Hyperbel, die als Durchschnittskurve zweier parallelachsiger, gerader Doppelkreisegel mit zur Tafel senkrechten Achsen und Öffnungswinkeln von 90° zu verstehen ist, zu konstruieren. Ist also die Hyperbel \mathcal{H} sowie ein vom Scheitel verschiedener Punkt P auf ihr vorgegeben und die Nebenachse sowie ein Scheitelpunkt bekannt, dann kann man die Tangente t wie folgt finden:

Konstruktion 6.10. Man konstruiere den Lotfußpunkt P_1 des Lotes vom Punkt P auf der Nebenachse, anschließend konstruiere man die im Scheitelpunkt M im rechten Winkel zur Geraden P_1M stehende Gerade und bilde ihren Schnittpunkt F_1 mit der Nebenachse. Die Gerade PF_1 ist die gesuchte Tangente im Punkt P an die Hyperbel \mathcal{H} .

Erläuterung zur Konstruktion. Die Korrektheit der Konstruktion ist unmittelbar auf Grundlage der oben diskutierten Sätze klar.

Betrachtet man die in Korollar 6.9 beschriebene Situation räumlich und setzt das Projektionszentrum wieder orthogonal zur Tafelebene (in der die umgelegte Hyperbel liegt) im Abstand $d(C_1, M)$ fest, so entspricht die Größe $d^2(M, C_1)$ dem Quadrat des Radius des Distanzkreises \mathcal{D} . Die Schnittpunkte A_1 und A_2 des Distanzkreises \mathcal{D} mit der Nebenachse befinden sich jeweils im gleichen Abstand zum Punkt C_1 und liegen offenbar involutorisch zueinander; dies ist klar, wenn man den Distanzkreis als Thaleskreis über den Durchmesser $\overline{A_1A_2}$ auffasst und den Satz 6.8 ausnutzt. Aufgrund der Lage der Punkte bezeichnet man das involutorische Punktepaar A_1 und A_2 als das *symmetrische Paar der Involution*.

Bei näherer Betrachtung der Formel 6.2 fällt auf, dass sie eine Ähnlichkeit zu der im Abschnitt 5.3 definierten Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis aufweist. Daher bezeichnet man die Zahl

$$d(P_1, C_1) \cdot d(F_1, C_1)$$

auch als die *Potenz der Involution*. Hier lässt sich ein bemerkenswerter Zusammenhang feststellen: Aufgrund der Konstruktion involutorischer Punkte über die Konstruktion eines rechten Winkels im Scheitelpunkt der Hyperbel, liegt je ein involutorischer Punkt auf der jeweils anderen Seite des Punktes C_1 . Misst man die Abstände $d(P_1, C_1)$ und $d(F_1, C_1)$ jener Punkte vom Punkt C_1 jeweils negativ und positiv, so ist das Produkt aus diesen Größen stets negativ. Zudem kann ein Punkt

niemals auf sich selbst abgebildet werden. Solche Involutionen bezeichnet man als *doppelpunktfrei* bzw. *elliptische Involutionen* (vgl. [Fie82a, S. 59]).

Insgesamt lässt sich das Kreisbüschel der Kreise durch zwei feste Punkte zyklografisch in Zusammenhang mit einer gleichseitigen Hyperbel bringen, diese wiederum bringt Punkte auf ihrer Hauptachse in einem bestimmten Sinne involutorisch in Zusammenhang und diese Involution wird als elliptische Involution bezeichnet. Vermutlich lässt sich damit die Bezeichnung *elliptisches Kreisbüschel* ableiten.

6.3.3. Die algebraische Beschreibung einer Hyperbel

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang der Schnittpunkte eines Büschelkreises mit der gemeinsamen Zentrale aller Büschelkreise eines elliptischen Kreisbüschels zur Potenz der Involution hergestellt. Anschließend wird ein algebraischer Ausdruck für die Hyperbel hergeleitet; beides geschieht auf Grundlage des Artikels 62 in [Fie82a, S. 60f.].

Es sei eine Hyperbel \mathcal{H} in der Tafelebene gegeben, die durch Umlegung der Schnittkurve zweier gerader parallelachsiger Doppelkreisegel mit einem Öffnungswinkel von 90° mit ihren Spitzen in der Tafel, sodass diese die einzigen gemeinsamen Punkte der Doppelkreisegel mit der Tafel sind, erhalten wird. Man bezeichne mit C_1 den Hauptpunkt der zyklografischen bzw. zentralperspektivischen Abbildung, der so liegt, dass er mit dem Schnittpunkt der Achsen der Hyperbel zusammenfällt, mit M einen Scheitel der in der Tafelebene befindlichen Hyperbel (in der räumlichen Interpretation ist der Punkt M die Spitze eines Kegels) und mit P_1 einen Punkt auf der Nebenachse (der als Orthogonalprojektion eines Punktes P der Schnittkurve beider Kegel verstanden werden kann).

Man betrachte nun den zyklografischen Bildkreis $Z(P)$ des Punktes P mit Mittelpunkt P_1 . Der Punkt (P) sei der um die Nebenachse der Hyperbel \mathcal{H} umgelegte Punkt P . Die Strecken $\overline{P_1(P)}$ und $\overline{P_1C_1}$ werden mit x und y bezeichnet, der Radius des Distanzkreises sei r . In der Abbildung 6.6 sind die bezeichneten Größen dargestellt. Die Punkte S_1 und S_2 sind die Schnittpunkte des zyklografischen Bildkreises $Z(P)$ mit der Nebenachse der Hyperbel \mathcal{H} ; grau gezeichnet ist der Distanzkreis um den Punkt C_1 .

Zunächst überzeugt man sich leicht von der Aussage des nachfolgenden Satzes, mit dessen Hilfe es gelingt, involutorische Punkte zu konstruieren:

Satz 6.11. *Es sei ein elliptisches Kreisbüschel gegeben und \mathcal{H} die zugehörige gleichseitige Hyperbel in der Tafelebene. Ist nun $Z(P)$ ein beliebiger Kreis des Kreisbüschels und sind S_1 und S_2 die Schnittpunkte des Kreises $Z(P)$ mit der Nebenachse*

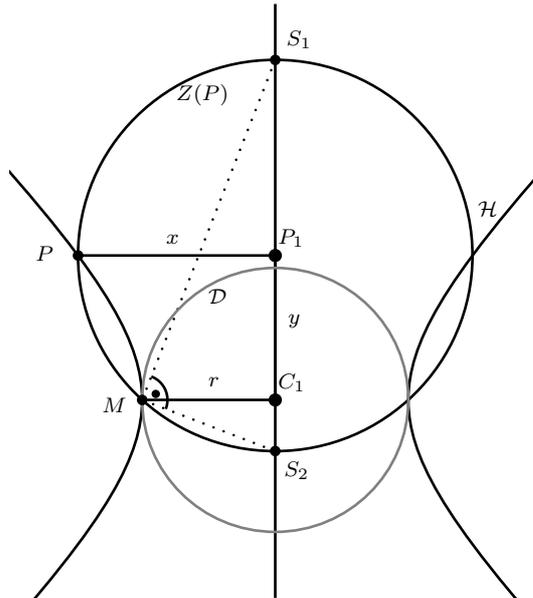


Abbildung 6.6.: Skizze zur Herleitung eines algebraischen Ausdrucks für die gleichseitige Hyperbel

der Hyperbel (diese ist zugleich die gemeinsame Zentrale aller Büschelkreise), so bilden die Punkte S_1 und S_2 ein involutorisches Punktepaar in Bezug auf die Hyperbel.

Beweis. Das Dreieck $\triangle S_1MS_2$ besitzt einen rechten Winkel im Scheitelpunkt M der Hyperbel, da der Kreis $Z(P)$ als Thaleskreis aufgefasst werden kann. Daraus ergibt sich die Aussage mithilfe des Satzes 6.8. \square

Man betrachte erneut die Abbildung 6.6, die darin eingezeichneten Streckenlängen x und y sowie den Distanzkreisradius r . Die Erkenntnis aus der Erläuterung zur Konstruktion 6.6, dass die Strecken $\overline{PP_1}$ und $\overline{MP_1}$ die gleiche Länge haben, liefert folgende Aussage

$$x^2 = r^2 + y^2 \iff x^2 - y^2 = r^2. \quad (6.3)$$

Interpretiert man die Haupt- und Nebenachse als die Achsen eines Koordinatensystems und den Mittelpunkt C_1 der gleichseitigen Hyperbel als Koordinatenursprung, so ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras (rechter Winkel im Punkt C_1) und da $r > 0$ ist, die Gleichung

$$\mathcal{H}: \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \quad (6.4)$$

als die beschreibende Gleichung für die gleichseitige Hyperbel \mathcal{H} . Hier ist im Vergleich zur allgemeinen Hyperbelgleichung erkennbar, dass die Parameter a und b in

der Gleichung (6.1) gleich sind, also

$$a = b = r$$

gilt. Die Betrachtung der Schnittkurven zweier verschiedener parallelachsiger Doppelkreisegel, deren Spitzen in der Tafel Ebene liegen und Achsen lotrecht zur Tafel sind, ergibt somit nicht beliebige Hyperbeln, sondern nur Spezialfälle mit der oben angegebenen Einschränkung, d. h. gleichseitige Hyperbeln.

Zur abschließenden Behandlung verschiedener Eigenschaften von Hyperbeln werden in diesem Abschnitt noch eine Konstruktion und ein Satz angegeben. Zuvor wird noch ein Zusammenhang, der gleiche Winkel an der Hyperbel aufzeigt, erörtert. Die Gleichung (6.3) lässt sich durch Anwendung der dritten binomischen Formel zur Gleichung

$$y^2 = x^2 - r^2 = (x + r)(x - r)$$

umformen. Division durch den Distanzkreisradius r sowie durch die Länge $x + r$ liefert die Bruchgleichung

$$\frac{y}{x + r} = \frac{x - r}{y}.$$

Ist dann P wieder ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} (s. Abbildung 6.7) und bezeichnet man mit P_0 den Fußpunkt des Lotes zur Hauptachse durch den Punkt P , mit M und M^* die Scheitelpunkte der Hyperbel und sind C_1 sowie P_1 wie zuvor, so findet man mit $y = d(P_1, C_1)$ und $x + r = d(P, P_1) + d(C_1, M^*) = d(P_0, M^*)$ den Zusammenhang

$$\tan(\angle(MM^*P)) = \frac{d(P, P_0)}{d(P_0, M^*)} = \frac{d(P_1, C_1)}{d(P_0, M^*)} = \frac{y}{x + r}$$

und mit der Gleichung $x - r = d(P_0, M)$ das Verhältnis

$$\tan(\angle(MPP_0)) = \frac{d(P_0, M)}{d(P_1, C_1)} = \frac{x - r}{y}.$$

Da die beiden Winkel im Argument des Tangens nur Werte zwischen 0 und 90° annehmen können, folgt insgesamt

$$\tan(\angle(MM^*P)) = \tan(\angle(MPP_0)) \iff \angle(MM^*P) = \angle(MPP_0) =: \alpha.$$

Die Abbildung 6.7 visualisiert die nachgewiesene Winkelgleichheit der Winkel α .

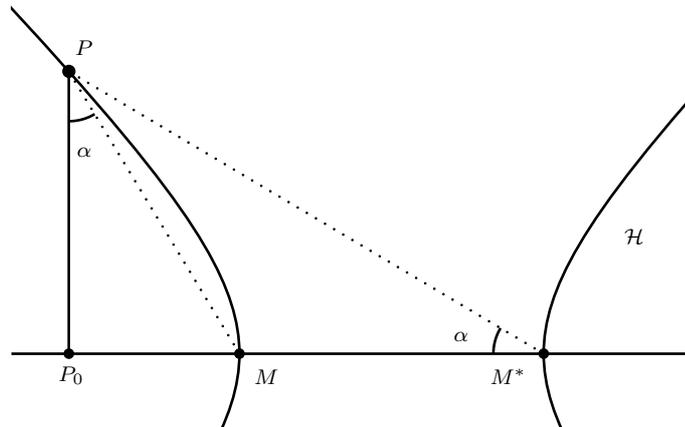


Abbildung 6.7.: Gleichheit der Winkel an der gleichseitigen Hyperbel

Die oben hergeleitete Hyperbelgleichung $y^2 = (x + r)(x - r)$ eröffnet die Möglichkeit, einzelne Punkte auf der Hyperbel zu konstruieren. Bekannt sein müssen die Scheitelpunkte der Hyperbel M und M^* und es muss ein Punkt P_0 auf der Hauptachse MM^* gegeben sein. Dann findet man die Hyperbelpunkte P und P' auf dem Lot zur Hauptachse durch den Punkt P_0 durch

Konstruktion 6.12. Es sei $b := d(P_0, M) \cdot d(P_0, M^*)$. Man bestimmt die Schnittpunkte P und P' des Kreises $\mathcal{K}(P_0, \sqrt{b})$ mit Mittelpunkt P_0 und Radius \sqrt{b} mit dem Lot zur Hauptachse durch den Punkt P_0 .⁶⁸ Als Ortskurve ergibt sich die gesamte Hyperbel durch Verschiebung des Punktes P_0 auf der durch die Punkte M und M^* bestimmten Hauptachse.

Man hat gesehen, dass Hyperbeln, die als Umlegung der Schnittkurve zweier gerader, parallelachsiger Doppelkreisegel in oben beschriebener Lage erhalten werden, durch Festsetzung $a = b = r$ aus der allgemeinen Hyperbelgleichung (6.1) auf eine algebraische Darstellung gebracht werden können. Bei Fiedler stellt sich die Frage nicht, ob der Zusammenhang involutorischer Punkte auf der Nebenachse allgemein für jede Hyperbel gilt, da er ausschließlich gleichseitige Hyperbeln, also einen Spezialfall der allgemeinen Form, betrachtet.

In dieser Arbeit wurde ein alternativer Zugang gewählt, weshalb folgender Satz gezeigt werden soll:

⁶⁸Es sei angemerkt, dass der Höhensatz dazu verwendet werden kann, um den erforderlichen Radius \sqrt{b} zu konstruieren. Dieser ist die Länge einer Seite eines flächengleichen Quadrates zu einem Rechtecks mit dem Flächeninhalt b , das sich direkt aus den gegebenen Punkten bestimmen lässt.

Satz 6.13. Die Aussage des Satzes 6.7 überträgt sich auf jede beliebige Hyperbel mit den Parametern $a, b > 0$.

Beweis. Um die Aussage des Satzes nachvollziehen zu können, werden Werkzeuge der Differentialrechnung benutzt. Zunächst sei

$$\mathcal{H}(x, y) := \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

mit den Parametern $a, b > 0$. Dann wird durch $\mathcal{H}(x, y) = 0$ eine beliebige Hyperbel beschrieben. Nun kann man mithilfe der mehrdimensionalen Kettenregel die Ableitung und damit die Steigung der Tangente in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{H}(x, y) = 0, y_0 \neq 0\}$ der in Form des Graphen einer durch eine implizite Funktion gegebenen Hyperbel bestimmen. Es gilt damit für die Steigung m der Tangente

$$m(x_0) = -\frac{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}}(x_0, y_0) = \frac{2x_0 b^2}{2y_0 a^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

im Punkt (x_0, y_0) . Das führt an der Stelle x_0 auf die folgende Tangentengleichung

$$\begin{aligned} t(x) &= m(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \\ &= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0) + y_0 \\ &= \frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0^2}{y_0} + y_0. \end{aligned}$$

Auflösen der Hyperbelgleichung nach der Koordinate x_0 liefert

$$x_0 = \pm \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{y_0^2}{b^2}\right)}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Tangentengleichung t ein, so ergibt nach anschließenden Kürzen für den y -Achsenabschnitt der Tangente die Gleichung

$$\begin{aligned} -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0^2}{y_0} + y_0 &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 \left(1 + \frac{y_0^2}{b^2}\right)}{y_0} + y_0 \\ &= -\frac{b^2 + y_0^2}{y_0} + y_0 \\ &= -\frac{b^2}{y_0}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Abbildung f mit der Gleichung

$$f_0 = f(y_0) = -\frac{b^2}{y_0}$$

die Ordinate des zum Punkt $P_1 = (0, y_0)$ involutorischen Punkts

$$F_1 = (0, f_0) = \left(0, -\frac{b^2}{y_0}\right)$$

für eine Hyperbel \mathcal{H} auf ihrer Nebenachse angibt. Jetzt ergibt sich leicht, dass die Abbildung tatsächlich eine Involution ist, denn man rechnet nach:

$$f(f(y_0)) = f(f_1) = f\left(-\frac{b^2}{y_0}\right) = \frac{-b^2}{-\frac{b^2}{y_0}} = \frac{b^2 y_0}{b^2} = y_0,$$

was zu beweisen war. □

Man findet auch eine weitere ausgezeichnete Winkelgleichheit der Bildkreise zweier Hyperbelpunkte (vgl. [Fie82a, S. 61]). Es seien P und Q zwei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel, sodass die Ebene, in der sie liegt, lotrecht zur Tafel steht, im Raum. Weiter seien $Z(P)$ und $Z(Q)$ die Bildkreise der Punkte P und Q mit den Mittelpunkten P_0 und Q_0 . Nach der Umlegung der Hyperbel in die Tafel Ebene sei M einer der Scheitelpunkte der umgelegten Hyperbel. Es gilt dann der folgende

Satz 6.14. *Der Schnittwinkel der beiden Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ im Scheitelpunkt M stimmt mit dem Winkel $\alpha = \angle(P_1 M Q_1)$, den die Radien der beiden Kreise im Scheitel einschließen, überein.*

Die Abbildung 6.8 veranschaulicht die Aussage des Satzes. Die Radien der Bildkreise sind gestrichelt dargestellt.

Beweis. Die Aussage lässt sich zeigen, indem ausgenutzt wird, dass Tangenten von Kreisen rechtwinklig auf ihren zugehörigen Radien stehen. Da die Schnittwinkel zweier Kreise definitionsgemäß mithilfe von Tangenten bestimmt werden (s. Abschnitt 5.2.2), kann die Aussage wie folgt erhalten werden: Die Abbildung 6.9 zeigt den Scheitelpunkt M und je ein zusammengehöriges Paar eines Radius und einer Tangente in der gleichen Farbe.

Die darin dargestellten Winkel α sind gleich groß, da sie Scheitelwinkel zum Punkt M sind. Aufgrund der Rechtwinkligkeit von Tangente und zugehörigem Radius gilt

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

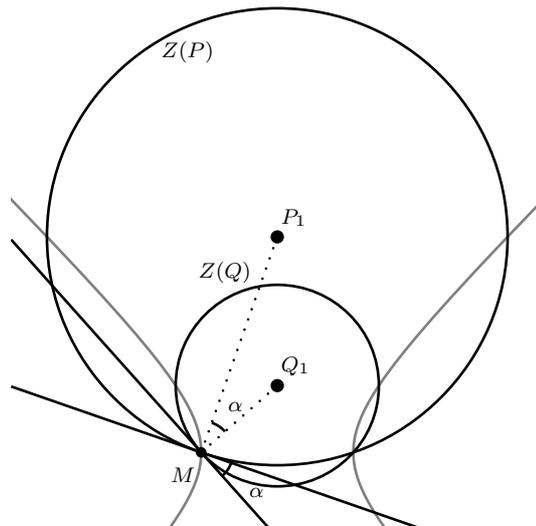


Abbildung 6.8.: Schnittwinkelgleichheit in Bezug auf den Winkel, den die Radien einschließen

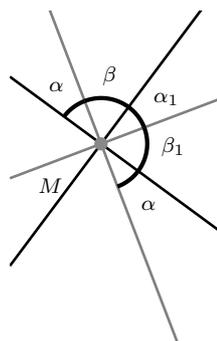


Abbildung 6.9.: Skizze zum Beweis von Satz 6.14

sowie

$$\alpha + \beta_1 = 90^\circ,$$

woraus sich die Gleichung $\beta_1 = \beta$ ergibt. Ebenso erhält man aus der Tatsache, dass

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$$

sowie

$$\alpha + \beta_1 = 90^\circ$$

gilt, dass $\alpha_1 = \alpha$ ist. Im Kontext des Satzes (es korrespondieren die Winkel α) ist

also die Gleichheit der beiden angegebenen Winkel nachgewiesen. \square

6.3.4. Die Hyperbel und ihre Asymptoten

Weitere Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel werden nun nachfolgend angegeben. Als Asymptote einer Kurve, die (hier) als Graph einer Funktion $K: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ interpretiert wird, soll im Folgenden eine affin-lineare Funktion $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $a(x) = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$ verstanden werden, sodass für alle $\varepsilon > 0$, ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gefunden werden kann, sodass für alle $x > x_0$ die Gleichung

$$|K(x) - a(x)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Man schreibt in diesem Fall auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (K(x) - a(x)) = 0.$$

Anschaulich ist eine Asymptote demnach eine Gerade, die sich der gegebenen Kurve beliebig gut annähert. Für eine allgemeine Hyperbel der Form

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit den Parametern $a, b > 0$ lassen sich zwei Asymptoten finden, wenn man die Gleichung nach der Größe y auflöst und die so erhaltenen Funktionen auf asymptotisches Verhalten untersucht. Es ergeben sich umgeformt nach y unmittelbar die Gleichungen

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

wobei $|x| \geq a$ ist. Jetzt wird mit der obigen Definition einer Asymptote sowie den Rechenregeln für Grenzwerte gearbeitet. Dazu werden die Funktionen $a_{\mp}(x) := \mp \frac{b}{a}x$ als Asymptotengleichung angenommen und es ergibt sich die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \mp \frac{b}{a}x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2}} \mp \frac{b}{a}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pm b \frac{|x|}{a} \mp \frac{b}{a}x \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

was bestätigt, dass

$$a_{\mp}(x) = \mp \frac{b}{a}x$$

die Gleichungen der Asymptoten sind. Im speziellen Fall der gleichseitigen Hyperbel, gilt die Gleichheit der Parameter $a = b$, sodass sich die Asymptotengleichungen zu

$$a_{\mp}(x) = \mp x$$

vereinfachen. Bekanntermaßen sind ihre Graphen Ursprungsgeraden, die im 45° -Winkel zu den Koordinatenachsen geneigt sind.

Es wird jetzt ein Satz bewiesen, den Fiedler in [Fie82a, S. 65] behandelt und aus dem er eine Konstruktion ableitet. So sagt er,

[...] dass für alle Punkte der gleichseitigen Hyperbel das doppelte Rechteck aus den rechtwinkligen Abständen von den Asymptoten constant und gleich r^2 ist. [Fie82a, ebd.]

Diese Aussage wird zusammengefasst im folgenden

Satz 6.15. *Es sei \mathcal{H} eine gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung $\mathcal{H}: x^2 - y^2 = r^2$, wobei $r > 0$ gelten soll. Ist P ein beliebiger Punkt der Hyperbel \mathcal{H} und sind A und B die Fußpunkte der Lote im Punkt P auf die Asymptoten der Hyperbel \mathcal{H} , so gilt*

$$d(P, A) \cdot d(P, B) = \frac{r^2}{2}.$$

Insbesondere ist dieses Produkt konstant. Das Rechteck mit den Kanten \overline{PA} und \overline{PB} soll Asymptotenrechteck des Punktes P heißen.

Man betrachte die Abbildung 6.10, in der die Aussage des Satzes veranschaulicht und für den Beweis um weitere Größen ergänzt wurde. Beide Asymptoten der Hyperbel sind in grau dargestellt.

Beweis. Man betrachte die in der Abbildung 6.10 dargestellten Winkel α , welche durch Parallelverschiebung der Asymptoten eingeschlossen werden und aufgrund der Tatsache, dass jene den Winkel zwischen den Koordinatenachsen halbieren, einen Wert von 45° besitzen. Damit ergeben sich sofort die beiden Äquivalenzen

$$\sin(\alpha) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{d(P, A)}{x - y} \iff d(P, A) = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

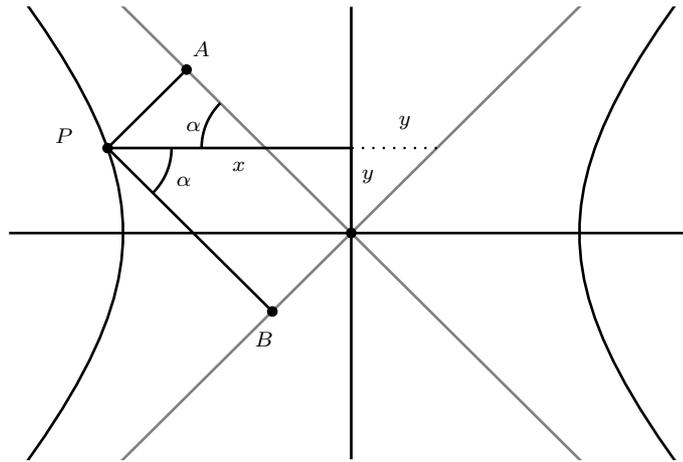


Abbildung 6.10.: Skizze zum Beweis von Satz 6.15

und

$$\cos(\alpha) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{d(P, B)}{x + y} \iff d(P, B) = \frac{x + y}{\sqrt{2}}.$$

Bildet man abschließend das Produkt aus den Abständen des Punktes P der Hyperbel \mathcal{H} zu ihren Asymptoten, so ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} d(P, A) \cdot d(P, B) &= \frac{x - y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x + y}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(x - y)(x + y)}{2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{2} \\ &= \frac{r^2}{2}, \end{aligned}$$

wie behauptet. □

In Ergänzung zum Satz 6.15 sei noch angemerkt, dass, wenn die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel bekannt sind und eines ihrer Asymptotenrechtecke bekannt ist, sich für jeden beliebigen Punkt A der Asymptoten das zugehörige Asymptotenrechteck bestimmen lässt. Denn ist ein Asymptotenrechteck bekannt, so ist auch die Größe $\frac{r^2}{2}$ bekannt. Da der Punkt A gewählt wird und die Gleichung $d(C_1, A) = d(P, B)$ gilt, kann der Abstand $d(P, A)$ aus der bewiesenen Gleichung ermittelt werden. Dabei bezeichnet der Punkt C_1 den Mittelpunkt der Hyperbel.

Fiedler verwendet diese Tatsache, um eine Konstruktion anzugeben, mit der sich der Schnittpunkt einer gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} mit einer zu den Asymptoten pa-

rallenen Gerade bestimmen lässt. Dabei sind von der Hyperbel nur einer der beiden Scheitelpunkte M , die Asymptoten und damit auch der Mittelpunkt C_1 der Hyperbel sowie die zu einer der Asymptoten a_1 und a_2 parallele Gerade g bekannt. Gemäß [Fie82a, S. 65f.] konstruiert man den Schnittpunkt P der Hyperbel \mathcal{H} mit der Geraden g wie folgt:

Konstruktion 6.16. Die Gerade g sei parallel zur Asymptoten a_1 . Man bestimme die zu den Asymptoten parallelen Geraden p_1 und p_2 durch den Scheitelpunkt M der Hyperbel \mathcal{H} . Den Schnittpunkt der Geraden g mit der Asymptotenparallele p_2 bezeichne man mit F , der Schnittpunkt der Geraden C_1F durch den Punkt F und den Mittelpunkt C_1 der Hyperbel \mathcal{H} mit der Asymptotenparallele p_1 sei mit G bezeichnet. Dann findet man den gesuchten Punkt P als Schnittpunkt der zur Asymptoten a_2 parallelen Geraden durch den Punkt G mit der gegebenen Gerade g .

Die Abbildung 6.11 zeigt die Konstruktion des Schnittpunktes P der zur Asymptoten a_1 parallelen Geraden g mit der Hyperbel \mathcal{H} . Man beachte, dass die Hyperbel gestrichelt dargestellt ist. Außerdem sei angemerkt, dass die Hyperbel durch die Konstruktion 6.16 auch als Ortskurve der Punkte P erhalten werden kann, indem die Gerade g parallel zur Asymptoten a_1 verschoben wird.

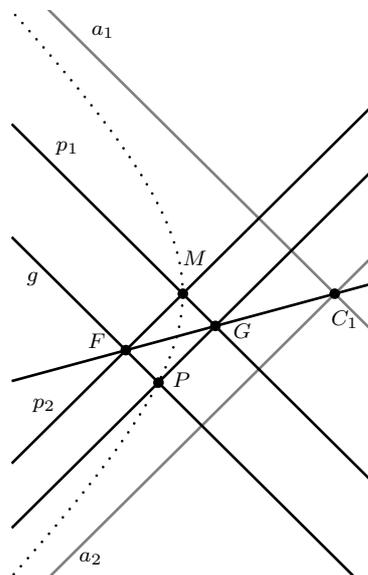


Abbildung 6.11.: Skizze zur Konstruktion 6.16 für die Bestimmung des Schnittpunktes P einer zu einer der Asymptoten der Hyperbel \mathcal{H} parallelen Geraden g mit der Hyperbel mit gegebenem Scheitelpunkt M und Mittelpunkt C

Bevor die oben dargestellte Konstruktion 6.16 nachvollzogen werden kann, wird ein Satz gezeigt, den Fiedler als bekannt voraussetzt:

Satz 6.17. *Es sei $ABCD$ ein Rechteck, d eine der beiden Diagonalen und P ein Punkt auf dieser Diagonalen d . Durch Konstruktion der zu den Rechtecksseiten parallelen Geraden durch den Punkt P erhält man innerhalb des Ausgangsrechtecks vier Rechtecke, von denen zwei auf der jeweils anderen Seite der Diagonalen d liegen. Sie sind flächengleich.⁶⁹*

Man betrachte für den Beweis die Abbildung 6.12, in der das Rechteck $ABCD$ dargestellt ist. Die schraffierten Rechtecke sind gemäß der Aussage des Satzes flächengleich.

Beweis. Seien $x := d(A, B) = d(C, D)$ und $y := d(B, C) = d(A, D)$ sowie a und b die Seitenlängen eines der beiden im Satz beschriebenen Rechtecke innerhalb des Rechtecks $ABCD$, $A_1 = ab$ bezeichne seinen Flächeninhalt. Für den Beweis wird die Diagonale $d = DB$ betrachtet, für die verbleibende Diagonale überträgt sich der Beweis analog. Das andere Rechteck besitzt dann die Kantenlängen $x - a$ und $y - b$. Mit dem ersten Strahlensatz ergibt sich mit B als Zentrum die Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{x - a}{b} \iff \frac{bx}{y} = x - a$$

sowie mit dem Zentrum D die Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{y - b} \iff \frac{ay}{x} = y - b.$$

Somit erhält man den Flächeninhalt A_2 des verbleibenden Rechtecks gemäß der Gleichung

$$\begin{aligned} A_2 &= (y - b) \cdot (x - a) \\ &= \frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y} \\ &= ab \\ &= A_1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Erläuterung zur Konstruktion 6.16. Um einzusehen, dass die Konstruktion 6.16 den gesuchten Schnittpunkt P liefert, werden die Aussagen der Sätze 6.15 und 6.17 ver-

⁶⁹Dieser Satz ist bei Euklid zu finden (s. Euklids Elemente, I. Buch, Satz 43) und wird als Satz über Ergänzungsparallelogramme bezeichnet. Er ist allgemeiner als hier angegeben und bezieht sich auf Parallelogramme – hier wurde der Spezialfall eines Rechtecks behandelt.

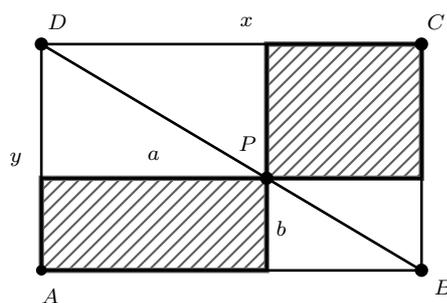


Abbildung 6.12.: Skizze zum Beweis von Satz 6.17

wendet. Betrachtet man die Abbildung 6.11, welche die Konstruktion veranschaulicht, so zeigt der Satz 6.17, dass die Rechtecke R_1 und R_2 den gleichen Flächeninhalt besitzen, das Rechteck R_1 ist dabei durch die Geraden a_2 , PG , p_1 und g , das Rechteck R_2 durch die Geraden a_1 , p_1 , p_2 und PG begrenzt. Bezeichnet man mit R_3 das Rechteck, welches durch die Geraden a_2 , PG , p_1 und a_1 eingeschlossen wird, so gilt

$$F_{R_1} = F_{R_2} \iff F_{R_1} + F_{R_3} = F_{R_2} + F_{R_3},$$

wenn hierin F_{R_1} , F_{R_2} , F_{R_3} und F_{R_4} als die Flächeninhalte entsprechender Rechtecke aufgefasst werden. Man sieht also ein, dass der Punkt P das gleiche Asymptotenrechteck wie der Punkt M eingrenzt, der trivialerweise auf der Hyperbel \mathcal{H} liegt. Da für alle Punkte P der Hyperbel das Asymptotenrechteck gleich groß ist, so folgt aufgrund der Lage des Punktes P in dem Bereich zwischen den Asymptoten, in denen der Scheitelpunkt M liegt, zusammen mit Satz 6.15, dass der Punkt P auf der Hyperbel \mathcal{H} liegt. Da er aber auch zugleich auf der Geraden g liegt, ist er der gesuchte Schnittpunkt P .

6.4. Sätze über Potenz- und Ähnlichkeitskreise

In den Abschnitten 5.5 und 5.6 wurden die Potenzkreise sowie der Ähnlichkeitskreis zu zwei nicht konzentrischen Kreisen unterschiedlicher Radien eingeführt. Jene Kreise sollen nun nachfolgend im Kontext des elliptischen Kreisbüschels bzw. der gleichseitigen Hyperbel als in die Tafel umgelegte Schnittkurve zweier parallelachsiger, gerader Doppelkreisegel, deren Spitzen in der Tafelebene liegen und deren Achsen senkrecht zur Tafel verlaufen, untersucht werden. Zusammen mit den ausgearbeiteten Sätzen aus dem vorherigen Abschnitt können bemerkenswerte Sätze

gefunden werden, die nun vorgestellt werden.

Hierzu wird mit einer Konstruktion begonnen und ein Satz angegeben, der anschließend bewiesen werden soll. Die Aussage dieses Satzes wird bei Fiedler in [Fie82a, S. 62] zwar angegeben, doch die Korrektheit nicht nachgewiesen. Dies soll hier nachgeholt werden.

Vorbereitend wird dafür ein Satz gezeigt, dessen Korrektheit Fiedler als bekannt voraussetzt. Gegeben sei dazu ein Kreis \mathcal{K} mit Mittelpunkt M und eine Gerade g , welche den Kreis \mathcal{K} nicht schneidet. Nun wähle man zwei verschiedene Punkte S und R auf der Geraden g . Die Schnittpunkte (Existenz vorausgesetzt) des Kreises \mathcal{K} mit der zur Geraden MS parallelen Geraden durch den Punkt R seien mit P_1 und P_2 bezeichnet. Jetzt erhält man zwei Geraden $m_1 = P_1M$ und $m_2 = P_2M$, die sich im Mittelpunkt M des Kreises \mathcal{K} schneiden. Es ergibt sich mit diesen Bezeichnungen der folgende Zusammenhang:

Satz 6.18. *Die Gerade MS ist die Winkelhalbierende eines eingeschlossenen Winkels der Geraden m_1 und m_2 , welche sich im Mittelpunkt M als Scheitelpunkt des Winkels schneiden.*

Die Skizze in der Abbildung 6.13 zeigt den Winkel $\alpha + \beta$, der von den Geraden m_1 und m_2 eingeschlossen wird, sowie die Gerade (bzw. Strecke) MS , die ihn halbiert. Des Weiteren wurden der Punkt X als zweiter Schnittpunkt der Geraden m_1 mit dem Kreis \mathcal{K} sowie die Winkel β und α' ergänzt. Die gestrichelte Gerade ist die Parallele zur Geraden MS durch den Punkt R .

Beweis. Zunächst ist aufgrund der Tatsache, dass die beiden Geraden MS und RP_1 nach Konstruktion parallel zueinander sind, klar, dass der Winkel α' aus der Abbildung 6.13 ein Stufenwinkel zum Winkel α ist, weshalb die Gleichheit

$$\alpha = \alpha'$$

der beiden Winkel besteht. Des Weiteren sieht man ein, dass der Winkel α' ein Peripheriewinkel über der Sehne P_2X im Kreis \mathcal{K} und der Winkel $\alpha + \beta$ der zu dieser Sehne gehörige Mittelpunktswinkel ist. Der Umfangswinkelsatz liefert dann die Gleichung

$$2\alpha' = \alpha + \beta.$$

Zusammen mit der Gleichung $\alpha = \alpha'$ ergibt sich damit insgesamt die Äquivalenz

$$2\alpha' = 2\alpha = \alpha + \beta \iff \alpha = \beta$$

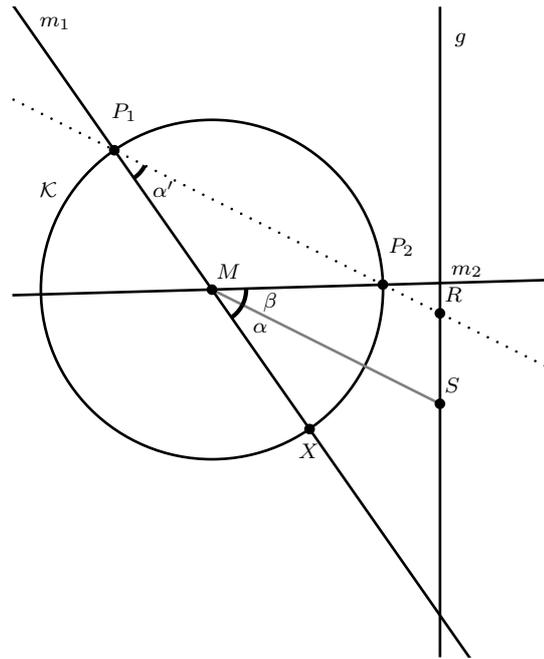


Abbildung 6.13.: Skizze zum Beweis von Satz 6.18

und damit die Aussage des Satzes. □

Jetzt wird eine Konstruktionsaufgabe diskutiert. Es sei hierfür ein planares Kreissystem P gegeben, welches eine im Raum befindliche Ebene repräsentiert. Diese Ebene soll mit einer gleichseitigen Hyperbel mit den Scheiteln C und C^* und Mittelpunkt C_1 geschnitten werden. Die Hyperbel liegt ebenfalls im Raum und ist als Schnittkurve zweier parallelachsiger, gerader Doppelkreiskegel mit 90° Öffnungswinkel, Spitzen in der Tafel und zu ihr lotrechten Achsen aufzufassen. Gesucht sind dann die Bildkreise der Schnittpunkte dieser Ebene mit der Hyperbel. Es soll dabei davon ausgegangen werden, dass die Hyperbel nicht in der Ebene liegt. Bekanntermaßen liegt die Schnitthyperbel der beiden Doppelkreiskegel in einer Ebene E und da man von geraden, parallelachsigen Doppelkreiskegeln mit Spitzen in der Tafel Ebene und zu ihr lotrechten Achsen ausgeht, ist die Ebene E lotrecht zur Tafel Ebene. Ihre Spurgerade s ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{MM^*}$, welche die Kegelspitzen M und M^* (welche die Scheitel der Hyperbel nach der Umlegung in die Tafel Ebene sind) in der Tafel Ebene miteinander verbindet. Nun soll zur Lösung der Aufgabe davon ausgegangen werden, dass die Schnittgerade g der Ebene E , der durch das planare Kreissystem P gegebenen Ebene durch ihren Durchstoßpunkt S , der Bildkreis \mathcal{K} mit dem Mittelpunkt R_1 der Parallelprojektion ihres Verschwindungspunktes auf der Tafel Ebene gegeben und der Hyperbelmittenpunkt C_1 sowie die Punkte M und M^* bekannt seien.

Die Lösung findet sich dann gemäß [Fie82a, S. 61f.] wie folgt:

Konstruktion 6.19. Man konstruiere den Kreis $\mathcal{R}(M, d(M, C_1))$ mit dem Mittelpunkt M durch den Punkt C_1 . Anschließend zeichne man die zur Strecke \overline{MS} parallele Gerade p durch den Punkt R und bezeichne ihre Schnittpunkte mit dem Kreis \mathcal{R} mit P_1 und P_2 . Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Geraden MP_1 bzw. MP_2 mit der Geraden $s = RS$ (sie ist die Nebenachse der Hyperbel) liefern die Mittelpunkte der gesuchten Kreise. Demnach sind die Kreise

$$\mathcal{L}_1(S_1, d(S_1, M))$$

mit Mittelpunkt S_1 durch den Punkt M sowie

$$\mathcal{L}_2(S_2, d(S_2, M))$$

mit Mittelpunkt S_2 durch den Punkt M die gesuchten Bildkreise.

Man betrachte die Abbildung 6.14. Die bestimmten Bildkreise \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 sind in grau dargestellt, die zur Strecke \overline{MS} parallele Gerade p ist gepunktet gezeigt.

Mithilfe einer räumlichen Interpretation kann die Konstruktion nachvollzogen werden:

Erläuterung zur Konstruktion. Zunächst ist der Punkt M als Spitze eines geraden Kegels K und der Punkt C_1 als der Hauptpunkt zu verstehen, wobei der Augpunkt C im Scheitel der räumlichen Hyperbel liegt. Dementsprechend ist der Punkt M der umgelegte Augpunkt, also $M = (C)$. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der Kreis \mathcal{R} mit dem Mittelpunkt M durch den Punkt C_1 als Parallelprojektion des Schnittkreises des Kegels K mit der Verschwindungsebene verstehen. Der Punkt R sei der Verschwindungspunkt der Schnittgeraden g . Demnach ist die Parallelprojektion dieses Punktes der Punkt R_1 . Nun betrachtet man die Ebene $F := MRS$, in welcher die Gerade R_1S vollständig liegt. Da die beiden Punkte M und S in der Tafel Ebene liegen, ist die Gerade MS die Spur dieser Ebene. Da der Punkt R zur Ebene F gehört und die Verschwindungsgerade einer Ebene stets parallel zur ihrer Spur verläuft, ist die zur Geraden MS parallele Gerade p durch den Punkt R die Parallelprojektion der Verschwindungsgeraden der Ebene F .

Somit erhält man leicht die Mantellinien, welche die Ebene F aus dem Kegel K ausschneidet: Sie müssen die Punkte P_1 und P_2 als Schnittpunkte der Geraden p sein – der Schnitt der Verschwindungsgerade der Ebene F mit dem Querschnittkreis des Kegels K in der Verschwindungsebene. Deshalb sind die beiden Geraden P_1M und P_2M die Parallelprojektionen der ausgeschnittenen Mantellinien, auf denen die

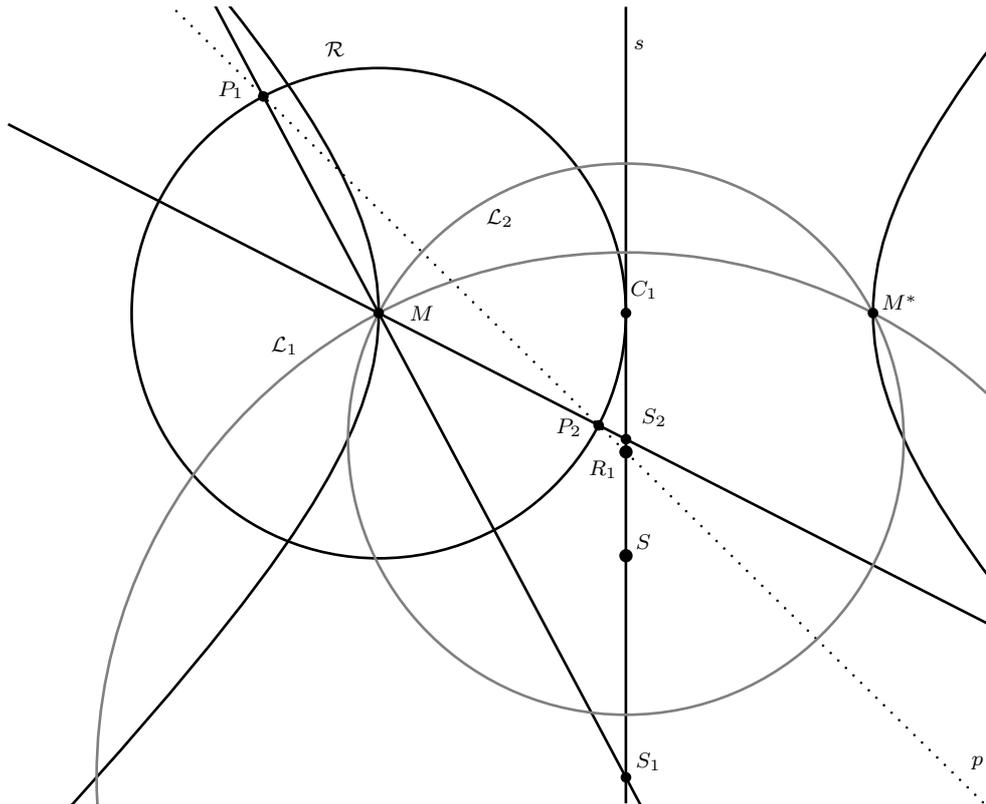


Abbildung 6.14.: Bildkreise der Schnittpunkte einer Ebene mit einer Hyperbel gemäß Konstruktion 6.19

Schnittpunkte der Gerade g mit dem Kegel K liegen. Da die Schnitthyperbel in einer zur Tafel senkrechten Ebene liegt und ihre Spur die Gerade s ist, müssen die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Geraden P_1M bzw. P_2M mit der Geraden s die gesuchten sein.

Wie bereits diskutiert wurde, bilden die Bildkreise einer gleichseitigen Hyperbel in oben beschriebener Lage ein elliptisches Kreisbüschel, dessen sämtliche Kreise durch die Punkte M und M^* verlaufen, weshalb die beiden Kreise \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 wirklich die gesuchten Bildkreise sind.

Betrachtet man nun die Konstruktion 6.19, so ergibt sich aus Satz 6.18 zusammen mit Satz 6.14 folgender bemerkenswerter Zusammenhang:

Satz 6.20. *Sind P und Q zwei Schnittpunkte einer Geraden g mit einer gleichseitigen Hyperbel, bei der ein Scheitelpunkt mit M bezeichnet sei, welche in der Schnittebene zweier gerader, parallelachsiger Doppelkreiskegel mit Spitzen in der Tafel Ebene, deren Öffnungswinkel 90° betragen und deren Achsen lotrecht zur Tafel Ebene sind,*

liegt, und ist S der Durchstoßpunkt der Geraden g , so ist der Kreis

$$\mathcal{K}(S, d(S, M))$$

mit Mittelpunkt S durch den Punkt M der Kreis, der den Schnittwinkel der beiden zyklografischen Bildkreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ halbiert. Man bezeichnet ihn als Halbierungskreis der Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$.

Beweis. Gemäß der Konstruktion 6.19 und nach Satz 6.18 halbiert die Gerade MS den Winkel $\angle(PMQ)$. Nun ist entsprechend des Satzes 6.14 dieser Winkel zugleich der Schnittwinkel der beiden Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$. Da die Gerade MS diesen Winkel halbiert, halbiert wieder nach Satz 6.14 der Kreis S auch den Schnittwinkel der beiden Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$. \square

Erinnert man sich an den Abschnitt 5.5, so wurde dort der Begriff des äußeren und inneren Potenzkreises definiert. Sind zwei sich in zwei Punkten schneidende Kreise unterschiedlicher Radien und Mittelpunkte gegeben, so sind die Kreise um ihre äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkte durch die Schnittpunkte der Kreise die sogenannten Potenzkreise. Betrachtet man die Situation oben aus der Konstruktion 6.19, so sind die Kreise \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 Bildkreise zweier Punkte P und Q einer Geraden mit dem Durchstoßpunkt S – welcher zugleich einer der Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise ist. Nimmt man für einen der Kreise den jeweils zur Tafel spiegelsymmetrischen Raumpunkt, z. B. den Punkt P^* , so lässt sich das andere Ähnlichkeitszentrum S^* als Schnittpunkt der Geraden P^*Q konstruieren. Es lassen sich dann die Kreise um die Ähnlichkeitspunkte S und S^* durch den Punkt M als Potenzkreise der beiden Kreise $Z(P)$ und $Z(Q)$ auffassen. Man erhält mithilfe von Satz 6.20 den folgenden Zusammenhang:

Satz 6.21. *Die Potenzkreise zweier sich schneidender Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unterschiedlicher Radien und Mittelpunkte sind die Halbierungskreise der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 . Die beiden Potenzkreise schneiden sich im rechten Winkel.*

Beweis. Die erste Aussage des Satzes ist mit den obigen Überlegungen klar. Die zweite folgt ebenfalls unmittelbar, denn wenn die beiden Potenzkreise die Schnittwinkel der beiden Kreise halbieren, müssen sie im rechten Winkel zueinander stehen. In der Abbildung 6.15 wird dies schematisch verdeutlicht: Dort sind die Tangenten im Schnittpunkt M an die gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in schwarz dargestellt, in grau die Tangenten an die Potenzkreise.

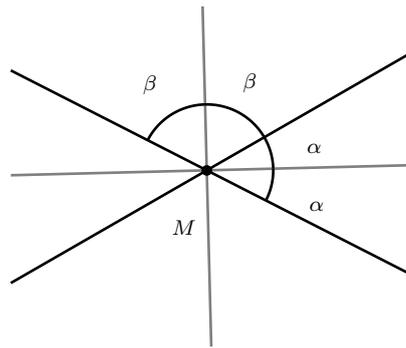


Abbildung 6.15.: Untersuchung der Schnittwinkel der Potenzkreise, Betrachtung ihrer Tangentenwinkel

Man sieht dann, dass die Äquivalenz

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \iff \alpha + \beta = 90^\circ$$

gilt; sich die Potenzkreise also wie behauptet rechtwinklig schneiden. \square

Nachdem oben Aussagen über Potenzkreise sich schneidender Kreise bewiesen wurden, soll nun eine interessante Eigenschaft des Ähnlichkeitskreises zweier sich schneidender (also auch nicht konzentrischer) Kreise unterschiedlicher Radien herausgearbeitet werden. Es sei daran erinnert, dass der Ähnlichkeitskreis der Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Zentrale der beiden gegebenen Kreise liegt und der durch die beiden Ähnlichkeitszentren jener Kreise verläuft.

Der Umfangswinkelsatz besagt, dass der Umfangswinkel über einer Sehne in einem Kreis auf der gleichen Seite der Sehne für jeden Punkt des Kreises gleich groß ist. Anschaulich heißt dies, dass die Sehne für jeden Punkt auf dem gleichen Kreisbogen über der Sehne unter Winkeln gleicher Größe gesehen wird. Jetzt wird eine ähnliche Aussage behandelt, die jedoch zwei Kreise betrifft:

Der Ähnlichkeitskreis von zwei Kreisen ist [...] der Ort der Punkte, von wo aus beide Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden [...]. [Fie82a, S. 64]

Diese Aussage muss präzisiert werden, denn es muss geklärt werden, was unter »gleichen Winkeln gesehen werden« im obigen Textauszug zu verstehen ist. Dazu wird der folgende Satz formuliert:

Satz 6.22. *Seien \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zwei nicht konzentrische Kreise unterschiedlicher Radien und \mathcal{A} sei ihr Ähnlichkeitskreis. Ist dann P ein Punkt des Ähnlichkeitskreises \mathcal{A} , dann schließt das Tangentenpaar an den Kreis \mathcal{K}_1 durch den Punkt P einen*

Winkel ein, der genauso groß wie der Winkel ist, den das Tangentenpaar an den Kreis \mathcal{K}_2 durch den Punkt P einschließt.

In der Abbildung 6.16 ist die Aussage des Satzes 6.22 dargestellt. Darüber hinaus wurden für die Beweisführung zusätzliche Strecken und Punkte ergänzt. So beschreiben die Punkte A_a und A_i den äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , die gestrichelten Strecken r_1 sowie r_2 sind Radien und die Punkte M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise. Die Punkte T_1, T_1', T_2 und T_2' sind die Berührungspunkte der Tangenten an die beiden gegebenen Kreise durch den Punkt P . Die gleichgroßen Winkel, den die Tangenten an die jeweiligen Kreise einschließen, sind mit α bezeichnet.

