



**BERGISCHE  
UNIVERSITÄT  
WUPPERTAL**

**Ein Beitrag zur numerischen Untersuchung der  
Rissbildung zementgebundener Estrichplatten auf  
Dämmschichten**

KATHARINA SCHWENZER, M. SC.

**Dissertation**

eingereicht an der  
**Fakultät für Architektur und Bauingenieurwesen  
der Bergischen Universität Wuppertal**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

Wuppertal 2025



---

Veröffentlicht als Heft 32 in der Schriftenreihe des  
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau  
Fakultät 5, Ableitung Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Herausgeber**

Der Geschäftsführende Direktor  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal

### **Fachgebiet**

Baumechanik und Numerische Methoden  
Prof. i.R. Dr.-Ing. habil. Wolfhard Zahlten  
Fakultät 5, Abteilung Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Organisation und Verwaltung**

Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal  
Pauluskirchstraße 11  
42285 Wuppertal  
Telefon: (0202) 439-4039

© **Dr.-Ing. Katharina Schwenzer**

ISBN 978-3-940795-31-1

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung der Autorin ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehr- und Forschungsgebiet für Baumechanik und Numerische Methoden der Bergischen Universität Wuppertal.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Wolfhard Zahlten für seine langjährige Unterstützung und die Zeit am Lehrstuhl, und bei meinem Zweitgutachter und Mitbetreuer Herrn Prof. Steffen Anders für die konstruktiven Anregungen bedanken. Mein Dank gilt weiterhin den Herren Prof. Jaan-Willem Simon und Prof. Bernd Naujoks für ihr Mitwirken in der Prüfungskommission, sowie den Mitarbeitenden am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau für die Unterstützung bei der Durchführung meiner Versuche.

Schließlich und vor allem möchte ich meinen ehemaligen Kolleg:innen, vor allem Max, Dominik und Christoph, für die gemeinsame Zeit am Lehrstuhl und die Rückendeckung während der Erstellung dieser Arbeit danken.

Darüber hinaus möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freund:innen bedanken – insbesondere bei meinen Eltern für die stetige und bedingungslose Unterstützung, bei Rowena und Jasmin, sowie Maren, Steffi, Jan und Andrea – für ihre motivierenden Worte und geduldigen Rückhalt.

Wuppertal, im März 2025

Katharina Schwenzer

Tag der Einreichung: 17. April 2024

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Oktober 2024

Prüfungskommission:  
Prof. Dr.-Ing. Bernd Naujoks (Vorsitz)  
Prof. i.R. Dr.-Ing. habil. Wolfhard Zahlten  
Prof. Dr.-Ing. Steffen Anders  
Prof. Dr.-Ing. habil. Jaan-Willem Simon



# Kurzfassung

In vielen Bereichen des Bauwesens spielt die Methode der numerischen Simulation eine zunehmend größere Rolle. Dazu gehört unter anderem auch die (Weiter-)Entwicklung von Materialgesetzen sowie die Überprüfung bzw. Erweiterung ihrer Anwendungsgrenzen zur immer realistischeren Abbildung des Werkstoffverhaltens. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Bereich der Schadensprognose in Bezug auf die Rissbildung zementgebundener Estrichplatten auf Dämmschicht näher beleuchtet. Regelmäßig auftretende Schadensbilder bei dieser besonders schwindanfälligen Bindemittelart zeigen, dass die Bemessungsgrundlage, die auf Jahrzehnte zurückliegenden Versuchsreihen basiert, einer Überprüfung bedarf. Im Bemessungskonzept bisher unberücksichtigte Schwindeinflüsse und daraus resultierende Aufschüsselungen an den Bauteilrändern wurden als eine mögliche Ursache identifiziert.

Materialmodelle für die numerische Abbildung vor allem von Rissen gibt es für den Estrich-ähnlichen Werkstoff Beton. Es ist anzunehmen, dass diese insbesondere für Zementestrich geeignet sind und ein sinnvolles Werkzeug bieten, um die Anwendbarkeit und Beantwortung dieser offenen