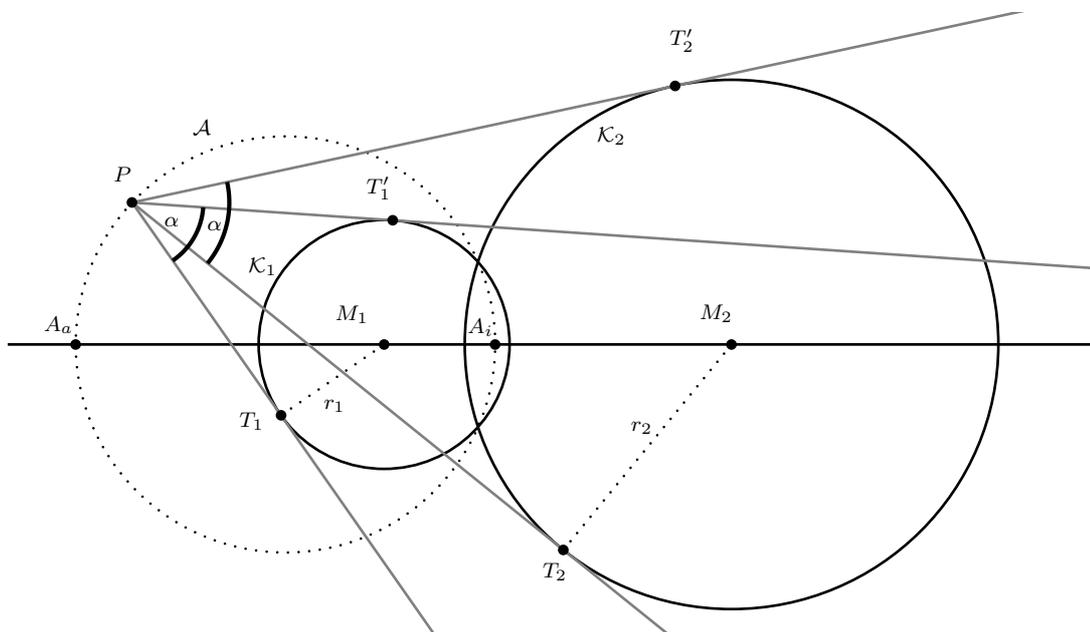


Abbildung 6.16.: Tangentenwinkel an zwei Kreise am Punkt P des Ähnlichkeitskreises

Beweis. Zunächst weiß man aus Satz 3.5, dass das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mit den beiden Teilverhältnissen

$$\frac{d(M_1, A_i)}{d(A_i, M_2)}$$

und

$$\frac{d(M_1, A_a)}{d(A_a, M_2)}$$

übereinstimmt, die Punkte M_1, M_2, A_i und A_a also eine harmonische Gruppe bilden.

Nun überlegt man sich, dass diese gleichen Verhältnisse mit dem Verhältnis aus dem Abstand der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zum Punkt P übereinstimmen. Dazu bedenke man, dass die Geraden PA_a und PA_i einen rechten Winkel im Punkt P einschließen (der Ähnlichkeitskreis ist als Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{A_iA_a}$ zu verstehen), dann liefert der Satz 3.6, dass die Gerade PA_i den Winkel $\beta := \angle(M_1PM_2)$, der im Punkt P durch die Geraden PM_1 und PM_2 gebildet wird, halbiert wird. Somit gilt für die Flächeninhalte $F_{M_1PA_i}$ und $F_{M_2PA_i}$ der Dreiecke $\triangle M_1PA_i$ und $\triangle M_2PA_i$ die Gleichung⁷⁰

$$\frac{2F_{M_1PA_i}}{2F_{M_2PA_i}} = \frac{d(P, M_1) \cdot d(P, A_i) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{d(P, M_2) \cdot d(P, A_i) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)} = \frac{d(P, M_1)}{d(P, M_2)}.$$

Gleichermaßen ist aber mit der Flächeninhaltsformel für Dreiecke

$$\frac{2F_{M_1PA_i}}{2F_{M_2PA_i}} = \frac{d(P, M_1M_2) \cdot d(M_1, A_i)}{d(P, M_1M_2) \cdot d(M_2, A_i)} = \frac{d(M_1, A_i)}{d(A_i, M_2)}.$$

Zusammengefasst gilt die Gleichungskette

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{d(M_1, A_i)}{d(A_i, M_2)} = \frac{d(M_1, A_a)}{d(A_a, M_2)} = \frac{d(P, M_1)}{d(P, M_2)}. \quad (6.5)$$

Da Tangenten an einen Kreis stets im rechten Winkel zum Berührradius im Berührungspunkt der Tangente stehen, ergibt sich zusammen mit der Gleichungskette (6.5), dass die Dreiecke $\triangle PT_1M_1$, $\triangle PT_2M_2$, $\triangle PT'_1M_1$ und $\triangle PT'_2M_2$ paarweise zueinander ähnlich sind, weshalb die Winkel α übereinstimmen. \square

Nun wird noch ein weitere Eigenschaft des Ähnlichkeitskreises angegeben, die Fiedler so umschreibt:

[...] [Die] Sehnen beider Kreise [das sind die gegebenen Kreise] [...], die in der Verbindungslinie der Berührungspunkte von einer Tangente des einen und einer Tangente des andern aus einem Punkte ihres Ähnlichkeitskreises liegen, sind von gleicher Länge. Man hat sie Wechselsehnen genannt. [Fie82a, S. 64]

Gemäß dieser Definition sind Wechselsehnen zu zwei gegebenen Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zwei Sehnen gleicher Länge in je einem der beiden Kreise, die auf derselben Sekante zu beiden Kreisen liegen. Die Aussage des obigen Zitates erklärt, wie diese Wechselsehnen mithilfe des Ähnlichkeitskreises konstruiert werden können. Das wird nun in einem Satz zusammengetragen:

⁷⁰Die Herleitung der Flächeninhaltsgleichungen ist gemäß der in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Vorgehensweise durchzuführen.

Satz 6.23. *Es seien \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zwei Kreise unterschiedlicher Radien und Mittelpunkte und \mathcal{A} sei ihr Ähnlichkeitskreis. Weiter sei T_1 einer der beiden Berührungspunkte einer Tangente an den Kreis \mathcal{K}_1 , T_2 ein Berührungspunkt einer Tangenten an den Kreis \mathcal{K}_2 , beide durch einen beliebigen Punkt P des Ähnlichkeitskreises \mathcal{A} . Sind die Punkte U_1 und U_2 die verbleibenden zwei Schnittpunkte der Sekante T_1T_2 mit den beiden Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , so gilt*

$$d(T_1, U_1) = d(T_2, U_2).$$

Die Sehnen sind also gleich lang.

In der Abbildung 6.17 ist die Situation des Satzes dargestellt. Die gleichlangen Sehnen sind in grau farblich abgesetzt. Es ist zu bemerken, dass auf die im Satz 6.23 beschriebene Weise jeweils vier Wechselsehnenpaare für jeden Punkt P des Ähnlichkeitskreises \mathcal{A} erzeugt werden können, da es an jeden Kreis je zwei Tangenten mit zwei verschiedenen Berührungspunkten gibt; in der Abbildung 6.17 ist eines dieser vier Wechselsehnenpaare dargestellt.

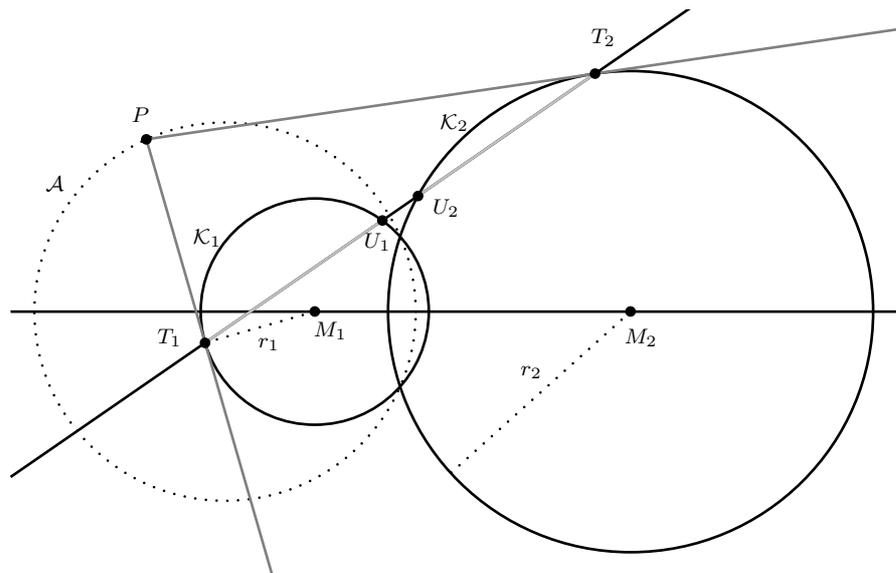


Abbildung 6.17.: Wechselsehnenpaar der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2

Beweis. Aus Satz 6.22 ist bekannt, dass die Winkelgleichheit

$$\angle(M_1PT_1) = \angle(M_2PT_2)$$

der durch die Geraden PM_1 und PT_1 sowie PM_2 und PT_2 im Scheitelpunkt P eingeschlossenen Winkel besteht. Also stimmen in den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle M_1PT_1$

und $\triangle M_2PT_2$ entsprechende Winkel überein, woraus ihre Ähnlichkeit folgt. Somit gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{d(P, T_1)}{d(P, T_2)}.$$

Nun sei F der Lotfußpunkt des Lotes zur Geraden T_1T_2 im Punkt P . Auf diese Weise entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke $\triangle T_1PF$ und $\triangle T_2PF$ mit rechten Winkeln im Punkt F .

Es seien mit H_1 und H_2 die Mittelpunkte der Sehnen T_1U_1 und T_2U_2 bezeichnet. Nun benutzt man die Tatsache, dass die Mittelsenkrechte jeder Sehne eines Kreises durch den Kreismittelpunkt verläuft. Damit entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle T_1H_1M_1$ und $\triangle T_2H_2M_2$ und es gilt

$$\frac{d(T_1, H_1)}{r_1} = \sin(\sphericalangle(T_1M_1H_1))$$

und

$$\frac{d(T_2, H_2)}{r_2} = \sin(\sphericalangle(T_2M_2H_2)),$$

wobei $\sphericalangle(T_1M_1H_1)$ den durch die Geraden M_1H_1 und M_1T_1 im Scheitelpunkt M_1 und $\sphericalangle(T_2M_2H_2)$ den durch die Geraden M_2H_2 und M_2T_2 im Punkt M_2 eingeschlossenen Winkel beschreibt. Außerdem lassen sich die zwei Gleichungen

$$\frac{d(P, F)}{d(P, T_1)} = \sin(\sphericalangle(FT_1P))$$

und

$$\frac{d(P, F)}{d(P, T_2)} = \sin(\sphericalangle(FT_2P))$$

mit dem durch die Geraden FT_1 und T_1P im Scheitelpunkt T_1 sowie FT_2 und T_2P im Scheitelpunkt T_2 eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle(FT_1P)$ und $\sphericalangle(FT_2P)$ angeben. Der Sehnentangentenwinkelsatz (s. Abbildung 2.4 in [Aum15, S. 17]) garantiert die Gleichheiten

$$\sphericalangle(FT_1P) = \sphericalangle(T_1M_1H_1) \text{ sowie } \sphericalangle(FT_2P) = \sphericalangle(T_2M_2H_2).$$

Jetzt setzt man alle Gleichungen zusammen und erhält die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \frac{d(T_1, H_1)}{r_1} : \frac{d(T_2, H_2)}{r_2} &= \frac{\sin(\angle(T_1 M_1 H_1))}{\sin(\angle(T_2 M_2 H_2))} \\ &= \frac{\sin(\angle(FT_1 P))}{\sin(\angle(FT_2 P))} \\ &= \frac{d(P, F)}{d(P, T_1)} : \frac{d(P, F)}{d(P, T_2)} \\ &= \frac{d(P, T_2)}{d(P, T_1)} \\ &= \frac{r_2}{r_1}, \end{aligned}$$

woraus die Äquivalenzen

$$\frac{d(T_1, H_1)}{d(T_2, H_2)} = 1 \iff d(T_1, H_1) = d(T_2, H_2)$$

bzw.

$$2d(T_1, H_1) = 2d(T_2, H_2) \iff d(T_1, U_1) = d(T_2, U_2)$$

folgen und sich die Aussage des Satzes ergibt. □

Fiedler erklärt abschließend, dass

[...] die Tangenten von T_1 und T_2 an den jedesmaligen andern Kreis [...] gleich lang [sind.] [Fie82a, S. 64]

Diese Aussage wird mit den Bezeichnungen aus Satz 6.23 festgehalten im folgenden

Korollar 6.24. *Bezeichnet B_1 den Berührungspunkt einer Tangenten an den Kreis \mathcal{K}_2 durch den Punkt T_1 und B_2 den Berührungspunkt einer Tangenten an den Kreis \mathcal{K}_1 durch den Punkt T_2 (T_1, T_2 wie oben), so gilt die Gleichheit*

$$d(T_1, B_1) = d(T_2, B_2)$$

der Tangentenabschnitte.

Beweis. Zunächst besteht aufgrund des Satzes 6.23 die Gleichheit der beiden Längen

$$a := d(T_1, U_1) = d(T_2, U_2),$$

welche mit a bezeichnet werden. Dann gilt für die Abstände der Punkte T_1 und T_2 die Gleichung

$$d(T_1, T_2) = d(T_1, U_1) + d(U_1, U_2) + d(U_2, T_2).$$

Daraus folgen sofort die Gleichungen

$$d(T_1, U_2) = d(T_1, U_1) + d(U_1, U_2) = a + d(U_1, U_2)$$

sowie

$$d(T_2, U_1) = d(U_1, U_2) + d(U_2, T_2) = a + d(U_1, U_2),$$

also die Gleichung $d(T_1, U_2) = d(T_2, U_1) =: b$. Es gilt wegen des Tangentensatzes

$$d^2(T_1, B_1) = d(T_1, T_2) \cdot d(T_1, U_2) = d(T_1, T_2) \cdot b,$$

$$d^2(T_2, B_2) = d(T_1, T_2) \cdot d(T_2, U_1) = d(T_1, T_2) \cdot b,$$

woraus $d(T_1, B_1) = d(T_2, B_2)$ wie behauptet folgt. □

6.5. Erweiterung des Begriffes des Potenzkreises und die Behandlung der Kreisinverson

Durch Fiedlers *Cyklografie* motiviert wurden die Potenzkreise im Abschnitt 5.5 dieser Arbeit mit der Einschränkung eingeführt, dass sie nur dann bestimmt werden können, wenn zwei sich schneidende Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unterschiedlicher Radien und Mittelpunkte gegeben sind. Die Potenzkreise sind dann diejenigen Kreise um die Ähnlichkeitszentren der zwei gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 durch die Schnittpunkte dieser beiden Kreise.

Überträgt man diesen Sachverhalt auf das Konzept der Kreisbüschel, so lässt sich auch sagen, dass die Potenzkreise diejenigen Kreise um die Ähnlichkeitszentren der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 des durch die beiden gegebenen Kreise bestimmten Kreisbüschels sind. Dies ist korrekt aufgrund der Tatsache, dass sich die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in zwei Punkten S_1 und S_2 schneiden, ihre Potenzgerade also die Gerade S_1S_2 ist. Somit definieren die beiden Kreise ein elliptisches Kreisbüschel mit den beiden Grundpunkten S_1 und S_2 . Da die Potenzkreise definitionsgemäß durch die Punkte S_1 und S_2 verlaufen und ihre Mittelpunkte auf der Zentralen der gegebenen Kreise liegen, sind sie ebenfalls Kreise des durch die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 bestimmten Kreisbüschels. Die-

ser Sachverhalt motiviert die Idee, das Konzept des Potenzkreises auf zwei Kreise unterschiedlicher Mittelpunkte und Radien zu erweitern, welche nicht zwingend zwei Schnittpunkte besitzen:

Es seien dafür zwei Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unterschiedlicher Mittelpunkte und Radien mit ihren äußeren und inneren Ähnlichkeitszentren A_a und A_i gegeben. Die beiden Kreise legen eindeutig ein Kreisbüschel K fest, da die Potenzgerade zweier Kreise eindeutig ist (s. Satz 5.11). Wie oben wiederholt wurde, bilden die Kreise

$$\mathcal{K}_{P_a}(A_a, d(A_a, S_1))$$

mit dem Mittelpunkt A_a durch den Punkt S_1 und

$$\mathcal{K}_{P_i}(A_i, d(A_i, S_1))$$

mit dem Mittelpunkt A_i durch den Punkt S_1 den äußeren und inneren Potenzkreis zu den beiden gegebenen Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , sofern sich die gegebenen Kreise in den zwei Punkten S_1 und S_2 schneiden (s. Konstruktion 5.23). Ab sofort sollen Potenzkreise diejenigen Kreise zu zwei gegebenen Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 sein, welche ihre Mittelpunkte in den Ähnlichkeitszentren der beiden Kreise besitzen und zu dem Kreisbüschel gehören, welches die gegebenen Kreise definieren. Gemäß dieser Festlegung ist bei der Bestimmung der Potenzkreise zu zwei Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unterschiedlicher Radien und Mittelpunkte, die sich nicht schneiden, wie folgt vorzugehen: Man bestimme gemäß Konstruktion 3.4 das äußere und innere Ähnlichkeitszentrum A_a und A_i der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 sowie der Zentralen $z = M_1M_2$. Man ermittle anschließend mithilfe von Konstruktion 5.15 die Potenzgerade p der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 und bezeichne ihren Schnittpunkt mit der Zentralen z mit C . Nun betrachte man die Schnittpunkte A und B des Kreises \mathcal{K}_1 mit der Zentralen z , dann ist die Potenz des Punktes C in Bezug auf die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 gegeben durch

$$p_{\mathcal{K}_1}(C) = p_{\mathcal{K}_2}(C) = d(C, A) \cdot d(C, B).$$

Der innere Potenzkreis ist dann festgelegt als

$$\mathcal{K}_{P_i}\left(A_i, \sqrt{d^2(C, A_i) - p_{\mathcal{K}_1}(C)}\right)$$

und der äußere als

$$\mathcal{K}_{P_a} \left(A_a, \sqrt{d^2(C, A_a) - p_{\mathcal{K}_1}(C)} \right).$$

Es ist anzumerken, dass die beiden Kreise nicht unbedingt existieren müssen. Liegt beispielsweise einer der Punkte A_a oder A_i innerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt C , welcher durch die Grenzpunkte des durch die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 bestimmten Kreisbüschels verläuft, so existiert der entsprechende Potenzkreis nicht. Darüber hinaus lässt sich die Konstruktion nicht direkt mit Zirkel und Lineal durchführen, da die Radien der Potenzkreise nicht unmittelbar zu konstruieren sind. Man wird gleich erfahren, wie dieser Umstand zu beheben ist. Den Kreis über die Grenzpunkte findet man leicht, indem man berücksichtigt, dass diese Punkte als Büschelkreise mit dem Radius $r = 0$ interpretiert werden können. Dann besitzen die Grenzpunkte G_1 und G_2 die Abstände

$$r = 0 = \sqrt{d^2(G_1, C) - p_{\mathcal{K}_1}(C)} \iff d(G_1, C) = \sqrt{p_{\mathcal{K}_1}(C)}$$

bzw. analog

$$d(G_2, C) = \sqrt{p_{\mathcal{K}_1}(C)}$$

vom Mittelpunkt C . Dies sind Äquivalenzen, da die beteiligten Größen positiv sind. Ist also beispielsweise der Ähnlichkeitspunkt A_i im Inneren des Kreises $\mathcal{K}(C, d(C, G_1))$, dann ist

$$d(A_i, C) < d(G_1, C) \iff d^2(A_i, C) < d^2(G_1, C) = p_{\mathcal{K}_1}(C).$$

Das liefert mit Subtraktion von $p_{\mathcal{K}_1}(C)$ die folgende Ungleichung

$$d^2(A_i, C) - p_{\mathcal{K}_1}(C) < d^2(G_1, C) - p_{\mathcal{K}_1}(C) = 0,$$

weshalb der innere Potenzkreis nicht existent ist, da die Wurzel, welche seinen Radius bestimmt, in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert ist. Alternativ könnte man jedoch sagen, dass ein imaginärer innerer Potenzkreis existiert. In der Abbildung 6.18 ist diese Situation dargestellt, man erkennt den äußeren Potenzkreis \mathcal{K}_{P_a} der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , der gestrichelt dargestellt ist.

Die Potenzkreise zu bestimmen, wenn sich die gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in einem Punkt S berühren, ist trivial. Hier sind für inneren und äußeren Potenzkreis diejenigen Kreise um das innere und äußere Ähnlichkeitszentrum der Kreise \mathcal{K}_1 und

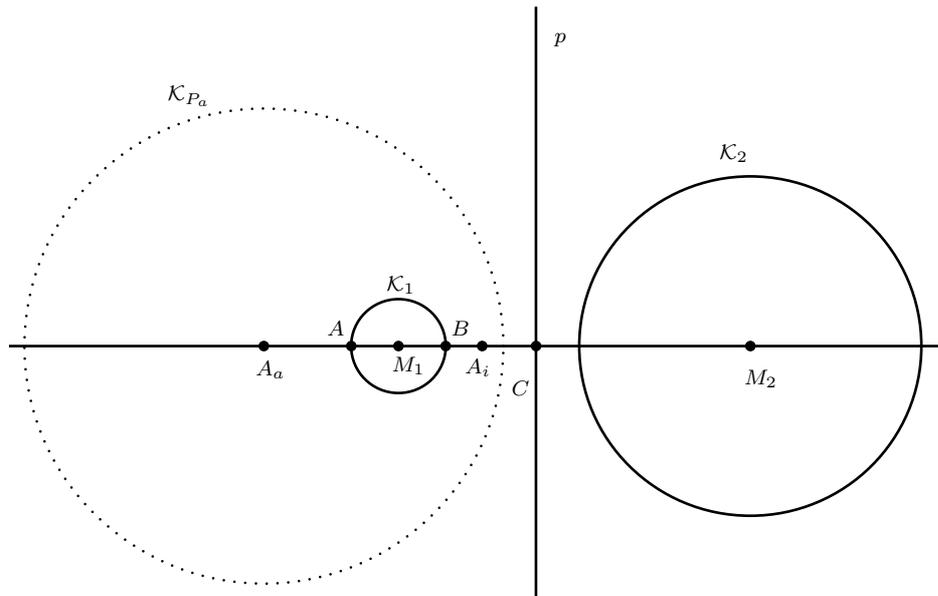


Abbildung 6.18.: Der äußere Potenzkreis zweier Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , welche keine Schnittpunkte besitzen; der innere Potenzkreis existiert nicht

\mathcal{K}_2 zu wählen, welche durch den Punkt S verlaufen. Auf diese Weise erhält man vier Kreise, die zu einem parabolischen Kreisbüschel gehören.⁷¹

Nun kann man verdeutlichen, weshalb sich die Bezeichnung Potenzkreis für die um die Ähnlichkeitszentren beschriebenen Kreise des durch die gegebenen Kreise definierten Kreisbüschels legitimiert. Hat man zwei Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unterschiedlicher Mittelpunkte und Radien gegeben, dann sei A_a der äußere Ähnlichkeitspunkt dieser beiden Kreise. Schneiden sich die beiden Kreise nicht, so hat man gesehen, dass der äußere Potenzkreis (sofern existent) durch

$$\mathcal{K}_{Pa} \left(A_a, \sqrt{d^2(C, A_a) - p_{\mathcal{K}_1}(C)} \right)$$

gegeben ist, wenn der Punkt C den Schnittpunkt der Potenzgerade mit der Zentrale der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 beschreibt. Nun verbindet man das Konzept der gemeinschaftlichen Potenz $p_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(A_a)$ der beiden Kreise mit dem Potenzkreis durch folgenden

⁷¹Es ist anzumerken, dass im Lehrwerk [HHL16, S. 93f.] ebenfalls der Potenzkreis eingeführt wird. Hier ist er nur für den Fall zweier sich nicht schneidender und nicht ineinanderliegender Kreise definiert. Er wird dort als derjenige eindeutige Kreis zu zwei Kreisen beschrieben, der alle Berührungskreise der beiden gegebenen rechtwinklig schneidet. Man kann einsehen, dass in diesem Fall dies auf den gleichen Potenzkreisbegriff führt.

Satz 6.25. *Mit obigen Bezeichnungen hat man den folgenden Zusammenhang:*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{P_a} \left(A_a, \sqrt{d^2(C, A_a) - p_{\mathcal{K}_1}(C)} \right) &= \mathcal{K}_{P_a} \left(A_a, \sqrt{d^2(C, A_a) - p_{\mathcal{K}_2}(C)} \right) \\ &= \mathcal{K}_{P_a} \left(A_a, \sqrt{p_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(A_a)} \right). \end{aligned}$$

Die Wurzel der gemeinschaftlichen Potenz der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 ist also der Radius des (äußeren) Potenzkreises.

Beweis. Die erste Gleichung ist klar, da C ein Punkt der Potenzgeraden der beiden gegebenen Kreise ist, weshalb

$$p_{\mathcal{K}_1}(C) = p_{\mathcal{K}_2}(C)$$

gilt. Nun zur zweiten Gleichung: Der Nachweis wird unter Anwendung der Koordinatengeometrie durchgeführt. Dazu sei der Kreis \mathcal{K}_1 mit Radius r_1 und Mittelpunkt Punkt $M_1 = (r_1, 0)$ gegeben und der Kreis \mathcal{K}_2 mit Radius r_2 besitze seinen Mittelpunkt im Punkt $M_2 = (x_2, 0)$, wobei $x_2 > 0$ angenommen wird. Mithilfe zweier paralleler Radien, die lotrecht auf der x -Achse durch die Mittelpunkte der Kreise verlaufen, kann man den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_a der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 berechnen und erhält

$$A_a = \left(r_1 \left(1 - \frac{r_1 - x_2}{r_1 - r_2} \right), 0 \right).$$

Mithilfe der x -Koordinate des Ähnlichkeitspunktes, welche mit x_{A_a} bezeichnet wird, kann man die gemeinschaftliche Potenz $p_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(A_a)$ des Punktes A_a in Bezug auf die beiden Kreise berechnen. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(A_a) &= (x_{A_a} - 2r_1)(x_{A_a} - x_2 + r_2) \\ &= \frac{r_2(r_1(-r_2 - x_2) + 2r_1^2)(r_2 - x_2)}{(r_1 - r_2)^2}. \end{aligned}$$

Nun nutzt man das Resultat aus dem Beweis des Satzes 7.3 und erhält

$$x = \frac{x_2^2 - r_2^2}{2(x_2 - r_1)}$$

als Gleichung der Potenzgeraden der beiden Kreise und damit die x -Koordinate x_C des Punktes C . Damit lässt sich die Potenz des Punktes C in Bezug auf den Kreis

\mathcal{K}_1 (bzw. \mathcal{K}_2) durch

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{K}_1}(C) &= x_C(x_C - 2r_1) \\ &= \frac{(2r_1 - r_2 - x_2)(2r_1 + r_2 - x_2)(x_2 - r_2)(r_2 + x_2)}{4(r_1 - x_2)^2} \end{aligned}$$

berechnen. Nun wird abschließend der Term $d^2(C, A_a) - p_{\mathcal{K}_1}(C)$ bestimmt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &d^2(C, A_a) - p_{\mathcal{K}_1}(C) \\ &= \left(r_1 \left(1 - \frac{r_1 - x_2}{r_1 - r_2} \right) - \frac{x_2^2 - r_2^2}{2(x_2 - r_1)} \right)^2 - \left(\frac{x_2^2 - r_2^2}{2(x_2 - r_1)} - 2r_1 \right) \cdot \frac{x_2^2 - r_2^2}{2(x_2 - r_1)} \\ &= \left(\frac{-(r_1 + r_2)(2r_1 - r_2 - x_2)(r_2 - x_2)}{2(r_1 - r_2)(r_1 - x_2)} \right)^2 \\ &\quad - \frac{(2r_1 - r_2 - x_2)(2r_1 + r_2 - x_2)(x_2 - r_2)(r_2 + x_2)}{4(r_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{r_1 r_2 (2r_1 - r_2 - x_2)(r_2 - x_2)}{(r_1 - r_2)^2}. \end{aligned}$$

Jetzt zeigt sich abschließend⁷², dass

$$\begin{aligned} &= d^2(C, A_a) - p_{\mathcal{K}_1}(C) - p_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(A_a) \\ &= \frac{(2r_1 - r_2 - x_2)(2r_1 + r_2 - x_2)(x_2 - r_2)(r_2 + x_2)}{4(r_1 - x_2)^2} - \frac{r_1 r_2 (2r_1 - r_2 - x_2)(r_2 - x_2)}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also die Behauptung gilt. □

Dies eröffnet die Möglichkeit der Konstruktion des Potenzkreises mit Zirkel und Lineal, denn die gemeinschaftliche Potenz kann als Produkt zweier Streckenabschnitte dargestellt werden. Es lässt sich dann durch Anwendung des Höhensatzes der Radius des Potenzkreises konstruieren. Es sei angemerkt, dass man den Begriff des Potenzkreises auch in den Werken Steiners findet. Jedoch definiert er Potenzkreise nicht ausgehend vom Kreisbüschelkonzept, sondern schreibt:

Diese beiden [...] um die Aehlichkeitspunkte [...] beschriebenen Kreise [...] [,] deren Radien in's Quadrat erhoben gleich sind den gemeinschaftlichen Potenzen der gegebenen Kreise [...] in Bezug auf [...] [die Ähnlichkeitspunkte], sollen 'Potenzkreise der beiden gegebenen Kreise [...]' heißen. [Ste26, S. 175]

⁷²Die Berechnungen wurden mithilfe eines Computer-Algebra-Systems durchgeführt.

Der Satz 6.25 bestätigt, dass es sich bei beiden Potenzkreisdefinitionen um die gleichen handelt (zumindest für den hier betrachteten Fall), obwohl Fiedlers und Steiners Herangehensweisen bei der Definition grundlegend verschieden sind.

Im Abschnitt 5.1 dieser Arbeit wurde der Begriff der Kreisinverson eingeführt und man hat erfahren, dass sich dieses Konzept dazu eignet, geometrische Fragestellungen in andere umzuwandeln. Fiedler gibt einen interessanten Zusammenhang von Potenzkreisen zu der Kreisinverson an, der für ihn die Kreisspiegelung motiviert. So beschreibt er Folgendes:

Wenn sich die gegebenen Kreise in reellen Punkten schneiden, und $AA_1B_1A_2B_2$ ein Strahl aus dem äusseren Ähnlichkeitspunkte A [...] ist, so hat man für

$$AA_1 \cdot AB_2 = AB_1 \cdot AA_2 = \overline{AC}^2,$$

weil positiv, in der Länge AC den Radius des äusseren Potenzkreises und bezeichnet die Abhängigkeit der Punkte A_1 und B_2 und wieder B_1 und A_2 von einander als Abbildung durch reciproke Radien in Bezug auf den äusseren Potenzkreis als Distanzkreis. [Fie82a, S. 79]

Der erste Teil dieser Aussage ist wegen Satz 6.25 korrekt. Der zweite Teil besagt, dass der Potenzkreis als Inversionskreis für bestimmte Punkte dient, die auf einem Strahl liegen. Die Abbildung 6.19 visualisiert die Aussage Fiedlers, wobei hier zwei Kreise gewählt wurden, die sich nicht schneiden, für welche die Aussage des Zitates ebenfalls richtig bleibt; der Potenzkreis ist in grau gezeigt.

Es wird jetzt gezeigt, dass das Konzept der Inversion, wie es in dieser Arbeit eingeführt wurde, mit der Idee Fiedlers übereinstimmt. Um diesen Nachweis einfach und übersichtlich zu halten sowie die Idee zu verdeutlichen, ist nur der Fall sich nicht schneidender Kreise dargestellt. Dazu der folgende

Satz 6.26. *Es seien \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zwei sich nicht schneidende Kreise unterschiedlicher Radien, welche nicht ineinander liegen und unterschiedliche Mittelpunkte besitzen, der Punkt A_a sei ihr äusseres Ähnlichkeitszentrum. Sei nun g ein Strahl aus dem Punkt A_a , der die beiden Kreise in den Punkten A_1, A_2, B_1 und B_2 schneidet (s. Abbildung 6.19), so sind die Punkte A_1 und B_2 sowie A_2 und B_1 zueinander inverse Punkte bezüglich des Potenzkreises zu den Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 .*

Beweis. Man betrachte den Punkt A_1 auf dem Kreis \mathcal{K}_1 , dann ist zu zeigen, dass dieser auf den Punkt B_2 auf dem Kreis \mathcal{K}_2 abgebildet wird. Da die Inversion am Potenzkreis \mathcal{K}_P durchgeführt wird, ist sein Radius gemäß Satz 6.25 gegeben durch

$$r := \sqrt{d(A_a, A_1) \cdot d(A_a, B_2)}.$$

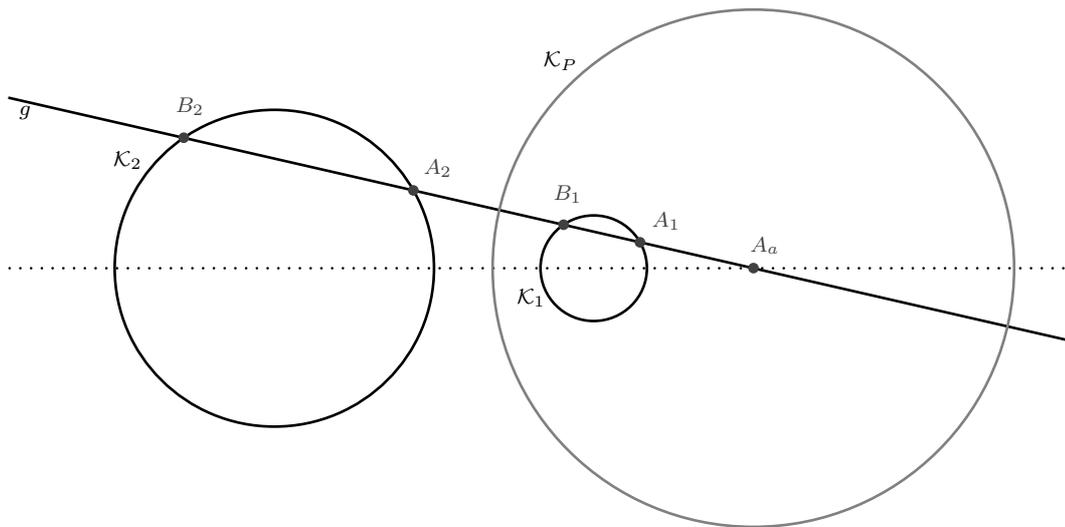


Abbildung 6.19.: Die zueinander inversen Punkte A_1 und B_2 sowie A_2 und B_1 in Bezug den Potenzkreis \mathcal{K}_P

Somit ist die Gleichung, mit deren Hilfe die Inversion am Kreis definiert wurde, aus Abschnitt 5.1 erfüllt, also

$$d(A_a, A_1) \cdot d(A_a, B_2) = \sqrt{d(A_a, A_1) \cdot d(A_a, B_2)}^2 = r^2.$$

Offenbar sind die Punkte A_1 und B_2 bezüglich des Potenzkreises aufgrund obiger Rechnung und ihrer Lage auf dem Strahl aus dem Punkt A_a invers zueinander. Für die verbleibenden zwei Punkte rechnet man analog. \square

Mit dem soeben bewiesenen Sachverhalt erhält man ebenfalls die Aussage des Satzes 5.3, in dem festgestellt wurde, dass Kreise, die nicht durch den Mittelpunkt des Inversionskreises verlaufen, wieder auf Kreise abgebildet werden. In diesem Falle werden die Punkte des Kreises \mathcal{K}_1 durch Inversion am Potenzkreis auf den Kreis \mathcal{K}_2 abgebildet.

6.6. Konjugierte Kreisbüschel

Am Anfang dieses Kapitels hat man das Konzept des Kreisbüschels als Familie von Kreisen kennengelernt. Insbesondere wurden die entsprechenden räumlichen Kurven untersucht, die das parabolische Kreisbüschel – also jenes, dessen sämtliche Kreise ihre Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Zentralen haben und allesamt durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen – und das elliptische Kreisbüschel – also jenes mit

zwei Grundpunkten, durch welche alle Kreise des Kreisbüschels verlaufen – als zyklografische Bilder haben. Betrachtet man eine Raumgerade, die die Tafel Ebene in einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ schneidet, oder eine gleichseitige Hyperbel, welche als Schnittkurve zweier gerader parallelachsiger Doppelkreisegel mit Spitzen in der Tafel Ebene, deren Öffnungswinkel 90° betragen und Achsen lotrecht zur Tafel sind, gegeben ist, und bildet diese zyklografisch ab, so werden die entsprechenden Kreisbüschel erhalten.

Jetzt werden Schnittprobleme diskutiert: Gesucht ist für jedes der beiden bereits eingeführten Kreisbüschel ein Kreisbüschel, sodass alle Kreise des einen Kreisbüschels alle Kreise des anderen Kreisbüschels orthogonal schneiden. Zwei solche Büschel sollen zueinander *konjugiert* heißen. Es wird nun damit begonnen, das zum elliptischen Kreisbüschel konjugierte Kreisbüschel zu konstruieren, welches als hyperbolisches Kreisbüschel bezeichnet wird. Fiedler beschreibt die Definition wie folgt:

Offenbar kann dieselbe gleichseitige Hyperbel [die Hyperbel, die als Schnitt zweier gerader parallelachsiger Doppelkreisegel in oben beschriebener Lage erhalten wird] auch angesehen werden als eine Umlegung aus der durch ihre Hauptaxe gehenden Normalebene zur Tafel (Fig. 36, Tafel V); wir wollen diese Umlegung oder Aufrichtung speciell als die konjugierte der vorigen bezeichnen, [...]. [Fie82a, S. 67]

Diese Festlegung des konjugierten Kreisbüschels ist nicht direkt einsichtig; es ergeben sich zwei Verständnisprobleme:

- der Begriff *Aufrichtung*⁷³ ist unklar,
- eine vollständige Umlegung der Hyperbelkurve durch die zur Tafel lotrechten Ebene durch die Hauptachse der Hyperbel ist nicht möglich, da diese Ebene die Hyperbel nur in zwei Punkten schneidet.

Der erste Punkt gibt jedoch im Kontext der später entwickelten Theorie einen Hinweis darauf, wie die Hyperbelkurve im Sinne Fiedlers konjugiert werden kann. Man geht wie folgt vor:

1. Man bildet die Schnittkurve zweier gerader, parallelachsiger Doppelkreisegel mit einem Öffnungswinkel von 90° mit Spitzen in der Tafel Ebene und zur Tafel orthogonalen Achsen, welche eine gleichseitige Hyperbel ist und in einer Ebene E liegt, deren Schnittgerade mit der Tafel Ebene die Nebenachse der Hyperbel darstellt.

⁷³Fiedler bezeichnet die Aufrichtung als das Herausdrehen geometrischer Objekte aus der Tafel Ebene in den Raum in seiner Dissertation als »Zurückschlagen« (vgl. z. B. [Fie60, S. 17]).

2. Man legt die Hyperbelkurve um die Nebenachse mit der Ebene E in die Tafel ebene um.
3. Man bestimmt die Hauptachse in der Tafel ebene, welche senkrecht zur Nebenachse der umgelegten Hyperbel steht und durch ihre Scheitel verläuft.
4. Man dreht die Tafel ebene aus sich mitsamt der Hyperbel um die Hauptachse heraus, bis sie senkrecht zur Tafel ebene steht.

Die Hyperbel hat nach Durchführung der obigen Schritte zwei Drehungen durchlaufen. Man betrachte das zycklografische Bild der in Fiedlers Sinne konjugierten gleichseitigen Hyperbel, welches in der Abbildung 6.20 dargestellt ist. Darin sind exemplarisch zehn Büschelkreise gezeigt und das Kreisbüschel heißt *hyperbolisches Kreisbüschel*; gestrichelt ist die konjugierte Hyperbel und in grau ihre beiden Achsen gezeigt.

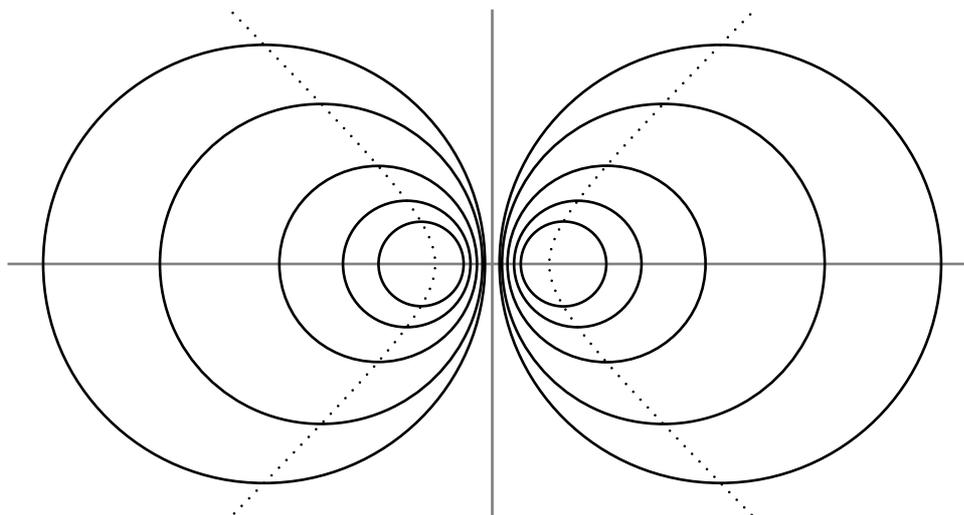


Abbildung 6.20.: Darstellung von Kreisen eines hyperbolischen Kreisbüschels sowie der gleichseitigen Hyperbel, durch welches es gegeben ist

Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 der gleichseitigen Hyperbel als Raumkurve mit der Tafel bzw. die Schnittpunkte der Hyperbel in der Tafel ebene als Umlegung um die Hauptachse werden *Grenzpunkte des hyperbolischen Kreisbüschels* genannt.

Wie bereits erklärt, bezeichnet man als Scheitelkreis einer Hyperbel den Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse der Hyperbel liegt und der durch ihre beiden Scheitelpunkte verläuft. Im Kontext des Buschelkreiskonzeptes ist er als der Kreis zu verstehen, dessen Mittelpunkt auf der gemeinsamen Zentrale aller Büschelkreise liegt und der durch die beiden Grenzpunkte verläuft. Es wird mit einer ersten wichtigen Erkenntnis begonnen:

Satz 6.27. *Alle Büschelkreise eines hyperbolischen Kreisbüschels schneiden den Scheitelkreis rechtwinklig.*

Beweis. Ein hyperbolisches Kreisbüschel wird als zyklografisches Bild einer konjugierten gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} mit der Gleichung $x^2 - y^2 = r^2$ in der oben beschriebenen Lage (ihre Umlegung ist in Abbildung 6.20 gestrichelt erkennbar) erzeugt. Man betrachte dazu die Abbildung 6.21, in der die Umlegung der Hyperbel gestrichelt dargestellt ist. Auf ihr wurde ein beliebiger Punkt (P) gewählt sowie der zyklografische Bildkreis $Z(P)$ des zugehörigen Raumpunktes P eingezeichnet. Der gezeigte Kreis mit dem Mittelpunkt C , der zugleich der Mittelpunkt der Hyperbel ist, durch die Scheitel- bzw. Grenzpunkte S_1 und S_2 ist der Scheitelkreis mit dem Radius r der Hyperbel bzw. des hyperbolischen Kreisbüschels. Der Punkt P_1 kennzeichnet den Lotfußpunkt des Lotes zur Hauptachse der gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} durch den Punkt P .

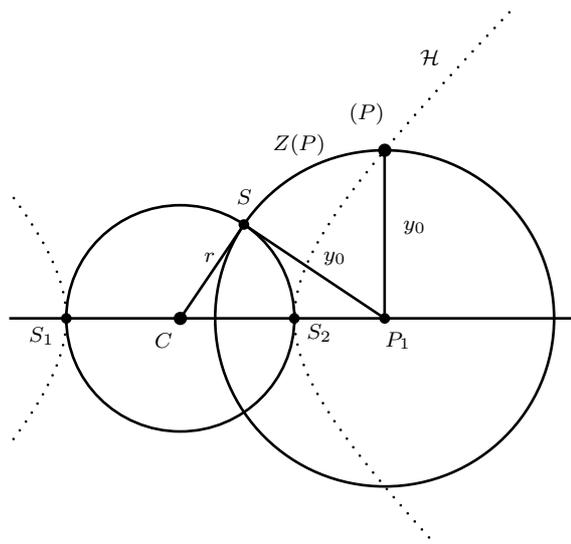


Abbildung 6.21.: Skizze zum Beweis von Satz 6.27

Wenn $d(C, P_1) = x_0$, so gilt für den von den Punkten S_1 und S_2 verschiedenen Punkt $(P) = (x_0, y_0)$ die Gleichung der Hyperbel, also $x_0^2 - y_0^2 = r^2$, wobei $r = d(C, S_1) = d(C, S_2)$. Es ergibt sich sofort mit der Äquivalenz

$$x_0^2 - y_0^2 = r^2 \iff x_0^2 = d^2(C, P_1) = y_0^2 + r^2$$

zusammen mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras die Rechtwinkligkeit des Dreiecks $\triangle CP_1S$, wobei S den Schnittpunkt des Scheitelkreises und des Bildkreises $Z(P)$ beschreibt, und somit die Behauptung des Satzes. \square

Fiedler fasst den soeben bewiesenen Zusammenhang wie folgt zusammen:

Unser Büschel der Bildkreise besteht also nun aus den sämtlichen Kreisen, welche aus den Punkten der Hauptaxe so beschrieben sind, dass sie den Scheitelkreis unter rechten Winkeln schneiden. [Fie82a, S. 68]

Die Aussage des Satzes 6.27 wird nun verallgemeinert: Im Abschnitt 6.2 wurden bei der Diskussion von Regelflächen der Kreiskegel und das einschalige Rotationshyperboloid erläutert. Eine vergleichbare Erkenntnis wie die, dass jeder Bildkreis eines Punktes auf der Kreiskegelfläche den Grundkreis dieses Kreiskegels, welcher in der Tafelebene liegt, berührt, erhält man nun unmittelbar aus Satz 6.27. Es gilt die Folgerung von

Korollar 6.28. *Es sei \mathfrak{H} ein einschaliges Rotationshyperboloid, welches durch Rotation der konjugierten gleichseitigen Hyperbel, die durch entsprechende Umlegung und Aufrichtung der Schnittkurve zweier gerader parallelachsiger Doppelkreisegel mit Spitze in der Tafelebene \mathcal{T} , Öffnungswinkeln von 90° und zur Tafel lotrechter Achsen erhalten wird, um die Nebenachse entsteht. Der zyklografische Bildkreis $Z(P)$ eines jeden Punktes $P \in \mathfrak{H} \setminus \mathcal{T}$, der auf dem Rotationshyperboloid \mathfrak{H} liegt, schneidet den Kehlkreis des Hyperboloides \mathfrak{H} rechtwinklig.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Satz 6.27. □

Es ist unmittelbar klar, dass eine vergleichbare Aussage für die nicht-konjugierte gleichseitige Hyperbel \mathcal{H} gilt. Aus der Hyperbel, die durch oben beschriebene Doppelkreisegel in oben erklärter Lage in der Tafelebene erhalten wird, entsteht durch Rotation um die Hauptachse das sogenannte *zweischalige Rotationshyperboloid*. Es folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sämtliche Bildkreise von Punkten $P \in \mathcal{H}$ der Hyperbel den in die Tafel umgelegten Scheitelkreis diametral (in den Scheiteln der Hyperbel bzw. in den Kegelspitzen) schneiden, das

Korollar 6.29. *Es sei ein zweischaliges Rotationshyperboloid, welches durch Rotation einer Hyperbel, die als Schnittkurve zweier Doppelkreisegel wie in Korollar 6.28 beschrieben und gelegen ist, bestimmt ist, gegeben. Der Bildkreis eines jeden Punktes dieses zweischaligen Rotationshyperboloides schneidet den in die Tafelebene umgelegten Scheitelkreis jener Hyperbel diametral.*

Beweis. Mit obigen Überlegungen ist die Aussage des Korollars unmittelbar nachvollziehbar. □

Da der Scheitelkreis ein Kreis des durch eine gleichseitige Hyperbel bestimmten elliptischen Kreisbüschels ist, lässt sich die Aussage des Satzes 6.27 sogar für jeden Kreis dieses Büschels allgemein formulieren. In Fiedlers *Cyklographie* liest man:

Die Abhängigkeit eines Büschels von dem zu ihm konjugierten wird am prägnantesten durch den Satz ausgedrückt, wonach jeder Kreis des einen von allen Kreisen den andern orthogonal geschnitten wird. [Fie82a, S. 71]

Es lässt sich präzise festhalten:

Satz 6.30. *Alle Kreise des elliptischen Kreisbüschels mit den Grundpunkten S_1 und S_2 schneiden alle Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels mit den Grenzpunkten S_1 und S_2 rechtwinklig, wenn sie durch die gleiche gleichseitige Hyperbel erzeugt werden.*

Beweis. Unterstützend zur Beweisführung kann die Abbildung 6.22 betrachtet werden. Das elliptische und das hyperbolische Kreisbüschel können jeweils als zyklografisches Bild einer gleichseitigen, im Raum befindlichen Hyperbel aufgefasst werden. Sei $\mathcal{H}: x^2 - y^2 = r^2$ die Hyperbel, welche als Umlegung in die Tafel erhalten wird – jeweils um die Hauptachse bzw. Nebenachse. Man wähle zwei beliebige verschiedene Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ auf der umgelegten Hyperbel \mathcal{H} in der Tafel. Interpretiert man den Raumpunkt P_2^r des Umlegungspunktes P_2 als Punkt der Raumhyperbel, die als Schnitt zweier gerader parallelachsiger Doppelkreiskegel mit Öffnungswinkeln von 90° und zur Tafel lotrechten Achsen erhalten wird, so ist der zyklografische Bildkreis gegeben durch

$$Z(P_2^r) = \mathcal{K}(M_2, r_2) = \mathcal{K}((0, y_2), x_2),$$

der Bildkreis des zum Punkt P gehörigen Raumpunktes P_1^r der konjugierten Raumhyperbel durch

$$Z(P_1^r) = \mathcal{K}(M_1, r_1) = \mathcal{K}((x_1, 0), y_1).$$

Hierbei beschreiben M_2 und M_1 die Orthogonalprojektionen der Punktes P_2 und P_1 auf die Tafelebene. Da die Haupt- und Nebenachse der in der Tafelebene befindlichen gleichseitigen Hyperbel, welche auch als Koordinatenachsen dienen, senkrecht zueinander sind, liefert der Satz des Pythagoras für die Abstände der Mittelpunkte der beiden zyklografischen Bildkreise $Z(P_1)$ und $Z(P_2)$ die Gleichung

$$d^2(M_1, M_2) = x_1^2 + y_2^2. \quad (6.6)$$

Wenn nun S einen Schnittpunkt dieser beiden Kreise bezeichnet, so gilt

$$d^2(M_1, S) + d^2(M_2, S) = y_1^2 + x_2^2. \quad (6.7)$$

Da die Punkte P_1 und P_2 auf der Hyperbel liegen, gelten für ihre Koordinaten die Gleichungen

$$x_1^2 - y_1^2 = r^2$$

und

$$x_2^2 - y_2^2 = r^2.$$

Bildet man von diesen beiden Gleichungen die Differenz oder setzt man sie gleich, so erhält man mit den Gleichungen (6.6) und (6.7) folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 + y_2^2 = 0 &\iff x_1^2 + y_2^2 = x_2^2 + y_1^2 \\ &\iff d^2(M_1, M_2) = d^2(M_1, S) + d^2(M_2, S). \end{aligned}$$

Eine Anwendung der Umkehrung des Satzes von Pythagoras liefert, dass die beiden Radien der Bildkreise $Z(P_1^r)$ und $Z(P_2^r)$ im Punkt S senkrecht zueinander stehen. Es gilt demnach die Behauptung des Satzes. \square

Eine leichte Folgerung aus Satz 6.30 ist die folgende, welche bei Fiedler in [Fie82a, S. 71] erörtert wird. Sie bildet bei ihm den Ausgangspunkt zur Definition des Potenzbegriffs eines Punktes in Bezug auf einen Kreis. In dieser Arbeit ist der Begriff bereits in Kapitel 5 unabhängig von der Kreisbüscheltheorie eingeführt worden.

Korollar 6.31. *Gegeben sei ein elliptisches Kreisbüschel, das zugehörige (konjugierte) hyperbolische Kreisbüschel sowie die entsprechende gleichseitige umgelegte Hyperbel \mathcal{H} . Es gelten die Aussagen:*

- (i) *Für jeden Punkt P auf der Nebenachse der Hyperbel \mathcal{H} sind die Tangentenabschnitte einer jeden Tangenten durch den Punkt P an einen beliebigen Kreis des hyperbolischen Kreisbüschels gleich lang.*
- (ii) *Für jeden Punkt P der Hauptachse, welcher nicht auf der Strecke zwischen den Scheitelpunkten der gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} liegt, sind die Tangentenabschnitte einer jeden Tangenten durch den Punkt P an jeden beliebigen Kreis des elliptischen Kreisbüschels gleich lang.*

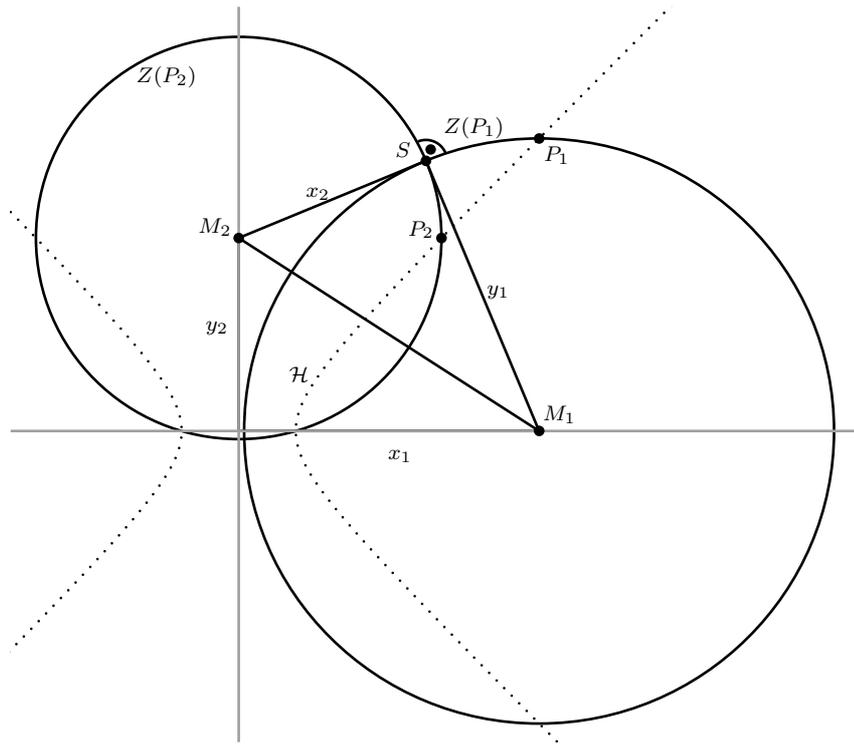


Abbildung 6.22.: Skizze zum Beweis von Satz 6.30

Beweis. Wie aus Satz 6.30 bekannt ist, schneiden alle Kreise des elliptischen Kreisbüschels alle Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels rechtwinklig. Das bedeutet, dass für zwei beliebige Kreise, wovon einer dem elliptischen und der andere dem hyperbolischen Kreisbüschel angehört, die entsprechenden Radien von den Mittelpunkten zum Schnittpunkt der Kreise orthogonal zueinander sind. Daran erkennt man, dass der Radius des einen Kreises als Tangente des jeweils anderen Kreises anzusehen ist. Es wird nun der Nachweis anhand der Aussage (i) verdeutlicht, für die Aussage (ii) funktioniert der Beweis analog:

Sei P gemäß des Korollars ein Punkt der Nebenachse der gleichseitigen Hyperbel \mathcal{H} . Nun betrachte man einen Büschelkreis $\mathcal{K}(P, r)$ des elliptischen Kreisbüschels, welcher den Punkt P als Mittelpunkt besitzt, sein Radius sei r . Der Kreis schneidet wegen Satz 6.30 alle Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels rechtwinklig, sodass sein Radius entsprechend obiger Überlegungen ein Tangentenabschnitt der Tangenten aus dem Punkt P sein muss. Da der Radius r konstant ist, sind alle Tangentenabschnitte gleich lang. Dass der Abschnitt der jeweils zweiten Tangente an die Büschelkreise ebenfalls gleich lang ist, folgt aus der Tatsache, dass Tangentenabschnitte aus einem Punkt an einem Kreis stets die gleiche Länge besitzen. \square

Die Abbildung 6.23 erleichtert das Verständnis des Beweises. Getrichelt ist ein Kreis

\mathcal{K} des elliptischen Kreisbüschels mit dem Mittelpunkt P dargestellt, die anderen Kreise sind beliebig ausgewählte Repräsentanten des dazu konjugierten hyperbolischen Kreisbüschels. Zudem sind in grau die gleichlangen Tangentenabschnitte r dargestellt, welche, wie im Beweis beschrieben, die Radien des Kreises \mathcal{K} und deshalb gleich lang sind.

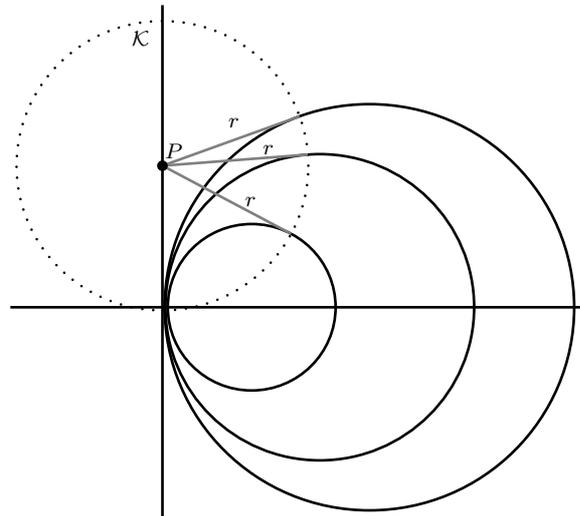


Abbildung 6.23.: Skizze zum Beweis von Korollar 6.31 – drei exemplarische Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels mit je gleichlangen Tangentenabschnitten der Länge r

Daraus erhält man einen Zusammenhang zur Potenzgeraden:

Für alle Punkte der Nebenachse wie der Hauptaxe der gleichseitigen Hyperbel ist [...] der zusammenfassende Ausdruck gerechtfertigt, dass sie Punkte gleicher Potenzen für alle Kreise des Büschels mit Grenzpunkten [hyperbolisches Kreisbüschel] resp. des Büschels mit Grundpunkten [elliptisches Kreisbüschel] sind, oder dass diese Axen die Linien gleicher Potenzen [...] sind. [Fie82a, S. 72]

Diese Aussage lässt sich in einem Satz wie folgt zusammenfassen:

Satz 6.32. *Die Potenzgerade des elliptischen oder hyperbolischen Kreisbüschels, welche durch die gleichseitige Hyperbel \mathcal{H} erhalten werden, ist die Hauptachse bzw. die Nebenachse der Hyperbel \mathcal{H} .*

Beweis. Es wird nach den Kreisbüscheltypen unterschieden:

- elliptisches Kreisbüschel: Alle Kreise des Kreisbüschels verlaufen durch die Scheitelpunkte der Hyperbel \mathcal{H} . Das Korollar 5.12, welches sich auf Potenzgeraden für sich schneidende Kreise bezieht, liefert die Behauptung.

- hyperbolisches Kreisbüschel: Wenn P ein Punkt der Nebenachse ist, so sind gemäß Korollar 6.31(i) die Tangentenabschnitte r an jeden Büschelkreis \mathcal{K} gleich lang. Die Potenz des Punktes P an die Kreise \mathcal{K} ist dann

$$p_{\mathcal{K}}(P) = r^2,$$

also konstant. Zusammen mit Satz 5.11 folgt insgesamt die Behauptung.

Somit ist der Satz vollständig nachgewiesen. \square

Es ist an dieser Stelle hervorzuheben, auf welche Weise Fiedler die Kreisbüschel und charakteristische Grundbegriffe der Kreislehre wie Potenz oder Potenzgerade einführt. Dies geschieht auf eine unkonventionelle Weise: Definiert man den Potenzbegriff für Punkte in Bezug auf einen Kreis für gewöhnlich unabhängig vom Kontext der Kreisbüschel, so wählt Fiedler einen anderen Weg: Er beginnt mit der Untersuchung von Schnittkurven zweier gerader Kreiskegel mit der Spitze in der Tafelenebene, gelangt auf diese Weise zur gleichseitigen Hyperbel und leitet die Hyperbelgleichung her. Dies geschieht alles durch räumliche Betrachtungen und Umlegungen in die Tafelenebene. Anschließend führt er das elliptische Kreisbüschel – er nennt es das »Büschel mit Grundpunkten« – ein, indem er die zyklografischen Bildkreise der gleichseitigen Hyperbel untersucht. Durch eine Drehung und Umlegung der räumlichen Hyperbel gelangt er zum konjugierten Büschel bzw. hyperbolischen Kreisbüschel, welches er als »Büschel mit zwei Grenzpunkten« bezeichnet. Er arbeitet Eigenschaften heraus, von denen oben die wichtigsten vorgestellt wurden. Zudem nutzt er den Kontext der Kreisbüschel, um den Potenzbegriff sowie den Begriff der Potenzgeraden einzuführen und zu motivieren. Demnach könnte man seinen Zugang zu den Kreisbüscheln und den Begriffen der Kreisgeometrie als »darstellend-zyklografisch« bezeichnen.

Folgende Tabelle fasst die drei Kreisbüscheltypen mitsamt der Raumkurve, deren zyklografische Bilder sie ergeben, in einer Übersicht zusammen, wobei Fiedler das parabolische Kreisbüschel nicht explizit als dieses ausweist:

Kreisbüschel	zugehörige Raumkurve
parabolisches Büschel	Gerade mit 45° Tafelneigung
elliptisches Büschel	gleichseitige Hyperbel
hyperbolisches Büschel	gleichseitige Hyperbel in konjugierter Lage

Wie bereits erklärt, wurde bei Fiedler das parabolische Kreisbüschel nicht eingeführt. Dementsprechend wird auch in seiner *Cyklographie* nicht die Frage nach

dessen Konjugation gestellt. Aus diesem Grund wird dies hier nachgetragen: Man betrachte eine im 45° -Winkel zur Tafel geneigte Gerade g mit Durchstoßpunkt S . Diese wird ähnlich wie im Falle der Hyperbel wie folgt konjugiert:

1. Man bilde die Lotebene E zur Tafel, welche die Gerade g enthält; ihre Spur in der Tafalebene ist die orthogonale Parallelprojektion g_1 der Geraden g .
2. Man bilde die Ebene E_\perp im Punkt S , die senkrecht zur Tafalebene sowie zur Gerade g_1 steht.
3. Die Schnittgerade der Ebene E_\perp mit der Tafalebene sei l_\perp . Diese Gerade steht senkrecht zur Gerade g_1 .
4. Nun drehe man die Gerade l_\perp aus der Tafalebene innerhalb der Ebene E_\perp heraus, bis sie einen 45° -Winkel mit der Tafel einschließt. Diese Gerade sei l .
5. Man betrachte die zyklografischen Bildkreise $Z(l)$ der Punkte der Geraden l .

Es ist also das zum parabolischen Büschel konjugierte ebenfalls ein parabolisches Büschel, dessen gemeinsame Zentrale aller Büschelkreise im rechten Winkel zu der anderen Zentrale stehen. Jetzt kann man sich überzeugen, dass sich die Aussage des Satzes 6.30 wie folgt überträgt:

Satz 6.33. *Jeder Büschelkreis eines parabolischen Kreisbüschels schneidet jeden Büschelkreis des parabolischen Kreisbüschel, welches durch obige Schritte erhalten wurde, rechtwinklig.*

Beweis. Es seien A und B die orthogonalen Parallelprojektionen P_2^r und P_1^r , welche Raumpunkte auf der aufgerichteten Lotgerade l und auf der ursprünglichen Gerade g sind. Man betrachte die Grafik aus der Abbildung 6.24. Man erkennt einen Bildkreis $Z(P_1^r)$ des parabolischen Kreisbüschels sowie einen Bildkreis $Z(P_2^r)$ des dazu konjugierten parabolischen Kreisbüschels. Da nach Konstruktion die Zentralen der beiden Kreisbüschel im rechten Winkel zueinander stehen und alle Büschelkreise durch den Punkt S verlaufen, gilt

$$\angle(ASB) = 90^\circ.$$

Es gilt somit der Satz. □

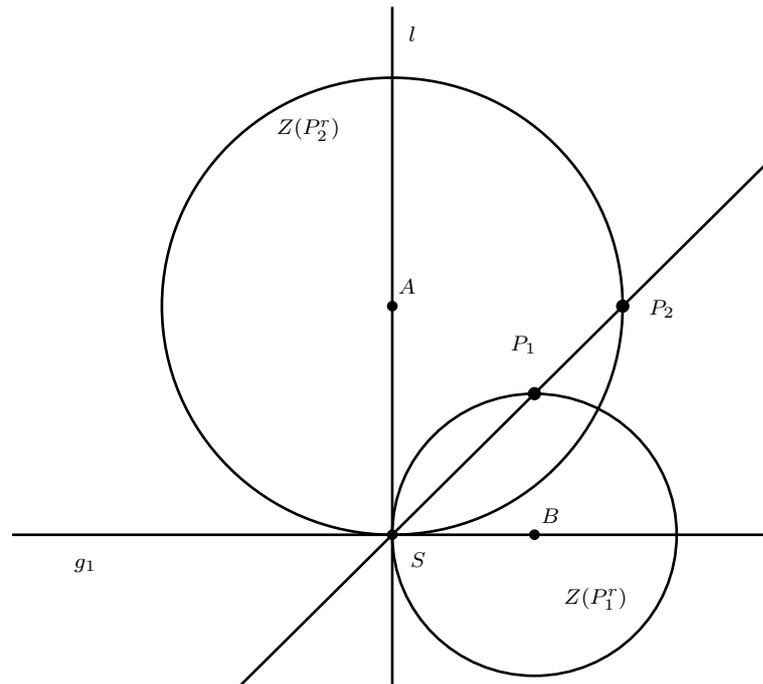


Abbildung 6.24.: Kreises des zum parabolischen Kreisbündel konjugierte Kreisbündels

6.7. Die Hyperbel in Verbindung mit der Kreisinverson

Man findet einen weiteren interessanten Zusammenhang, welchen die gleichseitige Hyperbel bzw. das hyperbolische Kreisbündel zur Kreisinverson hat.

Sei ein hyperbolisches Kreisbündel gegeben, welches durch die gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung

$$\mathcal{H}: x^2 - y^2 = r^2,$$

wobei $r > 0$ sei, beschrieben ist. Das kartesische Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Ursprung im Hyperbelmittelpunkt liegt und die Achsen Haupt- und Nebenachse der Hyperbel sind. Sei nun $P(x_0, 0)$ mit $|x_0| > r$ ein Punkt außerhalb des Scheitelkreises auf der Hauptachse der Hyperbel \mathcal{H} . Dann ist der Kreis

$$\mathcal{K} \left(P, \sqrt{x_0^2 - r^2} \right) = \mathcal{K} \left((0, x_0), \sqrt{x_0^2 - r^2} \right)$$

ein Bündelkreis mit Mittelpunkt P und Radius $r_P = \sqrt{x_0^2 - r^2}$ des hyperbolischen Kreisbündels. Der Bündelkreis \mathcal{K} schneidet die Hauptachse in zwei Punkten $S_1 =$

$(x_0 - r_P, 0)$ und $S_2 = (x_0 + r_P, 0)$. Mit diesen Bezeichnungen erhält man folgenden

Satz 6.34. *Der zum Punkt S_1 inverse Punkt bezüglich des Scheitelkreises der Hyperbel \mathcal{H} ist der Punkt S_2 .*

Beweis. Das folgt sofort aus der Tatsache, dass für zwei Punkte P und \hat{P} und einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r die Gleichung

$$d(M, P) \cdot d(M, \hat{P}) = r^2$$

gilt, sofern sie invers bezüglich dieses Kreises sind (s. Abschnitt 5.1). Die Hyperbelgleichung lässt sich wie folgt umformen:

$$x^2 - y^2 = r^2 \iff (x + y)(x - y) = r^2.$$

Weil der Kreis \mathcal{K} ein Büschelkreis mit Radius $r_P = y$ und Mittelpunkt $P = (x_0, 0)$ ist, entsteht daraus

$$(x_0 + r_P)(x_0 - r_P) = r^2.$$

Da der Mittelpunkt des Scheitelkreises der Koordinatenursprung O und sein Radius r ist, folgt sofort aus der obigen Gleichung

$$d(O, S_1) \cdot d(O, S_2) = r^2$$

und damit die Behauptung des Satzes. □

Mit dem in Kapitel 5 diskutierten Zusammenhang der Pol-Polaren-Beziehung zur Inversion eines Punktes bezüglich eines Kreises gilt ebenfalls

Korollar 6.35. *Die Polare p zum Pol S_1 bezüglich des Scheitelkreises der Hyperbel \mathcal{H} steht senkrecht auf der Hauptachse der Hyperbel und schneidet sie im Punkt S_2 .*

6.8. Die Ähnlichkeitskreise im Zusammenhang mit dem Kreisbüschelkonzept

In den vorherigen Abschnitten wurden die Kreisbüschel behandelt und vor allem das elliptische und das dazu konjugierte hyperbolische Büschel näher betrachtet. Der Zugang zu diesen Kreisfamilien gelang durch eine Untersuchung der zyklografischen Bildkreise von im Raum befindlichen Hyperbeln, die als Schnittkurven zweier

gerader parallelachsiger Doppelkreisegel mit der Spitze in der Tafel Ebene, Öffnungswinkeln von 90° und zur Tafel lotrechten Achsen erhalten wurden.

Der Satz 6.32 hat gezeigt, dass alle Büschelkreise eines Kreisbüschels eine gemeinsame Potenzlinie (welche die Zentrale des jeweils konjugierten Büschels bzw. eine der Achsen der zugehörigen Hyperbel ist) haben. Dies erlaubt es, die Kreisbüschel auch als die Menge der Kreise zu charakterisieren, die eine gemeinsame Potenzgerade besitzen. Da die Potenzgerade zweier Kreise immer senkrecht auf ihrer Zentrale steht, wie der Satz 5.11 lehrt, müssen alle Kreise eines Büschels ihre Mittelpunkte stets auf einer Geraden besitzen.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Ähnlichkeitskreise zu drei gegebenen nicht konzentrischen Kreisen unterschiedlicher Radien zu einem Kreisbüschel gehören. Bei Fiedler liest man:

Drei Kreise $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ von den Radien r_1, r_2, r_3 liefern durch die Verbindungstrecken ihrer drei Paare von Ähnlichkeitspunkten als Durchmesser von Kreisen die drei Ähnlichkeitskreise $\mathbf{K}_{12}, \mathbf{K}_{23}, \mathbf{K}_{31}$ [...] [Es gilt], dass die drei Ähnlichkeitskreise ein Büschel bilden oder dieselbe Potenzlinie und Centrale [...] haben. [Fie82a, S. 74f.]

Um diese Aussage nachvollziehen zu können, werden nachfolgend drei Sätze behandelt, die in Fiedlers *Cyklografie* ohne ausführlichen Beweis angegeben werden. Dies wird hier in Anlehnung an [Aum15] aufgearbeitet. Es wird mit einer Aussage begonnen, die den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks mit dem Potenzzentrum dreier bestimmter mit dem Dreieck in Bezug stehender Kreise verbindet:

Satz 6.36. *Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ gegeben. Der Punkt P liege auf der Geraden AB , der Punkt Q auf der Geraden BC und der Punkt R auf der Geraden AC . Die Kreise mit den Strecken \overline{AQ} , \overline{BR} und \overline{CP} als Durchmesser besitzen ihr Potenzzentrum im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$.*

In der Abbildung 6.25 erkennt man die drei im Satz beschriebenen Kreise in grau. Durch gestrichelte Geraden sind zwei Potenzgeraden je zweier Kreise dargestellt, die sich, wie im Satz formuliert, im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden.

Beweis. Zunächst betrachtet man die Fußpunkte F, G und H der Höhen durch die Eckpunkte A, B und C auf den jeweiligen Gegenseiten. Nun betrachte man exemplarisch den Kreis über der Strecke \overline{CP} : Da die Höhe durch den Punkt C mit dem Fußpunkt F rechtwinklig auf der Seite AB steht, liefert die Umkehrung des Thalesatzes, dass der Kreis über der Strecke \overline{CP} durch den Punkt F verläuft.

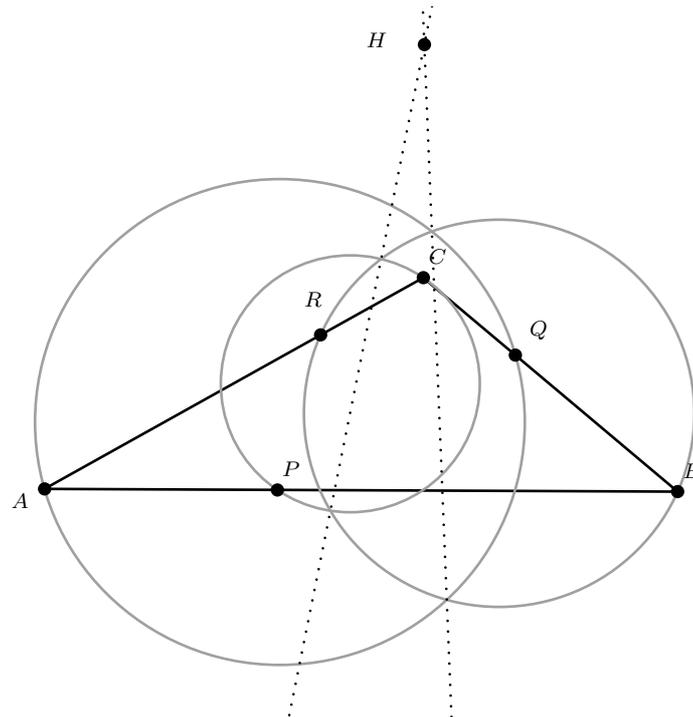


Abbildung 6.25.: Das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Punkten P , Q und R auf den Dreiecksseiten und drei Kreise deren Potenzzentrum mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ übereinstimmt

Eine analoge Argumentation zeigt, dass der Kreis über der Strecke \overline{AQ} durch den Punkt G und der Kreis über der Strecke \overline{BR} durch den Punkt H verläuft. Demnach verlaufen alle Kreise über der Strecke \overline{PC} mit verschiedener Lage von P auf der Geraden AB durch die Punkte F und C (letzterer Punkt nach Konstruktion). Somit bilden diese Kreise ein elliptisches Kreisbüschel, deren Kreise die Gerade AB als gemeinsame Zentrale und die Punkte F und C als Grundpunkte besitzen; die Gerade FC ist die Potenzgerade. Gleichermäßen wird ein elliptisches Kreisbüschel mit den Grundpunkten G und B sowie H und C gebildet, sodass die Potenzgeraden GB und HC erhalten werden.

Bewegt man die Punkte P , R und Q in die Eckpunkte A , B ; A , C sowie B oder C , so entstehen jeweils die Büschelkreise über den Dreiecksseiten \overline{AC} , \overline{BC} bzw. \overline{AB} , die zu je zwei Büscheln gehören. Anders ausgedrückt enthält jedes der Kreisbüschel zwei der Kreise über den Dreiecksseiten, sodass der Schnittpunkt H der Potenzlinien, die zugleich die Höhen der Dreiecks $\triangle ABC$ sind, das Potenzzentrum sein muss. \square

Man erkennt sofort, dass sich die Potenz des Höhenschnittpunktes H in Bezug auf die drei beschriebenen Kreise leicht berechnen lässt: Man betrachte dazu wieder exemplarisch den Kreis \mathcal{K} über der Strecke \overline{CP} . Dieser schneidet die Dreiecksseite

AB im Höhenfußpunkt F , wie man eben gesehen hat. Somit ist die Potenz des Punktes H bezüglich des Kreises \mathcal{K} gegeben durch

$$p_{\mathcal{K}}(H) = d(H, C) \cdot d(H, F).$$

Aus dem Satz 6.36 ergibt sich unmittelbar die leichte Folgerung, da sie nur ein Spezialfall der eben diskutierten Aussage ist:

Korollar 6.37. *Ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten A , B und C gegeben und bildet man die Kreise mit den Dreiecksseiten \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{AC} als Durchmesser, so ist der Schnittpunkt H der Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ das gemeinsame Potenzzentrum jener Kreise.*

Zur Vorbereitung des sogenannten *Satzes von Bodenmiller* soll nun der Satz 6.36 modifiziert werden. Durften die Punkte P , Q und R eben auf den Dreiecksseiten beliebig gewählt werden, so wird nun davon ausgegangen, dass sie zusätzlich auf einer Geraden liegen. Mit dieser Einschränkung können die Kreise, die auf die oben beschriebenen Weise erhalten werden, mit einem Kreisbüschel in Verbindung gebracht werden. Genauer:

Satz 6.38. *Es seien drei Geraden g_1 , g_2 und g_3 , sodass sich die Geraden g_1 und g_2 im Punkt A , die Geraden g_2 und g_3 im Punkt B und die Geraden g_1 und g_3 im Punkt C schneiden, gegeben. Liegen die Punkte P , R und Q auf den Geraden g_1 , g_2 und g_3 und zugleich auf einer Geraden (sie sollen also kollinear sein), so gehören die Kreise über den Strecken \overline{AQ} , \overline{BR} und \overline{CP} entweder einem parabolischen, elliptischen oder hyperbolischen Kreisbüschel an.*

Man betrachte die zwei Skizzen mit verschiedenen Dreiecken $\triangle ABC$ in der Abbildung 6.26, in der die drei Kreise in grau und die Punkt P , Q und R auf einer gestrichelten Gerade dargestellt sind.

Beweis. Mithilfe des Satzes 6.36 kann man die Aussage leicht beweisen. Man betrachte das Dreieck $\triangle APR$, welches aus den drei Punkten A , P und R gebildet wird. Die drei Punkte B , C und Q liegen auf den Geraden AP , AR und PR , sodass offenbar die drei Kreise über den Strecken \overline{AQ} , \overline{BR} und \overline{CP} nach Satz 6.36 ihr Potenzzentrum im Höhenschnittpunkt K des Dreiecks $\triangle APR$ besitzen. Gleiches gilt ebenfalls aufgrund des Satzes 6.36 für das Dreieck $\triangle ABC$, dessen Höhenschnittpunkt H ebenfalls das Potenzzentrum der drei Kreise ist. Es folgt also, dass die Gerade HK die Potenzgerade von je zwei Kreisen ist, also aufgrund von Transitivität aller Kreise. Man erhält also ein Kreisbüschel. \square

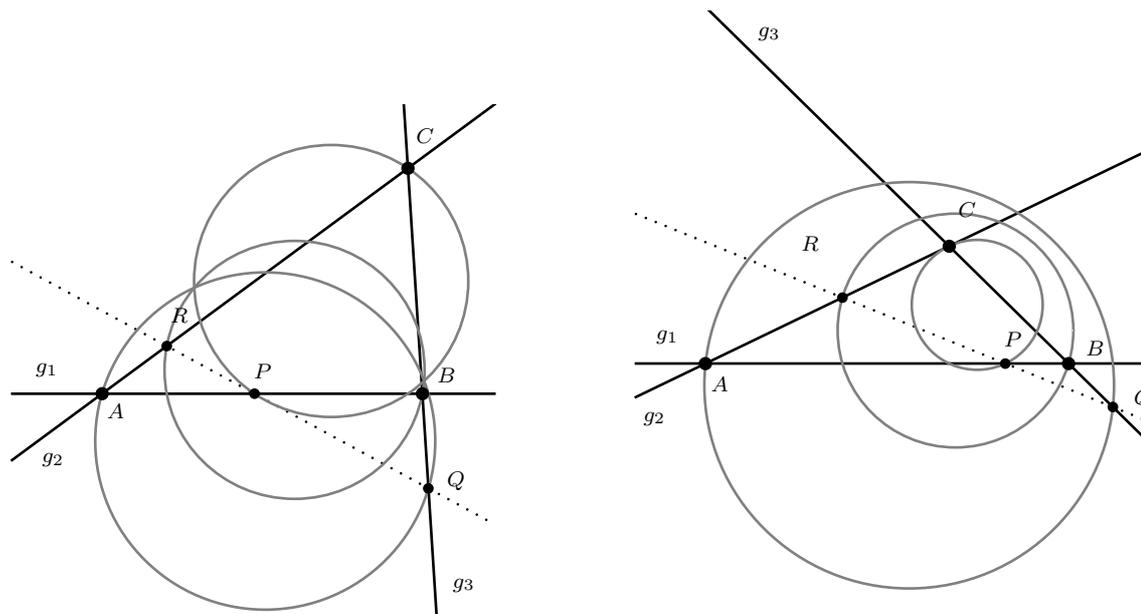


Abbildung 6.26.: Die Kreise über den Strecken \overline{AQ} , \overline{BR} und \overline{CP} bilden ein Kreisbündel. Im linken Bild sieht man ein elliptisches, im rechten Bild ein hyperbolisches Kreisbündel

Vier verschiedene Geraden g_1 , g_2 , g_3 und g_4 schneiden sich in höchstens sechs verschiedenen Punkten. Zur Übersicht seien die Geraden als Mengen aufgefasst, dann sollen die Geradenschnittpunkte wie folgt erhalten werden:

$$\{P_{12}\} = g_1 \cap g_2,$$

$$\{P_{13}\} = g_1 \cap g_3,$$

$$\{P_{14}\} = g_1 \cap g_4,$$

$$\{P_{23}\} = g_2 \cap g_3,$$

$$\{P_{24}\} = g_2 \cap g_4,$$

$$\{P_{34}\} = g_3 \cap g_4.$$

Die durch diese definierten Punkte entstehende Figur wird *vollständiges Vierseit* genannt. Jetzt kann man den Satz von Bodenmiller diskutieren. Er besagt, dass sich die Aussage des Satzes 6.38 wie folgt auf das vollständige Vierseit überträgt.

Satz 6.39 (Satz von Bodenmiller). *Betrachtet wird das Viereck $P_{13}P_{14}P_{23}P_{24}$ des vollständigen Vierseits. Die drei Kreise über den Strecken aus den diagonal liegenden Ecken des Vierseits, also über den Strecken $\overline{P_{13}P_{24}}$, $\overline{P_{23}P_{14}}$ und $\overline{P_{12}P_{34}}$ als Durchmesser, bilden ein parabolisches, elliptisches oder hyperbolisches Kreisbündel.*

In der Abbildung 6.27 ist die Aussage des Satzes veranschaulicht. Die Kreise über den diagonal liegenden Eckpunkten des Vierseits sind in grau dargestellt. In diesem Beispiel erkennt man ein elliptisches Kreisbündel.

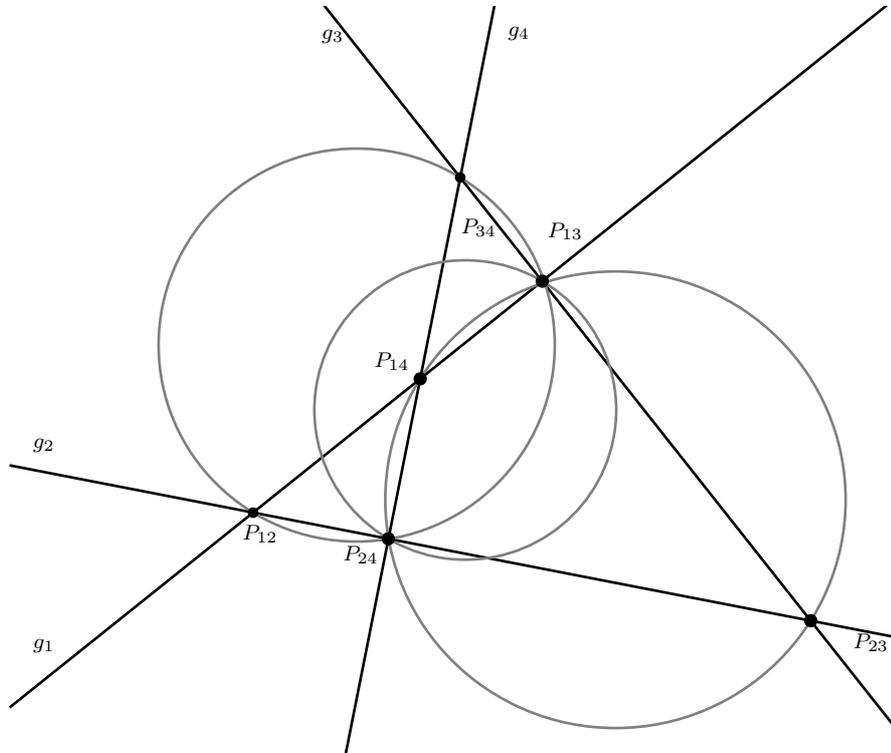


Abbildung 6.27.: Veranschaulichung des Satzes von Bodenmiller – Drei Kreise in Bezug auf ein Vierseit, die zu einem Kreisbündel gehören

Beweis. Man betrachte das Dreieck $\triangle P_{12}P_{13}P_{23}$. Überträgt man die Bezeichnungen wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{12} &= A, & P_{13} &= C, & P_{14} &= R, \\ P_{23} &= B, & P_{24} &= P, & P_{34} &= Q, \end{aligned}$$

so liegt die Situation aus Satz 6.36 vor und es ergibt sich die Behauptung. \square

Nun kann man die in diesem Abschnitt eingangs erwähnte Aufgabe bezüglich der Lage der Ähnlichkeitskreise lösen. Es seien drei Kreise gegeben, wobei sie paarweise unterschiedliche Radien und Mittelpunkte besitzen sollen. Unter Anwendung der Konstruktion 3.4 konstruiert man zu je zwei der Kreise das innere und äußere Ähnlichkeitszentrum, woraus sich drei Ähnlichkeitskreise bestimmen lassen. Nun wird behauptet, dass sich die Mittelpunkte der drei Ähnlichkeitskreise auf einer Geraden

befinden. Da dies eine leichte Folgerung aus dem zuvor behandelten Satz 6.39 ist, wird die Aussage wie folgt als Korollar formuliert:

Korollar 6.40. *Es seien drei Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 mit unterschiedlichen Radien und Mittelpunkten gegeben. Ihre drei Ähnlichkeitskreise \mathcal{A}_{12} , \mathcal{A}_{13} und \mathcal{A}_{23} liegen auf einer Geraden und bilden ein elliptisches, hyperbolisches oder parabolisches Kreisbündel.*

Beweis. Es sei mit A_{ij} das innere, mit I_{ij} das äußere Ähnlichkeitszentrum und mit \mathcal{K}_{ij} der Ähnlichkeitskreis der Kreise \mathcal{K}_i und \mathcal{K}_j , wobei $i \neq j$ und $i, j = 1, 2, 3$ gilt, bezeichnet. Der Mittelpunkt des Kreises \mathcal{K}_i sei M_i . Bekanntlich ist ein Durchmesser des Ähnlichkeitskreises \mathcal{K}_{ij} die Strecke $\overline{I_{ij}A_{ij}}$. Nun wird der Satz von Bodenmiller angewendet. Wegen des Satzes von Monge bilden die äußeren und inneren Ähnlichkeitszentren ein vollständiges Vierseit (bestehend aus den vier Ähnlichkeitsachsen). Mit den Bezeichnungen aus Satz 6.39 lassen sich nun die folgenden Punkte identifizieren:

$$\begin{aligned} P_{12} &= A_{12}, & P_{13} &= A_{13}, & P_{14} &= I_{13}, \\ P_{23} &= A_{23}, & P_{24} &= I_{23}, & P_{34} &= I_{12}. \end{aligned}$$

Es gilt also die behauptete Aussage. □

Die Grafik in der Abbildung 6.28 visualisiert die Aussage des Korollars. Dargestellt sind in schwarz die gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 sowie gestrichelt ihre Ähnlichkeitsachsen. In grau sind die drei Ähnlichkeitskreise gezeigt, die hier ein elliptisches Kreisbündel bilden – auf ihre Bezeichnungen wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

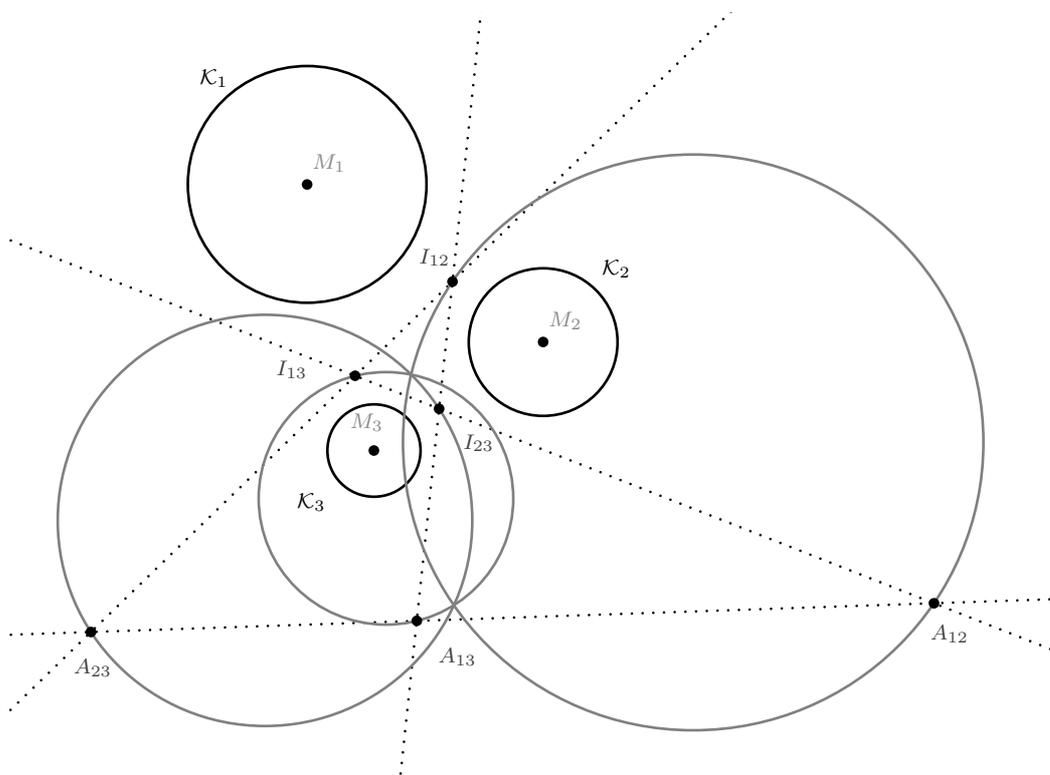


Abbildung 6.28.: Die Ähnlichkeitskreise, die zu einem Kreisbündel gehören

7. Das Apollonische Berührproblem

In diesem Kapitel wird das Apollonische Berührproblem behandelt. Zuerst werden kurze biografische Informationen über Apollonius – dem Namensgeber des im Folgenden diskutierten Problems – gegeben, daran anschließend die Aufgabenstellung des Apollonischen Berührproblems beschrieben sowie historische Bemerkungen angegeben. Ausführlich behandelt wird die Lösungsmethode des Apollonischen Berührproblems mithilfe des zyklografischen Abbildungsverfahrens. Dabei werden zwei verschiedene Zugänge dargestellt. Zuerst wird ein rein analytischer Lösungsansatz, in zweiten Abschnitt ein elementargeometrisches Verfahren gezeigt. Letzteres ist mit Fiedlers Lösungsansatz aus [Fie82a, S. 168f.] vergleichbar, wurde jedoch mit Erklärungen und Skizzen vervollständigt. Hierbei wurde vorrangig das Lehrbuch [Adl06, S. 63ff.] benutzt. Im Wesentlichen werden die im Kapitel 5 erarbeiteten Konstruktionen und Sätze aus der Kreisgeometrie verwendet.

7.1. Biografisches und Historisches

7.1.1. Apollonius von Perge

Die nachfolgenden biografischen Hinweise zu Apollonius stützen sich im Wesentlichen auf die Quellen [Her14, S. 233ff.] und [CS12, S. 885ff.].

Apollonius von Perge war ein antiker Mathematiker, der etwa in den Jahren 260-190 v. Chr. lebte. Geboren wurde er in Pamphylien, was in der heutigen Türkei liegt, gestorben ist er in Alexandria. Seine Lebensdaten kann man aufgrund der Berichterstattung von Heraklios rekonstruieren. Über sein Leben ist recht wenig bekannt; belegt ist, dass er in Alexandria tätig war, wo er auch Mathematik studierte. Seine Beiträge zur antiken Mathematik waren es, die ihm zur Bekanntheit verhalfen. Sein bekanntestes Werk sind die Bücher der *Conica*, deren zentraler Bestandteil die Diskussion der Kegelschnitte ist. Hermann zitiert in [Her14, S. 233] ein Vorwort aus Apollonius' Buch, in dem berichtet wird, weshalb Apollonius sich mit den

Kegelschnitten beschäftigte. Man erfährt, dass ihn Naukratos dazu ermutigt hatte. Wichtig ist auch die Tatsache, dass die Bezeichnungen der Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel auf Apollonius zurückgehen. Eine Übersetzung der *Conica* ins Deutsche existiert von Arthur Czwalina aus dem Jahre 1926 (s. [Czw67])⁷⁴. Im anschließenden Kapitel wird eine Konstruktionsaufgabe, die auf Apollonius zurückgeht, beschrieben und historische Informationen gegeben.

7.1.2. Historische Anmerkungen und Lösungsmethoden

Konstruktionsaufgaben haben einen hohen Stellenwert für die Geometrie – seit Jahrtausenden. Hameister äußert die Vermutung, dass in diesen Aufgaben die Ursprünge der Geometrie liegen (vgl. [Ham70, S. 7]). Im Folgenden wird ein spezielles Problem aus der Kreisgeometrie vorgestellt. Klassisch bezeichnet man als *Apollonisches Berührproblem* die Aufgabe, zu drei vorgegebenen Kreisen Kreise zu finden, welche die drei gegebenen Kreise berühren. Aus dieser Grundaufgabe kann man weitere ableiten, indem man bei den gegebenen Kreisen den Radius Null bzw. den Radius unendlich zulässt. In diesem Fall fasst man die Kreise (K) als Punkte (P) bzw. als Geraden (G) auf. So ergeben sich dann zehn Apollonische Probleme. Beispielsweise beschreibt ein Problem, welches man mit PPP abkürzt, die Aufgabe, einen Kreis zu bestimmen, welcher durch drei gegebene Punkte verläuft. Geht man davon aus, dass diese Punkte paarweise verschieden sind und nicht auf einer Geraden liegen, so lässt sich das Problem leicht mit den klassischen Sätzen der euklidischen Geometrie lösen: Angenommen, die drei gegebenen Punkte seien mit P_1 , P_2 und P_3 bezeichnet. Die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ treffen sich in einem gemeinsamen Punkt M . Der Kreis $\mathcal{K}_L(M, d(M, P_1))$ ist dann der gesuchte Lösungskreis. Die Abbildung 7.1 zeigt ein mögliches Beispiel und die zugehörige Lösung. Da jeder Punkt, der auf einer Mittelsenkrechten liegt, zu jeweils zwei Eckpunkten den gleichen Abstand besitzt, muss der Punkt M der gesuchte Punkt sein. Den Kreis durch die Punkte P_1 , P_2 und P_3 bezeichnet man als den Umkreis des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$.

Dies ist die Auflösung des einfachsten Apollonischen Problems und diese Lösung ist eindeutig. Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen nicht immer eine Lösung existiert. Wären im obigen Beispiel die drei vorgegebenen Punkte, durch die der Lösungskreis verlaufen soll, kollinear, also auf einer Geraden liegend, so hätte man keine Lösung angeben können.⁷⁵

⁷⁴In der Referenz wird auf den Nachdruck von 1967 verwiesen.

⁷⁵Interpretiert man eine Gerade als Kreis mit dem Radius $r = \infty$, so wäre die Gerade durch die drei Punkte eine Lösung des Problems. Hier soll jedoch nur von Lösungskreisen ausgegangen

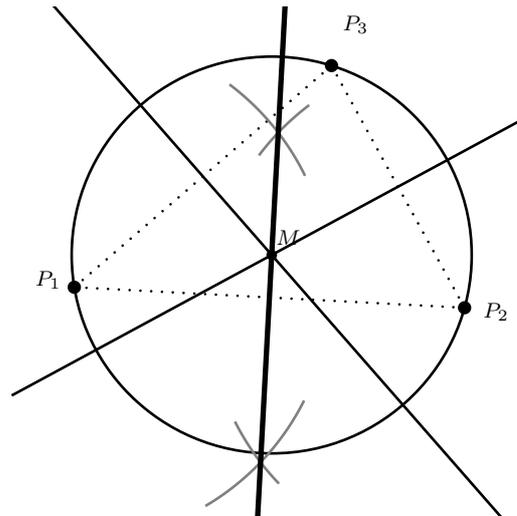


Abbildung 7.1.: Lösung des Apollonischen Problems PPP

Die ursprüngliche Problemstellung KKK stammt von Apollonius von Perge, der im Abschnitt 7.1.1 vorgestellt wurde. Er formulierte sie in dem verlorenengegangenen Buch mit dem Titel *Über die Berührungen*, über welches der Kommentator Pappos berichtete (vgl. [Her14, S. 242]). Vermutlich hat Apollonius die Aufgabe darin vollständig behandelt. Im Laufe der folgenden Jahrhunderte bis ins 19. Jahrhundert hinein versuchten verschiedene Mathematiker, Lösungen für dieses Problem zu entwickeln und eigene Lösungsansätze zu finden. Die wichtigsten Mathematiker und Beiträge werden im Wesentlichen in [Ahr32, S. 4-8] vorgestellt und im Folgenden auf dieser Grundlage kurz skizziert; Ergänzungen stammen aus Herrmanns Buch [Her14] über antike Mathematik.

François Viète (1540-1603), ein französischer Mathematiker, gab im 16. Jahrhundert Auflösungen der verschiedenen Apollonischen Probleme, also jene, die auch Punkte und Geraden umfassen, an. Er verfolgte dabei die Strategie, ein »komplizierteres« Problem auf ein einfacheres, bereits gelöstes Problem zurückzuführen. Ausführlich behandelt er das Problem in seinem Werk *Apollonius Gallus* (vgl. [Her14, S. 242]). Weitere Abhandlungen über das Problem folgten im 17. Jahrhundert von weniger bekannten Mathematikern wie Marion Ghetaldi (1568-1626), der Vorlesungen bei Galileo Galilei (1564-1642) besuchte, und dem Schotten Alexander Anderson (ca. 1582-1620).

Bekannter ist René Descartes (1596-1650), dem u. a. die Entwicklung der Koordinatengeometrie zugeschrieben wird, welcher sich mit dem schwierigsten Fall der Konstruktion, der Bestimmung von mindestens einem Berührkreis zu drei gegeb-

werden, deren Radien endlich sind.

nen, beschäftigte. Er selber schätzte seine Lösung als zu umständlich und komplex ein, sodass er sie nicht praktisch durchführte. Darüber hinaus arbeitete er an einem verwandten Problem, welches ihn zum sogenannten *Vier-Kreise-Satz* führte. Er zeigte, welchen Radius zwei Kreise haben müssen, die drei sich berührende Kreise berühren (vgl. [GR04, S. 16]). Ebenfalls ist der Physiker und Mathematiker Isaac Newton (1643-1727) zu erwähnen, der mit Gottfried Wilhelm Leibniz Wegbereiter der Infinitesimalrechnung war. Er entwickelte in seiner Abhandlung *Principia* einen zu Viète ähnlichen Ansatz, ein schwierigeres Problem auf ein bereits gelöstes zurückzuführen und somit zu vereinfachen.

Im 18. Jahrhundert veröffentlichte Robert Simson (1687-1768) eine Behandlung des Apollonischen Berührproblems, bei dem ein Punkt und zwei Kreise (PKK) vorgegeben sind. Dies ist die Aufgabe, auf die auch Newton das Problem der Berührungskreise dreier gegebener Kreise, also KKK, zurückführte. Er diskutiert das Problem in seinen Werk *Treatise of Algebra* (vgl. [Her14, S. 242]).

Georg Jonathan von Holland (1742-1784) löste das Problem KKK auf Hinweis der polnischen Gräfin Skorzevksa. Seine Motivation der Lösung verfolgte eine praktische Fragestellung: man stelle sich die Frage, ein Zahnrad so zu setzen, dass es drei andere antreibt (vgl. [Ahr32, S. 6]).

Der Schweizer Mathematiker Euler, der in verschiedenen Bereichen der Mathematik wichtige Beiträge lieferte, beschäftigte sich auch mit Kreisgeometrie. Von ihm stammt eine Auflösung des Problems KKK aus dem Jahr 1788 (vgl. [Her14, S. 242]). Zudem ist nach ihm ein Satz benannt, der die Radien des In- und Umkreises eines Dreiecks sowie die Abstände ihrer Mittelpunkte in Verbindung bringt.

Am Ende des 18. Jahrhunderts veröffentlichte Johann Wilhelm Camerer (1763-1847) ein Werk, welches die verschiedenen Auflösungen der Apollonischen Probleme behandelte. Darin enthalten sind ebenfalls Auflösungen des Mathematikers Christoph Friedrich von Pfeiderer (1736-1821).

Weitere Auflösungen kommen im 19. Jahrhundert hinzu. Die neuen Methoden der Kreisgeometrie, beispielsweise die Kreisinverson, verhalfen zu neuen Lösungen des Apollonischen Problems. Hierbei kann auch die Strategie Viètes verfolgt werden, schwierigere Probleme auf leichtere zurückzuführen. Es sind vor allem Beiträge von Steiner, die diese Entwicklung vorantrieben.

Esprit-Marie Cousinery (1747-1833) behandelte das Apollonische Berührproblem mit den Methoden der Perspektive. Er benutzte eine Darstellung der gegebenen Kreise mithilfe von Kegeln (vgl. [Wie84, S.33]). Man wird sehen, dass dies auch die Grundidee sein wird, um das Problem zyklografisch zu behandeln.

Die obige Zusammenstellung der wichtigsten Mathematiker, welche sich mit dem

Problem von Apollonius beschäftigten, zeigt eindeutig dessen Wichtigkeit und bestätigt das allgemeine Interesse an dieser Aufgabe.

Auch für militärische Zwecke im ersten Weltkrieg fand das Apollonische Berührproblem Anwendung. Ein Artikel von Meyer aus dem Jahr 1918 beschreibt, wie die Problemstellung PKK genutzt werden kann, um den Standort eines Geschützes auf dem Feld ausfindig zu machen (vgl. [Mey18])⁷⁶. Dazu stelle man sich vor, dass drei Zeitmesser existieren sowie ein Geschütz G , dessen Standort ermittelt werden soll. Die Idee beruht nun darauf, mithilfe des Schalls, den das Geschütz bei Schussabgabe verursacht, herauszufinden, wo sich das Geschütz G befindet. Dazu sind zwei Annahmen nötig: Der Schall breitet sich durch Kugelwellen aus, die in Bezug auf die Erdoberfläche als Kreiswellen angenommen werden können und die Schallgeschwindigkeit v ist nahezu konstant. Ersteres impliziert, dass der Schall an zwei verschiedenen Orten zur gleichen Zeit wahrgenommen wird, wenn die Orte auf dem gleichem Kreisbogen liegen, wobei das Geschütz G den Mittelpunkt des Kreises bildet. Zum leichteren Verständnis betrachte man die Abbildung 7.2. Hierin beschreiben die Punkte A , B und C Zeitmessposten und der Punkt G ist der Standort des zu ortenden Geschützes. Der Kreis um G beschreibt eine Schallwelle.

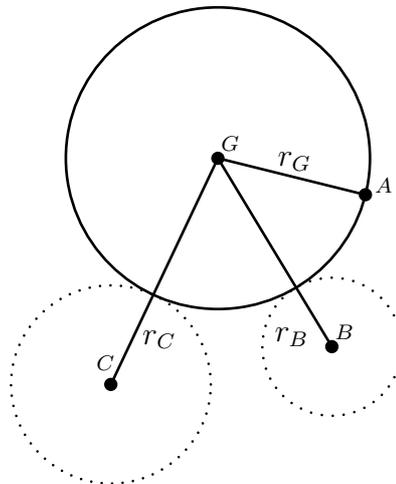


Abbildung 7.2.: Veranschaulichung des Schallortungsprinzips mithilfe des Apollonischen Problems PKK nach [Mey18]

Eine Person im Punkt A , die am nächsten zum Geschütz G gelegen ist, startet zeitgleich zwei Stoppuhren an den Messpunkten B und C , sobald sie den Schall eines Geschosses wahrnimmt. Die an den Punkten B und C positionierten Personen stoppen die Zeitmesser, sobald sie den Schall wahrnehmen. Die gemessene Zeit am

⁷⁶Ich danke Herrn Sebastian Kitz für den Hinweis auf diesen Artikel.

Kontrollpunkt B sei mit t_B und die an Kontrollpunkt C mit t_C bezeichnet. Jetzt kann man den Weg ermitteln, den der Schall zwischen den Zeitpunkten als A ihn gehört hat und als er bei B eingetroffen ist, zurückgelegt hat. In der Skizze aus der Abbildung 7.2 entspricht dieser Weg der Länge r_B . Analog ist die Größe r_C zu interpretieren. Die Weglänge r_B lässt sich nun wie folgt in Abhängigkeit der gemessenen Zeit t_B errechnen:

$$r_B = v \cdot t_B.$$

Analog gilt die Gleichung

$$r_C = v \cdot t_C.$$

Da die Positionen der Posten A , B und C bekannt sind, kann man die Kreise $\mathcal{K}_B(B, r_B)$ um den Mittelpunkt B mit Radius r_B und $\mathcal{K}_C(C, r_C)$ um den Mittelpunkt C mit dem Radius r_C bestimmen. Um den Standort des Geschosses zu bestimmen, muss man den Mittelpunkt G eines Kreises bestimmen, der die Kreise \mathcal{K}_B und \mathcal{K}_C berührt und durch den Punkt A verläuft.⁷⁷ Also sucht man im Sinne des Apollonischen Berührproblem einen Lösungskreis, der dies erfüllt, und ermittelt seinen Mittelpunkt.

In den folgenden Abschnitten soll die Zyklografie benutzt werden, um das Problem der Bestimmung von Berührungskreisen zu drei vorgegebenen Kreisen (KKK) zu lösen. Wie man bereits oben erfahren hat, ist die Angabe einer Lösung nicht immer möglich. Dies bezog sich auf den Aufgabentyp PPP des Apollonischen Berührproblems und trifft auch auf die Aufgabenstellung KKK zu. Sind beispielsweise drei konzentrische Kreise mit paarweise verschiedenen Radien und einem gemeinsamen Mittelpunkt M gegeben, so gibt es offenbar keinen Lösungskreis, der die drei gegebenen Kreise berührt. Es existieren auch keine Lösungskreise, wenn bereits einer der vorgegebenen Kreise vollständig innerhalb eines anderen und der verbleibende dritte Kreis außerhalb der beiden anderen Kreise liegt (s. Abbildung 7.3a)).

Es ist aber auch denkbar, dass die Mittelpunkte der Kreise und ihre Radien in der Aufgabenstellung »günstig« gewählt sind, also dass die Lösung der Aufgabe ohne aufwendige Methoden und Konstruktionen angegeben werden kann. Eine derartige Aufgabenkonstellation soll als trivial bezeichnet werden und stellt für die

⁷⁷Es sei bemerkt, dass man das Problem KKP in Verbindung mit Hyperbeln bringen kann. So lässt sich zeigen, dass die Mittelpunkte der Berührungskreise zu zwei gegebenen Kreisen auf Hyperbeln liegen. Mithilfe von Hyperbeln gelang es Adrian van Roomen (1561-1615), das Apollonische Berührproblem zu lösen; dies ermöglichte jedoch nicht die Konstruktion der Lösungskreise mit Zirkel und Lineal im euklidischen Sinne (vgl. [OW12, S. 233]).

nachfolgenden Betrachtungen einen Ausnahmefall dar. Ein Beispiel dafür wäre, dass alle gegebenen Kreise den gleichen Mittelpunkt und Radius besitzen. Es gäbe in diesem Fall unendlich viele Lösungskreise, die die drei bzw. den einen Kreis berühren. Auch wäre der folgende Fall leicht zu behandeln: Man betrachte drei gegebene Kreise gleicher Radien, deren Mittelpunkte die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks sind. In dieser Situation lassen sich die Mittelpunkte der Lösungskreise konstruieren, indem man die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der gleichlangen Schenkel bildet. Diese Situation ist in der Abbildung 7.3b) verdeutlicht. Dieser Spezialfall der Aufgabenstellung ließe sich nicht mit den Mitteln für die elementargeometrische Behandlung des Problems aus Abschnitt 7.4 lösen, da die erforderliche Konstruktion 7.6 nicht durchführbar wäre. Dies zeigt, dass insbesondere nicht-triviale Konstellationen der gegebenen Kreise für eine Problemlösung interessant sind und sich auf diese im Folgenden und vor allem im Abschnitt 7.4 fokussiert werden soll.

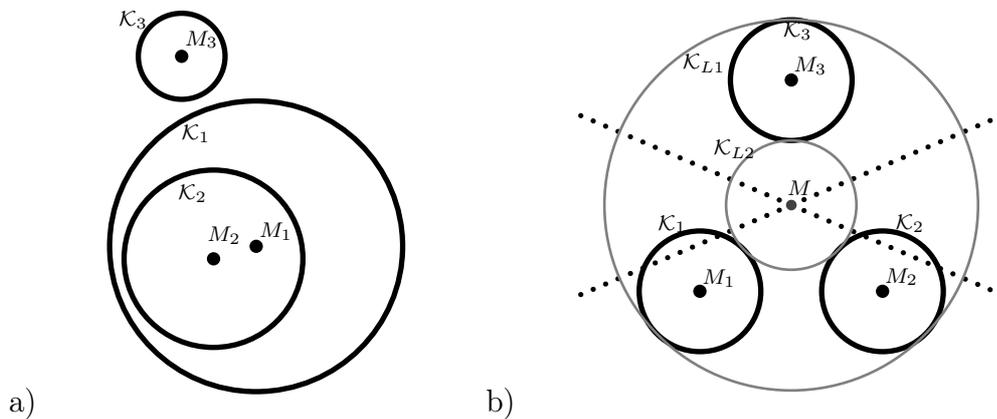


Abbildung 7.3.: Beispiele für Ausnahmefälle bei der Lösung des Apollonischen Berührproblems KKK

7.2. Die zylografische Methode der Lösung des Apollonischen Berührproblems

In diesem Abschnitt soll die Lösung des Apollonischen Berührproblems KKK (welches nachfolgend nur kurz Apollonisches Problem genannt wird), also die Bestimmung der Kreise, die jeweils drei gegebene Kreise berühren, mithilfe der zylografischen Abbildungsmethode angegeben werden.

Es seien drei Kreise $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3 \in \mathcal{T}$ in der Tafel Ebene \mathcal{T} gegeben, so existieren für jeden dieser Kreise jeweils zwei Raumpunkte, deren zylografische Bilder die

gegebenen Kreise darstellen. Dies wurde in Abschnitt 4.1 ausführlich dargestellt. Die Kreise ergeben sich mit ihren zugehörigen Punkten zyklusografisch wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &= Z(P_1) = Z(Q_1), \\ \mathcal{K}_2 &= Z(P_2) = Z(Q_2), \\ \mathcal{K}_3 &= Z(P_3) = Z(Q_3).\end{aligned}$$

Dabei liegen die Punkte P_i jeweils auf derselben Seite der Tafel ebene und die Punkte Q_i mit $i = 1, 2, 3$ auf der jeweils anderen Seite, P_i und Q_i sind symmetrisch bezüglich der Tafel ebene. Mit diesen Punkten lassen sich die sechs zyklusografischen Doppelkegel angeben, die das Ausgangsproblem räumlich beschreiben. Ihre Grund- bzw. Spurkreise auf der Tafel sind die Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 . Es sei nun an die Sätze 4.2, 4.3, 4.4 sowie an das Korollar 4.5 erinnert, welche bzw. welches die Lage von Raumpunkten, deren zyklusografische Bildkreise sich in der Tafel berühren, beschrieben. Mithilfe ihrer Aussagen wird klar, dass für die Lösung des Apollonischen Problems jeweils die Schnittpunkte von drei der oben genannten Kegel gesucht sind. Die zyklusografischen Bilder dieser Schnittpunkte liefern die gesuchten Lösungskreise. Genauer bedeutet dies, dass man die gemeinsamen Punkte der zyklusografischen Kegel

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(P_1) \text{ und } \mathfrak{K}(P_2) \text{ und } \mathfrak{K}(P_3), \\ \mathfrak{K}(P_1) \text{ und } \mathfrak{K}(P_2) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_3), \\ \mathfrak{K}(P_1) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_2) \text{ und } \mathfrak{K}(P_3), \\ \mathfrak{K}(P_1) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_2) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_3)\end{aligned}$$

bestimmen muss. Fiedler beschreibt diese Aufgabe als die Bestimmung von »[...] den Schnittpunkten ihrer [der Kegel] Durchdringungen [...]« [Fie82a, S. 161]. Weitere mögliche Kegelkonstellationen müssen nicht betrachtet werden, da dies symmetrische Kombinationen bezüglich der bereits angegebenen sind. Beispielsweise liefert eine Betrachtung der oben nicht aufgeführten Konstellation

$$\mathfrak{K}(Q_1) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_2) \text{ und } \mathfrak{K}(P_3)$$

die gleichen Lösungen wie

$$\mathfrak{K}(P_1) \text{ und } \mathfrak{K}(P_2) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_3),$$

da die jeweils beschriebenen Kegel spiegelsymmetrisch in Bezug zur Tafel ebene liegen. Damit sind die zyklusografischen Lösungskreise dieselben und es ergeben sich

keine weiteren Lösungen. Die Schnitte der oben angegebenen Tripel aus Kegeln liefern jeweils höchstens zwei Lösungen. Denn betrachtet man zwei sich schneidende Kegel, so weiß man, dass ihre Schnittfigur eine ebene Kurve ist. Diese wiederum schneidet den dritten Kegel in höchstens zwei Punkten, deren zyklografische Bildkreise eine Teillösung liefern. Auf diese Weise ergeben sich insgesamt maximal $4 \cdot 2$, also acht, mögliche Lösungskreise. Dies wird in den Abschnitten 7.3 bzw. 7.4 nochmals genauer erklärt und verdeutlicht. Vor allem wird man erkennen, dass es unter Umständen weniger als acht Lösungen, zum Beispiel wenn Kreise gleiche Radien besitzen, geben kann.

7.3. Die analytische Lösung des Apollonischen Berührproblems

7.3.1. Eine Strategie zur Lösung des Apollonischen Berührproblems

Wie im vorherigen Abschnitt erklärt, muss man im Sinne der zyklografischen Abbildung die Schnittpunkte von drei Kegeln ermitteln. Mit diesem Ansatz kann man das Apollonische Problem lösen. Damit dieser Ansatz analytisch verfolgt werden kann, wird zunächst eine algebraische Beschreibung eines Kreiskegels hergeleitet. Dabei werden jedoch nur gerade Kreiskegel betrachtet, deren Grundkreisradien deren Höhen entsprechen, also zyklografische Kegel.

Die algebraische Darstellung eines zyklografischen Kreiskegels

Zur Vereinfachung des Falls eines geraden Kegels in beliebiger Lage geht man von einem geraden Kreiskegel \mathfrak{K} aus, dessen Grundkreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Spitze dieses Kegels soll auf der z -Achse sein. Da ein zyklografischer Kreiskegel betrachtet wird, entspricht die Höhe des Kegels dem Grundkreisradius $r > 0$. Zur Herleitung der Kegelgleichung betrachte man den in der Abbildung 7.4 dargestellten Aufriss des Kreiskegels \mathfrak{K} .

Der Punkt $P = (x, y, z)$ sei ein beliebiger Punkt auf der Mantelfläche des Kegels \mathfrak{K} , der nicht in der Spitze des Kegel liegt. Der zum Grundkreis parallele Kreis durch den Punkt P habe den Radius k . Der zweite Strahlensatz liefert dann die Gleichung

$$\frac{r}{r} = \frac{k}{r - z}, \quad (7.1)$$

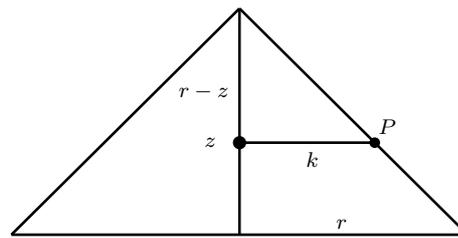


Abbildung 7.4.: Aufriss eines zyklografischen Kreiskegels

sofern die Spitze im Halbraum $R^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$ liegt. Umformen der Gleichung (7.1) nach k liefert den entsprechenden Radius in der z -Koordinate, also

$$k = r - z.$$

Da es sich um einen Kreiskegel handelt und sich ein Kreis mit dem Radius k und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung durch die Gleichung $x^2 + y^2 = k^2$ beschreiben lässt, erhält man durch Einsetzen des Ergebnisses für k die Gleichung

$$x^2 + y^2 = k^2 = (r - z)^2.$$

Liegt die Kegelspitze im Halbraum $R^- := \mathbb{R}^3 \setminus (R^+ \cup \{z = 0\})$, so erhält man durch eine analoge Rechnung unter Berücksichtigung von $z < 0$ die Darstellung

$$\mathfrak{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z + r)^2\},$$

wenn man den Kegel als Menge auffasst.

Das nächste Ziel besteht darin, einen Kreiskegel \mathfrak{K} zu beschreiben, dessen Grundkreismittelpunkt nicht im Ursprung, sondern in einem beliebigen anderen Punkt $M = (x_0, y_0, 0)$ der xy -Ebene liegt. Eine einfache lineare Transformation liefert dann zusammen mit den bisherigen Erkenntnissen

$$\mathfrak{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z \pm r)^2\},$$

wobei das entsprechende Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem, ob der Kegel seine Spitze im Halbraum R^+ oder R^- besitzt.

Die Aufstellung eines Gleichungssystems

Wie bereits am Anfang des Kapitels diskutiert, lässt sich das Apollonische Problem im Sinne der Zyklografie auf das Problem der Berechnung gemeinsamer Punkte dreier Kreiskegel zurückführen. Im Folgenden geht man davon aus, dass die gegebenen Kreise, deren Berührkreise gesucht sind, in der xy -Ebene liegen – diese soll als Tafelebene interpretiert werden. Die gegebenen Kreise seien durch $\mathcal{K}_i((x_i, y_i), r_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnet. Mit den Erkenntnissen aus dem vorherigen Abschnitt und dieser Annahme kann man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (z \pm r_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (z \pm r_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (z \pm r_3)^2, \end{cases}$$

welches aus den drei Kegelgleichungen besteht, aufstellen.

Um dessen Lösungsmenge zu berechnen, löst man alle Klammern unter Anwendung der ersten und zweiten binomischen Formel auf. Anschließend subtrahiert man die erste Zeile von der zweiten Zeile und die erste Zeile von der dritten Zeile. Dabei werden die quadratischen Terme eliminiert und man erhält das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (z \pm r_1)^2 \\ 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) - 2(\pm r_1 \mp r_2)z \\ 2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_3^2 + y_3^2 - r_3^2) - 2(\pm r_1 \mp r_3)z. \end{cases}$$

Nun löst man zunächst das Gleichungssystem bestehend aus der zweiten und dritten Zeile nach den Unbekannten x und y auf. Man erkennt, dass ihre Koeffizienten nur von konstanten Werten abhängen. Das bedeutet grafisch interpretiert, dass man die Schnittgerade zweier Ebenen berechnet. Die auf diese Weise erhaltenen Lösungen setzt man in die erste Gleichung ein und löst die entstehende quadratische Gleichung. Letztlich erhält man die gesuchten Punkte. Anschaulich kann man den letzten Berechnungsschritt so interpretieren, dass man die Schnittpunkte der zuvor bestimmten Schnittgerade mit dem ersten Kreiskegel bestimmt. Dies zeigt auch, weshalb die zyklografischen Bilder der Schnittpunkte dreier Kegel maximal zwei Lösungskreise liefern. Es sei abschließend bemerkt, dass bei Fiedler keine analytische Lösung im obigen Sinne zu finden ist.

7.3.2. Beispiel

In diesem Abschnitt wird die im vorherigen Abschnitt entwickelte Lösungsstrategie anhand eines konkreten Beispiels veranschaulicht. Es seien die drei Kreise

$$\mathcal{K}_1((0, 0), 1), \quad \mathcal{K}_2((3, 0), 1) \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_3((3, 2), 2)$$

gegeben. Gesucht sind die Kreise, welche die drei gegebenen Kreise berühren.

Zunächst soll die Lösung des Beispielproblems mithilfe analytischer Methoden erbracht werden. Man stellt sich wie im Abschnitt zuvor beschrieben die xy -Ebene als Tafel Ebene vor, in der die drei gegebenen Kreise liegen. In diesem Fall lassen sich die zyklografischen Kegel der Kreise durch die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{1a}: \quad x^2 + y^2 &= (1 - z)^2 \\ \mathfrak{K}_{2a}: \quad (x - 3)^2 + y^2 &= (1 - z)^2 \\ \mathfrak{K}_{3a}: \quad (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= (2 - z)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{1b}: \quad x^2 + y^2 &= (1 + z)^2 \\ \mathfrak{K}_{2b}: \quad (x - 3)^2 + y^2 &= (1 + z)^2 \\ \mathfrak{K}_{3b}: \quad (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= (2 + z)^2 \end{aligned}$$

beschreiben. Die Kegel, welche mit dem Buchstaben a indiziert sind, liegen auf einer Seite der Tafel Ebene und die mit dem Buchstaben b liegen auf der jeweils anderen Seite der Tafel Ebene.

Exemplarisch soll nun im Folgenden die Lösung des System aus den drei Gleichungen \mathfrak{K}_{1a} , \mathfrak{K}_{2a} und \mathfrak{K}_{3a} ausführlich berechnet werden. Löst man die Klammern auf, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 & + 2z = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 6x & + 2z = -8 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 6x - 4y + 4z & = -9. \end{cases}$$

Die Subtraktion der ersten Zeile von der dritten sowie der ersten Zeile von der zweiten Zeile eliminiert die quadratischen Terme, was auf das umgeformte Gleichungs-

system

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 1 \\ -6x = -9 \\ -6x - 4y + 2z = -10 \end{cases}$$

führt. Die Bestimmung der Differenz der zweiten und der dritten Zeile liefert das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 1 \\ -6x = -9 \\ -4y + 2z = -1. \end{cases}$$

Aus der zweiten Zeile folgert man die Lösung für die x -Koordinate durch Division mit -6 wie folgt

$$-6x = -9 \iff x = \frac{3}{2}; \quad (7.2)$$

die dritte Zeile liefert das Ergebnis

$$-4y + 2z = -1 \iff y = \frac{1 + 2z}{4}. \quad (7.3)$$

Durch Einsetzen der Lösungen (7.3) und (7.2) in die erste Zeile des Gleichungssystems gelangt man zu einer quadratischen Gleichung. Diese löst man unter Anwendung der pq -Formel und erhält

$$\frac{37}{16} + \frac{9}{4}z - \frac{3}{4}z^2 = 1 \iff z = \frac{7}{2} \text{ oder } z = -\frac{1}{2}.$$

Insgesamt hat das Gleichungssystem damit die beiden Lösungen

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2} \right)$$

bzw.

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

Die x - und y -Werte der Koordinaten dieser Punkte liefern die Mittelpunkte der gesuchten Kreise in der Tafelenebene, der Betrag der z -Koordinate bestimmt ihre Radien.

Aus diesem Grund kann man zunächst die zwei Lösungskreise

$$\mathcal{K}_{L1} \left(\left(\frac{3}{2}, 2 \right), \frac{7}{2} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_{L2} \left(\left(\frac{3}{2}, 0 \right), \frac{1}{2} \right)$$

angeben. Die Abbildung 7.5 zeigt die Lösungskreise \mathcal{K}_{L1} und \mathcal{K}_{L2} in grau sowie die gegebenen Ausgangskreise in schwarz.

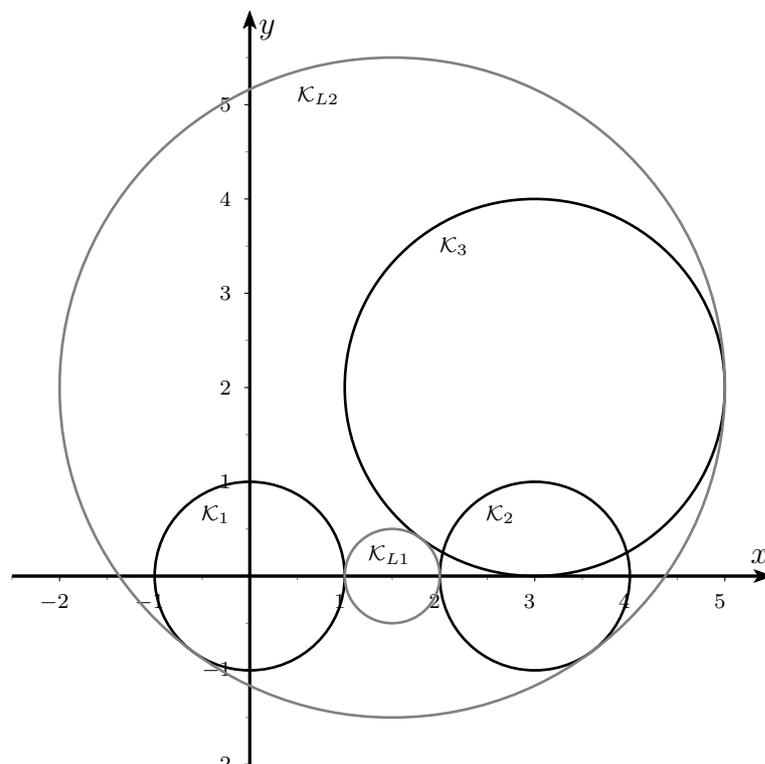


Abbildung 7.5.: Darstellung der Lösungskreise \mathcal{K}_{L1} und \mathcal{K}_{L2}

Die weiteren Lösungskreise ergeben sich aus den Gleichungssystemen, die aus den Gleichungen

$$\mathcal{K}_{1a} \text{ und } \mathcal{K}_{2a} \text{ und } \mathcal{K}_{3b}$$

sowie

$$\mathcal{K}_{1a} \text{ und } \mathcal{K}_{2b} \text{ und } \mathcal{K}_{3a}$$

bestehen. Man rechnet nach, dass diese beiden Gleichungssysteme keine reellen Lösungen besitzen. Das Gleichungssystem aus den Gleichungen

$$\mathcal{K}_{1a} \text{ und } \mathcal{K}_{2b} \text{ und } \mathcal{K}_{3b}$$

führt auf die Lösungen

$$(x, y, z) = \left(\frac{39}{22} - \frac{4\sqrt{15}}{11}, \frac{5}{11} - \frac{3\sqrt{15}}{11}, \frac{6\sqrt{15}}{11} - \frac{9}{22} \right)$$

oder

$$(x, y, z) = \left(\frac{39}{22} + \frac{4\sqrt{15}}{11}, \frac{5}{11} + \frac{3\sqrt{15}}{11}, -\frac{6\sqrt{15}}{11} - \frac{9}{22} \right).$$

Das liefert die verbleibenden zwei Lösungskreise

$$\mathcal{K}_{L3} \left(\left(\frac{39}{22} - \frac{4\sqrt{15}}{11}, \frac{5}{11} - \frac{3\sqrt{15}}{11} \right), \frac{6\sqrt{15}}{11} - \frac{9}{22} \right)$$

und

$$\mathcal{K}_{L4} \left(\left(\frac{39}{22} + \frac{4\sqrt{15}}{11}, \frac{5}{11} + \frac{3\sqrt{15}}{11} \right), \frac{6\sqrt{15}}{11} + \frac{9}{22} \right),$$

die in der Abbildung 7.6 ebenfalls in grau dargestellt sind.

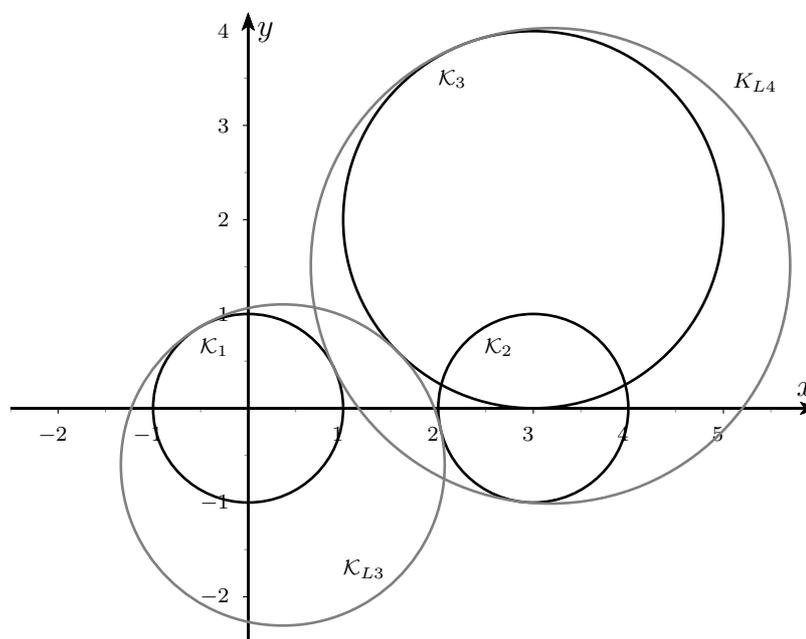


Abbildung 7.6.: Darstellung der Lösungskreise \mathcal{K}_{L3} und \mathcal{K}_{L4}

Da alle möglichen Kegellagen behandelt wurden, sind alle Lösungen für dieses

Beispiel gefunden. Der Grund, weshalb sich nicht die maximal mögliche Anzahl von acht Lösungen ergibt, liegt darin, dass die beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 gleiche Radien besitzen.

7.4. Die elementargeometrische Lösung des Apollonischen Berührproblems mithilfe der Zyklografie

In diesem Abschnitt soll die Lösung des Apollonischen Berührproblems erneut unter Anwendung der zyklografischen Abbildungsmethode dargestellt werden. Wie bereits eingangs erwähnt, ist es dazu notwendig, die zyklografischen Kegel, welche die vorgegebenen Kreise beschreiben, zu schneiden und die jeweiligen Schnittpunkte zu ermitteln. In der Behandlung des Problems mit analytischen Methoden führte dies auf Gleichungssysteme bestehend aus jeweils drei Gleichungen zweiten Grades. Die Lösungsmengen dieser Gleichungssysteme lieferten die Mittelpunktskoordinaten sowie die Radien der Lösungskreise des gegebenen Problems. Die Strategie, die Schnittpunkte der zyklografischen Kegel zu finden, wird nun im Weiteren erneut verfolgt; es sollen diesmal die Schnittpunkte nicht berechnet, sondern elementargeometrisch konstruiert werden. Die räumlichen Schnittpunkte der Kegel werden geeignet auf die Tafel Ebene projiziert, was zur Lösung des Problems führen wird. Es wird sich zeigen, dass hier die senkrechte Parallelprojektion geeignet ist. Im Folgenden werden zuerst die notwendigen Hilfskonstruktionen angegeben und auf die notwendigen Begriffe aus der Kreisgeometrie aus Kapitel 5 verwiesen, bevor das Problem vollständig behandelt wird.

7.4.1. Hilfskonstruktionen zu gemeinsamen Kegelpunkten

Fiedler erklärt, dass die Schnittkurven zweier zyklografischer Doppelkegel in jeweils einer Ebene liegen, sie sind also ebene Kurven. Er schreibt in diesem Kontext:

[...] zwei Kegel [...] durchdringen sich immer in zwei ebenen Curven, weil sie sich in zwei Punkten berühren, und eine Ebene, die durch diese Punkte und einen weiteren Punkt der Durchdringungcurve geht, unendlich viele Punkte der derselben enthält. Die Ebenen dieser Hyperbeln [das ist die Durchdringungskurve, die zuvor bei Fiedler beschrieben wird] haben die Potenzlinien der Grundkreise zu Spuren [...]. [Fie82a, S. 126]

Der erste Teil dieser Aussage ist im anschließenden Satz präzisiert und zusammenfassend formuliert. Da Fiedler eher eine knappe, schwierig nachvollziehbare Begründung für die Korrektheit des Satzes angibt, wird hier ein analytischer Beweis angegeben.

Satz 7.1. *Die Schnittfigur zweier verschiedener, zyklografischer Doppelkreiskegel mit parallelen Achsen liegt in einer Ebene.*

Beweis. Es seien $M_1 = (x_1, y_1)$ und $M_2 = (x_2, y_2)$ die Mittelpunkte der Grundkreise der beiden zyklografischen Kegel und r_1 sowie r_2 ihre Radien. Gemäß der Überlegungen aus dem Abschnitt 7.3.1 lassen sich die beiden zyklografischen Doppelkreiskegel durch die Gleichungen

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (z \pm r_1)^2$$

und

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (z \pm r_2)^2$$

beschreiben. Bildet man ein Gleichungssystem aus diesen beiden Gleichungen so erhält man:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (z \pm r_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (z \pm r_2)^2. \end{cases}$$

Auflösen der Klammern und die Multiplikation der ersten Zeile mit -1 sowie anschließende Addition zur zweiten Zeile liefert das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 & = & (z \pm r_1)^2 \\ ax & + & by & + & cz & = & d. \end{cases}$$

Hierbei sind

$$a = 2 \cdot (x_1 - x_2),$$

$$b = 2 \cdot (y_1 - y_2),$$

$$c = 2 \cdot (\pm r_1 \mp r_2)$$

und

$$d = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - z_1^2 + z_2^2.$$

Da die zyklografischen Doppelkreiskegel als verschieden vorausgesetzt sind, gilt nicht

$a = b = c = 0$. Offenbar repräsentiert die zweite Zeile des umgeformten Gleichungssystems eine Ebene, sodass der Schnitt der beiden Kegel auf einen Schnitt des einen Kegels mit einer Ebene zurückgeführt werden kann. Daraus schließt man, dass die Schnittkurve beider Kegel in einer Ebene liegt bzw. die die gemeinsamen Punkte beider Kegel eine Kegelschnittkurve ist.⁷⁸ \square

Korollar 7.2. *Gegeben seien zwei parallelachsige zyklografische Doppelkreiskegel.*

- *Liegt die Spitze des einen Kegels in dem anderem Kegel und zugleich auf dessen Achse, so ist die Schnittkurve ein Kreis.*
- *Liegt die Spitze des einen Kegels in dem anderem Kegel, aber nicht auf dessen Achse, so ist die Schnittkurve eine Ellipse.*
- *Liegt die Spitze des einen Kegels außerhalb des anderen Kegels, so ist die Schnittkurve eine Hyperbel.*

Beweis. Im ersten Fall liegt die Schnittebene rechtwinklig zur Achse der beiden Kegel, sodass ein Kreis entsteht. Im zweiten Fall ist die Schnittebene mehr als 90° , im letzten Fall weniger als 90° zu einer der Achsen geneigt, weshalb eine Ellipse bzw. Hyperbel entsteht. \square

Da insbesondere der letzte Fall der im Korollar 7.2 behandelten Aussage für das Kapitel 6 besondere Bedeutung besitzt, soll an dieser Stelle dafür ein weiterer Beweis angegeben werden.⁷⁹ Es wird gezeigt, dass die Schnittkurve zweier parallelachsiger zyklografischer Doppelkreiskegel, wovon die Spitze des einen Kegels außerhalb des anderen Kegels liegt, in einer Ebene liegt. Der Beweis soll im Stile Fiedlers durchgeführt werden, also vorrangig mithilfe von Projektionen und darstellend-geometrisch.

Es seien zwei parallelachsige zyklografische Kreiskegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 gegeben. Zur Vereinfachung wird sich hierbei auf einfache, also keine Doppelkreiskegel, beschränkt, welche beide eine unendlich große Mantelfläche besitzen. Die Behauptung für den Fall von Doppelkreiskegeln ergibt sich dann aufgrund von Symmetrie. Zu Beginn wird eine Ebene E festgelegt, die senkrecht zu den Kegelachsen der beiden Kegeln verläuft und aus ihnen zwei sich schneidende Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 ausschneidet. Diese Ebene kann immer gewählt werden, da die Kegel eine unendlich große Mantelfläche besitzen. Nun betrachtet man die gemeinsame Sehne s_E der beiden ausgeschnittenen Kreise in der Ebene E . Die Endpunkte der Sehne s_E sind Punkte, die auf der Schnittkurve der Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 liegen.

⁷⁸Ich danke Herrn Hungerbühler für den Hinweis auf die Beweisidee.

⁷⁹Ich danke Herrn Volkert für die Idee des Beweises.

Im nächsten Schritt betrachtet man die Aufrissebene A , die durch die beiden Kegelachsen festgelegt wird; die zyklografischen Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 bilden sich darauf als rechtwinklige Dreiecke ab, welche durch entsprechende Sehnen der beiden Kegel gegeben sind. Darüber hinaus bildet sich die Sehne s_E in der Aufrissebene (durch senkrechte Parallelprojektion) auf den Punkt A ab, da die Sehne senkrecht zur Zentralen der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in der Ebene E steht. Der Schnittpunkt S der jeweiligen Mantellinien ist der Scheitelpunkt der Schnittkurve der beiden Kegel. Es sei $g = SA^+$ der durch die Punkte A und S bestimmte Strahl von S aus, der den Punkt A enthält, in der Aufrissebene. Nun wird eine beliebige weitere Ebene F betrachtet, die parallel zur Ebene E verläuft und zwei weitere, sich schneidende Kreise aus den Kegeln ausschneidet. Die gemeinsame Sehne s_F bildet sich in der Aufrissebene auf einen Punkt P_F ab. Die Behauptung ist, dass der Punkt P_F auf dem Strahl g liegt; damit ist gezeigt, dass die Schnittkurve beider Kegel in einer Ebene liegt.

Um dies einzusehen, klappt man die Ebene F mitsamt der ausgeschnittenen Kreise so in die Aufrissebene, dass die darin befindlichen Kreise durch die Spitze der beiden Kegel verlaufen. Die geklappte Ebene sei mit F_k bezeichnet. Auf diese Weise erhält man die Situation, die in der Abbildung 7.7 dargestellt ist. Darin sind die geklappten Kreise gestrichelt dargestellt und die Aufrisse der Ebenen E und F erkennbar. Nun legt man ein kartesisches Koordinatensystem in die Aufrissebene, sodass die x -Achse die Schnittgerade der Ebene E mit der Aufrissebene und die y -Achse die Achse des Kegels \mathfrak{K}_1 ist. Damit ist der Ursprung des Koordinatensystems der Mittelpunkt des Kreises, den die Ebene E aus dem Kegel \mathfrak{K}_1 ausschneidet. Seien nun h_1 der Abstand der Spitze des Kegels \mathcal{K}_1 zur Ebene E , analog sei h_2 für den Kegel \mathfrak{K}_2 festgelegt, d sei der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise zueinander, die die Ebene E aus den beiden Kegeln ausschneidet und h_F der Abstand der Ebene E zur Ebene F . Dabei soll die Zahl h_F positiv sein, wenn die Ebene F oberhalb der Ebene E liegt, sonst negativ.

Nun betrachte man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^2 + (y - h_F)^2 = (h_1 - h_F)^2 \\ (x - d)^2 + (y - h_F)^2 = (h_2 - h_F)^2. \end{cases}$$

Die erste Gleichung beschreibt den ausgeschnittenen Kreis des Kegels \mathfrak{K}_1 in der Ebene F_k , die zweite den des Kegels \mathfrak{K}_2 in der Ebene F_k . Nun zieht man die erste Gleichung

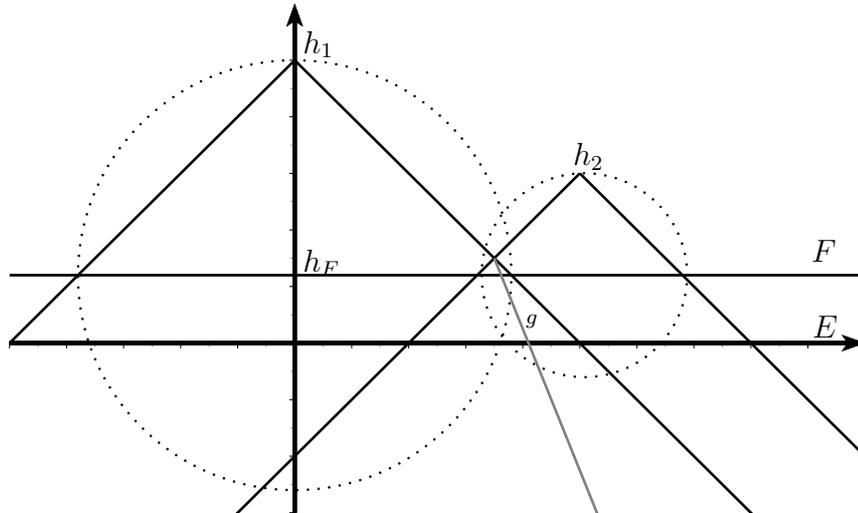


Abbildung 7.7.: Darstellung des Aufrisses sowie der Ebene F_k mit den in ihr liegenden Kreisen sowie der Gerade g

von der zweiten ab, sodass das äquivalente System

$$\begin{cases} x^2 + (y - h_F)^2 = (h_1 - h_F)^2 \\ (x - d)^2 - x^2 = (h_2 - h_F)^2 - (h_1 - h_F)^2 \end{cases}$$

entsteht. Auflösen der zweiten Gleichung und Umformung nach der Größe x liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} x &= \frac{(h_2 - h_F)^2 - (h_1 - h_F)^2 - d^2}{-2d} \\ &= h_F \left(\frac{h_2 - h_1}{d} \right) + \frac{h_1^2 - h_2^2 + d^2}{2d}. \end{aligned}$$

Betrachtet man abschließend die Zuordnung

$$x: h_F \mapsto h_F \left(\frac{h_2 - h_1}{d} \right) + \frac{h_1^2 - h_2^2 + d^2}{2d},$$

so erkennt man, dass durch die Vorschrift x eine lineare Funktion beschrieben wird, deren Graph eine Gerade ist. Daraus wird geschlossen, dass sämtliche Sehnen folglich in der Aufrissebene A auf Punkte abgebildet werden, die in dem Strahl g liegen, was zu zeigen war.⁸⁰

⁸⁰ Alternativ kann man auch die Gerade g auch aus der Bedingung berechnen, dass sie die Kreise in der Ebene E berühren. Auf diese Weise erhält man den Punkt S . Nun bestimmt man den Punkt A aus der Schnittbedingung der Kreise. Anschließend wählt man ein beliebiges Niveau zwischen den beiden Punkten A und S und ermittelt den Schnittpunkt Z der Zentralen der Kreise in

Es wird nun der Zusammenhang zwischen den Potenzgeraden der Grundkreise zweier Kreisegel, deren Höhen der Radien ihrer Grundkreise entsprechen, und deren Schnittebene untersucht. Der nächste Satz stellt diesen heraus. In Fiedlers *Cyklografie* liest man:

[...] [Die] Verbindungslinie der im Endlichen liegenden Schnittpunkte der Spuren der Kegel muss [...] die Spur der Ebene der Durchdringung sein. [Fie82a, S. 163]

In Artikel 123 heißt es:

Man sieht [...], dass die Spur der Ebene der Durchdringungen [...] die Potenzlinie oder Radicalaxe [das ist die Potenzgerade] der zugehörigen Kreise [...] [ist]. [Fie82a, ebd.]

Die Aussage dieser beiden Textauszüge Fiedlers sei im nächsten Satz festgehalten. Auch hier wird ein analytischer Beweis erarbeitet, der die senkrechte Parallelprojektion verwendet.

Satz 7.3. *Seien zwei verschiedene zyklografische, parallelachsige Doppelkreisegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 mit den Grundkreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 gegeben, welche in einer Ebene \mathcal{T} liegen. Die Potenzgerade $p_{1,2}$ der zu den Kreisegeln gehörigen Grundkreise ist die Schnittgerade bzw. Spur der Ebene E , in welcher die Schnittkurve der Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 liegt, mit der Ebene \mathcal{T} .*

Beweis. Zunächst sichert Satz 7.1, dass die Schnittkurve der Kegel tatsächlich in einer Ebene liegt. Man stelle sich den Aufriss und den Grundriss der beiden zyklografischen Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 vor. In der Abbildung 7.8 ist der im Folgenden beschriebene Sachverhalt dargestellt. Die Aufrissachse sei dabei parallel zur Zentrale M_1M_2 der zugehörigen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 gelegt und der Abstand der Zentrale zu dieser Achse sei d . Dieser Abstand sei so gewählt werden, dass

$$d > \max\{r_1, r_2\}$$

erfüllt ist. Damit ist gesichert, dass die Aufrissachse die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 weder schneidet noch berührt. Betrachtet man nun die Aufrisse der beiden Kegel, so erkennt man, dass sich je zwei projizierte Mantellinien eines Kegels mit dem jeweils anderen Kegel in zwei Punkten P und Q schneiden. Gesucht ist nun der Schnittpunkt U der Geraden $l = PQ$ mit der Aufrissachse. In der räumlichen Interpretation

diesem Niveau mit der Schnittsehne jener Kreise analog dem Fall der Ebene E . Abschließend zeigt man, dass die Koordinaten des Punktes Z die Gleichung der Geraden g erfüllen.

ist dieser Punkt der Durchstoßpunkt der Aufrissachse mit der Ebene E , also die Ebene, in der die Schnittkurve der beiden Kegel liegt. Um den Punkt U zu bestimmen, wird ein zweidimensionales Koordinatensystem so gewählt, dass die x -Achse der Aufrissachse entspricht. Die durch die betreffenden Kreise gelegte Zentrale M_1M_2 ist somit parallel zu dieser Achse. Die y -Achse ist die (links gelegene) Tangente an den Kreis \mathcal{K}_1 , welche im rechten Winkel zur x -Achse verläuft, sodass beide Kreise im zweiten Quadranten des Koordinatensystems liegen. Es müssen zwei Fälle betrachtet werden.

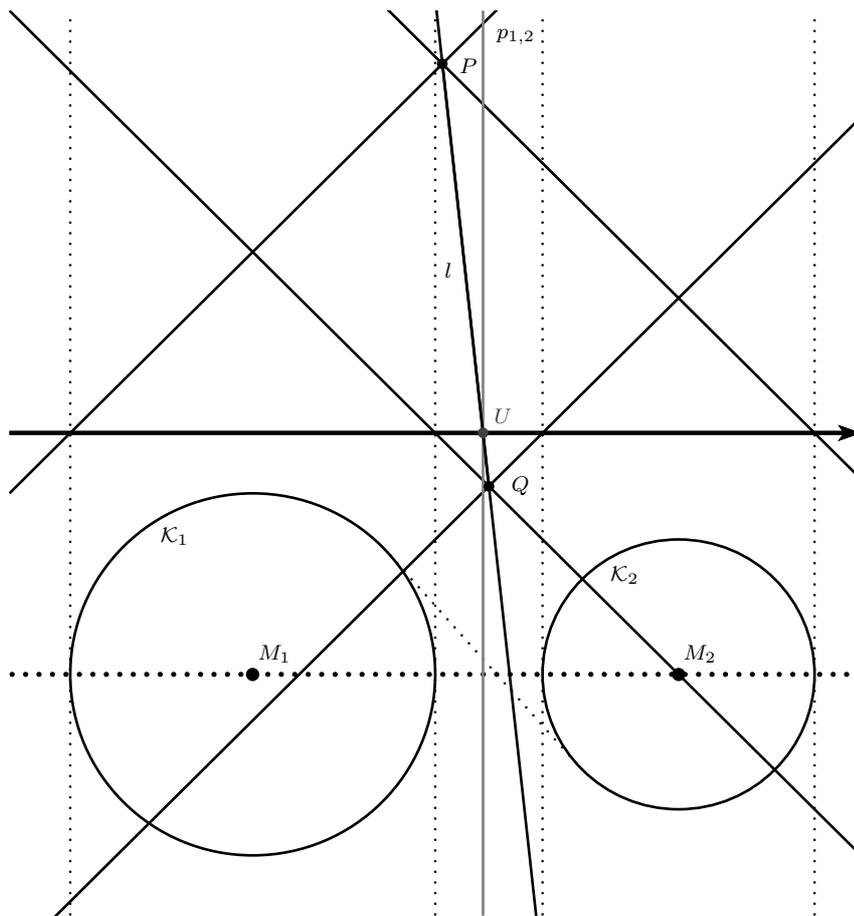


Abbildung 7.8.: Die Potenzgerade als Spurgerade der Schnittebene zweier Kegel im Grund- und Aufriss

Fall 1:

Im ersten Fall liegen beide Kegelspitzen im gleichen Halbraum, welcher durch die Grundrissebene getrennt wird. Das bedeutet im zweidimensionalen Modell, dass sie, wie in der Abbildung 7.8 dargestellt, im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegen. Der Mittelpunkt des Kreises \mathcal{K}_1 sei mit $M_1 = (x_1, y_1)$ und der Mittelpunkt des Kreises \mathcal{K}_2 sei mit $M_2 = (x_2, y_2)$ bezeichnet. Aufgrund der Lage des Koordinatensystems gilt für den Radius r_1 des Kreises \mathcal{K}_1 die Gleichheit $r_1 = x_1$; für den Kreis \mathcal{K}_2 sei der Radius mit r_2 bezeichnet. Die Spurgerade l der Ebene E , in welcher die Schnittkurve beider Kegel liegt, in der Aufrissebene ist durch die Schnittpunkte P und Q der senkrechten Parallelprojektionen der Mantellinien der beiden Kreiskegel gegeben. Damit kann man die Gerade l durch die Gleichung

$$l: y = \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \cdot x + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1}\right) \cdot \frac{r_2 + x_2}{2}$$

beschreiben, wenn die Radien der beiden Grundkreise verschieden sind⁸¹. Die Nullstelle der Gleichung l ergibt die x -Koordinate des gesuchten Punktes. Setzt man $y = 0$, für $x = x_U$ und löst die Gleichung nach x_U auf, so ergibt sich die Lösung

$$x_U = \frac{x_2^2 - r_2^2}{2 \cdot (x_2 - x_1)}. \quad (7.4)$$

Es werden jetzt die Potenzen des Punktes $U = (x_U, 0)$ in Bezug auf die beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 berechnet. Dazu sind gemäß der Definition aus Abschnitt 5.3 die Abstände des Punktes U zu den Kreismittelpunkten zu bestimmen. Der Pythagorassatz liefert den quadrierten Abstand vom Mittelpunkt M_1 zum Punkt U durch

$$\begin{aligned} d^2(M_1, U) &= d^2 + |x_U - x_1|^2 \\ &= d^2 + (x_U - x_1)^2. \end{aligned}$$

Der quadrierte Abstand vom Mittelpunkt M_2 zum Punkt U ist gegeben durch

$$\begin{aligned} d^2(M_2, U) &= d^2 + |x_2 - x_U|^2 \\ &= d^2 + (x_2 - x_U)^2. \end{aligned}$$

Diese quadrierten Abstände setzt man in die Formel zu Berechnung der Potenz ein,

⁸¹Für die vollständige Herleitung der Gleichung l des ersten Falls siehe Anhang A.1. Der Fall gleicher Radien ist trivial, da aus Symmetriegründen die Potenzgerade die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist.

woraus sich unter Anwendung der zweiten binomischen Formel

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{K}_1}(U) &= d^2(M_1, U) - r_1^2 \\ &= d^2 + x_U^2 - 2x_Ux_1 + x_1^2 - r_1^2 \\ &= d^2 + x_U^2 - 2x_Ux_1 \end{aligned}$$

ergibt, da $r_1 = x_1$ ist. Für die Potenz des Punktes U in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_2 erhält man

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{K}_2}(U) &= d^2(M_2, U) - r_2^2 \\ &= d^2 + x_U^2 - 2x_Ux_2 + x_2^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

Berechnet man die Differenz der beiden Potenzen $p_{\mathcal{K}_1}(U)$ sowie $p_{\mathcal{K}_2}(U)$ und fasst die Terme zusammen, so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{K}_1}(U) - p_{\mathcal{K}_2}(U) &= -2x_Ux_1 + 2x_Ux_2 - x_2^2 + r_2^2 \\ &= 2x_U(x_2 - x_1) - x_2^2 + r_2^2. \end{aligned}$$

Setzt man abschließend in diese Differenz das Ergebnis aus Gleichung (7.4) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{K}_1}(U) - p_{\mathcal{K}_2}(U) &= 2x_U(x_2 - x_1) - x_2^2 + r_2^2 \\ &= 2 \cdot \frac{x_2^2 - r_2^2}{2(x_2 - x_1)} \cdot (x_2 - x_1) - x_2^2 + r_2^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

woraus die Gleichheit

$$p_{\mathcal{K}_1}(U) = p_{\mathcal{K}_2}(U)$$

der Potenzen folgt. Da die Aufrissachse parallel zur Zentrale M_1M_2 der beiden Grundkreise gewählt wurde, folgt zusammen mit der Tatsache aus Satz 5.11, dass die Potenzgerade zweier Kreise lotrecht auf ihrer Zentralen steht, die Behauptung des Satzes für den ersten Fall.

Fall 2:

Der zweite Fall wird behandelt, indem man erneut zwei Kegel betrachtet, wovon der eine die Spitze im ersten und der andere im zweiten Quadranten besitzt. Analoge

Rechnungen zum ersten Fall liefert die Geradengleichung⁸²

$$l: y = -\frac{x_2 - x_1}{x_1 + r_2} \cdot x + \left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 + r_2}\right) \cdot \frac{-r_2 + x_1}{2}.$$

Es ergibt sich für den Punkt U erneut der x -Wert aus Gleichung (7.4).

Weitere möglichen Lagen der beiden Kreisegel müssen nicht betrachtet werden, da diese symmetrisch zu den behandelten Fällen sind. Deshalb ist die Aussage des Satzes vollständig bewiesen. \square

Man kann die soeben erworbene Erkenntnis aus Satz 7.3 nutzen, um eine Konstruktion der Spurgrade der Ebene, in der die Schnittkurve zweier zyklografischer Doppelkegel liegt, in der Tafel abzuleiten. Diese Ebene soll als *Schnittebene* bezeichnet werden.⁸³ Seien dafür zwei Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unterschiedlicher Mittelpunkte mitsamt ihrer jeweils zwei zugehörigen zyklografischen Kegel \mathfrak{K}_{1a} und \mathfrak{K}_{1b} sowie \mathfrak{K}_{2a} und \mathfrak{K}_{2b} gegeben. Die Kegel, welche den gleichen Indexbuchstaben besitzen, sollen ihre Spitze auf der gleichen Seite der Tafel Ebene haben. Schneidet man paarweise jeden dieser Kreisegel, so erhält man höchstens vier Ebenen

$$E_{1a,2a}, \quad E_{1a,2b}, \quad E_{1b,2a} \quad \text{sowie} \quad E_{1b,2b},$$

in denen die Schnittfiguren der Kegel liegen. Dabei bezeichnet die Ebene $E_{i,k}$ den Schnitt der Kreisegel \mathfrak{K}_i und \mathfrak{K}_k mit $i = 1a, 1b$ und $k = 2a, 2b$. Die folgende Konstruktion 7.4 zeigt, wie man die Spurgraden dieser Schnittebenen in der Tafel Ebene \mathcal{T} (sofern existent), in welcher ebenfalls die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 liegen, bestimmt.

Konstruktion 7.4 (Bestimmung der Spurgraden einer Schnittebene zweier parallelachsiger, zyklografischer Kegel). Man bestimme die Potenzgerade der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 gemäß Konstruktion 5.15.

Erläuterung zur Konstruktion. Die Korrektheit der Konstruktion ist unmittelbar klar, da sie auf der Aussage des Satzes 7.3 beruht.

Im nächsten Schritt wird untersucht, welche räumliche Lage die Ebene, in der die Schnittkurve zweier Kreisegel liegt, besitzt. Dabei wird sich zeigen, dass der folgende Satz gilt

Satz 7.5. *Seien zwei verschiedene parallelachsige, zyklografische Doppelkreisegel $\mathfrak{K}_1(P)$ und $\mathfrak{K}_2(Q)$ mit den zyklografischen Bildkreisen $Z(P) = \mathcal{K}_1$ und $Z(Q) = \mathcal{K}_2$*

⁸²Für die vollständige Herleitung der Gleichung l des zweiten Falls siehe Anhang A.2.

⁸³Es sei bemerkt, dass die *Schnittebene* nicht alle gemeinsamen Punkte der beiden Kegel umfasst, also keine Schnittebene im Sinne der eigentlichen Bezeichnung ist. Diese Bezeichnung wird hier dennoch verwendet, um nachfolgende Beschreibungen kurz zu fassen.

in der Ebene \mathcal{T} gegeben. Weiter sei $A_{1,2}$ ein Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise. Die Ebene, in der die Schnittkurve der beiden Kegel liegt, ist parallel zur Polarebene zum Punkt $A_{1,2}$ in Bezug auf den Kegel \mathfrak{K}_1 bzw. \mathfrak{K}_2 .

Beweis. Der Beweis erfordert eine Fallunterscheidung nach Lage der Kreisegel und wird in Analogie zum Beweis von Satz 7.3 erneut durch eine räumliche Betrachtung in Verbindung mit deren Auf- und Grundrissen betrachtet.

Fall 1:

Zunächst geht man davon aus, dass beide Kegelspitzen auf der gleichen Seite der Tafel liegen. Dann ist nach Satz 4.6 bzw. Korollar 4.7 das äußere Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 der Schnitt der Geraden PQ , welche durch die Kegelspitzen P und Q der zyklografischen Kegel verläuft, mit der Tafelebene \mathcal{T} , sofern die Kreisradien verschieden sind. Der Schnittpunkt sei, wie im Satz angegeben, mit $A_{1,2}$ bezeichnet. Verbindet man nun den Punkt $A_{1,2}$ mit dem Mittelpunkt M_1 des Kreises \mathcal{K}_1 zu einer Geraden, so erhält man zwei Schnittpunkte S_1 und S_2 mit der Peripherie dieses Kreises. Projiziert man nun die Punkte $A_{1,2}$, S_1 und S_2 senkrecht auf die zur Zentrale M_1M_2 parallel und zur Tafel senkrecht stehende Aufrissebene, so erhält man die Projektionen $A'_{1,2}$, S'_1 und S'_2 , welche auf der Aufrissachse liegen. Der Satz 5.5 garantiert, dass die Punkte $A'_{1,2}$, S'_1 , S'_2 sowie K als Durchstoßpunkt der Polaren zum Punkt $A_{1,2}$ in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_1 eine harmonische Gruppe bilden. Bezeichnet P_1 die senkrechte Parallelprojektion des Punktes P auf die Aufrissebene und betrachtet man die Geraden $P_1A'_{1,2}$, $P_1S'_1$, $P_1S'_2$ und P_1K in der Aufrissebene, so bilden diese ein harmonisches Strahlenbüschel. Die Schnittpunkte A und B der auf die Aufrissebene projizierten Mantellinien der Kegel $\mathfrak{K}_1(P)$ und $\mathfrak{K}_2(Q)$ bilden mit den projizierten Kegelspitzen P_1 und Q_1 ein Rechteck. Da die Schnittgerade der Schnittebene mit der Aufrissebene durch die Punkte A und B und die Gerade $P_1A'_{1,2}$ nach Konstruktion durch die beiden Kegelspitzen verläuft, schneiden sich die Geraden AB und $P_1A'_{1,2}$ genau in dem Punkt M , der die Diagonalen des Parallelogramms halbiert. Damit erhält man also eine harmonische Gruppe aus A , M und B nur unter Hinzunahme eines Fernpunktes \mathbf{F} , in welchem sich die Geraden KP_1 und AB »schneiden«. Dies folgt, da gemäß Hauptsatz 3.15 die Schnittpunkte jeder Gerade mit einem harmonischen Strahlenbüschel eine harmonische Gruppe bilden zusammen mit den Überlegungen zum Satz 3.3. Daraus ergibt sich, dass die Gerade KP_1 , also die Schnittgerade der Polarebene mit der Aufrissebene, parallel zur Geraden AB verläuft. Mit der Tatsache, dass die Polare, also die Spur der Polarebene in der Tafelebene \mathcal{T} , sowie die Potenzlinie, welche nach Satz 7.3 die Spurgrade der Schnittebene der beiden Kegel ist, senkrecht auf der Zentralen der zugehörigen Kreise steht, folgt die Behauptung für die Betrachtung des Kreises \mathcal{K}_1 .

Der Beweis verläuft analog für die Polarebene zum Ähnlichkeitspunkt in Bezug auf den Kreiskegel \mathfrak{K}_2 . Der Satz bleibt auch richtig, wenn die Kreise ineinanderliegen, sich schneiden oder sich berühren. Man muss jedoch zur Konstruktion des äußeren Ähnlichkeitspunktes von zwei Kreisen ausgehen, welche unterschiedliche Radien besitzen. Für Kreise gleicher Radien stimmt der Satz ebenfalls, wenn man das innere Ähnlichkeitszentrum in der Argumentation berücksichtigt. Abschließend sei die Skizze aus der Abbildung 7.9 zur Veranschaulichung der Argumentation. Darin sind die harmonischen Strahlen in grau dargestellt.

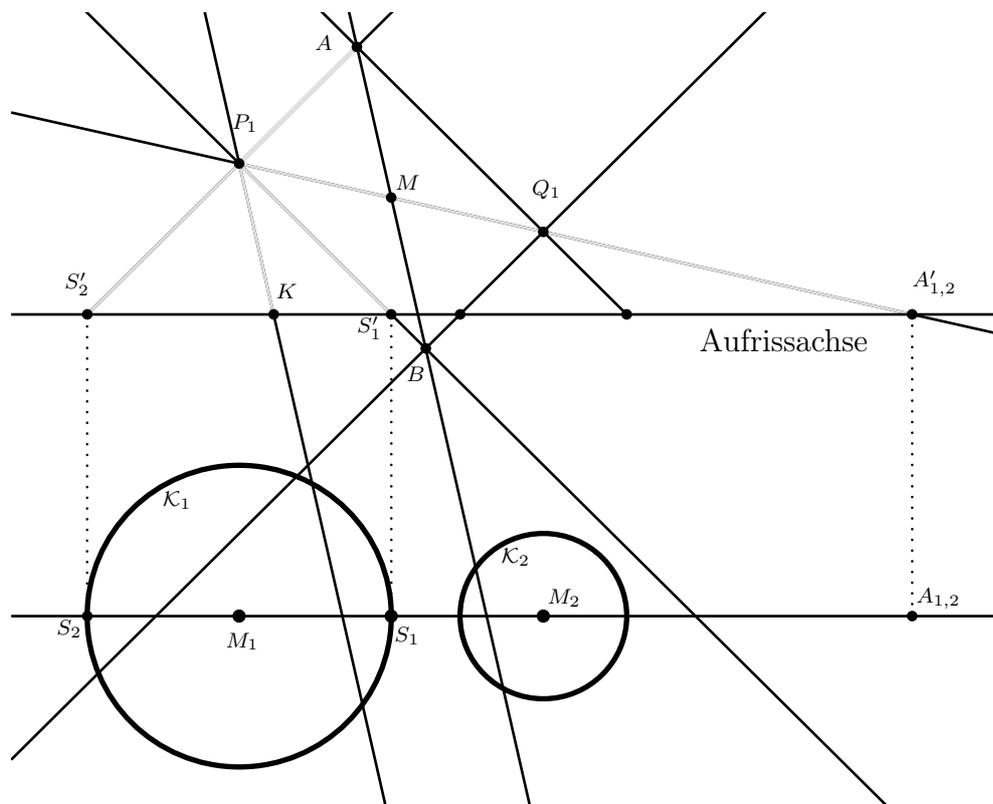


Abbildung 7.9.: Skizze zum Beweis von Satz 7.5 – Fall 1

Fall 2:

Nun geht man davon aus, dass die Kegelspitzen auf verschiedenen Seiten der Tafel Ebene liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man den Kegel \mathfrak{K}_2 wählen, der im Vergleich zum ersten Fall auf der anderen Seite der Tafel Ebene liegt. Die Argumentation aus dem ersten Fall wiederholt sich analog. Dabei verändert sich die Darstellung, wie in Abbildung 7.10 gezeigt.

Auch hier stellt sich heraus, dass die Gerade AB als Schnittgerade der Schnittebene in der Aufrissebene und die Gerade P_1K als Schnittgerade der Polarebene in

durch die Potenzgeraden $p_{i,j}$ der Kreise $Z(P_i)$ und $Z(P_j)$ mit $i, j = 1, 2, 3$ und $i \neq j$ gegeben sind. Bringt man nun zwei solcher Ebenen zum Schnitt, so entsteht eine Schnittgerade, sofern die Ebenen nicht ineinander oder parallel liegen. Durchdringt diese Schnittgerade einen der Kegel, so findet man die Punkte, welche auf allen Kegeln gemeinsam liegen. Dies entspricht auch der grafischen Interpretation, die bei der analytischen Behandlung des Apollonischen Berührproblems angegeben wurde (s. Abschnitt 7.3), und lässt sich anschaulich wie folgt nachvollziehen: Betrachtet man drei Kegel \mathfrak{K}_1 , \mathfrak{K}_2 und \mathfrak{K}_3 , welche als Mengen aufgefasst werden sollen, dann erhält man die Ebenen E_{12} und E_{13} , in denen die Schnittfigur liegt:

$$(\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2) \subset E_{12},$$

$$(\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_3) \subset E_{13}.$$

Sei dann G_{123} die Schnittgerade dieser beiden Ebenen (Existenz vorausgesetzt), also

$$G_{123} = E_{12} \cap E_{13}.$$

Da die Ebene E_{12} alle gemeinsamen Punkte der Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 sowie die Ebene E_{13} alle gemeinsamen Punkte der Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_3 enthält, liegen in der Gerade G_{123} die gemeinsamen Punkte der drei gegebenen Kegel. Schneidet man die Gerade G_{123} beispielsweise mit dem Kegel \mathfrak{K}_1 und erhält auf diese Weise mindestens einen Punkt P , so ist dieser ein Punkt, der in allen Kegeln liegt, denn:

- Die Gerade G_{123} liegt nach Konstruktion in der Ebene E_{12} , weshalb der Punkt P als gemeinsamer Punkt der Ebene E_{12} und des Kegels \mathfrak{K}_1 in der Schnitthyperbel der Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 liegt.
- Die Gerade G_{123} liegt nach Konstruktion in der Ebene E_{13} , weshalb der Punkt P als gemeinsamer Punkt der Ebene E_{13} und des Kegels \mathfrak{K}_1 in der Schnitthyperbel der Kegel \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_3 liegt.

Beides zusammen zeigt, dass der Punkt P in allen drei Kegeln zugleich liegt. Jetzt sollen die auf die Tafel senkrecht parallelprojizierten Schnittpunkte einer Gerade mit einem Kegel konstruiert werden, wobei die Existenz vorausgesetzt wird.

Es sei dazu $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{T}$ ein Raumpunkt, P_1 seine senkrechte Projektion auf die Tafel Ebene, $Z(P)$ sein zylografischer Bildkreis, $\mathfrak{K}(P)$ der Kegel der zylografischen Abbildung des Punktes P und $Q \in \mathcal{T}$ ein Punkt der Tafel. Nun verbinde man den Raumpunkt P mit dem Punkt Q der Tafel zur Gerade $g = PQ$. Weiter sei $H \in \mathcal{T}$ ein von Q verschiedener Punkt der Tafel, sodass die Punkte P_1 , H und Q nicht

kollinear sind, sowie h die Gerade, welche parallel zu g durch H verläuft. Je nach Lage des Punktes H existieren zwei Schnittpunkte $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ der Geraden h mit der Verlängerung des Kegels $\mathfrak{K}(P)$ über den Grundkreis $Z(P)$ hinaus.

Wie sich die auf die Tafel \mathcal{T} senkrecht projizierten Bilder $S_1^{(1)}$ und $S_1^{(2)}$ der Punkte $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ konstruieren lassen, beschreibt die nachfolgende

Konstruktion 7.6. Zunächst ziehe man die Gerade $g_1 = P_1Q$ und bestimme die zur Geraden g_1 parallel verlaufende Gerade h_1 durch den Punkt H . Anschließend zeichne man die Gerade $s = HQ$ und bezeichne ihre Schnittpunkte mit dem Kreis $Z(P)$ mit A und B . Die Schnittpunkte der beiden Geraden P_1A und P_1B mit der Geraden h_1 sind die gesuchten Punkte $S_1^{(1)}$ und $S_1^{(2)}$.

In den Abbildungen 7.11a) und 7.11b) sind exemplarisch die Konstruktionen für zwei mögliche Lagen der Punkte H und Q dargestellt.

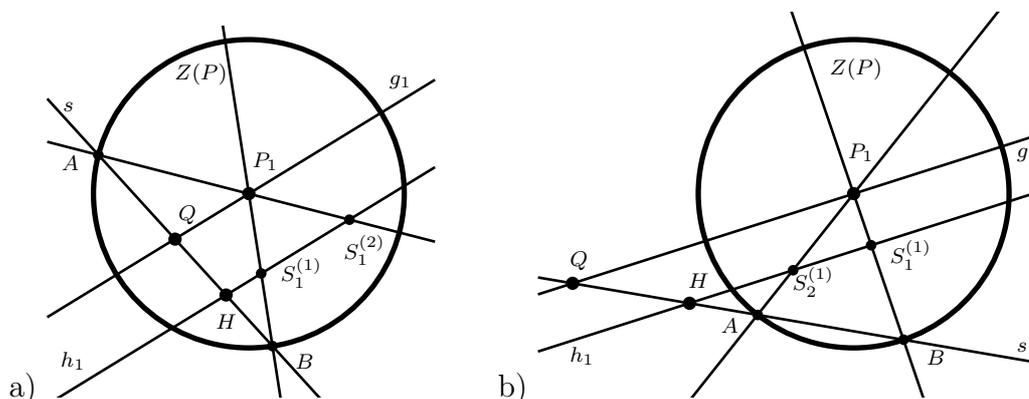


Abbildung 7.11.: Bestimmung der senkrechten Parallelprojektionen der Durchstoßpunkte einer Geraden durch einen Kegel

Erläuterung zur Konstruktion. Da die Parallelprojektion eine geradentreue Abbildung ist, muss die Gerade g_1 die senkrechte Parallelprojektion der Raumgeraden g auf die Tafel Ebene \mathcal{T} sein. Weiter ist bekannt, dass die Bilder paralleler Geraden bei paralleler Projektion parallel bleiben und umgekehrt. Aus diesem Grund ist die Gerade h_1 das Bild einer senkrechten Parallelprojektion einer zu g parallelen Geraden durch H . Um nachvollziehen zu können, dass die Konstruktion 7.6 tatsächlich die gesuchten Punkte liefert, stellt man sich eine Ebene E vor, welche die beiden Geraden g und h enthält. Ihre Spur mit der Tafel ist gegeben durch die konstruierte Gerade s , da die Ebene E die beiden Punkte Q und H enthalten muss (beide Punkte liegen auf den Geraden g und h). Da die Ebene E die Spitze des Kegels enthält und seinen Grundkreis schneidet, schneidet sie den Kegel ebenfalls in zwei Mantellinien. Diese

werden durch die Geraden P_1A und P_2B als die senkrecht projizierten Bilder dieser Mantellinien repräsentiert. Da die Gerade h in der Ebene E liegt und den Kegel schneidet, liegen die Schnittpunkte der Geraden h mit dem Kegel auf eben diesen Mantellinien. Die senkrecht projizierten Bilder dieser Punkte liegen demnach auf P_1A und P_2B . Also sind die Schnittpunkte $S_1^{(1)}$ und $S_1^{(2)}$ tatsächlich die gesuchten Punkte.

Mithilfe der vorherigen Konstruktion gelingt es, die Durchstoßpunkte von drei Kegeln zu bestimmen. Dazu seien drei Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 gegeben, sodass paarweise ihre äußeren und inneren Ähnlichkeitszentren existieren. Außerdem seien je einer der möglichen zwei zugehörigen zyklografischen Kegel \mathfrak{K}_1 , \mathfrak{K}_2 und \mathfrak{K}_3 gegeben. Es werden wieder die Verlängerungen der Kegel über die Grundkreise hinaus betrachtet.

Konstruktion 7.7 (Bestimmung der gemeinsamen Punkte der Kegelflächen). Man gehe wie folgt vor:

- Man konstruiere jeweils die äußeren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkte $A_{1,3}$ und $A_{2,3}$ bzw. $I_{1,3}$ und $I_{2,3}$ der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_3 sowie \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 (Konstruktion 3.4).
- Weiter bestimme man die Potenzgeraden $p_{1,3}$ und $p_{2,3}$ der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_3 (Konstruktion 5.15).
- Man bestimme die Polare $a_{1,3}$ zum Pol $A_{1,3}$ in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_3 und $a_{2,3}$ zum Pol $A_{2,3}$ in Bezug auf den Kreis \mathcal{K}_3 bzw. zu den inneren Ähnlichkeitszentren (Konstruktion 5.6).

Sei nun G_{123} die Schnittgerade zweier Schnittebenen E_{12} und E_{23} , in denen die Schnittkurven der Kegel \mathfrak{K}_1 , \mathfrak{K}_2 und \mathfrak{K}_3 liegen. Diese Schnittebenen sind gemäß der Sätze 7.3 und 7.5 durch die Potenzgeraden $p_{1,2}$ und $p_{2,3}$ als ihre Spurgeraden in der Ebene und durch die Polarebenen, die zu den Schnittebenen parallel liegen, festgelegt. Führt man nun die Konstruktion 7.6 durch, so lassen sich die Schnittpunkte der Geraden G_{123} mit einem der Kegel \mathfrak{K}_1 , \mathfrak{K}_2 und \mathfrak{K}_3 (je nach Existenz) bestimmen. Man erhält dadurch die senkrecht projizierten Bilder A und B der Durchstoßpunkte.

Erläuterung zur Konstruktion. Die jeweils konstruierten Potenzgeraden sind die Spuren der Schnittebenen zweier Kegel, wobei die Schnittebenen parallel zur jeweiligen Polarebene liegen. Deshalb ist die Schnittgerade G_{123} zweier Schnittebenen parallel zur Schnittgerade der zugehörigen Polarebenen. Der Durchstoßpunkt der Schnittgeraden G_{123} in der Tafelenebene \mathcal{T} wird also erhalten, indem man die Potenzlinien

der beiden Kreise schneidet. Nun wendet man die Konstruktion 7.6 an, um die gesuchten parallelprojizierten Schnittpunkte der Schnittgeraden G_{123} mit den Kegeln zu erhalten. Die auf diese Weise bestimmten Punkte bilden die Mittelpunkte der gesuchten Berührungskreise. Verbindet man sie mit einem der Kreismittelpunkte M_i der gegebenen Kreise, so erhält man mit dem zugehörigen Kreis einen Schnittpunkt S . Der Radius eines Berührungskreises ist dann gegeben durch $d(M_i, S)$.

Somit lässt sich verkürzt die Strategie zur Lösung des Apollonischen Berührproblems angeben, welche im Abschnitt 7.4.3 am konkreten Beispiel verdeutlicht werden soll: Man betrachte die drei vorgegebenen Kreise und je einen zugehörigen zyklografischen Kegel. Anschließend bestimme man die Ähnlichkeitszentren zu je zwei der Kreise und fasst diese als Pole auf. Dann kann man die zugehörigen Polaren in Bezug auf je einen der Kreise angeben. Direkt aus der Definition folgt, dass die Polare die Spurgerade der Polarebene, welche zum entsprechenden Kegel und Ähnlichkeitspunkt gehört, ist. Anschließend bestimme man die Potenzgeraden zu den Ähnlichkeitspunkten der zugehörigen Kreise, welche die Spurgeraden der Schnittebenen in der räumlichen Interpretation darstellen. Abschließend verwendet man die Tatsache, dass die Spurgeraden der Polarebenen und die Spurgeraden der Schnittebenen aufgrund der Parallelität der Ebenen parallel sind, zusammen mit der Konstruktion 7.7, um die Schnittpunkte der Schnittgeraden der Schnittebenen mit den Kegeln zu ermitteln und auf die Weise die Schnittpunkte mit den Kegeln zu finden, deren senkrechte Projektionen auf die Tafelenebene die Mittelpunkte der Lösungskreise sind.

7.4.2. Die Lösung des Apollonischen Problems

Die im Abschnitt 7.4.1 dargestellten Hilfskonstruktionen ermöglichen es, die Lösungskreise für das Apollonische Berührproblem zu bestimmen.

Zunächst beachtet man, wie am Anfang des Kapitels beschrieben, die unterschiedlichen Lagen der zyklografischen Kegel, welche die vorgegebenen Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 beschreiben. Mindestens einer der Kreise habe einen anderen Radius als die beiden anderen Kreise, dieser Kreis sei \mathcal{K}_3 . Man kann mit Konstruktion 7.7 die Durchstoßpunkte – sofern existent – der Kegel bestimmen. Es sind also vier Kegellagen zu untersuchen. In einer dieser Lagen befindet ein Kegel auf der jeweils anderen Seite der Tafelenebene im Vergleich zu den verbleibenden zwei Kegeln. Beispielsweise ist die Konstellation

$$\mathfrak{K}(P_1) \text{ und } \mathfrak{K}(P_2) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_3)$$

zu betrachten. In diesem Fall lässt sich das innere Ähnlichkeitszentrum in Konstruktion 7.4 zu den Kreisen \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 bestimmen und die Konstruktion durchführen. Die weiteren verbleibenden zwei Kegellagen der zyklografischen Kegel müssen ebenso behandelt werden.

7.4.3. Beispiel

Es soll im Folgenden das Beispiel aus Absatz 7.3.2 erneut diskutiert werden. Dort wurde eine Lösung des Apollonischen Berührproblems anhand drei konkret vorgegebener Kreise gezeigt. Die Erkenntnisse aus Abschnitt 7.4 zur elementargeometrischen Lösung des Apollonischen Berührproblems werden nun verwendet, um seine Lösung am Beispiel zu konstruieren.

Es wird damit begonnen, die Konstellation der zyklografischen Kegel \mathfrak{K}_{1a} , \mathfrak{K}_{2a} und \mathfrak{K}_{3a} auf der gleichen Seite der Tafel zu betrachten. Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden ihrer Spitzen mit der Tafel bilden also die äußeren Ähnlichkeitspunkte der jeweiligen Kreise \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 . Man beachte, dass die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in der Beispielsituation gleiche Radien haben. Deshalb besitzen sie kein äußeres Ähnlichkeitszentrum (bzw. es ist ein Fernpunkt). Dies führt dazu, dass man nicht die maximal mögliche Anzahl von acht Lösungskreisen erhält. Nun geht man schrittweise vor:

Schritt 1:

Zuerst wird die Konstruktion 3.4 durchgeführt. Dazu werden paarweise die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_3 sowie die Kreise \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 betrachtet. Da der Kreis \mathcal{K}_3 einen anderen Radius als die verbleibenden zwei Kreise besitzt, existieren die durch die Konstruktion zu bestimmenden Ähnlichkeitszentren. Die Konstruktion 3.4 liefert dann den besagten äußeren Ähnlichkeitspunkt $A_{1,3}$ der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_3 sowie den äußeren Ähnlichkeitspunkt $A_{2,3}$ der Kreise \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 . Auf diese Weise entsteht die Darstellung der Konstruktion, welche in der Abbildung 7.12 gezeigt ist. Die dort in grau und gestrichelt dargestellten Geraden sind Hilfsgeraden zur Bestimmung der äußeren Ähnlichkeitszentren.

Schritt 2:

Da sich die im ersten Schritt konstruierten Ähnlichkeitszentren beide auf den Kreis \mathcal{K}_3 beziehen, werden die Punkte $A_{1,3}$ und $A_{2,3}$ als Pole zum Kreis \mathcal{K}_3 aufgefasst. Jetzt führt man die Schritte aus der Konstruktion 5.6 aus, um die entsprechenden Polaren $a_{1,3}$ und $a_{2,3}$ zu bestimmen.

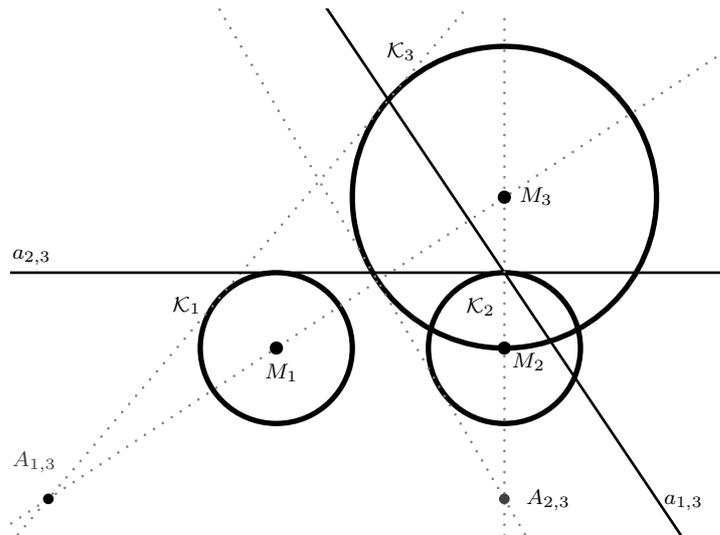


Abbildung 7.12.: Erster Schritt der Konstruktion

Zudem sind die Potenzgeraden $p_{1,3}$ und $p_{2,3}$ für die Kreispaaare \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_3 sowie \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 zu bestimmen. Da sich die Kreise \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 in diesem Beispiel schneiden, ist gemäß der aus Korollar 5.12 folgenden Konstruktion 5.15(ii) die Potenzgerade $p_{2,3}$ durch die zwei jeweiligen Kreisschnittpunkte gegeben. Für die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_3 ist die Potenzgerade $p_{1,3}$ mithilfe der Konstruktion 5.15(iii) zu bestimmen.

Es ergibt sich nach Entfernung der Hilfslinien aus der Abbildung 7.12 die folgende Situation, die in der Abbildung 7.13 illustriert ist. Dort beschreiben die Punkte B_1 und B_2 die Berührungspunkte einer inneren gemeinsamen Tangente der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_3 und M den Mittelpunkt der grau gepunkteten Hilfsstrecke $\overline{B_1B_2}$. Die Punkte S_1 und S_2 sind die Schnittpunkte der Kreise \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 . Sie dienen der Konstruktion der Potenzgerade der betroffenen Kreise. Weiter beschreibt der Punkt A den Schnittpunkt der beiden Potenzgeraden $p_{1,3}$ und $p_{2,3}$ und der Punkt B den Schnittpunkt der Polaren $a_{1,3}$ und $a_{2,3}$.

Schritt 3:

Im letzten Schritt werden die Mittelpunkte E und F der Lösungskreise \mathcal{K}_{L2} und \mathcal{K}_{L1} ermittelt. Dazu sind die gemeinsamen Punkte der Kegelflächen zu bestimmen. Hierzu führt man die Konstruktion 7.6 durch.

Dazu verbindet man die Schnittpunkte A und B der Potenzgeraden und Polaren, diese Gerade entspricht in der Konstruktion 7.6 der Geraden s . Außerdem fasst man die Gerade M_3B als die in jener Konstruktionsbeschreibung definierte Gerade g_1 auf. Die Gerade h_1 ist mit der zu M_3B parallelen Geraden durch den Punkt A

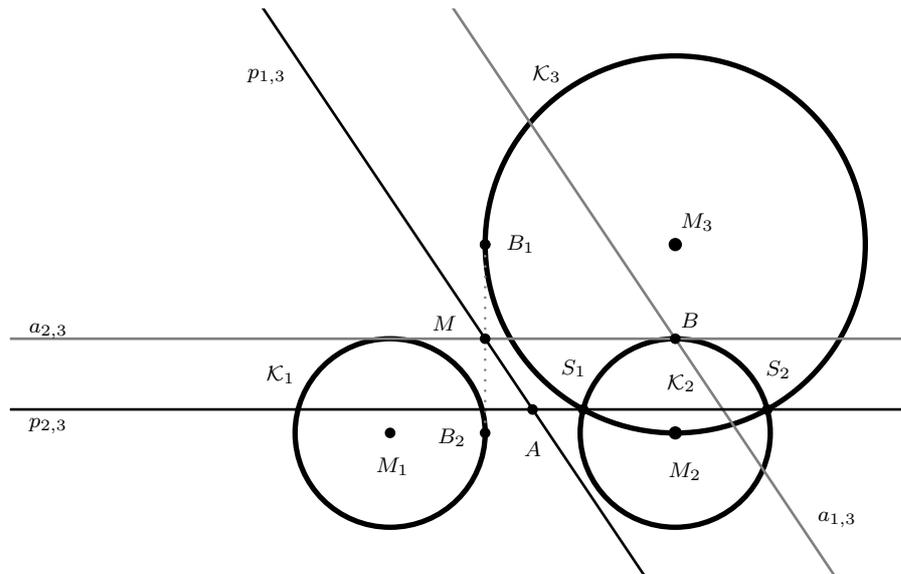


Abbildung 7.13.: Zweiter Schritt der Konstruktion

zu identifizieren. Die Geraden, die durch die Schnittpunkte der Geraden AB und dem Mittelpunkt M_1 des Kreises \mathcal{K}_1 festgelegt sind, schneiden die zur Geraden M_3B parallele Gerade durch den Punkt A in zwei Punkten E und F , welches die gesuchten Mittelpunkte der Lösungskreise sind.

Die gepunkteten Geraden in der Abbildung 7.14 zeigen die dazu notwendigen Hilfsgeraden. Verbindet man den Punkt E mit dem Punkt M_1 und bezeichnet den zweiten Schnittpunkt der Geraden EM_1 mit dem Kreis \mathcal{K}_1 von E aus mit X und bildet die Strecke $\overline{FM_1}$ und bezeichnet ihren Schnittpunkt mit dem Kreis \mathcal{K}_1 mit Y so ergeben sich die Lösungskreise

$$\mathcal{K}_{L1}(F, d(F, Y))$$

und

$$\mathcal{K}_{L2}(E, d(E, X)).$$

Beide Kreise sind in der Abbildung 7.14 in grau dargestellt.

Somit sind zwei Lösungskreise gefunden. In Abschnitt 7.3.2 hat man gesehen, dass dieses Beispiel noch zwei weitere Lösungskreise besitzt. Diese erhält man auf dieselbe Weise, wie dort beschrieben, also durch Konstruktion der zyklografischen

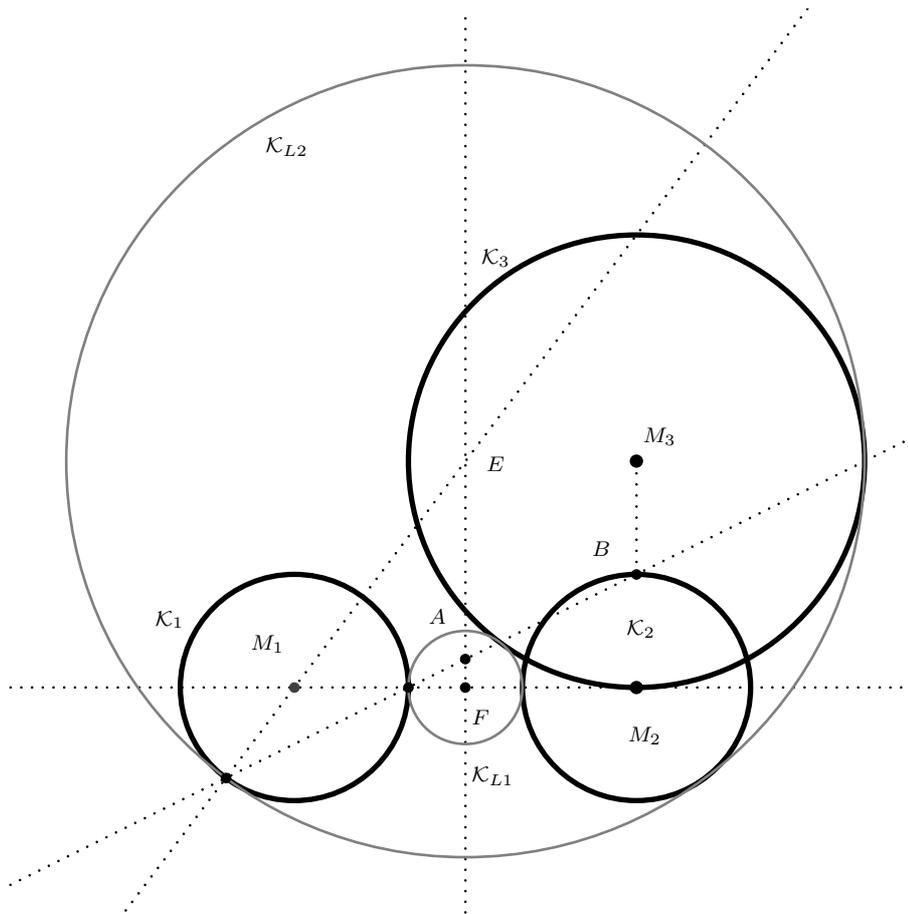


Abbildung 7.14.: Letzter Schritt der Konstruktion

Bilder der gemeinsamen Punkte der Kreiskegel

$$\mathfrak{K}(P_1) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_2) \text{ und } \mathfrak{K}(Q_3).$$

In diesem Fall liegen die Kreiskegel der Kreise \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 wieder auf der gleichen Seite der Tafel, sodass bei der Konstruktion der Ähnlichkeitszentren wieder das äußere Zentrum erzeugt wird. Dieser Teil der gesamten Lösungskonstruktion bleibt deshalb unverändert. Jedoch sind nun die Kegelspitzen der zyklografischen Kegel der Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 auf verschiedenen Seiten der Tafel, weshalb von diesen Kreisen das innere Ähnlichkeitszentrum zu konstruieren ist. Das führt auf eine andere Potenzgerade und eine andere Polare. Deshalb erhält man die Mittelpunkte der zwei verbleibenden Lösungskreise \mathcal{K}_{L3} und \mathcal{K}_{L4} .

In der Abbildung 7.15 sind die Lösungskreise in grau dargestellt. Ebenfalls in grau sind die Polaren und Potenzgeraden. Die gepunkteten Linien sind die Hilfsgeraden zur Konstruktion der senkrecht auf die Tafel projizierten gemeinsamen Punkte der

zyklografischen Kegel.

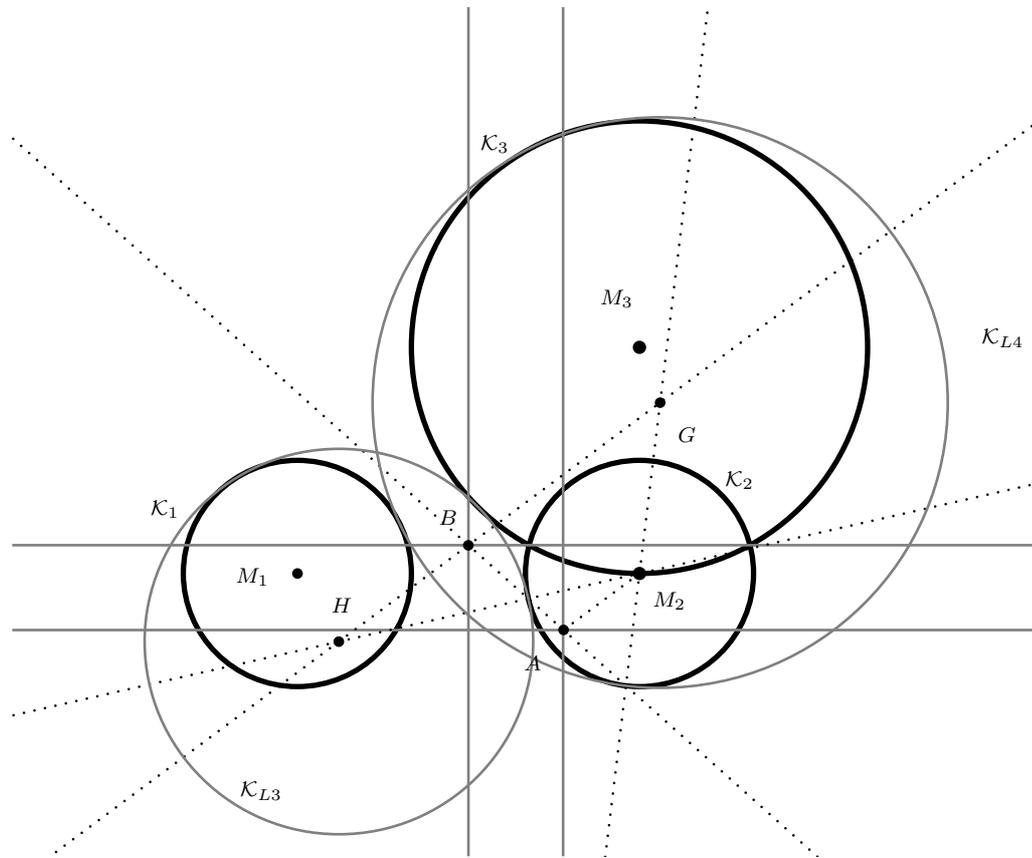


Abbildung 7.15.: Die Konstruktion der Lösungskreise \mathcal{K}_{L3} und \mathcal{K}_{L4}

Wie man bereits in der analytischen Behandlung des Beispiels gesehen hat, gibt es keine weiteren Lösungen, womit das Beispiel vollständig behandelt ist.

8. Die Kreisschnittprobleme

Bei Steiner finden sich Hinweise darauf, dass er ausführlich an der Kreisschnitttheorie (bspw. im Werk [Ste31]) gearbeitet hat. Konkret bedeutet das, dass er geometrische Aufgaben untersuchte, die das Ziel haben, Kreise zu konstruieren, welche andere Kreise unter bestimmten Winkeln schneiden. Man stelle sich dazu einen gegebenen Kreis vor. Eine Grundaufgabe ist jetzt, die Gesamtheit aller Kreise zu bestimmen, welche den gegebenen Kreis \mathcal{K} unter einen bestimmten festgelegten Winkel α bzw. dem durch diesen Winkel gegebenen Kosinuswert $\cos(\alpha)$ schneiden. Fiedler erörtert dieses Problem ebenfalls in seiner *Cyklografie*. Dies soll in diesem Kapitel zumindest in den Grundlagen eingeführt werden. Man wird sehen, welcher Zusammenhang zwischen Winkelschnittproblemen und Rotationshyperboloiden besteht.

8.1. Die Schnittwinkel von Kreisen

Bereits im Abschnitt 5.2.2 wurde definiert, was unter dem Schnittwinkel σ zweier sich schneidender Kreise zu verstehen ist. Dazu betrachtet man einen der beiden gemeinsamen Punkte S zweier sich schneidender Kreise, bestimmt zu diesen beiden Kreisen die zugehörigen Tangenten t_1 und t_2 im Punkt S . Den Schnittwinkel σ beider Kreise erhält man nun, indem man den kleineren von den Tangenten t_1 und t_2 eingeschlossenen Winkel bestimmt. Sind die Tangenten zueinander im rechten Winkel, so ist der Schnittwinkel $\sigma = 90^\circ$ und man sagt, dass sich die Kreise orthogonal schneiden. Es soll jetzt eine Schnittwinkelgleichung ausgearbeitet werden, mit deren Hilfe der Schnittwinkel zu zwei Kreisen $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radien r_1 und r_2 bestimmt werden kann. Es gilt nun der folgende

Satz 8.1. *Für zwei sich schneidende Kreise $\mathcal{K}_1(M_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(M_2, r_2)$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radien r_1 und r_2 gilt für ihren Schnittwinkel σ die Gleichung*

$$-2r_1r_2 \cos(\sigma) = r_1^2 + r_2^2 - c^2$$

bzw. umgeformt und unter Beachtung, dass $0^\circ < \sigma \leq 90^\circ$ gilt,

$$\sigma = 180^\circ - \arccos\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2r_1r_2}\right).$$

Dabei beschreibt die Zahl $c := d(M_1, M_2)$ die Zentraldistanz, also den Abstand der beiden Mittelpunkte M_1 und M_2 zueinander.

Beweis. Der Beweis lässt sich mithilfe des Kosinussatzes führen. Dazu betrachte man die Abbildung 8.1, in der zwei sich schneidende Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 dargestellt sind. Es sei S einer der beiden Schnittpunkte.

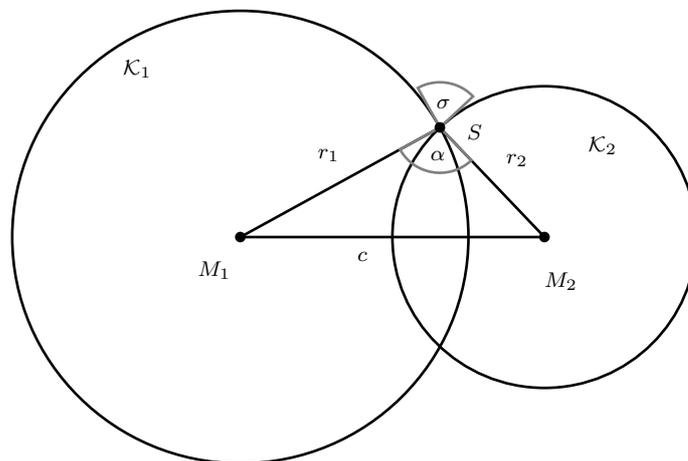


Abbildung 8.1.: Skizze zum Beweis von Satz 8.1

Man betrachte das Dreieck $\triangle M_1SM_2$ sowie den durch die Geraden SM_1 und SM_2 im Scheitelpunkt S eingeschlossenen Winkel α . Jetzt erhält man mit dem Kosinussatz die Gleichung

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\alpha).$$

Wenn nun σ der Schnittwinkel der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 ist, dann gilt mit ähnlichen Überlegungen wie denen aus dem Beweis zum Satz 6.14 die Gleichung

$$\alpha + \sigma = 180^\circ \iff \alpha = 180^\circ - \sigma.$$

Auf diese Weise erhält man folgende Gleichungen; es gilt

$$\begin{aligned} c^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\alpha) \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(180^\circ - \sigma) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\sigma), \end{aligned} \tag{8.1}$$

wenn man beachtet, dass für alle Winkel σ die Gleichung $\cos(180^\circ - \sigma) = -\cos(\sigma)$ erfüllt ist. Insgesamt entsteht daraus durch äquivalente Umformung

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\sigma) \iff -2r_1r_2 \cos(\sigma) = r_1^2 + r_2^2 - c^2,$$

also die behauptete Schnittwinkelgleichung, welche sich bereits im Umformungsschritt (8.1) nach dem Winkel σ auflösen lässt und die Gleichung

$$\sigma = 180^\circ - \arccos\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2r_1r_2}\right).$$

ergibt. □

Auf die oben dargestellte Weise kann man den Schnittwinkel zweier Kreise bestimmen, wenn die Länge der Radien und die Zentraldistanz bekannt ist.

8.2. Kreisschnitte unter bestimmten Winkeln in der Zyklografie

Im Abschnitt 6.2 wurde das einschalige Rotationshyperboloid als Regelfläche eingeführt. Demnach lässt es sich als Schar von Geraden interpretieren, wie im Satz 6.3 nachgewiesen wurde. Man erhält es außerdem durch Rotation einer gleichseitigen Hyperbel um ihre Nebenachse. Die Korollare 6.28 und 6.29 zeigten, welche Bedeutung das Rotationshyperboloid für die Zyklografie hat. So wie der zyklografische Kreiskegel die Diskussion von Kreisberührproblemen mithilfe der Zyklografie ermöglicht, so dient das Rotationshyperboloid dazu, Kreise zu bestimmen, die einen vorgegebenen Kreis unter rechten Winkeln schneiden.

Dies soll wie folgt erweitert werden: Ziel ist es, zu einem fest vorgegebenen Kreis alle Kreise zu finden, die den festgelegten in einem bestimmten Winkel schneiden. Ähnlich wie in der Konstruktionsaufgabe aus Abschnitt 4.5.4, in der Kreise einer linearen Kreisreihe konstruiert werden sollten, die eine vorgegebene Gerade unter einem festen Winkel schneiden, der durch den Kosinuswert des Winkels gegeben ist,

soll dieser Winkel nachfolgend ebenfalls als \cos -Wert bestimmt sein. Die Konstruktion bzw. Lösung soll dabei unter Verwendung der Zyklografie geleistet werden. Man muss also diejenige Raumfigur \mathfrak{H} finden, deren sämtliche Punkte $P \in \mathfrak{H}$ zyklografische Bildkreise $Z(P)$ besitzen, die einen vorgegebenen Kreis in einem bestimmten Winkel schneiden. Die nachfolgenden Ideen beruhen in ihren Ansätzen auf der Quelle [Fie81b, S. 86-88], werden aber auch in Fiedlers *Cyklographie* erörtert (s. [Fie82a, S. 105ff.]).

Es liegt aufgrund der Tatsache, dass die Punkte des Rotationshyperboloids zyklografische Bildkreise besitzen, die den Kehlkreis im rechten Winkel schneiden, nahe, auch in diesem Fall das Rotationshyperboloid genauer zu untersuchen. Zudem enthält die hergeleitete Schnittwinkelgleichung aus Satz 8.1 den Term

$$r_1^2 + r_2^2 - c^2,$$

der einem Teil der Gleichung eines Rotationshyperboloids gleicht. Tatsächlich liefert das Hyperboloid die Lösung der obigen Schnittwinkelaufgabe, wie im Folgenden nachvollzogen werden soll.

Man betrachte eine Hyperbel, die durch den Schnitt zweier gerader parallelachsiger Doppelkreisegel mit Öffnungswinkeln von 90° und zur Tafel lotrechten Achsen entsteht, deren Spitzen in der Tafel Ebene liegen. Diese Hyperbel lässt sich nach entsprechender Umlegung und Aufrichtung durch die Gleichung

$$\mathcal{H}: x^2 - y^2 = 1$$

beschreiben, wie man im Kapitel 6 gelernt hat.

Nachfolgend wird die Idee nun zweidimensional motiviert und dann auf den räumlichen Fall übertragen. Dazu wird die Hyperbel in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem untersucht.

Man wählt zunächst zwei verschiedene Punkte $P = (x, y)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ auf der Hyperbel \mathcal{H} . Durch Fällen des Lotes im Punkt P_1 auf die y -Achse erhält man den Lotfußpunkt M . Nun wird ein Kreis $\mathcal{K}_S(M, d(M, P_1))$ definiert, dessen Mittelpunkt im Punkt M liegt und dessen Radius dem Abstand des Punktes M zum Punkt P_1 entspricht. Liegt der Punkt P_1 in einem der Scheitel der Hyperbel, so ist der Kreis \mathcal{K}_S gerade der Scheitelkreis der Hyperbel \mathcal{H} . Mithilfe des Punktes P erhält man einen Kreis $\mathcal{K}(O, d(O, P))$, indem man den Lotfußpunkt O auf der Geraden MP_1 zum Lot dieser Geraden durch den Punkt P bestimmt. Die Abbildung 8.2 zeigt die beiden durch die Punkte P und P_1 sowie die Hyperbel \mathcal{H} bestimmten Kreise.

Der Kreis \mathcal{K}_S sei nun fest. Jetzt wird gezeigt, dass unabhängig von der Wahl des

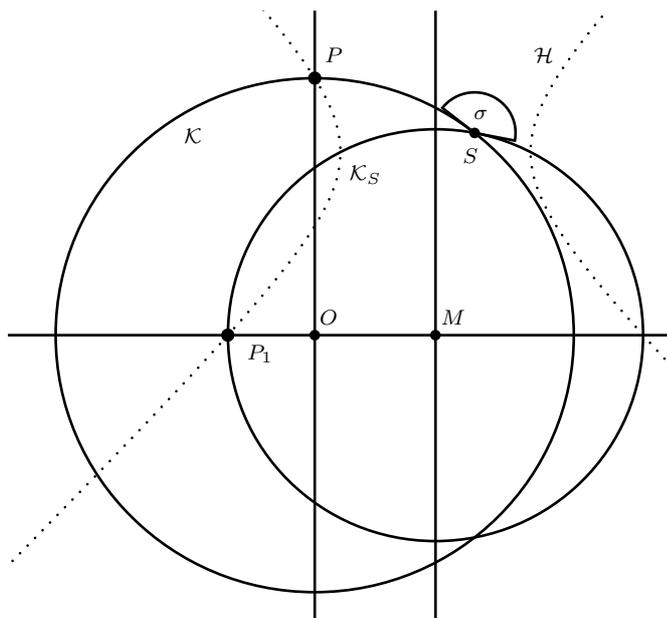


Abbildung 8.2.: Hilfsskizze zur Herleitung des Schnittwinkels zweier Kreise definiert durch Hyperbelpunkte

Punktes P auf der Hyperbel \mathcal{H} der Schnittwinkel der Kreise \mathcal{K}_S und \mathcal{K} bis auf eine Verschiebung von 180° gleich ist – dies wird unten genauer erläutert.

Der Radius des Kreises \mathcal{K} beträgt

$$r = d(P, O) = |y - y_1|,$$

wie man leicht der Abbildung 8.2 entnimmt. Die Zentraldistanz c der beiden Kreise \mathcal{K}_S und \mathcal{K} ergibt sich zu

$$c = d(O, M) = |x - 0| = |x|;$$

der Radius des Kreises \mathcal{K}_S beträgt

$$r_S = d(P_1, M) = |x_1|.$$

Diese Gleichungen lassen sich in die Schnittwinkelformel aus Satz 8.1 einsetzen und durch Auflösen der Beträge sowie durch Anwendung der dritten binomischen Formel

wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 -2rr_S \cos(\sigma) &= r_S^2 + r^2 - c^2 \\
 &= |x_1|^2 + |y - y_1|^2 - |x|^2 \\
 &= x_1^2 + |y - y_1|^2 - x^2.
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Da die Punkte $P = (x, y)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ auf der Hyperbel liegen, erfüllen sie die Hyperbelgleichung, weshalb die beiden Gleichungen

$$x^2 - y^2 = 1$$

und

$$x_1^2 - y_1^2 = 1$$

gelten. Setzt man sie gleich, so erhält man

$$x^2 - y^2 = x_1^2 - y_1^2 \iff x_1^2 - x^2 = y_1^2 - y^2.$$

Dieses Ergebnis kann nun in die Gleichung (8.2) eingesetzt und diese weiter vereinfacht werden. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + |y - y_1|^2 - x^2 &= x_1^2 - x^2 + |y - y_1|^2 \\
 &= y_1^2 - y^2 + (y - y_1)^2 \\
 &= (y_1 - y)(y_1 + y) + (y - y_1)^2.
 \end{aligned}$$

Abschließend ergibt sich

$$\begin{aligned}
 -2rr_S \cos(\sigma) &= 2|y - y_1||x_1| \cos(\sigma) \\
 &= (y_1 - y)(y_1 + y) + (y - y_1)^2.
 \end{aligned}$$

Man erhält daraus

$$\begin{aligned}
 \cos(\sigma) &= -\frac{(y_1 - y)(y_1 + y) + (y - y_1)^2}{2|y - y_1||x_1|} \\
 &= \begin{cases} -\frac{(y_1 - y)(y_1 + y) + (y - y_1)^2}{2(y - y_1)|x_1|}, & \text{wenn } y > y_1 \\ \frac{(y_1 - y)(y_1 + y) + (y - y_1)^2}{2(y - y_1)|x_1|}, & \text{wenn } y < y_1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -\frac{-(y_1 + y) + (y - y_1)}{2|x_1|}, & \text{wenn } y > y_1 \\ \frac{-(y_1 + y) + (y - y_1)}{2|x_1|}, & \text{wenn } y < y_1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -\frac{-2y_1}{2|x_1|}, & \text{wenn } y > y_1 \\ \frac{-2y_1}{2|x_1|}, & \text{wenn } y < y_1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{y_1}{|x_1|}, & \text{wenn } y > y_1 \\ -\frac{y_1}{|x_1|}, & \text{wenn } y < y_1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Damit kann man im letzten Schritt den Winkel berechnen, mit dem sich beide Kreise schneiden. Man hat dann insgesamt

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{y_1}{x_1}\right), & \text{wenn } (y > y_1 \wedge x_1 \geq 0) \vee (y < y_1 \wedge x_1 < 0) \\ \arccos\left(-\frac{y_1}{x_1}\right), & \text{wenn } (y > y_1 \wedge x_1 < 0) \vee (y < y_1 \wedge x_1 \geq 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{y_1}{x_1}\right), & \text{wenn } (y > y_1 \wedge x_1 \geq 0) \vee (y < y_1 \wedge x_1 < 0) \\ 180^\circ - \arccos\left(\frac{y_1}{x_1}\right), & \text{wenn } (y > y_1 \wedge x_1 < 0) \vee (y < y_1 \wedge x_1 \geq 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

für den Schnittwinkel σ . Es fällt auf, dass der Winkel nicht von der Wahl der Punktes P auf der Hyperbel \mathcal{H} abhängt, sofern der Punkt P oberhalb der Geraden P_1M liegt. Liegt er unterhalb dieser Geraden, so muss der Schnittwinkel der Kreise \mathcal{K} , die durch Punkte oberhalb der Geraden MP_1 erhalten werden, von 180° subtrahiert werden, um den Schnittwinkel dieser Kreise zu bekommen. Man hält das Ergebnis obiger Überlegungen in einem Satz fest:

Satz 8.2. Sei $\mathcal{H}: x^2 - y^2 = r^2$ mit $r > 0$ die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, $P(x, y)$ und $P_1(x_1, y_1)$ seien zwei verschiedene Punkte auf ihr. Weiter sei M der Lotfußpunkt auf der Nebenachse der Hyperbel \mathcal{H} durch den Punkt P_1 ; der Punkt O sei der Schnittpunkt des Lotes durch den Punkt P zur Geraden MP_1 mit der Geraden MP_1 . Die durch

$$\mathcal{K}_S(M, d(P_1, M))$$

mit dem Radius $r_S = d(P_1, M)$ und

$$\mathcal{K}(O, d(P, O))$$

definierten Kreise \mathcal{K}_S und \mathcal{K} schneiden sich im Winkel

$$\sigma = \arccos\left(\frac{y_1}{r_S}\right),$$

wenn der Punkt P oberhalb ($y > y_1$) der Geraden P_1M , und im Winkel

$$\sigma = 180^\circ - \arccos\left(\frac{y_1}{r_S}\right),$$

wenn der Punkt P unterhalb ($y < y_1$) der Geraden P_1M liegt.

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus den obigen Überlegungen. Man beachte, dass bei der Herleitung oben die Hyperbel durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ und in diesem Satz durch die Gleichung $x^2 - y^2 = r^2$ mit einer Zahl $r > 0$ definiert wurde, welche den Abstand der beiden Scheitelpunkte der Hyperbel angibt. Diese Tatsache ändert jedoch nichts an der Korrektheit des Satzes, da sie beim Gleichsetzen der Gleichungen $x^2 - y^2 = r^2$ sowie $x_1^2 - y_1^2 = r^2$ die Zahl $r > 0$ nicht von Bedeutung ist. \square

Der Satz wird nun erweitert, sodass man aus dem Tangentenwinkel im Punkt P_1 an die Hyperbel \mathcal{H} den Schnittwinkel σ bestimmen kann.

Satz 8.3. Seien \mathcal{H} , P_1 , M und \mathcal{K}_S wie im Satz 8.2 sowie A ein Scheitelpunkt der Hyperbel \mathcal{H} und T der Schnittpunkt der Tangente t im Punkt P_1 an die Hyperbel \mathcal{H} mit ihrer Nebenachse (hier: y -Achse). Sei dann α der Winkel, den die Tangente t im Punkt P_1 mit der Geraden P_1M einschließt. Es gilt die Gleichung

$$\cot(\alpha) = |\cos(\sigma)|,$$

wobei σ als der Schnittwinkel eines Kreises \mathcal{K} wie im Satz 8.2 und des Kreises \mathcal{K}_S definiert ist. Der Kosinus des Schnittwinkels der Kreise stimmt also ohne Berücksichtigung des Vorzeichens mit dem Kotangens des Tangentenwinkels, den die Tangente im Punkt P_1 mit der Hyperbel einschließt, überein.

Beweis. Nach Satz 8.2 gilt die Gleichung

$$|\cos(\sigma)| = \left| \frac{y_1}{x_1} \right| = \frac{|y_1|}{|x_1|}.$$

Da der Kreis $\mathcal{K}_S(P_1, d(P_1, M))$ ein Büschelkreis des durch die Hyperbel \mathcal{H} definierten elliptischen Kreisbüschels ist, gilt $d(M, P_1) = d(M, A)$, wobei O den Mittelpunkt der Hyperbel beschreibt. Deshalb erhält man

$$\frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{d(O, M)}{d(M, P_1)} = \frac{d(O, M)}{d(M, A)}.$$

Nun liefert der Satz 6.8, dass das Dreieck $\triangle MAT$ rechtwinklig mit rechtem Winkel im Scheitelpunkt A ist. Gleichmaßen ist das Dreieck $\triangle AMO$ rechtwinklig, mit rechtem Winkel im Punkt O . Da der Winkel $\angle(AMO) = \angle(TMA)$ mit dem Scheitelpunkt M in diesen beiden Dreiecken zu finden ist, folgt ihre Ähnlichkeit, woraus die Gleichung

$$\frac{d(O, M)}{d(M, A)} = \frac{d(M, A)}{d(M, T)}$$

erhalten wird. Ebenfalls mit der Gleichung $d(M, P_1) = d(M, A)$ erhält man abschließend durch Zusammenfügen aller Teilergebnisse

$$|\cos(\sigma)| = \frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{d(O, M)}{d(M, P_1)} = \frac{d(O, M)}{d(M, A)} = \frac{d(M, A)}{d(M, T)} = \frac{d(M, P_1)}{d(M, T)} = \cot(\alpha),$$

wie behauptet. □

Nun lässt sich der Sachverhalt, der im Satz 8.2 beschrieben wurde, räumlich im Sinne der Zyklografie interpretieren. Dazu stellt man sich die Hyperbel \mathcal{H} wie oben definiert vor und lässt diese um ihre Nebenachse (also im obigen Falle die y -Achse) rotieren, sodass ein einschaliges Rotationshyperboloid entsteht. In einem Aufriss identifiziert man die x -Achse als Tafel Ebene \mathcal{T} , sodass der Kehlkreis des entstandenen Rotationshyperboloids vollständig in der Tafel Ebene \mathcal{T} liegt. Jetzt wählt man einen beliebigen Punkt P_1 beispielsweise unterhalb der Tafel Ebene und zeichnet die Ebene E , die parallel zur Tafel Ebene durch den Punkt P_1 verläuft. Die Ebene E schneidet dann einen Kreis \mathcal{K}_S aus dem Rotationshyperboloid aus. Wählt man nun einen Punkt P oberhalb der Ebene E auf dem Rotationshyperboloid und bildet diesen zyklografisch auf die Ebene E ab, so erhält man einen Kreis $\mathcal{K} \subset E$, der den Kreis \mathcal{K}_S in einem Winkel σ schneidet. Jede andere Wahl des Punktes P auf dem Rotationshyperboloid oberhalb der Ebene E liefert Kreise in der Ebene E , die den Kreis \mathcal{K}_S im Winkel σ schneiden. Liegt der Punkt P unterhalb der Ebene E , so schneiden diese zyklografischen Bildkreise \mathcal{K} den Kreis \mathcal{K}_S in einem Winkel $\sigma' = 180^\circ - \sigma$. Somit sieht man ein, dass unter Verschiebung der Tafel Ebene das Rotationshyperboloid als Raumfigur geeignet ist, um zyklografische Bildkreise zu finden,

die gegebene Kreise in einem bestimmten Winkel schneiden. Möchte man die Tafel Ebene fix belassen, also die Ebene \mathcal{T} als zycklografische Tafel Ebene verwenden, so muss das Rotationshyperboloid entlang des Lotes zur Tafel verschoben werden. Der Kreis, den die Tafel Ebene dann aus dem Hyperboloid ausschneidet, wird im obigen Sinne von jedem Bildkreis eines Punktes des Hyperboloiden gleichwinklig geschnitten. In Fiedlers *Cycklografie* liest man diesbezüglich:

Denkt man ein solches Hyperboloid im Raume festgehalten und die Tafel Ebene längs seiner Axe unter Festhaltung der Rechtwinkligkeit zu derselben verschoben, so enthält sie nach einander alle seine Parallelkreise als Spurkreise und man erhält aus dem einfachen Hyperboloid nach einander die Systeme für alle Schnittwinkel bei concentrischen reellen Grundkreisen, [...] [Fie82a, S. 114f.]

Die obigen Ideen ermöglichen es, eine Konstruktion zu finden, mit der sich zu einem fest vorgegebenen Kreis \mathcal{K}_S die Kreise ermitteln lassen, die den gegebenen Kreis unter einem festgelegten Winkel σ schneiden. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Winkel σ als Kosinus gegeben ist. Gemäß der Überlegung oben, erfordert die Lösung des Problems die entsprechende Hyperbel zu finden, mit deren Hilfe die gleichwinklig schneidenden Kreise bestimmt werden können. Man geht dazu wie folgt vor:

Konstruktion 8.4. Sei $\mathcal{K}_S(M, r_S)$ der gegebene Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r_S . Man zeichne eine Gerade durch den Punkt M , welche als y -Achse interpretiert werden soll. Die zur y -Achse senkrechte Gerade durch den Punkt M sei die x -Achse; auf diese Weise wird der Punkt M zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, dessen Skalierung durch den Kreis \mathcal{K}_S gegeben ist. Nun bezeichne man einen der beiden Schnittpunkte des Lotes zur y -Achse durch dem Punkt M mit P_1 . Jetzt trage man die Gerade t im Winkel α an die Gerade MP_1 im Scheitelpunkt an, sodass

$$\cos(\sigma) = \cot(\alpha)$$

gilt. Der Schnittpunkt der Geraden t mit der y -Achse sei T . Anschließend bestimme man den Mittelpunkt X der Strecke \overline{MT} und zeichne den Hilfskreis $\mathcal{K}_H(X, d(X, T))$ mit dem Mittelpunkt X und dem Radius $d(X, T)$. Dieser Kreis schneidet den gegebenen Kreis \mathcal{K}_S in zwei Punkten, wovon man einen Punkt mit $A = (x_A, y_A)$ bezeichne. Es sei dann $O = (0, y_O)$ der Schnittpunkt des Lotes zur y -Achse durch den Punkt A . Man zeichne die Parallele zur y -Achse durch den Punkt A und erhalte den Schnittpunkt $A' = (x_{A'}, y_{A'})$ mit dem Kreis \mathcal{K}_S . Gleichermäßen findet man den

Punkt $O' = (0, y_{O'})$. Jetzt kann man die Lösungshyperbeln

$$\mathcal{H}_1: x^2 - (y - y_{O'})^2 = d^2(O, A)$$

und

$$\mathcal{H}_2: x^2 - (y - y_{O'})^2 = d^2(O, A)$$

angeben. Mit ihrer Hilfe kann man gemäß den obigen Erklärungen die Lösungskreise bestimmen. Es ist zu beachten, dass die Lösungshyperbeln nun rotiert werden können, um alle möglichen Kreise zu finden.

Eine an das Vorherige anschließende Fragestellung ist, Kreise zu konstruieren, die zwei gegebene Kreise unter einem festgelegten Winkel schneiden. Wie man oben erfahren hat, findet man im Sinne der Zyklografie Kreise, die einen gegebenen Kreis gleichwinklig schneiden, indem man Punkte eines geeigneten, zu seiner Achse verschobenen, Rotationshyperboloids zyklografisch abbildet. All seine Bildkreise mit den oben beschriebenen Einschränkungen schneiden den gegebenen Kreis rechtwinklig. Vor diesem Hintergrund lässt sich leicht die Frage klären, wie die Kreise zu finden sind, die zwei gegebene Kreise gleichwinklig schneiden: Man muss die Schnittkurve zweier Rotationshyperboloide finden, welche parallele Achsen besitzen. Bildet man ihre Punkte zyklografisch ab, erhält man Kreise, die die zwei gegebenen unter dem gleichen festgelegten Winkel schneiden. Die Überlegung zeigt, dass es unendlich viele solcher Kreise geben muss.

Um einen derartigen Kreis zu finden, muss man lediglich die Konstruktion 8.4 für die beiden gegebenen Kreise durchführen und die jeweiligen Schnittpunkte der Lösungshyperbeln bestimmen. Will man alle Kreise erhalten, so muss man die Spurkurve der Schnittpunkte beider Lösungshyperbeln bei Rotation betrachten. Die Abbildung 8.3 zeigt einen Lösungskreis, der die beiden gegebenen Kreise \mathcal{K} in einem beispielhaft gewählten Winkel von $\sigma = 40^\circ$ schneidet.

8.3. Abschlussbemerkungen/Ausblick: Weitere Untersuchungen in Fiedlers *Cyklographie*

Die obigen Schnittwinkelprobleme sollen hier nicht weiter vertieft werden. Stattdessen wird kurz zusammengetragen werden, welche weiteren Themen Fiedler in seiner *Cyklographie* erörtert werden. So behandelt er im Verlauf des Lehrwerkes verschiede-

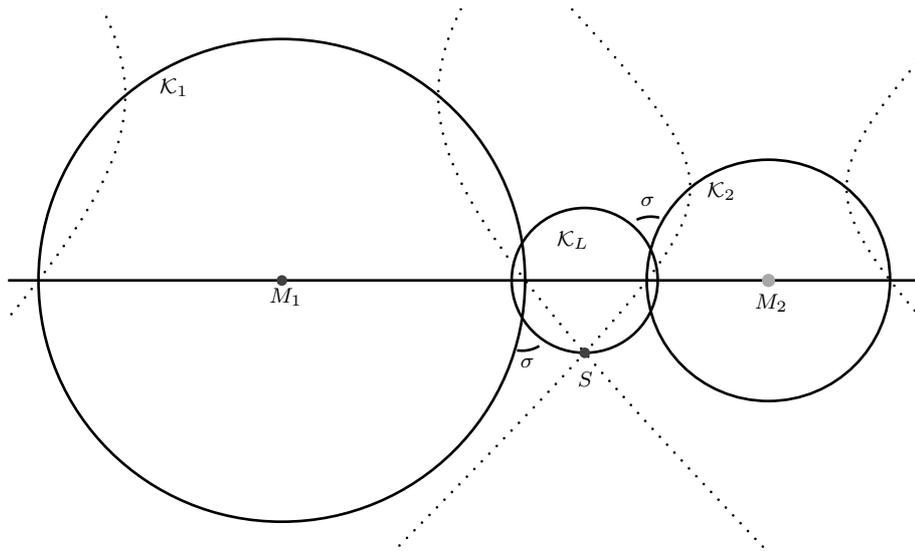


Abbildung 8.3.: Ein Kreis \mathcal{K}_L der die zwei gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 im vorgegebenen Winkel $\sigma = 40^\circ$ schneidet

ne Aufgabenstellungen, die das Schneiden von Kreisen unter gleichen Winkel diskutieren und arbeitet Konstruktionen heraus. So wird unter anderem die Fragestellung behandelt, acht Kreise zu finden, die vier vorgegebene gleichwinklig schneiden. Des Weiteren ist Teil des Kapitels die Diskussion des Apollonischen Berührproblems, welches ausführlich im Kapitel 7 der vorliegenden Arbeit behandelt wurde. Dort hat man gesehen, dass die Aufgabenstellung KKK darin besteht, die maximal acht möglichen Lösungskreise zu konstruieren, die drei gegebene Kreise berühren. Man kann diese Problem auf zweierlei Weisen erweitern:

- Man überträgt die Fragestellung auf eine räumliche Situation: Die Aufgabe wäre nun, die möglichen Lösungskugeln zu finden, die vier gegebene Kugeln im Raum berühren
- Man erweitert die ebene Fragestellung im Sinne der Kreisschnittlehre, wie sie am Anfang dieses Kapitels beschrieben wurde: Man versucht diejenigen Kreise zu finden, die drei gegebene Kreise in einem bestimmten Winkel schneiden.

Insbesondere letztere Fragestellung ist mit dem Apollonischen Problem verwandt und kann zycklografisch auf ähnliche Weise behandelt werden. Dazu erinnere man sich, dass die Lösung des klassischen Problems auf die Ermittlung von gemeinsamen Punkten dreier (zycklografischer) Kreiskegel führte. Mit den obigen Erkenntnissen transformiert sich dieses Problem zycklografisch in die Aufgabe, gemeinsame Punkte von Rotationshyperboloiden zu finden, deren Kehlkreise ggf. relativ zur Tafelenebene verschoben sind.

Der letzte Abschnitt in Fiedlers *Cyklographie* erörtert verschiedene Aufgaben, die die Kegelschnitte betreffen, im Rahmen zycklografischer Probleme. An dieser Stelle werden auch Kugelschnittprobleme diskutiert, also die Frage nach der Konstruktion von Kugeln, die vorgegebene Kugeln in einem bestimmten Winkel schneiden.

Die Schlussbetrachtungen widmen sich Elementen der stereographischen Projektion. Die ihr zugrundeliegende Idee ist die Abbildung von Punkten einer Kugeloberfläche auf eine Ebene durch eine Zentralprojektion. Den Augpunkt der Abbildung legt man auf die Kugeloberfläche in einen ihrer Pole. Des Weiteren werden Winkelschnittprobleme von Kreisen erörtert, die sich auf einer Kugel befinden. Zudem wird der Feuerbachkreis (auch als *Neun-Punkte-Kreis* bekannt) diskutiert. Er ist ein charakteristischer Kreis, der zu einem Dreieck angegeben werden kann: Auf ihm liegen verschiedene besondere Punkte des Dreiecks (u.a. Fußpunkte der Höhen, Mittelpunkte der Seiten).

9. Didaktische Anmerkungen zur Zyklografie

In diesem Kapitel werden drei Schwerpunkte gesetzt. Der erste Teil beschäftigt sich mit Fiedler als Didaktiker. Hier erfährt man etwas über seine Vorstellungen von der Lehre der Geometrie und der Konzeption von geometrischen Unterricht. Der zweite Teil soll das Potential der Zyklografie für die Schule herausstellen. Hierzu werden selbst entwickelte Konzepte für den Schulunterricht ausgearbeitet und vorgestellt. Sie dienen als Anregung für die Thematisierung der Zyklografie im Rahmen eines Unterrichtsvorhabens. Der abschließende Abschnitt des Kapitels hat eine kritische Auseinandersetzung der Zyklografie als didaktischer Unterrichtsgegenstand zum Gegenstand.

9.1. Fiedlers didaktische Vorstellungen von der Lehre der Geometrie

Bereits im Abschnitt 2.1 der vorliegenden Arbeit hat man erfahren, dass Fiedler eine klare Vorstellung von einem guten geometrischen Unterricht und wie dieser umzusetzen sei, hatte. Nachfolgend soll Fiedlers Ansicht, dass und wie die Geometrie zu lehren sei, vorgestellt werden. Dazu werden der Artikel *Zur Reform des geometrischen Unterrichts* aus dem Jahre 1877 sowie der darauf bezogene Briefverkehr mit Torelli, in welchem letzterer Fiedler inhaltliche Rückfragen stellte, betrachtet. Im Folgenden soll dies ausgeführt werden.

Fiedler beschäftigte sich über die Forschung an mathematischen Inhalten hinaus auch mit ihrer Lehre und Vermittlung, wobei sein Schwerpunkt auf der Geometrie lag. Dass Fiedler didaktische Fragestellungen wichtig waren, verdeutlicht die folgende Aussage:

Ich [Fiedler] habe vor langer Zeit her die Reform der darstellenden Geometrie in dieser Richtung, die Klarlegung und pädagogische Verwerthung ihrer

natürlichen Verbindung mit der reinen Geometrie zur Aufgabe gemacht, [...] [Fie82b, S. 147]

Hieran erkennt man, dass Fiedler durchaus daran interessiert war, der Frage nachzugehen, in welcher Form es sinnvoll erscheint, Geometrie zu lehren. In erster Linie ist für Fiedler klar, dass die Lehre und Diskussion von Geometrie im Rahmen eines mathematischen Unterrichts einen zentralen Stellenwert und eine besondere Wichtigkeit in der mathematischen Ausbildung besitzt. Dies begründet sich darin, dass er sagt, dass sämtliche Beschreibungen der »Naturwirklichkeit« in Verbindung mit der Geometrie stehen (vgl. [Fie77, S. 84]). Fiedler erwähnt außerdem in seinem Aufsatz den Nutzen der Darstellenden Geometrie für die Behandlung von technischen Fragestellungen; er sagt außerdem, dass die Lehre und die Herstellung »des natürlichen Sachverhalts zwischen den Projektionsmethoden den größten Vortheil für die Entwicklung der vollständigen Kenntnis der Geometrie besitzt« (vgl. [Fie82b, S. 147]). Fiedlers Standpunkt, dass die Lehre darstellend-geometrisch geschehen solle, wird hier deutlich. Deshalb schließt man unmittelbar, dass er eine Lehre der Darstellenden und der damit verbundenen Projektiven Geometrie als einen sinnvollen Zugang für die Vermittlung der Geometrie auffasst. Jedoch sollte dies relativiert werden, denn die klassischen Methoden der Darstellenden Geometrie reichen mitunter nicht aus, um einen einfachen Zugang zu bestimmten geometrischen Fragestellungen zu bekommen. So erklärt Fiedler, dass man zu dem Schluss kommen kann, dass die Darstellende Geometrie in bestimmten Bereichen unzulänglich und dass sie nicht geeignet sei, um Probleme über Kreise und Kugeln zu lösen. Daraus motiviert er den Grundgedanken seiner Zyklografie. Sie macht Aufgabenstellungen zu diesem Themenkomplex betreffend darstellend-geometrisch »handhabbar«. Dazu liest man:

Und doch setzt eine einfache mir seit langer Zeit bekannte Idee [die Zyklografie] das alles mit der darstellenden Geometrie, wie ich sie auffasse, unter Beseitigung aller [...] Schwierigkeiten, in den engsten Zusammenhang; [Fie82b, S. 149]

Es lässt sich also schließen, dass Fiedler die Lehre der Zyklografie für die Darstellende Geometrie als sinnvoll erachtete. Wie bereits im Kapitel 2 erwähnt, setzte Fiedler die Zyklografie schon in seinen Vorlesungen in Prag ein. Offenbar war er der Ansicht, dass durch die Zyklografie eine Behandlung von Kreis- und Kugelproblemen im darstellend-geometrischen Sinne möglich wird. Dass diese Form, die Geometrie zu behandeln, nach seinem Verständnis die zugänglichste Form war, wird nochmals, wie bereits im Abschnitt 2.1 beschrieben, durch seine allzusammenfassende Aussage

[...] [D]ie ganze Geometrie muss darstellend werden, muss projicirend verfahren, um projectivisch zu sein [...]. [Fie77, S. 92]

deutlich. Das Ziel, die Reformierung der Lehre der Geometrie, leitet sich aus dem Gedanken ab, dass Fiedler in der klassischen Behandlungsweise der Geometrie Nachteile erkannte. So schrieb er, dass Lernende ihr Wissen nicht entfalten könnten, was dadurch passiert, dass

[...] auch die besten Schüler unter der Einwirkung der bisherigen Methode nicht den Eindruck eines wohlgeordneten Ganzen davontrugen, sondern vielmehr nur eine Fülle von Einzelheiten, leicht verlierbar und einem geringeren Bildungswerth als sie nach der niedergelegten Kunst und Feinheit zahlreicher scharfer Denker sicher haben sollten. [Fie77, S. 82]

Er erklärt darüber hinaus, dass die im Zitat erwähnten Erfahrungen, insbesondere die schwachen Kenntnisse der Geometrie bei den Lernenden betreffend, immer wieder von den Lehrerinnen und Lehrern gemacht werden (vgl. [Fie77, S. 83]). Um diesem Problem entgegenzuwirken, strebte Fiedler als Konsequenz eine Reform des geometrischen Unterrichts an und wies darauf hin, welche Kernelemente hierfür notwendig seien, welche Schwerpunkte gesetzt werden müssten und welche Gefahren aus einer Reform resultierten.

So stellt er klar, dass eine Umstrukturierung des geometrischen Unterrichts nicht dadurch geschehen kann, dass man Aspekte aus der neueren Geometrie, d. h. der Darstellenden und der Projektiven Geometrie, in den alten Lehrplan einfach einfügt (vgl. [Fie77, S. 84]). Auf diese Weise werden sich die oben genannten Probleme nicht lösen lassen. Eine Reform müsse vielmehr konsequent geschehen. Einen wichtigen Gesichtspunkt beschreibt Fiedler beziehend auf ein Werk Steiners: Steiner betonte, dass es für das Lernen von Geometrie wichtig ist, sich der Verwandtschaften verschiedener geometrischer Objekte bewusst zu sein (vgl. [Fie77, S. 85]). Fiedler stimmt dieser Idee zu und sieht die Projektive Geometrie als ein Mittel, das genau dies ermöglicht. Er schreibt:

[...] dass der der Besitz einer geringen Anzahl von Fundamentalbeziehungen, aus welchem sich das Ganze [die Geometrie] organisch aufbauen lässt, den grossen Vorzug der neueren oder projectivischen Geometrie und ihren höchsten Reiz bildet. [Fie77, S. 85]

Er betont, dass er diese projektive Denkweise im Stile Steiners als »rechten Wegweiser« für eine Reform des gesamten geometrischen Unterrichts sieht. Einen weiteren wichtigen Grund, die Geometrie im darstellend-geometrischen Stile zu behandeln,

sieht Fiedler darin, dass Projektionen vom natürlichen Sehprozess ausgehen. Er erklärt:

Mit andern Worten, die abstracte Nachbildung des Sehprozesses, der selbst die wichtigste der physikalischen Grundlagen unserer Raumanschauung ist, führt sofort auch zur Entdeckung des organischen Zusammenhangs zwischen den mannigfachen Erscheinungen der Raumwelt; von diesem aus ordnet sich dann von selbst – wieder durch die Verfolgung des Sehvorgangs gefördert, wenn man will [...] – unser Wissen von den Gestalten und Systemen im Raume von drei Dimensionen und damit der weitere Auf- und Ausbau der Geometrie. [Fie83a, S. 91]

Der Aussage des Zitates entnimmt man zudem, dass für Fiedler die Anschaulichkeit im Geometrieunterricht als Ausgangspunkt dient. Er behauptet, dass – vor allem die Zentralprojektion – die eine Mathematisierung/Abstrahierung des Sehprozess darstellt, einen leichteren und natürlicheren Zugang zur Geometrie als der konventionelle Weg mithilfe der Euklidischen Geometrie schafft. Das führt Fiedler unmittelbar zu der Erkenntnis, dass es aus diesem Grund natürlich gegeben sei, projektive Abhängigkeiten von geometrischen Objekten zu untersuchen. In diesem Kontext erwähnt er:

[...], dass die Methode der Vergleichung zwischen zwei in projectivischer Abhängigkeit stehenden Systemen die natürliche Untersuchungsmethode der Geometrie ist. [Fie83a, S. 93]

Er fundiert seine Ansicht, der Geometrieunterricht solle aus der Anschauung heraus entwickelt werden, durch Verweis auf den schweizer Pädagogen Heinrich Johann Pestalozzi (1746-1827). Dieser behauptete, dass ein geometrischer Mathematikunterricht mit »Anschauung beginnen [solle] und stetsfort mit der Anschauung in Wechselwirkung erhalten werden [solle], [...]« [Fie83a, S. 94].

Fiedler glaubte durch dies Ansatz im Vergleich zur herkömmlichen Methode mit Schwerpunkt auf der Euklidischen Geometrie mehr Effizienz zu erreichen, die sich durch Zeitersparnis ausdrückt. Insgesamt sieht er die Möglichkeit, viele überflüssige Aspekte nicht behandeln zu müssen, woraus er auf einen »pädagogischen Gewinn« schließt, der darin besteht, geometrische Übungen durchführen zu können (vgl. [Fie83a, S. 94]). In diesen Übungen offenbart Fiedler einen weiteren wichtigen Aspekt, der für seinen Geometrieunterricht grundlegend ist. Dieser sollte durch (praktisch konstruierende) Übungen begleitet werden, die der Nachvollziehbarkeit von Definitionen dienlich sein sollten. Er gibt dazu konkrete Vorschläge, die jedoch ein vergleichsweise hohes Anforderungsniveau besitzen (vgl. [Fie77, S. 88]).

Wie bereits im Abschnitt 2.1 angedeutet, übersetzte Torelli zwecks Publikation Fiedlers den Artikel [Fie77] in die italienische Sprache. Aus diesem Grund stellte er Rückfragen und wollte von Fiedler einige seiner Ideen und Ansichten vertiefend erläutert und erklärt haben. Diese Briefe untermauern und konkretisieren Fiedlers Reformvorschläge und differenzieren sie weiter aus.

Man erfährt sowohl in diesen Briefen als auch im eigentlichen Artikel, dass Fiedler nicht der Ansicht war, dass man räumliche und ebene Geometrie voneinander trennen sollte. Die Idee ist vielmehr, beide parallel aufzubauen und ihre jeweiligen Vorzüge zu verwenden.⁸⁴ Dies wird auch der Grundidee gerecht, dass der Sehprozess eine Abbildung von räumlichen Objekten auf die Netzhaut – also abstrahiert auf eine Ebene – durch Zentralprojektion ist. Deshalb erscheint es nicht sinnvoll, ebene und räumliche Aspekte in geometrischen Untersuchungen voneinander zu trennen. Er schreibt dazu an Torelli, dass

[...] dieser Kurs [gemeint ist ein Kurs zur Projektiven Geometrie] nicht wieder die Trennung von Planimetrie und Stereometrie erneuere, indem er sich auf die Planimetrie beschränkt [ETH-Bibliothek, Hochschularchiv Hs 87:1381, Original auf Italienisch]

Darüber hinaus behauptete Fiedler, dass sich eine Reform des Geometrieunterrichts nicht unmittelbar durchführen ließe, sofern die Mathematiklehrenden die Projektive Geometrie noch nicht in einem ausreichenden Umfang beherrschen. Er sagte, dass dies erst dann der Fall sei, wenn sie über die Inhalte seines Lehrbuches zur Darstellenden Geometrie im tieferen Sinn erfasst hätten (vgl. [ETH-Bibliothek, Hochschularchiv Hs 87:1381]).

In den Briefen wird immer wieder deutlich, dass Fiedler großen Wert darauf legte, dass der geometrische Unterricht auf Anschauung beruhen solle und dies auch den Einsatz von Modellen erforderte. Zeichnen und Konstruieren sind ein weitere fundamentale Aspekte in seiner Vorstellung der Lehre der Geometrie. Ebenfalls betonte Fiedler in den Briefen an Torelli den Vorteil, dass ein reformierter Unterricht keinerlei Umstrukturierung der bestehenden Zeiteinheiten erfordere, vielmehr gewinne man mit seinem Plan sogar Zeit.

Da Fiedler nicht den Ansatz verfolgte, die Euklidische – also die im traditionellen Sinne behandelte – Geometrie vollständig mit der modernen – also der projektiven Geometrie – zu vermischen, schlug er vor, dass solange die Reform des geometrischen

⁸⁴Die Idee, räumliche und ebene Geometrie einhergehend zu lehren, wird als »Verschmelzung« oder »Fusion« bezeichnet. Ein Vertreter dieser Herangehensweise war der Mathematikdidaktiker Peter Treutlein (1845-1912), der über diese didaktische Idee in [Tre11, S. 208] berichtet.

Unterrichts nicht vollständig vollzogen sei, man sich im klassischen Sinne beim Elementarunterricht auf die Euklidische Geometrie beschränken solle. Er empfindet dies als

[...] besser, als zwei Geometrien zu lehren, eine halb-moderne halb-Euklidische Planimetrie und eine gleichgeartete Stereometrie. [ETH-Bibliothek, Hochschularchiv Hs 87:1380, Original auf Italienisch]

Er sah die Gefahr, dass dadurch beide Geometrien »verdorben« würden.

Somit sind zusammengefasst die Kernpunkte bezüglich der Ideen zur Didaktik der Geometrie Fiedlers folgende:

- Fiedler strebte einen anschaulichen Geometrieunterricht an und interpretierte den Sehprozess als Ausgangspunkt der Lehre von Geometrie und sieht darin einen natürlichen Zugang zu ihr.
- Er strebte eine Fusion von ebener und räumlicher Geometrie an und sah einen Nachteil in der isolierten Behandlung beider Themen.
- Fiedler sah die Projektion als Leitfaden in der Lehre von Geometrie gemäß dem Grundsatz, dass Geometrie darstellend verfahren sollte.

Dass sich die Darstellende und Projektive Geometrie nicht durchsetzen konnte und aktuell in der Elementarmathematik nicht gelehrt werden, lässt sich anhand der aktuell gültigen Lehrpläne und den Curricula in der Hochschullehre ermitteln. Sie tritt in ihrem klassischen Sinne nach Fiedler eher in den Hintergrund. Insgesamt kann man daraus schließen, dass sich die Entwicklung nicht im Sinne Fiedlers vollzogen hat, sondern dass die Didaktik vor allem in der Elementarmathematik die Euklidische Geometrie der Darstellenden gegenüber bevorzugt. Dies ist mit großer Sicherheit ein wesentlicher Aspekt, weshalb sich auch die Zyklografie, die sich der Darstellenden Geometrie zuordnen lässt, nicht durchsetzen konnte. Weitere Argumente und Annahmen werden im Abschnitt 9.3 für die Behandlung der Zyklografie angeführt.

9.2. Die Zyklografie im Unterricht

9.2.1. Vorbemerkungen

Die Behandlung von Euklidischer sowie Analytischer Geometrie ist aktuell ein zentraler Bestandteil mathematischer Allgemeinbildung in der Mittel- und Oberstufe

in der Schule. Bereits in der Grundschule werden die Schülerinnen und Schüler mit geometrischen Fragestellungen und Objekten konfrontiert und lernen diese zu identifizieren. So lässt sich nach der Auffassung Schwills die Geometrie als eine »fundamentale Idee« des Mathematikunterrichts auffassen: Sie erfüllt das Sinn-, Zeit-, Horizontal- und Vertikalkriterium. Da bedeutet, dass sie sowohl in der Vergangenheit wie in der Zukunft Relevanz besitzt, dass sie sinnstiftende Elemente im Alltag der Schülerinnen und Schüler hat, dass sie in allen (schulrelevanten Bereichen) der Mathematik wichtig ist und dass sie auf verschiedenen kognitiven und intellektuellen Lernniveaus behandelt werden kann.

Interessant bleibt die Frage, wie die Geometrie und welche Inhalte behandelt werden sollten. Anhaltspunkte findet man im Kernlehrplan für das Land Nordrhein-Westfalen, welcher hier zugrunde gelegt wird. In der Mittelstufe werden die Schwerpunkte auf Teilaspekte der räumlichen Geometrie und der ebenen Geometrie gelegt: Man fokussiert sich im Raum auf die Untersuchung von geometrischen Körpern, wie Prismen, Pyramiden und Kugeln, beschreibt sie, berechnet ihre Oberflächen und Volumina. In der ebenen Geometrie behandelt man grundlegende Ergebnisse aus der Euklidischen Geometrie. Hier sind vor allem die Beschreibung und Untersuchung von ebenen Figuren, wie beispielsweise n -Ecke, insbesondere Drei- und Vierecke, sowie Umfangs- und Inhaltsberechnungen ein wichtiger Schwerpunkt. Auch werden fundamentale Sätze der Euklidischen Geometrie, wie der Satz des Pythagoras, der Höhen- und Kathetensatz, besprochen. Zudem sind die Themen Ähnlichkeit und Kongruenz Bestandteil geometrischer Untersuchungen in der Mittelstufe. Darüber hinaus wird die Koordinatengeometrie behandelt. Hierbei lernen die Schülerinnen und Schüler geometrische Objekte der Ebene im Koordinatensystem zu beschreiben; dies wird im weiteren Kompetenzaufbau der Mittelstufe mit funktionalen Zusammenhängen verknüpft.

Der Kernlehrplan des Landes Nordrhein-Westfalen für die Oberstufe konkretisiert bei der Vermittlung von mathematischen Inhalten Inhaltsfelder und prozessbezogene Kompetenzen. Da diese die Basis für die in Abschnitt 9.2.2 vorgestellte Konzeption der Unterrichtsreihe zur Zyklografie sind, wird hier eine Auswahl vorgestellt, auf die sich darin fokussiert wird.

Ein elementarer Bestandteil mathematischen Inhalts in der Oberstufe bildet hierbei die Behandlung von einfachen, (affin) linearen räumlichen Objekten, wie Ebenen und Geraden. Hier lernen die Schülerinnen und Schüler, diese mithilfe einer Parameter- oder Koordinatendarstellung zu beschreiben. Darüber hinaus schreibt der Kernlehrplan u. a. vor, dass Schülerinnen und Schüler

- Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden und zwischen Geraden und Ebenen

untersuchen,

- geometrische Objekte untersuchen und darstellen und
- Lagebeziehungen von geometrische Objekten beschreiben und untersuchen

können sollen (vgl.[MN14, S. 29]).

Insbesondere werden u. a. folgende prozessbezogenen Kompetenzen ausgewiesen (vgl. [MN14, S. 20ff.]): Die Schülerinnen und Schüler

- finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation,
- erkennen Muster und Beziehungen,
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (beispielsweise Ähnlichkeit, Symmetrie, Darstellungswechsel),
- wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen,
- stellen Vermutungen auf,
- stellen Objekte im Raum dar und
- nutzen Werkzeuge.

Es lassen sich auch Kernfragen aus der Mittelstufe, beispielsweise das Thema Schnittpunktbestimmung, Lagebeziehung oder die Bestimmung von Abständen oder Schnittwinkeln erneut aufgreifen und im Rahmen der neuentwickelten Theorie in der Oberstufe mathematisch diskutieren. Wie bereits oben erwähnt, stellen die oben ausgewählten Aspekte des nordrhein-westfälischen Kernlehrplans für die Oberstufe die Grundlage dar, auf welchem der nachfolgende unterrichtliche Vorschlag für die Behandlung der Zyklografie konzipiert wurde. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass eine Umsetzung zyklografischer Inhalte gemäß dieser Vorgaben *nicht* vorgesehen ist und der Schwerpunkt auf der Analytischen Geometrie und der Vektorrechnung liegt. Somit könnte der nachfolgende Vorschlag eher im Sinne eines Projektes umgesetzt werden.

9.2.2. Vorschlag für eine unterrichtliche Diskussion:

Einführung der Zyklografie

In diesem Abschnitt werden vorrangig Aufgabenanregungen sowie eine mögliche Sequenzierung diskutiert, die sich für eine unterrichtliche Behandlung des Themas

»Zyklografie« in der Oberstufe eignen. Wie bereits im Abschnitt 9.2.1 erwähnt, wird im Kontext einer schulischen Behandlung der Geometrie in der Oberstufe der Schwerpunkt auf die Analytische Geometrie bzw. Vektorrechnung gelegt. In diesem Rahmen sind Untersuchungen und Betrachtungen von Objekten, wie etwa Geraden und Ebenen im Raum ein wesentlicher Bestandteil. Daran anknüpfend und auf Grundlage dieser geometrischen Schwerpunkte soll nachfolgend eine mögliche unterrichtliche Ausgestaltung des Themas »Zyklografie« beschrieben werden.

9.2.3. Anmerkungen

Da die Zyklografie in Fiedlers Lehrwerk *Cyklographie* in Verbindung mit der Zentralprojektion entwickelt wird und diese kein Bestandteil des aktuellen unterrichtlichen Curriculums ist, bestehen mehrere Möglichkeiten zu einer unterrichtlichen Konzeption. Man sollte jedoch für eine schulische Umsetzung des Lehrstoffs einige didaktische Reduktionen und Adaptionen bei der Vermittlung der zyklografischen Idee vornehmen sowie Schwerpunkte setzen, sodass die Grundlagen der Projektion nicht zwangsläufig vertiefend geschaffen werden müssen. Aus diesem Grund bildet eine Einführung und Untersuchung von linearen Kreisreihen eine sinnvolle Grundlage für den Unterricht.

Im Folgenden wird eine mögliche Sequenzierung dieses inhaltlichen Schwerpunktes dargestellt. Hierbei wird der Fokus nicht darauf gelegt, wie einzelne Unterrichtseinheiten konkret durchzuführen sind, und es werden keine expliziten Unterrichtsszenarien beschrieben, sondern vielmehr ein Ablauf mit inhaltlichen Anregungen in Verbindung mit Aufgaben- und Fragebeispielen angeführt.

Die unten erläuterten fünf Phasen, welche aufeinander aufbauend konzipiert sind, beginnen mit einer Motivation des Themas »Projektion« durch Anschaulichkeit und enden in einer abstrakten Diskussion von Lagebeziehungen von Geraden im Raum, welche durch zyklografische lineare Kreisreihen beschrieben werden.

Jede einzelne Darstellung einer Phase gliedert sich in fünf Teile. Im ersten wird das Kernziel bzw. werden die Ziele der Phase dargestellt, also was in der beschriebenen Phase erreicht werden soll. Als Fundament dienen hier die im Abschnitt 9.2.1 benannten Auszüge aus dem Kernlehrplan Nordrhein-Westfalens. So sollen die Schülerinnen und Schüler

- die Zentralprojektion kennenlernen und die Grundzüge dieser Abbildungsmethode erfassen,
- die Zyklografie als eine weitere (nicht-ikonische) Projektion kennenlernen und verstehen, wie sie definiert ist,

- lernen, wie sich durch die Zyklografie Geraden im Raum beschreiben lassen und wie sie sich in der Tafel abbilden (in diesem Kontext ist das Mittelstufenthema Ähnlichkeit wichtig)
- erkennen, dass Geraden im Raum keinen Schnittpunkt besitzen müssen, auch wenn sie nicht parallel sind (im Gegensatz zur ebenen Geometrie) und
- gegenseitige Lagen (parallel, windschief, schneidend, identisch) von Geraden beschreiben, diese anhand von zyklografischen Bildern ermitteln und dazu Merksätze aufstellen.

Anschließend wird erklärt, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit die Schülerinnen und Schüler die Inhalte der Phase erfolgreich verstehen und durchdringen können. Hier wird im Wesentlichen ein Verständnis von Ähnlichkeit vorausgesetzt, das bedeutet ihre Definition und Eigenschaften. Darüber hinaus sollten die trigonometrischen Funktionen, insbesondere Tangens oder Cotangens, bekannt sein. Der dritte Abschnitt vermittelt die zu behandelnden inhaltlichen Schwerpunkte; es geht also darum, welche Fragen mit den Schülerinnen und Schülern motivierend und schüleraktivierend diskutiert werden können und welche mögliche Struktur für eine Phase denkbar ist. Der letzte Abschnitt beschreibt, welche weiterführenden Aufgaben und Fragen besprochen werden sollten und ordnet diese inhaltlich in die jeweilige Phase ein und erklärt ihre didaktische Absicht. Es werden hierzu Lösungsvorschläge gegeben.

Phase 1: Einführung und Motivation von Projektionen

Ziel der Phase. In der ersten Phase sollen die Schülerinnen und Schüler für die Elemente der Darstellenden Geometrie sensibilisiert werden. Das Ziel besteht darin, dass sie lernen, dass es eine Projektionsmethode gibt, die die Idee verfolgt, räumliche Objekte unter Wahrung ihrer Anschaulichkeit auf eine Ebene abzubilden. Nebenher werden für die eingeführte Zentralprojektion grundlegende Grundbegriffe geklärt.

Voraussetzungen. Die Schülerinnen und Schüler benötigen keinerlei Voraussetzungen. Für die Fragen im Unterrichtsgespräch ist es vorteilhaft, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung einer Geraden im Raum besitzen.

Inhaltliche Schwerpunkte. Um das Ziel zu erreichen, den Schülerinnen und Schülern verständlich zu machen, was eine Projektion ist, wurde die Zentralprojektion zur inhaltlichen Diskussion ausgewählt. Diese bringt den Vorteil mit sich, dass sie sich anschaulich motivieren lässt.

Da das Thema Projektion aus dem vorherigen Unterricht unbekannt ist und die Schülerinnen und Schüler keine Vorstellung davon haben, sollten sie sensibilisiert werden, was Projektionen sind, welches Ziel sie verfolgen und darauf aufbauend erörtern, wo ihnen Projektionen in ihrem Alltag begegnen. Typische Beispiele hierfür wären der Schattenwurf von Objekten durch die Sonne, Fotos oder das Bild eines Projektors im Kino. Dies kann nun wie folgt aufgegriffen werden: Als möglicher Einstieg in das Thema bietet die Verwendung eines Tageslichtprojektors an. Auf diese Weise wird die Zentralprojektion eingeführt. Führt man eine Projektion mit diesem Projektor durch, indem man zwischen den von ihm ausgehenden Lichtstrahlen und der Wand Objekte (z. B. eine Münze) platziert, so können den Schülerinnen und Schülern unmittelbar die Begriffe Augpunkt/Zentrum, Bildtafel, Objekt und Projektion durch praktische Durchführung verdeutlicht werden. Auf diese Weise lassen sich die abstrakten Begriffe der Zentralprojektion anschaulich erschließen. Es werden dadurch unmittelbare Assoziationen zu diesen Begriffen durch ein Praxisbeispiel geschaffen. Man identifiziert dabei:

- Tafel Ebene \longleftrightarrow (Lein-)Wand, auf der die Projektion zu sehen ist
- Objekt \longleftrightarrow beispielsweise eine runde Münze (hier könnten die Lernenden vertiefend – je nach Vorkenntnis – Kegelschnittkurven, wie zum Beispiel eine Ellipse, identifizieren)
- Augpunkt/Zentrum \longleftrightarrow (idealisiert) Punkt, von dem die Projektionsstrahlen ausgehen

Die erarbeiteten Begriffe sollten für mögliche weitere Unterrichtskontexte fixiert und die oben eingeführte Methode der Abbildung von Raumobjekten auf einer Tafel Ebene als Zentralprojektion benannt werden. Darüber hinaus sollten die Schülerinnen und Schüler erfahren, wie die Zentralprojektion mathematisch durchzuführen ist. Hier sollte der Abstraktionsschritt von der Anschauung zur Theorie gelingen. Das bedeutet beispielsweise, dass das Zentrum ein geometrischer Punkt ist und die Projektionsstrahlen durch Geraden repräsentiert werden. Dafür kann exemplarisch ein Raumpunkt betrachtet werden, der mithilfe eines Strahls aus dem Augpunkt auf die Tafel abgebildet wird. Für die Diskussion dieses Beispiels bietet es sich an, eine Skizze, wie die in der Abbildung 3.7, anzufertigen.

Weiterführende Fragen/Aufgaben für den Unterricht. Folgende Fragen bieten sich auf Grundlage der erarbeiteten Inhalte zur Diskussion im Unterricht an. Die erste Frage reaktiviert die Schülerinnen und Schüler und versucht, das neue Thema mit ihren Alltagserfahrungen und vorhandenem Wissen zu verknüpfen. Hier sollte thematisiert werden, dass die Zentralprojektion das Ziel verfolgt, eine Projektion zu sein, die in einem bestimmten Sinne anschaulich ist und ein realistisches Bild der Umwelt erzeugt. Die zweite Frage vertieft die Vorstellung von der Abbildung geometrischer Objekte durch die Zentralprojektion. Auch die nachfolgende Frage schließt sich diesem Ziel an. Die Abschlussfrage bietet sich als Vertiefung an, falls die Schülerinnen und Schüler bereits wissen, dass Kegelschnitte durch das Schneiden von Kreiskegeln mit Ebenen erhalten werden können.

- *Sind Ihnen weitere Beispiele bekannt, in denen eine Zentralprojektion zur realistischen Darstellung räumlicher Situationen auf eine Ebene genutzt wird?*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

In der Kunst und Malerei wird die Zentralprojektion genutzt, um eine authentische räumliche Darstellungen auf dem Zeichenpapier zu erreichen.

- *Wie werden im Raum befindliche Geraden, die weder durch das Zentrum oder noch in der der Tafel Ebene parallelen Ebene durch den Augpunkt verlaufen, zentralperspektivisch abgebildet? Benennen Sie Fixpunkte.⁸⁵*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Derartige Geraden werden durch die Zentralprojektion wieder auf Geraden abgebildet. Dies sieht man ein, indem man sich eine Ebene denkt, welche die abzubildende Gerade sowie den Augpunkt enthält. Diese Ebe-

ne schneidet die Tafel. Da die Schnittfigur zweier sich schneidender Ebenen eine Gerade ist, ergibt sich die Behauptung. Der Fixpunkt der Abbildung einer Gerade ist der Schnittpunkt dieser mit der Tafelebene. Anders gesagt, schneiden sich in diesem Punkt die Gerade sowie ihre zentralperspektivische Bildgerade.

- *Betrachten Sie parallele Raumgeraden, die nicht in der zur Tafelebene parallelen Ebene durch das Zentrum (Verschwindungsbene) liegen und auch nicht durch das Zentrum verlaufen. Beschreiben Sie, wie diese Geraden abgebildet werden!*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Diese Geraden werden auf nicht-parallele Geraden abgebildet, die sich in einem gemeinsamen, unendlich weit entfernten Punkt auf der Tafelebene »schneiden«. Man bezeichnet diesen Punkt als den Fluchtpunkt dieser parallelen Geraden.

- *Beschreiben Sie, inwiefern Kegelschnitte in Verbindung mit der Zentralprojektion stehen!*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Die Kegelschnittkurven können erhalten werden, indem man einen Kreis durch Zentralprojektion auf die Tafelebene abbildet. Denn durch den abzubildenden Kreis sowie das Zentrum wird ein Kegel festgelegt, der mit den Tafelebene geschnitten wird.

.....

Phase 2: Einführung der zycklografische Abbildung

Ziel der Phase. In der zweiten Phase wird der Übergang von dem anschaulichen Abbildungsverfahren der Zentralprojektion zur Zycklografie geschaffen. So besteht das Kernziel der zweiten unterrichtlichen Phase darin, dass die Schülerinnen und Schüler das zycklografische Abbildungsverfahren kennenlernen und erfahren, wie Projektionen damit durchgeführt werden.

Voraussetzungen. Für diese Phase werden die Grundbegriffe der Projektion, wie der Begriff Tafelebene vorausgesetzt. Darüber hinaus sollte bekannt sein, was ein

⁸⁵Der Begriff Fixpunkt muss den Schülerinnen und Schülern ggf. erläutert werden.

Lotfußpunkt ist sowie dass ein Kreis durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius festgelegt ist. Unter Umständen bietet sich eine Wiederholung der Kreislehre aus der Mittelstufe an.

Inhaltliche Schwerpunkte. Nachdem die Schülerinnen und Schüler erfahren haben, was Projektionen sind und dass die Zentralprojektion dazu dient, räumliche Situationen anschaulich eben darzustellen, sollen sie darauf aufbauend als weitere Möglichkeit, Raumpunkte eben abzubilden, die zyklografische Projektion kennenlernen. Da das hier vorgestellte Unterrichtsvorhaben auf die Zyklografie ausgerichtet ist, werden die Grundlagen der Zentralprojektion an dieser Stelle nicht weiter vertieft. Sie diene zur anschaulichen Einführung in das Thema.

In einem ersten Schritt wird den Schülerinnen und Schülern das zyklografische Verfahren erläutert. Als Ausgangspunkt könnte hier die Motivation Fiedlers dienen: Man kann mit den Schülerinnen und Schülern besprechen, dass man bei der Zentralprojektion den Distanzkreis einführt. Er wird auf der Tafel Ebene bestimmt, indem man den Augpunkt durch senkrechte Projektion auf die Tafel Ebene abbildet und um diesem Projektionspunkt einen Kreis mit dem Radius der Länge des Projektionslotes zeichnet.⁸⁶ Ausgehend davon überträgt man diese Idee auf jeden anderen Punkt des Raumes und kann auf diese Weise das zyklografische Verfahren motivieren. So sollte hier mit dem Blick auf nachfolgende Inhalte die didaktische Reduktion vorgenommen werden, dass für nachfolgende Betrachtungen kein Augpunkt existiert, sondern dass man den dreidimensionalen Anschauungsraum betrachtet und in ihm eine Tafel Ebene liegt. Damit wird die für die Zyklografie beschriebene Synthese aus Zentralprojektion sowie zyklografischer Abbildung aufgelöst. Darüber hinaus diene bei Fiedler der (fixierte) Augpunkt zur Orientierung der Bildkreise. Später wird dies implizit über die Kreise der zu untersuchenden Kreisreihen bewerkstelligt. Diese Reduktion vereinfacht die nachfolgende Behandlung, denn wie man gesehen hat, diene die Wahl eines festen Augpunktes hauptsächlich für die Orientierung der Bildkreise sowie zur Argumentation mithilfe der Zentralprojektion für Beweise von Sätzen oder bei Konstruktionserläuterungen – das ist hier nicht vorgesehen. Darüber hinaus werden die Schülerinnen und Schüler nicht durch eine parallele Behandlung beider Projektionen überfordert.

Den Schülerinnen und Schülern wird an der Tafel das zyklografische Abbildungs-

⁸⁶Hier kann eine Bemerkung zur Anschauung das Verständnis fördern: Man bezeichnet allgemeiner als *Sehkreis* einer Zentralprojektion den Schnitt eines geraden Kreiskegels, dessen Spitze im Augpunkt liegt, dessen Öffnungswinkel α beträgt und dessen Achse senkrecht zur Tafel verläuft. Setzt man $\alpha \approx 60^\circ$, so wirken zentralprojizierte Bilder innerhalb des so erhaltenen Sehkreises für den Betrachter unverzerrt. Setzt man $\alpha = 90^\circ$, so entspricht der Sehkreis dem Distanzkreis.

verfahren erklärt und man kann die nachfolgende Definition festhalten.

Definition:

Ein Punkt P bildet sich durch die zycklografische Abbildung wie folgt auf eine Tafelebene ab:

1. Man bestimmt den Lotfußpunkt des abzubildenden Punktes auf der Tafelebene;
2. Man zeichnet den Kreis um diesen Lotfußpunkt, dessen Radius gleich ist dem Abstand des Raumpunktes zur Tafel in die Tafelebene.

Man bezeichnet diesen Kreis als den zycklografischen Bildkreis des Punktes P auf der Tafel und schreibt für ihn $Z(P)$. Liegt der Punkt P in der Tafelebene, so setzt man $Z(P) = P$.

Es ist hierbei wichtig klarzustellen, dass dieses Abbildungsverfahren nicht der Anschauung dient. Offenbar werden beispielsweise Geraden nicht wie bei der Zentralprojektion auf Geraden abgebildet (man beachte mögliche Ausnahmen), sondern auf eine Menge von Kreisen. Darüber hinaus sollte man die Definition anschaulich skizzieren, beispielsweise durch die Darstellung aus der Abbildung 4.1. Man sollte die Schülerinnen und Schüler aufklären, dass mithilfe dieses Abbildungsverfahrens das Ziel erreicht werden kann, u. a. innermathematische Probleme zu diskutieren.

Weiterführende Fragen/Aufgaben für den Unterricht. Man kann mit den Schülerinnen und Schülern die nachfolgenden Fragen diskutieren. Die erste dient dazu, eine inhaltliche Kohärenz zur ersten Einheit herzustellen. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, weshalb die Zycklografie als Projektion bezeichnet wird, obwohl sie keine anschaulichen Bilder liefert. Die zweite Frage erörtert einen Spezialfall der zycklografischen Abbildung und fungiert als vergleichende Frage aus der ersten Einheit in Bezug auf die Fixpunkte bei der Zentralprojektion. Die letzte Frage dient als erste Sensibilisierung für eine (später) notwendige Orientierung der zycklografischen Bildkreise.

- *Weshalb lässt sich die zycklografische Abbildung als Projektion bezeichnen?*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Das Ziel einer Projektion ist es, räumliche Objekte in einer Ebene abzubilden. Offenbar werden bei der Zycklografie Punkte, die sich im Raum befinden, auf der Tafelebene durch Kreise (eindeutig) abgebildet.

- *Wie bilden sich Punkte zycklografisch ab, die auf der Tafelebene liegen? Vergleichen Sie die Aussage über Fixpunkte bei der Zentralprojektion.*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Offenbar stimmt hier der Lotfußpunkt mit dem Punkt selbst überein. Der Abstand des Punktes beträgt $d = 0$, sodass der Bildkreis des Punktes ein Kreis vom Radius $r = 0$, also ein Punkt, ist. Auch bei der Zentralprojektion sind Punkte auf der Tafelebene Fixpunkte der Abbildung.

- *Ist es möglich, aus einem Bildkreis zu ermitteln, wo der Raumpunkt liegt?*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Nein, das ist nicht möglich, sofern der Bildkreis nicht den Radius Null besitzt. Besitzt der Kreis einen von Null verschiedenen Radius, so existieren zwei zur Tafel spiegelsymmetrische Punkte, die auf den gleichen Bildkreis zycklografisch abgebildet werden.

Wie bereits oben angedeutet, eröffnet die letzte Frage die Möglichkeit zu diskutieren, wie die zycklografische Abbildung angepasst bzw. verändert werden kann, um zu erreichen, dass die Abbildung eineindeutig wird. In dieser Arbeit wurde erklärt, dass man dazu Bildkreise orientieren⁸⁷ kann. So könnte man festlegen, dass die Eineindeutigkeit erreicht werden kann, indem man beispielsweise

- die im oder gegen den Uhrzeigersinn zu orientierenden Bildkreise durch Pfeile kennzeichnet. Hierbei ist zu beachten ist, dass es einen ausgezeichneten Punkt geben muss, von dem aus die Bildkreise betrachtet.
- die Bildkreise durch einen Symbol (+/−) kennzeichnet.
- dem Bildkreis einen symbolisch negativen oder positiven Radius beifügt.
- ...

Diese Überlegung erfordert einen Transfer seitens der Schülerinnen und Schüler: Sie müssen verstanden haben, wie die zycklografische Abbildung funktioniert und gleichermaßen ihre Grenzen in der Darstellbarkeit erkennen. Bei der späteren Beschreibung wird dieser Aspekt wieder relevant sein, da Lagebeziehungen von Raumgeraden, welche durch ihre lineare Kreisreihe beschrieben sind, diskutiert werden sollen.

⁸⁷Die Orientierung der Bildkreise kann für die Schülerinnen und Schüler vergleichsweise schwierig sein, da dieses Konzept zuvor nicht mit den Schülerinnen und Schülern behandelt wurde. An dieser Stelle sollten die unten genannten Beispiele möglichst visuell verdeutlicht werden.

.....

Phase 3: Wiederholung von Kreisen und Ähnlichkeit

Ziel der Phase. Das Ziel der dritten Phase betrifft eine Wiederholung. Hier sollen die grundlegenden Begriffe der geometrischen Ähnlichkeit rekapituliert werden, da sie von Bedeutung für die Konstruktion von Ähnlichkeitszentren von Kreisen sind. Diese wiederum werden genutzt, um die linearen Kreisreihen zu behandeln.

Voraussetzungen. Es werden Kenntnisse zur Ähnlichkeit erwartet, insbesondere ihre Definition und Eigenschaften. Man sollte verstehen, wann Objekte in der Geometrie zueinander ähnlich genannt werden. Sollte dieses Wissen nicht mehr präsent sein, muss es wiederholt werden.

Inhaltliche Schwerpunkte. Die dritte Phase dient einer Wiederholung von Unterrichtsinhalten aus der Mittelstufe. Dazu soll der Begriff der Ähnlichkeit aufgegriffen werden. In der Regel wird dieses Konzept für Dreiecke bzw. Vielecke besprochen und man lernt gegebenenfalls, dass Kreise immer zueinander ähnlich sind. Beispielsweise sind zwei Dreiecke zueinander ähnlich, wenn sie in zwei (also drei) Winkeln übereinstimmen. Dass sich in Abgrenzung der Begriffe in diesem Fall nicht auf Kongruenz schließen lässt, kann man vertiefend diskutieren. Für die zyklografische Abbildung, speziell im Kontext der linearen Kreisreihen, ist Ähnlichkeit wichtig. Aus diesem Grund sollte auch im Unterrichtsgeschehen transparent dargestellt werden, dass zwei Kreise immer zueinander ähnlich sind. Darüber hinaus sollte man die Konstruktion der maximal zwei möglichen Ähnlichkeitszentren diskutieren. Dazu ist wichtig, auf die Lage der involvierten Kreise sowie auf ihre Radien einzugehen. In der Konstruktion 3.4 wurde beschrieben, wie die Ähnlichkeitszentren zu bestimmen und dass parallele Radien, die nicht mit der Zentralen der Kreise zusammenfallen, von Bedeutung sind.

Weiterführende Fragen/Aufgaben für den Unterricht. Die nachfolgende Frage prüft, ob die Schülerinnen und Schüler die Begriffe Ähnlichkeit bzw. Ähnlichkeitszentrum nachvollzogen haben.

- *In welchen Fällen existiert nur ein Ähnlichkeitszentrum für zwei verschiedene (nichtkongruente) Kreise?*

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Zwei Kreise besitzen nur dann genau ein inneres Ähnlichkeitszentrum,

wenn sie gleiche Radien besitzen oder konzentrisch sind. Sind sie konzentrisch, so ist ihr gemeinsamer Ähnlichkeitspunkt der Mittelpunkt beider Kreise. Haben sie die gleichen Radien, so existiert kein äußeres Ähnlichkeitszentrum, da durch die Konstruktion durch zwei parallele Radien kein Schnittpunkt der Verbindungsgerade ihrer Endpunkte mit der Zentrale gefunden werden kann.

.....

Phase 4: Beschreibung von Geraden

Ziel der Phase. Das Ziel der Phase besteht darin, Geraden zyklografisch zu beschreiben. Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, weshalb es notwendig ist, eine orientierte zyklografische Abbildung zu verwenden, um im Raum befindliche Geraden eindeutig zu beschreiben.

Voraussetzungen. Für die Durchführung der Inhalte dieser Phase sind die Inhalte aus den vorherigen Phasen von Relevanz und werden als verstanden vorausgesetzt.

Inhaltliche Schwerpunkte. Diese Phase bildet ein Fundament für die anschließende Phase. Die Lernenden sollen erfahren, wie sich im Raum gelegene Geraden mithilfe der zyklografischen Abbildung in der Tafelebene darstellen lassen. Für eine für die Schülerinnen und Schüler vereinfachte Einführung bietet es sich an, zunächst den Spezialfall »Zyklografische Bildgerade einer zur Tafelebene parallelen Gerade« zu besprechen. Wichtig ist hierbei, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass

1. die Mittelpunkte aller Bildkreise auf der senkrechten Projektion der Raumgeraden liegen und
2. alle Bildkreise den gleichen Radius besitzen.

Man sollte an dieser Stelle einführen, dass diese zyklografische Darstellung als lineare Kreisreihe bezeichnet wird. Für allgemeine Betrachtungen von Geraden im Kontext der zyklografischen Abbildung ist die Frage zu diskutieren, ob eine im Raum befindliche Gerade eindeutig durch die zyklografische Abbildung beschrieben ist, wenn eine derartige lineare Kreisreihe bekannt ist. Dass dies für Geraden, die nicht in der Tafelebene liegen oder orthogonal zur Tafel liegen, der Fall ist, ergibt sich durch die Aussage wie zuvor beschrieben.

In einem nächsten Schritt ist das Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler herausfinden, wie lineare Kreisreihen geartet sind, deren zugehörige Geraden senkrecht zur Tafel Ebene verlaufen. Hier sollten Verweise zur dritten Phase der Unterrichtsreihe gegeben werden, d. h. die Schülerinnen und Schüler sollten erkennen, dass der Durchstoßpunkt der Geraden der Ähnlichkeitspunkt, also der Mittelpunkt, der konzentrischen Bildkreise einer derartigen linearen Kreisreihe ist.

Abschließend sollte der Fall behandelt werden, wie sich lineare Kreisreihen von Geraden darstellen, welche die Tafel Ebene in einem von 90° verschiedenen Winkel schneiden. Auch hier ist entscheidend, dass die Schülerinnen und Schüler die Bezüge zur Ähnlichkeit herstellen und erkennen, dass ein gemeinsames Ähnlichkeitszentrum aller Bildkreise einer derartigen Geraden ihr Durchstoßpunkt ist. Darüber hinaus ermöglicht diese Vernetzung später, bestimmte Kreise einer linearen Kreisreihe aus gegebenen Vorgaben zu konstruieren. Weiterhin ist es wichtig zu erkennen, weshalb die Angabe eines Ähnlichkeitspunktes und eines Kreises eine lineare Kreisreihe definiert. Dies begründet sich leicht, denn durch die über die zyklografischen Bilder definierten drei Punkte (gegeben durch den Ähnlichkeitspunkt und den Bildkreis) werden zwei zur Tafel spiegelsymmetrische Geraden festgelegt.

Weiterführende Fragen/Aufgaben für den Unterricht. Die erste Aufgabe fragt, warum eine orientierte zyklografische Abbildung in Spezialfällen nicht notwendig ist, um eine durch eine lineare Kreisreihe beschriebene Gerade zu ermitteln. Die zweite Aufgabe ist eine Zuordnungsaufgabe, in der verschiedene Spezialfälle von linearen Kreisreihen sowie eine Gerade gezeigt sind. Um ein Raten zu vermeiden, sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Zuordnung begründen. In der dritten Aufgabe werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert zu zeigen, dass sie wissen, dass der Ähnlichkeitspunkt einer linearen Kreisreihe der Schnittpunkt der beschriebenen Gerade(n) mit der Tafel Ebene ist. Darüber hinaus sollen sie als Vertiefung versuchen, herauszufinden, in welchem Winkel die beschriebenen Geraden die Tafel Ebene schneiden. Hier ist nur eine qualitative Antwort gefordert, keine explizite Berechnung der Schnittwinkel angedacht. In der nachfolgenden Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler eine Idee entwickeln, wie man bestimmte zyklografische Bildkreise einer linearen Kreisreihe konstruieren kann, die durch ihren Mittelpunkt gegeben sind. Hierbei ist das Ziel, die Ähnlichkeit der Kreise auszunutzen, und die Tatsache, dass alle Kreise einer linearen Kreisreihe ein gemeinsames Ähnlichkeitszentrum besitzen. Die zweite Teilaufgabe fragt als Wiederholung das Verständnis ab, welche Bedeutung der Radius eines zyklografischen Bildkreises besitzt. Die letzte Aufgabe dient der Vertiefung. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler überlegen, weshalb es (im

Vergleich zur euklidischen Ebene) nicht ausreichend ist, dass die lineare Kreisreihe einer Raumgerade eindeutig durch zwei Bildkreise definiert ist – im Raum hingegen reichen zwei verschiedene Punkte aus.

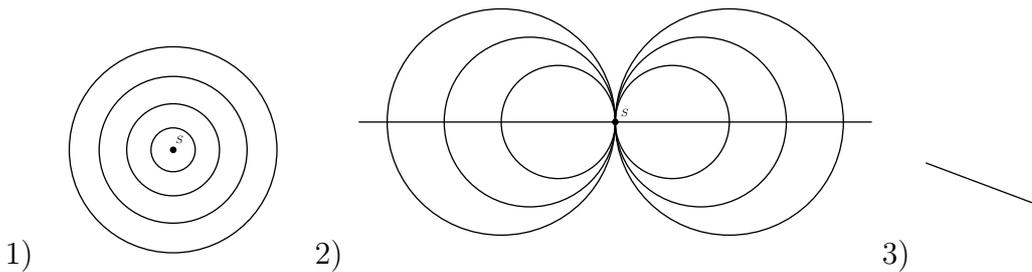
Aufgabe 1

Es sei eine lineare Kreisreihe derart gegeben, dass alle Bildkreise konzentrisch sind. Hierbei seien die Bildkreise nicht orientiert. Erklären Sie, weshalb sich die zugehörige Gerade im Raum eindeutig rekonstruieren lässt.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Da die Kreise konzentrisch sind, beschreibt die lineare Kreisreihe zwei Geraden, die orthogonal zur Tafel sind; ihr Durchstoßpunkt ist der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise der linearen Kreisreihe. Aufgrund von Spiegelsymmetrie an der Tafel Ebene sind die Geraden identisch.

Aufgabe 2



Betrachten Sie die obigen drei Skizzen von linearen Kreisreihen, die in den ersten beiden Fällen durch Ähnlichkeitspunkt sowie Bildkreis und im letzten Fall durch eine Gerade gegeben sind. Füllen Sie die Lücken in den Texten unten aus, indem Sie begründet zuordnen:

a) Die dargestellte lineare Kreisreihe ____ beschreibt eine Gerade, die die Bildebene in einem von 90° verschiedenen Winkel schneidet.

Begründung:

b) Die dargestellte lineare Kreisreihe ____ beschreibt eine Gerade, die die Tafel Ebene senkrecht schneidet.

Begründung:

-
- c) Die dargestellte lineare Kreisreihe _____ beschreibt eine Gerade, die in der Bildebene verläuft.

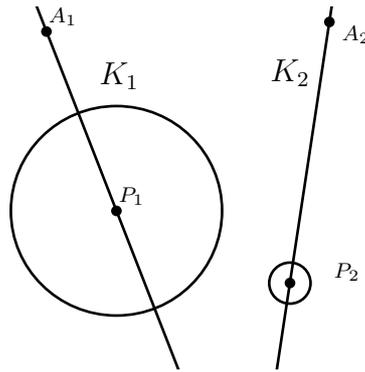
Begründung:

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- a) Die dargestellte lineare Kreisreihe 2) beschreibt eine Gerade, die die Bildebene in einem von 90° verschiedenen Winkel schneidet. Offensichtlich ist der Punkt S der Ähnlichkeitspunkt aller abgebildeten Geraden. Hier ist eine lineare Kreisreihe vorgestellt, die Raumgeraden beschreibt, die die Ebene in einem 45° -Winkel schneiden.
- b) Die dargestellte lineare Kreisreihe 1) beschreibt eine Gerade, die die Tafelenebene lotrecht schneidet. Offenbar sind alle Kreise konzentrisch mit dem Mittelpunkt S .
- c) Die dargestellte lineare Kreisreihe 3) beschreibt eine Gerade, die in der Bildebene verläuft. Dies ist klar, da lineare Kreisreihen für derartige Geraden wieder auf Geraden abgebildet werden. Sie bestehen aus Kreisen vom Radius Null.

Aufgabe 3

Vergleichen Sie die folgenden beiden linearen Kreisreihen K_1 und K_2 , welche jeweils durch die Ähnlichkeitspunkte A_1 und A_2 sowie zwei Kreise auf ihnen um die Punkte P_1 bzw. P_2 gegeben sind. Weiter gelte, dass die Ungleichung $d(A_1, P_1) < d(A_2, P_2)$ für die Abstände von den Punkten um die Kreise von den Ähnlichkeitszentren besteht.



- a) Begründen Sie, dass die durch die linearen Kreisreihen repräsentierten Geraden die Tafel Ebene schneiden.
- b) Zeigen Sie, dass die durch die lineare Kreisreihe K_2 repräsentierte Gerade die Tafel Ebene in einem kleineren Winkel schneidet, als die der linearen Kreisreihe K_1 .

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- a) Offenbar existieren zwei für die Reihen die beiden Ähnlichkeitszentren A_1 und A_2 , welche zugleich die Schnittpunkte der durch die Reihen K_1 und K_2 repräsentierten Geraden sind.
- b) Zunächst entnimmt man der Zeichnung, dass der Kreis um den Punkt P_1 einen größeren Radius als der um den Punkt P_2 besitzt. Es sei der erste Radius mit r_1 und der zweite mit r_2 bezeichnet. Nun betrachte man für beide lineare Kreisreihen die zugehörigen Punkte im Raum, die jeweils auf der gleichen Seite der Tafel Ebene liegen. Es gelten die für die beiden Schnittwinkel α_1 und α_2 der jeweiligen durch die Kreisreihen beschriebenen Geraden die Gleichungen

$$\tan(\alpha_1) = \frac{r_1}{d(P_1, A_1)} \quad \text{und} \quad \tan(\alpha_2) = \frac{r_2}{d(P_2, A_2)}.$$

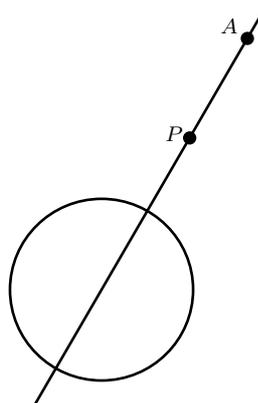
Mit den Voraussetzungen $0 < d(A_1, P_1) < d(A_2, P_2)$ und $r_1 > r_2 > 0$ ergibt sich dann aufgrund der Tatsache, dass die Tangens-Funktion im Intervall $(0^\circ, 90^\circ)$ streng monoton wachsend ist:

$$\frac{r_1}{d(P_1, A_1)} > \frac{r_1}{d(P_2, A_2)} > \frac{r_2}{d(P_2, A_2)}.$$

Somit folgt aus $\tan(\alpha_1) > \tan(\alpha_2)$, da $a_1, a_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$ ist, dass $\alpha_1 > \alpha_2$, wie in der Aufgabe behauptet.

Aufgabe 4

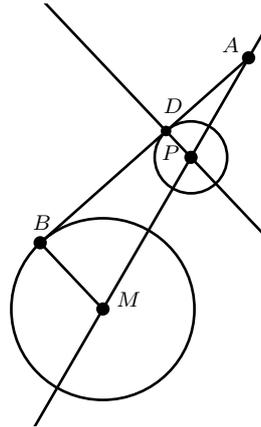
Betrachten Sie die unten durch den Ähnlichkeitspunkt A und einen Kreis gegebene lineare Kreisreihe sowie den Punkt P auf der gemeinsamen Zentrale aller Kreise dieser linearen Kreisreihe.



- Bestimmen Sie den zycklografischen Bildkreis mit Mittelpunkt P der gegebenen linearen Kreisreihe.
- Ermitteln Sie durch Messen den Abstand der zugehörigen Raumpunkte des Punktes P zur Tafelenebene.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- Der gesuchte Kreis lässt sich dadurch ermitteln, dass man ausnutzt, dass A der Ähnlichkeitspunkt der linearen Kreisreihe ist. Dazu bestimmt man zunächst den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises der linearen Kreisreihe. Anschließend zeichnet man einen beliebigen Radius ein, der nicht mit der Geraden MA zusammenfällt; sein Endpunkt soll B heißen. Nun bestimme man die zur Geraden MB parallele Gerade durch den Punkt P und schneide sie mit der Geraden BA und erhalte so den Punkt D . Der Kreis um den Punkt P mit dem Radius \overline{PD} ist der gesuchte. Eine Lösung sieht etwa so aus:



b) Dazu messe man den Abstand $d(A, M)$ der Punkte A und M .

Aufgabe 5

Es seien zwei verschiedene Kreise gegeben, welche unterschiedliche Radien und Mittelpunkte besitzen. Begründen Sie, dass durch sie zwei verschiedene lineare Kreisreihen definiert sind bzw. dass sie vier Raumgeraden beschreiben.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Ein zyklografischer Bildkreis, dessen Radius ungleich 0 ist, repräsentiert zwei Punkte im Raum. Sind also zwei Kreise unterschiedlicher Radien gegeben, so beschreiben sie je zwei Punkte P_1 und P_2 sowie Q_1 und Q_2 . Somit sind durch die Kreise je zwei Geraden $g_1 = P_1Q_1$, $g_2 = P_2Q_1$, $k_1 = P_2Q_2$ und $k_2 = P_1Q_2$ definiert, wobei die Geraden g_1 und k_1 sowie g_2 und k_2 je in zur Tafel spiegelsymmetrischer Lage sind und deshalb auf die gleichen linearen Kreisreihen abgebildet werden. Somit sind zwei lineare Kreisreihen gegeben, wie behauptet.

.....

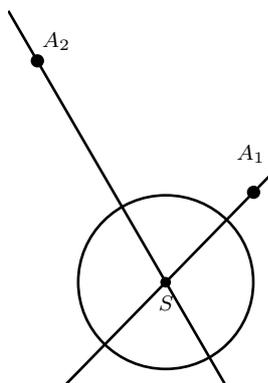
Phase 5: Geradenlagen in der Zyklografie

Ziel der Phase. In der abschließenden Phase sollen die Schülerinnen und Schüler Geradenlagen diskutieren. Das bedeutet, es soll anhand von zyklografischen Bildern ermittelt werden, wie Geraden im Raum verlaufen.

Voraussetzungen. Die Schülerinnen und Schüler sollten die Begriffe aus den vorherigen Lerneinheiten durchdrungen haben, insbesondere sollten sie ein vertieftes Verständnis über das Konzept der linearen Kreisreihen besitzen.

Inhaltliche Schwerpunkte. In einem nächsten Schritt sollen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Lagen kennenlernen, die im Raum verlaufende Geraden besitzen können. Hier ist ein Abstraktionsprozess notwendig und man erhält eine neue Grundvorstellung von Geraden: Beschäftigt man sich in der Mittelstufe mit Euklidischer Geometrie in der Ebene, in der sich Geraden entweder schneiden, identisch oder parallel sind, so ist in einer räumlichen Situation noch der Fall möglich, dass Geraden weder parallel sind noch einen gemeinsamen Punkt besitzen. In diesem Fall spricht man von windschiefen Geraden. Derartige Konstellationen im Raum lassen sich beispielsweise durch Zeigestöcke oder verbildlichte Flugbahnen von Flugzeugen, die die entsprechenden Geraden repräsentieren sollen, visualisieren.

Sind diese Aspekte geklärt, so ist das nächste Ziel, die zyklografischen Bilder derartiger Raumgeraden zu untersuchen. Auch hier stellt sich die Frage, wann sich durch lineare Kreisreihen repräsentierte Geraden schneiden, parallel, windschief oder identisch sind. An dieser Stelle sollten die Schülerinnen und Schüler instruiert werden, dass für diese Fragestellungen die in der dritten Phase der Unterrichtsreihe diskutierte Orientierung der Bildkreise notwendig ist. Dies kann beispielsweise durch folgendes Bild motiviert werden:



In dieser Abbildung sind zwei lineare Kreisreihen gegeben, deren Zentralen sich im Punkt S schneiden. Darüber hinaus haben beide linearen Kreisreihen im Punkt S einen gemeinsamen Bildkreis. Nun ergibt sich die naheliegende Aufgabe:

Beschreiben Sie, wie die durch die beiden linearen Kreisreihen beschriebenen Geraden zueinander liegen!

Eine intuitive Antwort wäre aufgrund der Tatsache, dass beide lineare Kreisreihen einen gemeinsamen Kreis im Schnittpunkt ihrer Zentralen haben, dass sie sich schneidende Geraden im Raum beschreiben. Dass dies eine Fehlvorstellung ist, ergibt sich, da durch eine Kreisreihe je zwei Geraden beschrieben werden. Nun sind

im obigen Beispiel beide Ähnlichkeitspunkte verschieden, sodass nicht davon ausgegangen werden kann, dass die durch die linearen Kreisreihen beschriebenen Geraden zwei sich schneidende Geraden darstellen. Damit also die linearen Kreisreihen eindeutig eine Gerade beschreiben, wird die zycklografische Abbildung nachfolgend orientiert, beispielsweise durch Notation eines Plus-Zeichens für Kreise deren zugehörigen Raumpunkte allesamt auf der gleichen Seite der Tafel liegen.

So könnte man mit dem Schülerinnen und Schüler auf Grundlage dieses Einführungsproblems Folgendes festhalten, was mit den Schülerinnen und Schüler gemeinsam erarbeitet werden sollte:

Merksatz:

Zwei lineare Kreisreihen, die durch die orientierte zycklografische Abbildung gegeben sind, repräsentieren zwei sich schneidende Geraden im Raum genau dann, wenn

- sie zwei verschiedene Ähnlichkeitspunkte und
- wenn sie einen zusammenfallenden Bildkreis gleicher Orientierung mit selben Mittelpunkt und Radius besitzen

oder

- die gleichen Ähnlichkeitszentren und
- keinen weiteren gemeinsamen Bildkreis unter Berücksichtigung der Orientierung besitzen.

Einen weiteren trivialen Merksatz können die Schülerinnen und Schüler auch unmittelbar aus ihrer Vorstellung heraus ableiten. So ist die Frage nach zwei orientierten linearen Kreisreihen, die zwei Geraden beschreiben, die identisch sind, unmittelbar zu beantworten und kann durch die Schülerinnen und Schüler sofort als Merksatz festgehalten werden:

Merksatz:

Zwei lineare Kreisreihen, die durch die orientierte zycklografische Abbildung gegeben sind, repräsentieren genau dann zwei identische Geraden im Raum, wenn

- beide lineare Kreisreihen den gleichen Ähnlichkeitspunkt besitzen und alle Kreise unabhängig von der Orientierung konzentrisch mit dem Ähnlichkeitspunkt als Mittelpunkt sind

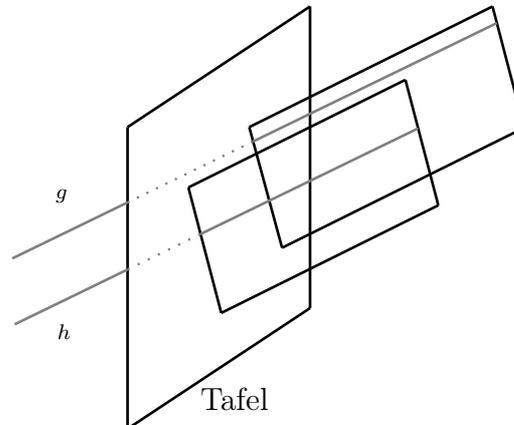
oder

- die Zentralen beider linearen Kreisreihen identisch, die Ähnlichkeitspunkte gleich sind und die Kreise mitsamt ihrer Orientierung übereinstimmen.

Man beachte, dass die obigen beiden Regeln bzw. Merksätze keine unmittelbaren Anwendungsaufgaben auf Grundlage konkreter Vorgaben bezüglich beider linearer Kreisreihen ermöglichen. Das bedeutet konkret, dass sich nicht unmittelbar Aufgaben lösen lassen, bei denen die linearen Kreisreihen durch ihre Ähnlichkeitspunkte sowie je einen orientieren Bildkreis samt Orientierung vorgegeben ist.⁸⁸

Eine Aufgabe, die sich mit diesem Sachverhalt im Ansatz beschäftigt, ist bei den weiterführenden Aufgaben, Aufgabe 2, zu dieser Unterrichtsphase zu finden.

Bevor windschiefe Geraden diskutiert werden, sollten die Schülerinnen und Schüler erarbeiten, wie Geraden durch ihre linearen Kreisreihen gegeben werden, sodass sie parallel verlaufen. Dieser Fall wird sich direkt erschließen. Dazu sollte zunächst diskutiert werden, dass die gemeinsamen Zentralen parallel sein müssen. Das sieht man so ein: Sind zwei Geraden parallel zueinander und bildet man zwei zur Tafel ebene lotrechte Ebenen durch diese beiden Geraden, so sind die Ebenen parallel und aus diesem Grund sind ihre beiden Schnitte mit der Tafel ebene parallel. Diese Vorstellung kann wie folgt grafisch vermittelt werden:



Man erkennt zwei Geraden g und h in grau dargestellt, die in je einer zur Tafel ebene lotrechten Ebene verlaufen. Gleichmaßen verdeutlicht man sich mithilfe dieser Abbildung, dass es auch Geraden gibt, die nicht parallel sind, aber dennoch auf lineare Kreisreihen mit parallelen Zentralen abgebildet werden – dies sind all diejenigen Geraden, die in den beiden oben gezeigten Ebenen verlaufen.

⁸⁸Auf Merksätze, die eine derartige Behandlung möglich machen, wurde bewusst verzichtet, da eine Vielzahl von Fallunterscheidungen nötig wird, wodurch eine hohe Komplexität entsteht, die ggf. zu einer Überforderung der Schülerinnen und Schüler führen könnte.

Geht man also davon aus, dass zwei orientierte lineare Kreisreihen durch je einen Ähnlichkeitspunkt gegeben sind, so muss ein weiteres Kriterium erarbeitet werden, um herauszufinden, ob die beschriebenen Geraden windschief sind. Dies kann der Schnittwinkel der Geraden mit der Tafel Ebene sein.

Seien zwei orientierte lineare Kreisreihen L_1 und L_2 mit zwei Zentralen z_1 und z_2 gegeben, das bedeutet, die Geraden im Raum schneiden die Tafel Ebene nicht rechtwinklig (dieser Fall ist trivial). Auf ihnen sei je ein Kreis $\mathcal{K}_1(P_1, r_1)$ und $\mathcal{K}_2(P_2, r_2)$ mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 sowie den Radien r_1 und r_2 gegeben. Weiter seien A_1 und A_2 die Ähnlichkeitspunkte der beiden linearen Kreisreihen. Ob die beiden Raumgeraden, die durch die orientierten linearen Kreisreihen beschrieben werden, parallel sind, kann man wie folgt herausfinden:

Merksatz:

Zwei die Tafel nicht im rechten Winkel schneidende Geraden, die durch die orientierten linearen Kreisreihen L_1 und L_2 dargestellt werden, sind genau dann parallel zueinander, wenn für diese beiden linearen Kreisreihen gilt:

Entweder

- ihre Zentralen z_1 und z_2 sind identisch und
- sie besitzen verschiedene Ähnlichkeitspunkte $A_1 \neq A_2$ und
- die Bildkreise in der Strecke $\overline{A_1 A_2}$ sind gleichorientiert und
- die Gleichheit $\frac{d(A_1, P_1)}{r_1} = \frac{d(A_2, P_2)}{r_2}$ besteht

oder

- ihre Zentralen z_1 und z_2 sind parallel und
- die Gleichheit $\frac{d(A_1, P_1)}{r_1} = \frac{d(A_2, P_2)}{r_2}$ besteht und
- die Kreise, deren Mittelpunkte in der gleichen Halbebene, getrennt durch die Gerade $A_1 A_2$, liegen, besitzen die gleiche Orientierung.

An dieser Stelle bietet es sich an, nochmals anzusprechen, dass der Schnittwinkel der Geraden über die Formel

$$\cot(\alpha) = \frac{d(A_1, P_1)}{r_1},$$

wobei α der Schnittwinkel der Geraden ist, welche durch L_1 gegeben ist, mit der Tafel Ebene berechnet werden kann. Dies wurde bereits in Übungsaufgabe 3 in der

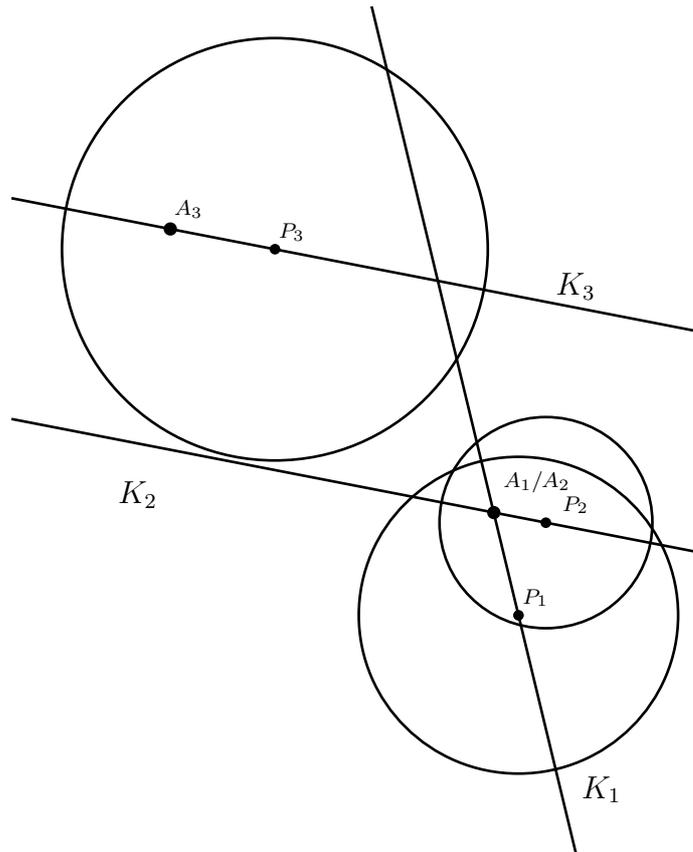
vierten Phase diskutiert.

Nun ergibt sich leicht, dass in allen anderen Fällen als in den obigen Merksätzen behandelten, die Geraden, welche durch lineare Kreisreihen beschrieben sind, windschief zueinander sein müssen.

Weiterführende Fragen/Aufgaben für den Unterricht. In der ersten Aufgabe untersuchen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Lagen von Geraden, die durch orientierte lineare Kreisreihen gegeben sind. Somit können die erarbeiteten Merksätze am konkreten Beispiel angewendet werden. In der zweiten Aufgabe erarbeiten die Schülerinnen und Schüler ein Kriterium, um herauszufinden, ob sich zwei Geraden im Raum schneiden, wenn ihre linearen Kreisreihen bekannt sind. Hier sollen sie die Kenntnisse über Ähnlichkeit bzw. die Strahlensätze ausnutzen, um die Bedingung zu erarbeiten. In der zweiten Teilaufgabe soll das ausgearbeitete Kriterium am Beispiel angewendet werden.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die drei auf der Tafel Ebene gegebenen orientierten linearen Kreisreihen K_1 , K_2 und K_3 in der nachfolgenden Abbildung, die durch je einen Ähnlichkeitspunkt A_1 , A_2 und A_3 sowie je einen Kreis um die Punkte P_1 , P_2 und P_3 gegeben sind. Alle Kreise sind gleichorientiert.



Darüber hinaus gelte:

- Radius des Kreises um P_1 : $r_1 = 3$
Abstand von P_1 zu A_1 : $d(P_1, A_1) = 2$
- Radius des Kreises um P_2 : $r_2 = 2$
Abstand von P_2 zu A_2 : $d(P_2, A_2) = 1$
- Radius des Kreises um P_3 : $r_3 = 4$
Abstand von P_3 zu A_3 : $d(P_3, A_3) = 2$

- a) Beschreiben Sie die gegenseitige Lage der durch die linearen Kreisreihen K_1 und K_2 sowie K_2 und K_3 dargestellten Geraden, indem Sie entscheiden, ob sie parallel, identisch, windschief sind oder sich in einem Punkt schneiden.
- b) Ermitteln Sie die Schnittwinkel der durch die Kreisreihen repräsentierten Geraden mit der Tafelenebene.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- a) – *Lage der linearen Kreisreihen K_1 und K_2 zueinander:*

Man erkennt, dass die linearen Kreisreihen sich in ihren Ähnlichkeitspunkten schneiden. Darüber hinaus sind die Zentralen nicht identisch, sodass gefolgert werden kann, dass beide Kreisreihen keinen gemeinsamen Bildkreis besitzen, sich die zu den Kreisreihen K_1 und K_2 gehörigen Geraden im Raum also schneiden.

- *Lage der linearen Kreisreihen K_2 und K_3 zueinander:*

Die beiden Zentralen der linearen Kreisreihen K_2 und K_3 sind parallel. Die repräsentierten Geraden können somit parallel oder windschief sein. Die Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{d(A_2, P_2)}{r_2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{d(A_3, P_3)}{r_3}$$

zusammen mit der Gleichorientierung der Kreise liefert, dass die Geraden der linearen Kreisreihen K_2 und K_3 parallel zueinander verlaufen.

- b) Es gilt für die Schnittwinkel der Tafelenebene mit der Geraden repräsentiert durch die

- lineare Kreisreihe K_1 :

$$\alpha_1 = \operatorname{arccot} \left(\frac{d(A_1, P_1)}{r_1} \right) = \operatorname{arccot} \left(\frac{2}{3} \right) \approx 56,3^\circ,$$

- lineare Kreisreihe K_2 :

$$\alpha_2 = \operatorname{arccot} \left(\frac{d(A_2, P_2)}{r_2} \right) = \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{2} \right) \approx 63,4^\circ,$$

- lineare Kreisreihe K_3 :

$$\alpha_3 = \operatorname{arccot} \left(\frac{d(A_3, P_3)}{r_3} \right) = \operatorname{arccot} \left(\frac{2}{4} \right) \approx 63,4^\circ.$$

Aufgabe 2

Sie haben eine Bedingung kennengelernt, um herauszufinden, ob sich zwei Geraden im Raum schneiden, wenn sie durch orientierte lineare Kreisreihen gegeben

sind. Hierfür war entscheidend, dass im Schnittpunkt beider Zentralen die Bildkreise beider linearer Kreisreihen gleich sind und die Orientierung dieselbe ist.

- a) Ermitteln Sie ein Kriterium, um zu prüfen, ob sich zwei Geraden, die durch orientierte lineare Kreisreihen gegeben sind, schneiden. Dabei sollen die Ähnlichkeitspunkte sowie die sich schneidenden Zentralen beider Kreisreihen bekannt sein. Darüber hinaus sind zwei Kreise mitsamt ihren Radien bekannt. Sie dürfen verschiedene Abstände messen.
- b) Prüfen Sie, ob sich die Geraden, die durch die Kreisreihen K_1 und K_3 in der ersten Aufgabe gegebenen sind, schneiden.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- a) Wie bereits beschrieben, muss für zwei lineare Kreisreihen ermittelt werden, welchen Radius und welche Orientierung die Bildkreise beider linearer Kreisreihen im Schnittpunkt ihrer Zentralen besitzen. Seien also zwei lineare Kreisreihen K_1 und K_2 durch ihre Ähnlichkeitspunkte A_1 und A_2 sowie je einen Kreis mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 und Radien r_1 und r_2 gegeben. Der Schnittpunkt der Zentralen sei mit S bezeichnet. Um herauszufinden, ob die durch die linearen Kreisreihen gegebenen Geraden einen Schnittpunkt besitzen, muss der Radius des Kreises im Punkt S ermittelt werden. Mit den Strahlensätzen überlegt man sich, dass für den Radius r_{S1} des Kreises im Schnittpunkt S gilt:

$$\frac{d(A_1, P_1)}{r_1} = \frac{d(A_1, S)}{r_{S1}} \iff r_{S1} = \frac{d(A_1, S) \cdot r_1}{d(A_1, P_1)}.$$

Analog überzeugt man sich, dass für den Radius r_{S2} des Kreises der linearen Kreisreihe K_2 im Schnittpunkt S gilt:

$$r_{S2} = \frac{d(A_2, S) \cdot r_2}{d(A_2, P_2)}$$

Die Kreise besitzen die gleiche Orientierung wie die gegebenen Kreise, sofern der Punkt S auf den selben Halbgeraden der Zentralen liegen, wie die gegebenen Kreise, andernfalls die entgegengesetzte Orientierung. Gilt $r_{S1} = r_{S2}$, also stimmen die Radien der Kreise beider linearer Kreise in ihrem Schnittpunkt überein, und ist die Orientierung gleich, so schneiden sich die zugehörigen Geraden im Raum.

b) Man misst nach, dass etwa $d(A_3, S) = 3,6\text{cm}$ und $d(A_1, S) = 3,2\text{cm}$, sodass

$$r_{S1} = \frac{d(A_1, S) \cdot r_1}{d(A_1, P_1)} = \frac{3,2\text{cm} \cdot 3}{2} = 4,8\text{cm}$$

$$r_{S2} = \frac{d(A_3, S) \cdot r_3}{d(A_3, P_3)} = \frac{3,6\text{cm} \cdot 4}{2} = 7,2\text{cm}.$$

Nun ist $r_{S1} \neq r_{S2}$, sodass die durch K_1 und K_2 repräsentierten Geraden windschief zueinander sind.

9.3. Didaktische Stellungnahme

Mit Blick auf die Komplexität des im vorherigen Abschnitt diskutierten unterrichtlichen Vorschlags für eine schulische Umsetzung der Zyklusografie sollte diese in der Oberstufe durchgeführt werden. Wie bereits in Abschnitt 9.2.1 angemerkt, ist im aktuell geltenden Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalens ein zentraler Bestandteil der Oberstufenmathematik das Thema Geometrie und damit einhergehend des zentralen Abiturs. So liest man konkret, dass hierin ein inhaltlicher Bestandteil die Vektorrechnung und die Analytische Geometrie in Verbindung mit der Linearen Algebra ist. Diese Lerninhalte bieten einen Übergang von ebener Geometrie zur räumlichen Geometrie, in der mit Koordinaten bzw. Vektoren gearbeitet werden kann.

Wie bereits im Abschnitt 9.2.2 erwähnt, gelangt man im Obertufenunterricht zu neuen Grundvorstellungen von Objekten, wie beispielsweise der Tatsache, dass Geraden, die nicht parallel sind, keinen Schnittpunkt besitzen müssen. Ein anderes Beispiel wäre die Diskussion von Ebenen, diese können nun aufgrund verschiedener Lagen beispielsweise Schnittgeraden besitzen – dies ist in der zweidimensionalen euklidischen Ebene nicht möglich. Um diese neuen Ideen nachvollziehen zu können, ist ein hohes Maß an Abstraktionsvermögen notwendig. Darüber hinaus muss die räumliche Vorstellung geschult werden. Man kann deshalb versuchen, eine räumliche Visualisierung durch Objekte vorzunehmen (Zeigestöcke als Geraden, Pappen als Ebenen etc.), muss aber die Schülerinnen und Schüler gleichermaßen für räumliche Darstellung auf dem Papier sensibilisieren.

Die Elemente der Analytischen Geometrie besitzen den Vorteil, dass wenn eine ausreichende Abstraktion vorgenommen wurde, d. h. wenn es gelungen ist, den Begriff des Vektors auch anschaulich zu durchdringen (Vektor als Pfeilkategorie) und darauf aufbauend Geraden- und Ebenenbeschreibungen vorzunehmen, die Notwendigkeit eines Vorstellungsvermögens zweitrangig wird. Konkret am Beispiel einer Untersuchung der Lage zweier Geraden heißt das für folgendes Beispiel:

Gegeben seien zwei Geraden, wobei die Gerade g_1 durch die Punkte $A = (1, 5, 7)$ und $B = (1, 2, 5)$ und die Gerade g_2 durch die Punkte $C = (5, 9, 2)$ und $D = (5, 6, 0)$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Lage der Geraden.

Für die Lösung der Aufgabe ist es nicht notwendig zu erkennen, wie die Punkte liegen und wie die Geraden verlaufen. Die alleinige Bestimmung beider Richtungsvektoren und eine Punktprobe liefern die Antwort auf die Frage. Das bedeutet, dass für die Behandlung derartiger Problemstellungen das geometrische Verständnis in den Hintergrund und verstärkt eine Rechenkompetenz in den Vordergrund rückt.

Der oben dargestellte Ansatz zur zyklografischen Behandlung bedient sich (mit Ausnahme der Winkelberechnung und Quotientenbildung) keiner rechnerischen Methoden zur Beschreibung von Geraden oder der Untersuchung ihrer Lagebeziehungen. Das bedeutet aus didaktischer Perspektive, dass hier vorrangig die Anschauung geschult wird. Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Erfahrung heraus Geraden im Raum beschreiben und erkennen, welche Lagen sie zueinander besitzen können – ohne zyklografischen Schwerpunkt. Das wird abstrahiert, indem sie diese Geraden durch (orientierte) lineare Kreisreihen beschreiben sollen. Anschließend übertragen die Schülerinnen und Schüler die möglichen Geradenlagen auf die zyklografische Projektion und entwickeln Merksätze, wie man die zugehörigen Raumgeraden beschreiben und ihre gegenseitige Lage herausfinden kann.

Man erkennt Vor- und Nachteile bei der durch aktuelle Vorgaben durchzuführenden Analytischen Geometrie im Vergleich zur zyklografischen Methode: Die Zyklografie bedient sich im Kern keiner rechnerischen sowie koordinatenabhängigen Behandlung und setzt vorrangig auf Anschauung; sie schult damit implizit das Vorstellungsvermögen. Bei der Analytischen Geometrie werden nach einer in der Regel einleitenden Motivation für die Beschreibung von Geraden und Ebenen im Kern Rechnungen durchgeführt, die auf geometrische Sachverhalte schließen lassen. Will man dem Anspruch gerecht werden, einen Geometrieunterricht zu gestalten, der auf klassische Konstruktionen (bei der zyklografischen Behandlung des vorherigen Abschnittes durch Ähnlichkeitsbetrachtungen ermöglicht) setzt und weniger durch Rechnungen geprägt ist, so bietet die Zyklografie eine sinnvolle Möglichkeit, Raumgeometrie in der Ebene zu betreiben. Auf diese Weise tritt die Schulung der Rechenkompetenz zurück und es lassen sich mithilfe der Zyklografie Transferleistungen der Schülerinnen und Schüler fördern (beispielsweise die Vernetzung von linearen Kreisreihen in der Ebene und Geraden im Raum). Dies wiederum leistet einen Beitrag zur Beweglichkeit des Denkens. Leichte Beweise, wie der des Satzes von Monge, bieten außerdem eine eindruckliche Motivation, die Zyklografie als ein Werkzeug zu

demonstrieren, mit dem geometrische Sachverhalte nachvollzogen werden können. Derartige Diskussionen können in den Unterricht integriert werden.

Jedoch sollte man sich auch über die Grenzen einer didaktischen Verwertung der Zyklografie bewusst werden: Man hat in den vorherigen Kapiteln gesehen, dass die Zyklografie ihr Potential entfaltet, wenn man sie in Verbindung mit der Zentral- und Senkrechtprojektion entwickelt. Darüber hinaus werden für bestimmte Aufgaben und Fragestellungen (beispielsweise das Apollonische Berührproblem KKK) weitere geometrische Instrumente, wie zum Beispiel der Potenzbegriff oder Wissen aus der Darstellenden Geometrie benötigt. Das heißt, bevor man mithilfe der Zyklografie Probleme diskutieren kann, muss ein großes Grundlagenwissen geschaffen werden.⁸⁹ Die Analytische Geometrie knüpft hingegen an das Mittelstufenwissen, beispielsweise die Koordinatengeometrie oder das Lösen von Gleichungssystemen, an. Das ermöglicht einen niederschweligen und leichteren Zugang zu diesem Thema und trägt zu einem Mathematikunterricht bei, der sich an einem Spiralcurriculum orientiert.

Betrachtet man das Oberstufen-Lehrbuch Reidt-Wolff von 1955 (s. [Wol55]), so sieht man, dass damals anschauliche Kernelemente der Projektiven bzw. Darstellenden Geometrie ein Bestandteil der unterrichtlichen Behandlung gewesen sind. Aktuelle Lehrbücher, die am momentan gültigen Lehrplan orientiert sind, enthalten diese Elemente nicht mehr, sie behandeln die Analytische Geometrie zusammen mit Elementen der Linearen Algebra.

Es bleibt die Frage offen, weshalb die Zyklografie in der Mathematikdidaktik kaum Popularität erlangt hat bzw. warum sie heutzutage wenig Beachtung findet und weitestgehend unbekannt ist. Dies lässt sich nicht mit Gewissheit beantworten, aber auf der Grundlage der vorliegenden Arbeit mutmaßen. Zunächst hat die fachliche Behandlung der vorherigen Kapitel offenbart, dass verschiedene Probleme, die in der Ebene gelöst werden können, zyklografisch komplizierter erscheinen. Das heißt, dass man verschiedene Zugänge leichter gestalten kann, wenn man die räumliche Betrachtung außer Acht lässt und die Probleme direkt in der Ebene diskutiert (vgl. z. B. die analytische Behandlung des Apollonischen Berührproblems). Aus didaktischer Sicht hat man bereits oben erfahren, dass für eine unterrichtliche Behandlung viele Grundlagen geschaffen werden müssen, um das Potential der Zyklografie zu erkennen und auszuschöpfen. Deshalb wurde sich bei der hier vorgestellten unterrichtlichen Be-

⁸⁹Diese Grundlagen können zum Beispiel Kenntnisse der Kreisgeometrie (z. B. Ähnlichkeitspunkte, Sekantensatz, Tangentensatz) sein. Es sollte jedoch beachtet werden, dass diese nicht mehr Inhalte des schulischen Lehrplans sind. Würde man diese behandeln, so würde die Zyklografie eine Möglichkeit bieten, dieses Themenfeld anwendungsbezogen mithilfe der zyklografischen Methode zu erschließen.

handlung der Zyklografie nur auf einfache Grundlagenprobleme beschränkt. Im Kontext der Tatsache, dass die schulische Entwicklung die Darstellende Geometrie – der sich die Zyklografie im weitesten Sinne zuordnen lässt – zurückgedrängt hat und der Fokus des heutigen Mathematikunterrichts auf der Euklidischen oder Analytischen Geometrie liegt, kann man schließen, dass auch das zyklografische Verfahren sich nicht durchsetzen konnte.

10. Schlusswort

In der vorliegenden Arbeit wurde die Zyklografie Wilhelm Fiedlers vorgestellt, wobei im ersten Teil Fiedlers Leben und Wirken thematisiert wurde und im zweiten Teil die Entstehung seiner Theorie im Fokus stand. Darüber hinaus wurde die zyklografische Idee näher vorgestellt und ausgewählte Konstruktionsaufgaben, die in großen Teilen auf Fiedlers Lehrwerk *Cyklographie* beruhen, diskutiert. Da das Lehrwerk aus dem 19. Jahrhundert stammt, wurden die Ideen in eine moderne Sprache übertragen und durch die Integration weiterer mathematischer Zusammenhänge (die Fiedler in weiten Teilen voraussetzt) kontextualisiert. Des Weiteren wurden viele Beweise und Erläuterungen präzisiert. Dabei stand im Wesentlichen der Darstellungscharakter, also das Ziel, die wenig beachtete Theorie Fiedlers transparent darzustellen und ihr geometrisches Potential zu offenbaren, im Vordergrund. Aus diesem Grund wird nicht immer eine exakte mathematische Strenge erreicht. Die einzelnen Kapitel und ihre Inhalte sollen im Folgenden rekapituliert werden.

Im ersten Kapitel wurde eine historische Übersicht gegeben. Zunächst wurde das Leben Wilhelm Fiedlers, basierend auf einer Biografie seines Sohnes Ernst Fiedler, vorgestellt. Man hat erfahren, dass Fiedler schon in Kinderjahren eine Affinität zur Mathematik, aber auch zu anderen Wissenschaften, hatte. Außerdem wurde erklärt, dass er ein sehr ausgeprägtes Interesse an didaktischen Themen hatte, was sich auch später in seiner Lehre beispielsweise in Prag oder Zürich wiederfand. Diese Tatsache ist umso bemerkenswerter, wenn man beachtet, dass Fiedler Autodidakt war, sich also sein Wissen in großen Teilen durch diszipliniertes Selbststudium aneignete. So könnte man vermuten, dass er der Lehre weniger Relevanz beimaß. Im Anschluss wurde die Bedeutsamkeit der Kreisgeometrie für die Mathematik durch deren Entstehungsgeschichte und Entwicklung in der Antike nachgewiesen. Anschließend wurde die Zyklografie vorgestellt und über ihre Entstehung berichtet. Dazu wurden historische Quellen, u. a. die Korrespondenz Fiedlers zu Mathematikern seiner Zeit, angeführt. Der Konflikt Fiedlers, dass er glaubte, Steiner hätte die zyklografische Idee bereits gekannt, wurde näher beschrieben und man konnte erfahren, dass dies offenbar nicht zutraf. Mehrere Hinweise belegen dies, beispielsweise Fiedlers Briefverkehr mit Weierstrass, der die Steinerschen Werke herausgegeben hatte. Auch

das später publizierte Manuskript Steiners bestätigte diese Annahme. Ein weiterer Abschnitt beschäftigte sich mit der Rezeption der *Cyklographie*. Es wurden Besprechungen vorgestellt, welche die Wichtigkeit der zyklografischen Idee und die Relevanz des Lehrwerkes für die Geometrie nachweisen. Darüber hinaus wurde deutlich, dass Fiedler seine Zyklografie vielfältig beworben hat und an einer Einschätzung von anderen Mathematiker interessiert war. Dies bestätigen die im ersten Kapitel angeführten Briefe. Der letzte Abschnitt des ersten Kapitels gibt eine Übersicht über die Struktur der *Cyklographie*. Hier wurde deutlich, dass Fiedlers Buch als Lehrwerk aufgebaut wurde und sich sowohl an Einsteiger als auch an fortgeschrittene Leser richtete. Zu beachten ist ferner, dass Fiedler mathematische Inhalte voraussetzt, die zu seiner Zeit zum Schulstoff gehörten und in der heutigen Zeit für ein Verständnis seiner Argumentationsschritte präzisiert und kontextualisiert werden müssen.

Das zweite Kapitel diente dazu, die Grundlagen der Darstellenden Geometrie anzuführen. So entwickelte Fiedler die Zyklografie als Synthese von mehreren Projektionsmethoden, genauer der Zentral- und Orthogonalprojektion. Diese Inhalte werden auch in seiner *Cyklographie* aufgearbeitet und kurz eingeführt. Um ein leichteres Verständnis zu ermöglichen, inhaltliche Kohärenz und eine übersichtliche Struktur zu schaffen, wurde in der vorliegenden Arbeit im Unterschied zu Fiedlers rein narrativen Stil eine »Satz-Beweis«- sowie »Konstruktion-Erörterung«-Struktur verwendet. Dadurch wurde es möglich, sich im weiteren Verlauf der Arbeit auf einzelne Aussagen zu beziehen. Fiedlers Lehrwerk hingegen ist in einzelne, durchnummerierte Artikel gegliedert. Hier werden zumeist Sätze, Ideen und Beweise parallel entwickelt. Das Kapitel stellte wichtige Aussagen der Projektiven Geometrie im klassischen Stile dar. So erfuhr man beispielsweise über einen auf Pappus und Desargues zurückgehenden Sachverhalt, dass das Doppelverhältnis bei der zentralperspektivischen Abbildung invariant bleibt. Ein besonderes Doppelverhältnis ist die harmonische Teilung oder harmonische Trennung. Sind drei Punkte gegeben, so lässt sich der vierte harmonische Punkt bestimmen. Wie die dafür notwendige Konstruktion durchzuführen ist, wurde am Ende des Kapitel dargelegt. Das Bemerkenswerte war, dass diese Konstruktion in der Ebene ausgeführt wurde, ihre Erläuterung jedoch räumlich geschah. Hier offenbarte sich, dass die zunächst nicht naheliegende Idee, ein ebenes Problem räumlich zu diskutieren, ein zielführender Ansatz sein kann. Als weiteres Beispiel für eine ähnliche Herangehensweise wurde der Satz von Desargues genannt, der jedoch nicht weiter ausgeführt wurde.

Im anschließenden, dritten Kapitel wurde das zyklografische Abbildungsverfahren eingeführt. Dass es sich, wie Papperitz beschrieb, um ein »nichtikonisches« Abbildungsverfahren (s. Kapitel 2) handelt, wurde hier deutlich. So werden Punkte im

dreidimensionalen Anschauungsraum auf Kreise einer Ebene abgebildet. Dadurch geht eine – die im Sinne der Darstellenden Geometrie zu bevorzugende – Anschauung verloren. Bildet man mit der Zentralprojektion Geraden auf Geraden ab (mit Ausnahme von Spezialfällen) und erzeugt eine Darstellung in der Ebene, die ein realistisches Abbild der räumlichen Umgebung darstellt, so wird beim zyklografischen Abbilden eine Gerade auf eine sogenannte lineare Kreisreihe abgebildet. Umgekehrt beschreibt eine derartige Familie von Kreisen Geraden im Raum, die eindeutig zugeordnet werden können, sofern den Bildkreisen eine Orientierung gegeben wird. Fiedler verzichtet in den meisten Fällen auf eine Kreisorientierung, erklärt aber den Sinn dahinter. Der Satz von Monge ist ebenfalls Teil des dritten Kapitels. Er dient als Beispiel dafür, wie es die Zyklografie ermöglicht, einen Beweis in der Ebene räumlich durchzuführen. Die dazu notwendigen Vorarbeiten wurden am Anfang des Kapitels getroffen. Auch der Satz von Poncelet und Steiner als Pendant zum Satz von Mascheroni ist ein nennenswerter Satz der Kreisgeometrie. Ersterer wird in Fiedlers *Cyklographie* angesprochen, aber nicht vollständig bewiesen; er werden nur einige für den Nachweis notwendige Teile erläutert. Dies wird in einem zyklografischen Kontext eingebettet. Im Rahmen der Behandlung linearer Kreisreihen und planarer Kreisysteme zur Abbildung von Ebenen und Geraden im Raum wurden in dieser Arbeit mehrere Konstruktionsaufgaben vorgestellt. Hier werden Schnitt(winkel-)probleme diskutiert und Konstruktionen durchgeführt. Die Begründungen und Erläuterungen, welche die Korrektheit der Konstruktionen nachweisen, arbeiten mit der Zyklografie; sie dienen als kanonisches Beispiel dafür, wie die Synthese aus klassischen Projektionsmethoden und der zyklografischen Abbildung zielführend eingesetzt werden kann. Es wurden zahlreiche Ergänzungen sowie Abbildungen in räumlicher Darstellung angegeben, die bei Fiedler nicht zu finden sind, wodurch ein leichteres Verständnis der Argumentationsschritte möglich sein sollte.

Über die Grundlagen der Kreisgeometrie, die zur Vorbereitung der nachfolgenden Kapitel dienen, wurde im vierten Kapitel berichtet. Diese Aufarbeitung ist bei Fiedler nicht zu finden, aber notwendig, um die anschließenden Inhalte leichter verstehen zu können. Hier wurden die Zugänge auf Grundlage moderner Literatur auf eine »konventionelle« Weise geschaffen und damit die Strukturierung erleichtert. Am Anfang wurde eine geometrische Involution, die als Inversion am Kreis oder Kreisspiegelung bekannt ist, vorgestellt. Sie kann genutzt werden, um Konstruktionsprobleme zu transformieren. So können beispielsweise Berührprobleme, die Kreise betreffen, in Geraden- und Kreisberührprobleme umgewandelt werden. Dadurch kann es unter Umständen leichter sein, eine Konstruktion abzuleiten, um das Problem handhaben zu können. In diesem Rahmen wurden elementare Sätze be-

handelt. Im Anschluss daran, wurde das Pol- und Polarenkonzept eingeführt, jedoch zunächst nicht weiter vertieft. Es diente der Vorbereitung auf das spätere Kapitel zum Apollonischen Berührproblem. Als nächstes wurde die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis beschrieben. Dieses Konzept geht auf Steiner zurück und lässt sich mithilfe elementarer Kreissätze einführen. Wichtige Grundlagen, wie die Potenzgerade als die Menge aller Punkte, die in Bezug auf zwei Kreise die gleiche Potenz besitzen, sowie ihre Konstruktion wurden diskutiert. Weniger bekannt ist der Begriff der gemeinschaftlichen Potenz, der sowohl bei Steiner als auch in Fiedlers *Cyklographie* eingeführt wird. Hier ist zu bemerken, dass die beiden Autoren jeweils eine andere Definition zu Grunde legen. Der Beweis, dass beide Zugänge jedoch äquivalent sind, wird in dieser Arbeit dargestellt. Hierfür wurde Koordinatengeometrie verwendet. Den Abschluss des Kapitels bildet die Einführung weiterer geometrischer Objekte, hier der Potenz- und der Ähnlichkeitskreis. Außerdem wird diskutiert, unter welchen Bedingungen ein Kreis konstruiert werden kann, der drei gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet, und wie die Konstruktion ggf. auszuführen ist. Dies war eine Möglichkeit, eine Anwendung der Potenz bzw. der Potenzgeraden aufzuzeigen; Fiedler stellt diese Konstruktion nicht dar.

Das anschließende Kapitel beschäftigte sich zunächst mit der Hyperbel. Hier wurde nicht der Weg Fiedlers gewählt, sondern die Hyperbel wurde vielmehr als Ortskurve definiert und mithilfe des Konzeptes der Dandelinischen Kugeln als Kegelschnitt im eigentlichen Sinne der Wortes identifiziert. An dieser Stelle wurden kurze biografische Informationen über Dandelin gegeben. Regelflächen waren Gegenstand des anschließenden Abschnittes. Sie sind räumliche Objekte, die sich durch die Bewegung von Geraden erzeugen lassen. Es stellte sich heraus, dass die Rotation einer gleichseitigen Hyperbel um ihre Hauptachse ein sogenanntes Rotationshyperboloid liefert, welches als Regelfläche erkannt werden kann. Als weiteres Beispiel einer derartigen Fläche wurde der Kreiskegel erwähnt, der sich zur Diskussion von Berühraufgaben im zyklografischen Kontext eignet. Der Fokus der nachfolgenden Abschnitte wurde auf die Kreisbüschel gelegt. Hierbei ist ein ähnlicher Zugang wie in Fiedlers *Cyklographie* dargestellt worden. So lassen sich gewisse Kreisfamilien durch gleichseitige Hyperbeln und deren zyklografische Bilder beschreiben. Ein konventioneller Zugang dazu geschieht über die Potenzgeraden. Hier zeigt sich deutlich, dass die Zyklografie die Möglichkeit bietet, einen alternativen Zugang zu diesen geometrischen Objekten zu schaffen, der als *darstellend-geometrisch* angesehen werden kann. Die im Kapitel zuvor eingeführten Ähnlichkeits- und Potenzkreise wurden erneut aufgegriffen und verschiedene Zusammenhänge und Sätze über diese dargestellt. Beispielsweise zeigte sich, dass zwei Kreise aus jedem Punkt des Ähnlichkeitskreises unter gleichen Win-

keln gesehen werden. Den Abschluss des Kapitels bildete der Satz von Bodenmiller. Er wurde verwendet, um nachzuweisen, dass die Ähnlichkeitskreise dreier paarweiser verschiedener Kreise ein Kreisbüschel bilden.

Die Arbeit kumuliert im siebten Kapitel bei der vollständigen Diskussion des Apollonischen Berührproblems. Dazu wurde am Anfang zunächst Apollonius vorgestellt und eine Zusammenstellung von Mathematikern gegeben, die sich mit seinem Problem beschäftigten. Dies verdeutlichte die Wichtigkeit des Problems für die Geometrie. Zudem wurden zwei praktische Anwendungen dargestellt: eine mechanische Aufgabe sowie eine Fragestellung, die militärisch motiviert ist. Daran anschließend wurde auf Grundlage der in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Ideen und Sätze eine Strategie abgeleitet, mit deren Hilfe das Apollonische Problem der Bestimmung aller Berührkreise zu drei gegebenen Kreisen behandelt werden kann. Die Strategie wurde aus zweierlei mathematischer Perspektive umgesetzt: Zuerst wurde ein analytischer Ansatz, der bei Fiedler nicht zu finden ist, und anschließend eine elementargeometrische Lösung gezeigt. Letztere wurde in Anlehnung an die Darstellung von Adler durchgeführt und verdeutlicht. Für ein leichteres Verständnis wurde die Konstruktion durch mathematische Sätze vorbereitet und nachfolgend in einzelne Schritte zerlegt. Um eine leichte Nachvollziehbarkeit und Anschaulichkeit zu gewährleisten, wurden die Konstruktionen anhand eines konkreten Beispiels durchgeführt.

Das vorletzte Kapitel der Arbeit stellte eine kurze Einführung in die Winkelschnittlehre in Bezug auf Kreise dar. Steiner beschäftigte sich unter anderem mit Fragen, wie Kreise zu bestimmen sind, die andere Kreise in vorgeschriebenen oder, falls mehrere Kreise involviert sind, unter gleichen Winkeln schneiden. Die Behandlung dieser Fragen lässt sich auch zyklografisch betrachten. So offenbarten die Herleitungen und Sätze des letzten Kapitels, dass Winkelschnittprobleme im Kontext der Zyklografie zur Untersuchung von Rotationshyperboloiden führten. Hieraus ergeben sich weitere Fragestellungen: So kann man das Apollonische Berührproblem in ein Winkelschnittproblem umwandeln; dann ist man an der Bestimmung gemeinsamer Punkte von Rotationshyperboloiden interessiert. Der letzte Absatz erklärt kurz, welche Aufgaben Fiedler in seiner Arbeit außerdem diskutiert.

Den Abschluss der Arbeit bildete ein didaktischer Exkurs zur Zyklografie. Hierbei wurden verschiedene Schwerpunkte gesetzt. Zunächst hat man in Anschluss an Kapitel 2 erfahren, welchen Standpunkt Fiedler in Bezug auf die Lehre der Geometrie vertrat. Der in diesem Kontext erwähnte Briefverkehr zwischen Torelli und Fiedler gibt diesbezüglich vertiefende Einblicke. So hat man erfahren, dass Fiedler einen geometrischen Unterricht anstrebte, der aus der Anschauung heraus durch Projektion motiviert ist, und dass er eine gemeinsame Behandlung von ebener und

räumlicher Geometrie als sinnvolle Methode der Vermittlung ansah. Im zweiten Abschnitt des Kapitels wurde die Zyklografie als Unterrichtsgegenstand thematisiert. Für die Konzeption einer Unterrichtsreihe mit diesem Thema wurde als Grundlage der aktuell gültige Lehrplan für das Fach Mathematik in der Oberstufe des Landes Nordrhein-Westfalen herangezogen. Man stellte fest, dass Geometrie mithilfe der Analytischen Geometrie und der Vektorrechnung in der Oberstufe behandelt werden soll. Das bedeutet insbesondere, dass Raumgeometrie unter Verwendung von Koordinaten betrieben wird. Schwerpunkte bilden dabei insbesondere die Beschreibung von Geraden und Ebenen in Raum; darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler die gegenseitigen Lagen dieser Objekte untersuchen können. Auf dieser Basis wurde eine fünfphasige Unterrichtsreihe zum Thema Zyklografie konzipiert. Gemäß Fiedlers Idee, dass die Geometrie projizierend verfahren sollte, wurde für den inhaltlichen Einstieg eine Behandlung der Zentralprojektion gewählt. Die weiteren Phasen führen davon ausgehend die zyklografische Abbildung sowie die Beschreibung von Geraden mit ihrer Hilfe ein. Die Reihe wird mit der Untersuchung von Lagebeziehungen auf Grundlage von zyklografischen Projektionen abgeschlossen. Der letzte Absatz des Kapitels wägt Vor- und Nachteile der Behandlung der Zyklografie ab. So erkennt man in ihr das Potential, dass man Sätze aus der Kreisgeometrie anwendungsbezogen lehren und dass durch sie die Raumanschauung geschult werden kann. Zudem tritt im Vergleich zur Vektorrechnung und damit verbunden der Koordinatengeometrie der Rechensaspekt zurück und es gelangen elementare geometrische Konzepte verstärkt in den Vordergrund. Auch Nachteile, wie die Tatsache, dass viele Grundlagen wiederholt und vertieft werden müssen, sprechen gegen die Behandlung der Zyklografie. Darüber hinaus erscheint es, als das Problemstellungen der ebenen Geometrie komplizierter werden, wenn man sie mit der Zyklografie anstelle mit »herkömmlichen Methoden« erarbeitet. Dies wird auch als eine mögliche Begründung dafür angeführt, weshalb sich die Zyklografie nicht durchsetzen konnte und wenig Popularität erlangte.

Zusammenfassend stellte die vorliegende Arbeit Wilhelm Fiedler vor, sein Leben und seine Ansichten zur Lehre der Geometrie. Man erfuhr über die Entstehung und Entwicklung der zyklografischen Abbildung. Anschließend wurde der Fokus auf mathematische Inhalte gelegt: So wurde die Zentralprojektion – die in Verbindung mit der Zyklografie eingesetzt wird – anschaulich motiviert und grundlegende Sätze sowie ein Beispiel dazu erörtert. Darauffolgend wurde die Zyklografie eingeführt und mit ihrer Hilfe Geraden und Ebenen beschrieben und dazu einige Zusammenhänge ausgearbeitet. Ebenso wurden die Themen Kreisbüschel und Kegelschnitte (speziell Hyperbeln) behandelt und beide Felder durch die Zyklografie in Verbin-

dung gebracht. Das Apollonische Probleme zeigte, dass die entwickelte Theorie der Zyklografie sowie die Sätze aus der Kreisgeometrie auch zur Lösung eines klassischen Problems der Antike angewendet werden können. Eine Ausblick über weitere Einsatzmöglichkeiten der Zyklografie gab das anschließende Kapitel zu den Schnittproblemen, wo die Frage diskutiert wurde, wie sich Kreise bestimmen lassen, die andere unter vorgegebenen Winkeln schneiden. Der didaktische Diskurs zum Abschluss der Arbeit zeigte eine Möglichkeit auf, die Zyklografie vor dem Hintergrund eines Schwerpunktes des Kernlehrplans des Faches Mathematik für die Oberstufe des Landes Nordrhein-Westfalen zu behandeln. Eine didaktische Diskussion zeigte Vor- und Nachteile auf und versucht eine mögliche Antwort auf die Frage zu geben, weshalb sich die Zyklografie nicht durchsetzen konnte.

A. Anhang

A.1. Die Gleichung der Geraden l – Fall 1

Die auf die Aufrissebene projizierten Mantellinien des Kegels \mathfrak{K}_1 lassen sich durch die Geradengleichungen

$$\begin{aligned}y_1 &= x, \\y_2 &= -x + 2x_1\end{aligned}$$

und die des Kegels \mathfrak{K}_2 durch

$$\begin{aligned}z_1 &= x + (r_2 - x_2), \\z_2 &= -x + (r_2 + x_2)\end{aligned}$$

beschreiben. Bestimmt man nun die Schnittpunkte der Gleichungen y_1 und z_2 sowie y_2 und z_1 , so folgt

$$x = -x + r_2 + x_2 \iff x = \frac{r_2 + x_2}{2}$$

und

$$2x_1 - x = x + (r_2 - x_2) \iff x = \frac{2x_1 - r_2 + x_2}{2}.$$

Das liefert die Schnittpunkte

$$P = \left(\frac{r_2 + x_2}{2}, \frac{r_2 + x_2}{2} \right) \text{ und } Q = \left(\frac{2x_1 - r_2 + x_2}{2}, \frac{2x_1 + r_2 - x_2}{2} \right).$$

Aus den Koordinaten der Punkte P und Q erhält man die Geradengleichung l , indem man zunächst die Steigung m berechnet, wobei man $r_2 \neq x_1$ voraussetzt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{r_2+x_2}{2} - \frac{2x_1+r_2-x_2}{2}}{\frac{r_2+x_2}{2} - \frac{2x_1-r_2+x_2}{2}} \\ &= \frac{r_2 + x_2 - 2x_1 - r_2 + x_2}{r_2 + x_2 - 2x_1 + r_2 - x_2} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes P sowie der bestimmten Steigung m in die allgemeine Geradengleichung bestimmt man den y -Achsenabschnitt n der affin-linearen Funktion. Es entsteht die Gleichung

$$\frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \cdot \frac{r_2 + x_2}{2} + n = \frac{r_2 + x_2}{2},$$

die aufgelöst nach n das Ergebnis

$$n = \frac{r_2 + x_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \right)$$

liefert. Insgesamt erhält man die Gleichung

$$l: y = \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \cdot x + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \right) \cdot \frac{r_2 + x_2}{2}.$$

Um den Punkt U zu erhalten, errechnet man die Nullstellen der Gleichung l . Es ergibt sich

$$0 = \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \cdot x + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \right) \cdot \frac{r_2 + x_2}{2}$$

bzw. die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} & - \frac{(r_2 + x_2)(r_2 - x_1) - (x_2 - x_1)(r_2 + x_2)}{2(r_2 - x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \cdot x \\ \Leftrightarrow & - \frac{(r_2 + x_2)(r_2 - x_1 - x_2 + x_1)}{2} = (x_2 - x_1)x \\ \Leftrightarrow & - \frac{r_2^2 - x_2^2}{2(x_2 - x_1)} = x \\ \Leftrightarrow & \frac{x_2^2 - r_2^2}{2(x_2 - x_1)} = x, \end{aligned}$$

wenn die Kegel keine konzentrischen Grundkreise haben.

A.2. Die Gleichung der Geraden l – Fall 2

Die auf die Aufrissebene projizierten Mantellinien des Kegels \mathfrak{K}_1 lassen sich durch die Geradengleichungen

$$\begin{aligned}y_1 &= x, \\y_2 &= -x + 2x_1\end{aligned}$$

und die des Kegels \mathfrak{K}_2 durch

$$\begin{aligned}z_1 &= x + (-r_2 - x_2), \\z_2 &= -x + (r_2 + x_2)\end{aligned}$$

beschreiben. Bestimmt man nun die Schnittpunkte der Gleichungen y_1 und z_2 sowie y_2 und z_1 , so folgt

$$x = -x + (-r_2 + x_2) \iff x = \frac{-r_2 + x_2}{2}$$

und

$$2x_1 - x = x + (-r_2 - x_2) \iff x = \frac{2x_1 + r_2 + x_2}{2}.$$

Das liefert die Schnittpunkte

$$P = \left(\frac{-r_2 + x_2}{2}, \frac{-r_2 + x_2}{2} \right) \text{ und } Q = \left(\frac{2x_1 + r_2 + x_2}{2}, \frac{2x_1 - r_2 - x_2}{2} \right).$$

Aus den Koordinaten der Punkte P und Q ermittelt man die Geradengleichung l , indem man zunächst die Steigung m berechnet, wobei man $r_2 \neq x_1$ voraussetzt:

$$\begin{aligned}m &= \frac{\frac{-r_2 + x_2}{2} - \frac{2x_1 - r_2 - x_2}{2}}{\frac{-r_2 + x_2}{2} - \frac{2x_1 + r_2 + x_2}{2}} \\&= \frac{-r_2 + x_2 - 2x_1 + r_2 + x_2}{-r_2 + x_2 - 2x_1 - r_2 - x_2} \\&= -\frac{x_2 - x_1}{r_2 + x_1}.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes P sowie der Steigung m in die allgemeine Geradengleichung bestimmt man den y -Achsenabschnitt n der affin-linearen

Funktion. Es entsteht die Gleichung

$$-\frac{x_2 - x_1}{r_2 + x_1} \cdot \frac{-r_2 + x_2}{2} + n = \frac{-r_2 + x_2}{2},$$

die aufgelöst nach n das Ergebnis

$$n = \frac{-r_2 + x_2}{2} \cdot \left(1 + \frac{x_2 - x_1}{r_2 + x_1}\right)$$

liefert. Insgesamt erhält man die Gleichung

$$l: y = -\frac{x_2 - x_1}{r_2 + x_1} \cdot x + \left(1 + \frac{x_2 - x_1}{r_2 + x_1}\right) \cdot \frac{-r_2 + x_2}{2}.$$

Um den Punkt U zu erhalten, errechnet man die Nullstellen der Funktionsgleichung l . Es ergibt sich

$$0 = \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1} \cdot x + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{r_2 - x_1}\right) \cdot \frac{r_2 + x_2}{2}$$

bzw. die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{(-r_2 + x_2)(r_2 + x_1) + (x_2 - x_1)(-r_2 + x_1)}{2(r_2 + x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{r_2 + x_1} \cdot x \\ \Leftrightarrow & \frac{(-r_2 + x_2)(x_1 + r_2 + x_2 - x_1)}{2} = (x_2 - x_1)x \\ \Leftrightarrow & \frac{x_2^2 - r_2^2}{2(x_2 - x_1)} = x, \end{aligned}$$

wenn die Kegel keine konzentrischen Grundkreise haben.

Literaturverzeichnis

- [Adl06] ADLER, August: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig, 1906
- [Ahr32] AHRENS, Johannes T.: *Über das Problem des Apollonius von Perga von den Berührungen: Einladungs-Schrift zu der auf den XXIX. August festgesetzten feierlichen Preise-Verleihung an dem königlichen Gymnasium und der Lateinischen Schule in Augsburg*. Wirth, Augsburg, 1832
- [Aum15] AUMANN, Günter: *Kreisgeometrie – eine elementare Einführung*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2015
- [Ben73] BENZ, Walter: *Vorlesungen über die Geometrie der Algebren*. Springer Verlag, Berlin u.a., 1973
- [BT29] BLASCHKE, Wilhelm ; THOMSEN, Gerhard: *Vorlesungen über Differentialgeometrie III*. Springer Verlag, Berlin, 1929
- [Cou28] COUSINERY, Barthélémy Édouard: *Géométrie Perspective, ou Principes de Projection Polaire appliqués à la Description des Corps*. 3. Carilian-Goeury, Libraire, Paris, 1828
- [Cox83] COXETER, Harold S. M.: *Zeitlose Geometrie*. Ernst Klett, Stuttgart, 1983
- [CS12] CANCIK, Hubert ; SCHNEIDER, Helmut: *Der neue Pauly - Enzyklopädie der Antike*. J.B. Metzler'sche Verlagsbuchhandlung und Carl Ernst Poeschel Verlag GmbH, Stuttgart/Weimar, 2003/2012
- [Czu78] CZUBER, Emanuel: Ableitung der Centralprojektion aus einer cotirten Orthogonalprojektion. In: *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten* 26 (1878), S. 259–266
- [Czw67] CZWALINA, Arthur: *Die Kegelschnitte des Apollonius*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1967

- [Eck26] ECKHART, Ludwig: *Konstruktive Abbildungsverfahren – Eine Einführung in die neueren Methoden der Darstellenden Geometrie*. Springer Verlag, Wien, 1926
- [Fie60] FIEDLER, Wilhelm: *Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft*. Brockhaus, Leipzig, 1860
- [Fie77] FIEDLER, Wilhelm: Zur Reform des geometrischen Unterrichts. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 22 (1877), S. 82–97
- [Fie79] FIEDLER, Wilhelm: Neue elementare Projectionsmethoden? In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 24 (1879), S. 205–226
- [Fie80] FIEDLER, Wilhelm: Ein neuer Weg zur Theorie der Kegelschnitte. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 25 (1880), S. 217–256
- [Fie81a] FIEDLER, Wilhelm: De la géométrie des systèmes des cercles, développée par une méthode nouvelle de représentation. In: *Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 10e Session. Alger 1881*. Paris, 1881, S. 127–132
- [Fie81b] FIEDLER, Wilhelm: Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 26 (1881), S. 86–93
- [Fie82a] FIEDLER, Wilhelm: *Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme*. Teubner Verlag, Leipzig, 1882
- [Fie82b] FIEDLER, Wilhelm: Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungs-Methoden. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 27 (1882), S. 125–175
- [Fie83a] FIEDLER, Wilhelm: Auszüge aus den Sitzungsprotokollen: Zu zwei Steiner'schen Abhandlungen. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 28 (1883), S. 409–418
- [Fie83b] FIEDLER, Wilhelm: *Die Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, I. Theil, Die Methoden der darstellenden*

- und die Elemente der projectivischen Geometrie.* Teubner Verlag, Leipzig, 1883
- [Fie85] FIEDLER, Wilhelm: *Die Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, II. Theil, Die Darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen.* Teubner Verlag, Leipzig, 1885
- [Fie98] FIEDLER, Ernst: Die Darstellende Geometrie im mathematischen Unterricht. In: *Beilage zum Programm der Kontonschule in Zürich.* Zürcher & Furrer, Zürich, 1898
- [Fie05] FIEDLER, Wilhelm: Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14 (1905), S. 493–503
- [Fie15] FIEDLER, Ernst: Fiedler, Otto Wilhelm. In: BETTELHEIM, Anton (Hrsg.): *Biografisches Jahrbuch und Deutscher Nekrolog* Bd. XVII. Druck und Verlag von Georg Reimer, Berlin, 1915, S. 14–25
- [Fri94] FRITSCH, Rudolf: Franz Meyer. In: *Neue Deutsche Biographie* Bd. 17. Duncker & Humblot, Berlin, 1994, S. 336–337
- [Fri07] FRITSCH, Rudolf: Arthur Schoenflies. In: *Neue Deutsche Biographie* Bd. 23. Duncker & Humblot, Berlin, 2007, S. 412–413
- [GR04] GISCH, David ; RIBANDO, Jason M.: Apollonius' problem: A Study of Solutions and their connections. In: *American Journal of Undergraduate Research* 3 (2004), S. 15–26
- [Gra62] GRASSMANN, Herrmann: *Die Ausdehnungslehre.* Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin, Berlin, 1862
- [Gru25] GRUSON, Johann P.: *L. Mascheroni's Gebrauch des Zirkels.* Schlesingerische Buch- und Musikhandlung, Berlin, 1825
- [Ham70] HAMEISTER, Ernst: *Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene.* Verlag Harri Deutsch, 1970
- [Har00] HARTSHORNE, Robin: *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer Verlag, New York, 2000
- [Hau84] HAUCK, Guido: Besprechung von »Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen«. 15 (1884), S. 521ff.

- [Hau92] HAUSSNER, Robert: Besprechung von »Ueber die Berührung und den Winkelschnitt von Kreisen und Kugeln«. In: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 24 (1892), S. 585ff.
- [HCV32] HILBERT, David ; COHN-VOSSEN, Stephan: *Anschauliche Geometrie*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1932
- [Her14] HERRMANN, Dietmar: *Die antike Mathematik*. Springer Verlag, Berlin u.a., 2014
- [HHL16] HALBEISEN, Lorenz ; HUNGERBÜHLER, Norbert ; LÄUCHLI, Juan: *Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2016
- [JE06] J.J.O'CONNOR ; E.F.ROBERTSON: *August Adler*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Adler.html>. Version: 2006. – Eingesehen am 13.05.2019
- [JE07] J.J.O'CONNOR ; E.F.ROBERTSON: *Hermann Cäsar Hannibal Schubert*. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Schubert.html>. Version: 2007. – Eingesehen am 15.05.2019
- [JE12] J.J.O'CONNOR ; E.F.ROBERTSON: *Germinal Pierre Dandelin*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dandelin.html>. Version: 2012. – Eingesehen am 03.08.2018
- [Kie18] KIEFER, Adolf: Geometrische Mitteilungen. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 63 (1918), S. 494–511
- [Kle26] KLEIN, Felix ; BLASCHKE, Wilhelm (Hrsg.): *Vorlesungen über höhere Geometrie*. Springer Verlag, Berlin, 1926
- [KM61] KRUPPA, Erwin ; MÜLLER, Emil: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. 6. Springer Verlag, Wien, 1961
- [KN10] KAŠPAROVÁ, Martina ; NÁDENÍK, Zbyněk: *Jan Sobotka (1862-1931)*. Matfyzpress, Prag, 2010
- [Knö06] KNÖRRER, Horst: *Geometrie. Ein Lehrbuch für Mathematik- und Physikstudierende*. 2. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2006

- [Lam83] LAMPE, Emil: Besprechung von »Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. erweiterte Aufl. 1. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projectivischen Geometrie«. 15 (1883), S. 496ff.
- [Lor81] LORENZ, Johann F.: *Euklids Elemente, fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt*. Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses, Halle, 1781
- [Mey82] MEYER, Franz: Besprechung von »Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden«. In: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 14 (1882), S. 485ff.
- [Mey18] MEYER, G.: Einige mathematischer Grundlagen der Schallmessung. In: *Allgemeine schweizerische Militärzeitung* 64 (1918), S. 245–246
- [MN14] MSW-NW: *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik*. 2014
- [Mül29] MÜLLER, Emil ; KRAMES, Josef L. (Hrsg.): *Vorlesungen über darstellende Geometrie*. Bd. 2. Franz Deuticke, Wien, 1929
- [OW12] OSTERMANN, Alexander ; WANNER, Gerhard: *Geometry by Its History*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 2012
- [Pap23] PAPPERITZ, Erwin: Darstellende Geometrie. In: MEYER, Franz (Hrsg.) ; MOHRMANN, H. (Hrsg.): *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* Bd. 2. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, 1923, S. 517–595
- [Rei] REICH, Karin: *Jakob Steiner (1796-1863)*. <http://www.math.berlin/mathematiker/jakob-steiner.html>. – Eingesehen am 26.02.2019
- [Rei08] REICH, Karin: Der Desarguessche Satz und der Pascalsche Satz. In: HECHT, Hartmut (Hrsg.) ; MIKOSCH, Regina (Hrsg.) ; SCHWARZ, Ingo (Hrsg.) ; SIEBERT, Harald (Hrsg.) ; WERTHER, Romy (Hrsg.): *Kosmos und Zahl* Bd. 58. Steiner, Wiesbaden, 2008, S. 377–393
- [Roh61] ROHRBACH, Hans: Georg Feigl. In: *Neue Deutsche Biographie* Bd. 5. Duncker & Humblot, Berlin, 1961, S. 57
- [Sch] SCHREITER, Bernd: *Julius Weisbach, aus seinem Leben*. <http://www.mildenaue.de/index.php?id=13809&L=0>. – Eingesehen am 15.07.2019

- [Sch82a] SCHUBERT, Hermann: Besprechung von »Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln, und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsystemen«. 14 (1882), S. 500ff.
- [Sch82b] SCHUBERT, Hermann: Besprechung von »Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln«. 14 (1882), S. 490–491
- [Sch96] SCHOENFLIES, Arthur: Eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung und ihr Zusammenhang mit einigen cyclometrischen Aufgaben. In: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* Bd. 27. 1896, S. 577ff.
- [Sch29] SCHERRER, F.: Kiefer, Adolf. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 74 (1929), S. 336–338
- [Sch50] SCHMIDT, Hermann: *Die Inversion und Ihre Anwendungen*. Verlag von R. Oldenbourg, 1950
- [SS17] SCHEID, Harald ; SCHWARZ, Wolfgang: *Elemente der Geometrie*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2017
- [Sta69] STARK, Helmuth: Hauck, Hermann Guido. In: WAGNER, Fritz (Hrsg.): *Neue Deutsche Biographie* Bd. 8. Duncker & Humblot, Berlin, 1969
- [Ste26] STEINER, Jakob: Einige geometrische Betrachtungen. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1 (1826), S. 161–184
- [Ste33] STEINER, Jacob: *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises*. Ferdinand Dümmler, Berlin, 1833
- [Ste31] STEINER, Jacob ; FUETER, R. (Hrsg.) ; GONSETH, F. (Hrsg.): *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*. Orell Füssli Verlag Zürich und Leipzig, 1931
- [Sti10] STILLWELL, John: *Mathematics and Its History*. 3. Springer Verlag, New York u. a., 2010
- [Str82] STRUBECKER, Karl: Emil Lampe. In: *Neue Deutsche Biographie* Bd. 13. Duncker & Humblot, Berlin, 1982, S. 459–460
- [Tre11] TREUTLEIN, Peter: *Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts ans unseren höheren Schulen*. Teubner Verlag, 911

- [Tro03] TROPFKE, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung*. 2. Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1903
- [Tro23] TROPFKE, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik*. 4. Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Berlin u. a., 1923
- [Vie06] VIERHAUS, Rudolf: *Deutsche Biografische Enzyklopädie*. Bd. 4. Görres-Hittrop, München, 2006
- [Wal03] WALTER, Hans-Henning: Ferdinand Reich. In: HOCKERTS, Hans G. (Hrsg.): *Neue Deutsche Biographie* Bd. 21. Duncker & Humblot, Berlin, 2003, S. 288–289
- [Wie84] WIENER, Christian: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. Teubner Verlag, Leipzig, 1884
- [Wol55] WOLFF, Georg (Hrsg.): *Reidt-Wolff – Die Elemente der Mathematik, Band 4, Analytische Geometrie, Vektorrechnung, Darstellende und Projektive Geometrie, sphärische Trigonometrie*. 2. Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn, Hermann Schroedel Verlag K.G. Hannover, 1955

Archivquellen

- ETH-Bibliothek Hochschularchiv 87:1380
- ETH-Bibliothek Hochschularchiv 87:1381
- ETH-Bibliothek Archiv Hs. 87:1488
- ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs. 87:1408a
- ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs. 87:447
- SUB Göttingen Cod. Ms. Klein 9, 12
- SUB Göttingen Cod. Ms. F. Klein 9, 14
- SUB Göttingen Cod. Ms. Klein 9, 16

Abbildungsverzeichnis

2.1. Deckblatt der <i>Cyklographie</i> Fiedlers (s. [Fie82a])	41
3.1. Graph der Funktion $T_{A,B}$ in Abhängigkeit des Teilungspunktes X . .	50
3.2. Zwei zueinander projektivische Strahlenbüschel mit den Zentren T_1 bzw. T_2	52
3.3. Die harmonische Teilung von vier Punkten auf einer Geraden	53
3.4. Die Ähnlichkeitszentren A_a und A_i zweier Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 unter- schiedlicher Radien und Mittelpunkte	54
3.5. Harmonisches Strahlenbüschel mit rechtem Winkel im Strahlenzen- trum L	57
3.6. Skizze zum Beweis von Satz 3.6	58
3.7. Zentralprojektion der Punkte P und Q	59
3.8. Konstruktion eines gemeinsamen Punktes paralleler Geraden	61
3.9. Der Fluchtpunkt Q' einer Geraden g bei zentralperspektivischer Ab- bildung	62
3.10. Konstruktion des Fußpunktes P_1 des Lotes von einem Punkt P aus den gegebenen Größen C_1, P', Q' und S	65
3.11. Umlegung des Punktes P in der Ebene E in die Tafel \mathcal{T} , Drehrichtung entlang der gestrichelten Linie von P zu (P) hin	66
3.12. Tafelneigung eines projizierenden Strahls	67
3.13. Doppelverhältnis von Strahlen und Punkten	69
3.14. Konstruktion einer harmonischen Gruppe mittels Zentralprojektion .	72
4.1. Zyklografische Abbildung des Punktes P	75
4.2. Hilfsskizze zum Beweis von Satz 4.2	77
4.3. Hilfsskizze zum Beweis von Satz 4.3	78
4.4. Umlegung für den Beweis von Satz 4.6	80
4.5. Der Satz von Monge	82
4.6. Der Satz von Monge in perspektivischer Darstellung	83
4.7. Konstruktion des diametralen Punktes zum gegebenen Kreispunkt S_1	87

4.8. Konstruktion der Schnittpunkte S_1 und S_2 einer Geraden mit einem Kreis unter Verwendung des Lineals	89
4.9. Lineare Kreisreihe R mit dem Ähnlichkeitszentrum S	91
4.10. Zyklografisches Bild einer Geraden, welche im rechten Winkel auf der Tafelebene steht und den Durchstoßpunkt S besitzt	92
4.11. Zyklografisches Bild einer Geraden, welche parallel zur Tafelebene verläuft	93
4.12. Umlegung einer Geraden mit der Tafelneigung α_g in die Tafelebene .	94
4.13. Zyklografisches Bild einer zur Tafel um 45° geneigten Geraden – parabolisches Kreisbüschel	95
4.14. Projizierende Geraden in der Ebene E mit ihren Durchstoß- bzw. Fluchtpunkten Q'	97
4.15. Planares Kreissystem einer projizierenden Ebene E , gegeben durch die sogenannte Ähnlichkeitsachse q' , auf der die gemeinsamen Ähnlichkeitszentren der linearen Kreisreihen liegen, und den Distanzkreis \mathcal{D}	98
4.16. Tafelneigung einer projizierenden Ebene E	100
4.17. Tafelneigung einer projizierenden Ebene E	101
4.18. Tafelneigungen dreier projizierender Ebenen E_1, E_2 und E_3	103
4.19. Lineare Kreisreihen, welche den Distanzkreis berühren	106
4.20. Lineare Kreisreihen, die die Spur s der Ebene E berühren	107
4.21. Schnittwinkel eines Kreises \mathcal{K} mit einer Geraden g	108
4.22. Skizze zum Satz 4.24 – Schnittwinkel eines Kreises mit einer Geraden	109
4.23. Lösung der ersten Aufgabe über lineare Kreisreihen	112
4.24. Lösung der zweiten Konstruktionsaufgabe über eine gegebene lineare Kreisreihe	115
4.25. Lösung der dritten Aufgabe über lineare Kreisreihen	117
4.26. Auflösung der vierten Konstruktionsaufgabe	120
4.27. Auflösung der fünften Konstruktionsaufgabe	122
4.28. Konstruktion der Bildkreise der Kegeldurchstoßpunkte eines projizierenden Strahls durch Q mit einem zyklografischen Kreiskegel mit der Spitze M , welcher durch den Bildkreis $Z(M)$ gegeben ist	126
4.29. Konstruktion der Berührkreise zu einem vorgegebenen Kreis \mathcal{M} einer linearen Kreisreihe, welche durch den Kreis \mathcal{D} und den Ähnlichkeitspunkt Q gegeben ist	127

4.30. Auflösung der ersten Konstruktionsaufgabe über zwei linearen Reihen – Konstruktion zweier Kreise zweier Reihen mit dem Ähnlichkeits- punkt M	130
4.31. Räumliche Interpretation der Lösungskonstruktion	132
4.32. Auflösung der zweiten Konstruktionsaufgabe über zwei lineare Kreis- reihen – Konstruktion von Kreispaaaren, die mit einem vorgegebenen Kreis das gleiche Ähnlichkeitszentrum besitzen	134
4.33. Räumliche Interpretation der Lösungskonstruktion	136
4.34. Konstruktion der linearen Kreisreihe der Schnittgeraden zweier Ebe- nen, welche durch ihre planaren Kreissysteme bestimmt sind	138
4.35. Räumliche Ansicht der Lösungskonstruktion	139
4.36. Konstruktion des Bildkreises des Schnittpunktes P einer Ebene E und einer Geraden g	142
4.37. Räumliche Darstellung des Schnittpunktes M der drei Ebenen E, E_1 und E_2	144
4.38. Bestimmung des Radius des Bildkreises $Z(M)$ durch eine Umlegung	144
4.39. Berührkreise des planaren Kreissystemes S , die die gegebene Geraden t berühren	146
4.40. Parallelogrammkonstruktion zur Bestimmung des Punktes R_1 – räum- liche Darstellung	147
4.41. Konstruktion der Mittelpunkte der Kreise, die drei gegebene Geraden unter den Winkeln des gleichen Kosinuswertes schneiden	149
4.42. Konstruktion der Spurkurve der Transversalen zu drei windschiefen Raumgeraden sowie des Fluchtpunktes einer Transversalen	151
4.43. Die Schnittpunkte Geraden durch die Mittelpunkte der Kreise und die Ähnlichkeitszentren	155
5.1. a) Spiegelung des Punktes P , innerhalb des Kreises \mathcal{K} , b) Spiegelung des Punktes P , außerhalb des Kreises \mathcal{K}	160
5.2. Ähnliche Dreiecke für zueinander inverse Punkte	163
5.3. Das zu einer Geraden g , welche nicht durch den Mittelpunkt des In- versionskreises verläuft, inverse Bild	164
5.4. Harmonische Gruppe durch Inversion am Kreis \mathcal{K}	166
5.5. Schnittwinkel α zweier sich schneidender Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2	169
5.6. Orthogonal schneidende Kreise und die Polare p zum Pol A , die den Diametralpunkt B zum Punkt A im Kreis \mathcal{K}_1 liefert	170

5.7. Konstruktion eines Kreises \mathcal{K}_L , welcher die zwei gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 rechtwinklig schneidet und durch einen Punkt P verläuft, gemäß Konstruktion 5.10	174
5.8. Polarebene bezüglich eines Kegels $\mathfrak{K}(P)$ zu einem Pol Q in räumlicher Darstellung	175
5.9. Polarebene bezüglich eines Kegels $\mathfrak{K}(P)$ zu einem Pol Q in einer Aufrissdarstellung	175
5.10. Die Potenzgerade zu zwei Kreisen – Skizze zum Beweis von Satz 5.11	178
5.11. Konstruktion der inneren Tangenten zu zwei Kreisen	182
5.12. Potenzgerade zweier Kreise, welche sich schneiden bzw. berühren – Skizze zu den Konstruktionen 5.15(i) und 5.15(ii)	183
5.13. Potenzgerade zweier Kreise, welche keine gemeinsamen Punkte haben – Skizze zur Konstruktion 5.15(iii)	184
5.14. Potenzgerade zweier Kreise, welche keine gemeinsamen Punkte besitzen – Skizze zur Konstruktion 5.15(iv)	185
5.15. Bestimmung der Potenzgerade zweier Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mithilfe eines Hilfskreises \mathcal{K} gemäß Konstruktion 5.16	185
5.16. Der Schnitt der beiden Geraden k und g mit den Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 und die Beschriftungen der Schnittpunkte	186
5.17. Beweisskizzen zum Satz 6.25	189
5.18. Das Potenzzentrum Z und der Potenzkreis \mathcal{K}_P zu den drei Kreisen \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3	191
5.19. Der äußere und innere Potenzkreis zu zwei sich schneidenden Kreisen	195
5.20. Der Ähnlichkeitskreis \mathcal{K} zu den Kreisen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2	196
6.1. Achsen mit ihren Bezeichnungen, der Mittelpunkt C_1 sowie die Scheitelpunkte M und M^* der Hyperbel \mathcal{H}	199
6.2. Darstellung der Dandelinischen Kugeln im Doppelkreiskegel K . . .	203
6.3. Schnitt zweier Doppelkreiskegel mit Kegelspitzen in der Tafel Ebene – Aufriss und räumliche Darstellung; die Punkte S_1 und S_2 sind die Scheitelpunkte der Schnittpunktkurve der beiden Kegel (die zweite Abbildung zeigt die Situation um 90° im Uhrzeigersinn gedreht) . . .	211
6.4. Umlegung der Hyperbel (Schnittpunkte der Doppelkreiskegel K_1 und K_2) in die Tafel Ebene und Konstruktion der Punkte A_1 , $(A)_1$ und $(A)_2$	213
6.5. Involution an einer Hyperbel mithilfe einer Tangenten- und Lotkonstruktion	216

6.6. Skizze zur Herleitung eines algebraischen Ausdrucks für die gleichseitige Hyperbel	221
6.7. Gleichheit der Winkel an der gleichseitigen Hyperbel	223
6.8. Schnittwinkelgleichheit in Bezug auf den Winkel, den die Radien einschließen	226
6.9. Skizze zum Beweis von Satz 6.14	226
6.10. Skizze zum Beweis von Satz 6.15	229
6.11. Skizze zur Konstruktion 6.16 für die Bestimmung des Schnittpunktes P einer zu einer der Asymptoten der Hyperbel \mathcal{H} parallelen Geraden g mit der Hyperbel mit gegebenem Scheitelpunkt M und Mittelpunkt C	230
6.12. Skizze zum Beweis von Satz 6.17	232
6.13. Skizze zum Beweis von Satz 6.18	234
6.14. Bildkreise der Schnittpunkte einer Ebene mit einer Hyperbel gemäß Konstruktion 6.19	236
6.15. Untersuchung der Schnittwinkel der Potenzkreise, Betrachtung ihrer Tangentenwinkel	238
6.16. Tangentenwinkel an zwei Kreise am Punkt P des Ähnlichkeitskreises	239
6.17. Wechelsehnenpaar der beiden Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2	241
6.18. Der äußere Potenzkreis zweier Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , welche keine Schnittpunkte besitzen; der innere Potenzkreis existiert nicht	247
6.19. Die zueinander inversen Punkte A_1 und B_2 sowie A_2 und B_1 in Bezug den Potenzkreis \mathcal{K}_P	251
6.20. Darstellung von Kreisen eines hyperbolischen Kreisbüschels sowie der gleichseitigen Hyperbel, durch welches es gegeben ist	253
6.21. Skizze zum Beweis von Satz 6.27	254
6.22. Skizze zum Beweis von Satz 6.30	258
6.23. Skizze zum Beweis von Korollar 6.31 – drei exemplarische Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels mit je gleichlangen Tangentenabschnitten der Länge r	259
6.24. Kreises des zum parabolischen Kreisbüschel konjugierte Kreisbüschels	262
6.25. Das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Punkten P , Q und R auf den Dreiecksseiten und drei Kreise deren Potenzzentrum mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ übereinstimmt	265
6.26. Die Kreise über den Strecken \overline{AQ} , \overline{BR} und \overline{CP} bilden ein Kreisbüschel. Im linken Bild sieht man ein elliptisches, im rechten Bild ein hyperbolisches Kreisbüschel	267

6.27. Veranschaulichung des Satzes von Bodenmiller – Drei Kreise in Bezug auf ein Vierseit, die zu einem Kreisbündel gehören	268
6.28. Die Ähnlichkeitskreise, die zu einem Kreisbündel gehören	270
7.1. Lösung des Apollonischen Problems PPP	273
7.2. Veranschaulichung des Schallortungsprinzips mithilfe des Apollonischen Problems PKK nach [Mey18]	275
7.3. Beispiele für Ausnahmefälle bei der Lösung des Apollonischen Berührproblems KKK	277
7.4. Aufriss eines zyklografischen Kreiskegels	280
7.5. Darstellung der Lösungskreise \mathcal{K}_{L1} und \mathcal{K}_{L2}	284
7.6. Darstellung der Lösungskreise \mathcal{K}_{L3} und \mathcal{K}_{L4}	285
7.7. Darstellung des Aufrisses sowie der Ebene F_k mit den in ihr liegenden Kreisen sowie der Gerade g	290
7.8. Die Potenzgerade als Spurgerade der Schnittebene zweier Kegel im Grund- und Aufriss	292
7.9. Skizze zum Beweis von Satz 7.5 – Fall 1	297
7.10. Skizze zum Beweis von Satz 7.5 – Fall 2	298
7.11. Bestimmung der senkrechten Parallelprojektionen der Durchstoßpunkte einer Geraden durch einen Kegel	300
7.12. Erster Schritt der Konstruktion	304
7.13. Zweiter Schritt der Konstruktion	305
7.14. Letzter Schritt der Konstruktion	306
7.15. Die Konstruktion der Lösungskreise \mathcal{K}_{L3} und \mathcal{K}_{L4}	307
8.1. Skizze zum Beweis von Satz 8.1	310
8.2. Hilfsskizze zur Herleitung des Schnittwinkels zweier Kreise definiert durch Hyperbelpunkte	313
8.3. Ein Kreis \mathcal{K}_L der die zwei gegebenen Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 im vorgegebenen Winkel $\sigma = 40^\circ$ schneidet	320

Glossar

Apollonisches Berührproblem Zu drei gegebenen Kreisen diejenigen Kreise zu finden, die diese berühren. Aus dieser Aufgabe können weitere erhalten werden, wenn man für die Radien der gegebenen Kreise $r = 0$ (der Kreis wird zum Punkt) bzw. $r = \infty$ (der Kreis wird zu einer Geraden) zulässt.

Ähnlichkeitspunkte/-zentren Zwei Kreise unterschiedlicher Radien und Mittelpunkte lassen sich durch eine zentrische Streckung aufeinander abbilden. Die Streckzentren werden als Ähnlichkeitspunkte oder -zentren bezeichnet. Man unterscheidet dabei das äußere und innere Ähnlichkeitszentrum.

Ähnlichkeitskreis Der Ähnlichkeitskreis ist der durch die Ähnlichkeitszentren zweier sich schneidender Kreise beschriebene Kreis durch ihre Schnittpunkte. Ihre Verbindungstrecke bildet den Durchmesser.

Doppelverhältnis Als Doppelverhältnis von vier Punkten fasst man ein bestimmtes Verhältnis zweier Teilverhältnisse auf.

Geimeschaftliche Potenz Die gemeinschaftliche Potenz in Bezug auf zwei Kreise ist eine Zahl, die den Ähnlichkeitszentren zweier Kreise unterschiedlicher Radien zugeordnet werden kann. Mit ihr lassen sich Potenzkreise konstruieren.

Inversion am Kreis Die Inversion am Kreis ist eine involutorische Abbildung. Sie bildet Punkte der Ebene unter einer bestimmten Vorschrift auf Punkte der Ebene an einem fest vorgegebenem Kreis ab.

Involution Eine Involution ist eine Abbildung $f: A \rightarrow A$ für die stets $f(f(a)) = a$ für alle $a \in A$ gilt. Ein geometrisches Beispiel einer Involution ist die Achsen Spiegelung oder die Inversion am Kreis.

Harmonikalen Es handelt sich um charakteristische Geraden in Bezug auf ein Dreieck. Auf ihr liegen harmonische Punkte.

Harmonische Gruppe Eine Punktreihe aus vier Punkten bestehend, deren Doppelverhältnis -1 ist, nennt man eine harmonische Gruppe. Analog definiert man ein harmonisches Strahlenbüschel.

Kreisbündel Man unterscheidet das elliptische, parabolische und hyperbolische Kreisbündel. Es handelt sich um eine Familie von Kreisen, die alle eine gemeinsame Potenzgerade besitzen. Das elliptische Kreisbündel umfasst sämtliche Kreise, deren Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Zentrale liegen und die durch zwei feste Punkte verlaufen. Das hyperbolische Kreisbündel ist das konjugierte Kreisbündel zum elliptischen. Das parabolische Kreisbündel umfasst alle Kreise, die ihre Mittelpunkte auf einer Zentralen besitzen und eine dazu lotrechte Gerade in einem Punkt berühren.

Lineare Kreisreihe Als lineare Kreisreihe wird das zyklografische Bild einer Raumgeraden in der Tafel Ebene bezeichnet. Der Durchstoßpunkt der Geraden in der Tafel (sofern vorhanden) kann als Ähnlichkeitszentrum zweier beliebiger Kreise der linearen Kreisreihe aufgefasst werden.

Planares Kreissystem Unter einem planaren Kreissystem versteht man die zyklografischen Bildkreise, die eine Ebene im Raum in der Tafel Ebene repräsentieren.

Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist eine Zahl, die einem Punkt in Bezug auf einen Kreis zugeordnet wird und die auf Jakob Steiner zurückgeht. Sie wird mithilfe des Sekanten-/Tangenten-/Sehnensatzes definiert und dient zur Lösung von Konstruktionsproblemen.

Potenzgerade Die Menge aller Punkte, die in Bezug auf zwei Kreise die gleiche Potenz besitzen, liegen auf einer Geraden, die als Radikalachse, Potenzlinie oder Potenzgerade bezeichnet wird.

Potenzkreis Sind zwei Kreise gegeben, so gehören sie einem Kreisbündel an. Die diesem Bündel angehörigen Kreise um die Ähnlichkeitszentren der beiden Kreise werden als Potenzkreise bezeichnet. Gelegentlich wird der drei Kreise rechtwinklig schneidende Kreis ebenfalls als Potenzkreis zu drei Kreisen bezeichnet.

Potenzzentrum Die Potenzgeraden dreier Kreise schneiden sich in einem Punkt, welches als Potenzzentrum bezeichnet wird. Existiert ein Kreis, welcher diese drei Kreise rechtwinklig schneidet, so ist das Potenzzentrum dessen Mittelpunkt.

Regelfläche Eine Regelfläche ist eine Fläche im Raum, die sich mithilfe von Geraden erzeugen lässt. In dieser Arbeit wird das Rotationshyperboloid als Regelfläche untersucht.

Rotationshyperboloid Betrachtet man eine Hyperbel und lässt diese um ihre Hauptachse rotieren, so entsteht ein zweischaliges Rotationshyperboloid. Geschieht die Rotation um die Nebenachse, so erhält man ein einschaliges Rotationshyperboloid. Im zyklografischen Sinne dient die Figur zur Lösung von Winkelschnittproblemen.

Zyklografische Abbildung Die zyklografische Abbildung ist eine Abbildung, die einem Raumpunkt einen Bildkreis in einer Ebene – der Tafel Ebene – zuordnet. Der Radius des Bildkreises ist gleich dem Abstand des Punktes von der Tafel Ebene. Die Abbildung lässt sich umkehren, sofern man den Kreisen, die dann auch Zykel genannt werden, eine Orientierung gibt.

Erklärung

Ich versichere, die Arbeit selbstständig verfasst zu haben, nur die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche gekennzeichnet zu haben, und dass die Dissertation in der gegenwärtigen oder einer anderen Fassung noch keiner Fakultät, keiner Gesamthochschule und keiner anderen wissenschaftlichen Hochschule vorgelegen hat.

.....
Datum

.....
Unterschrift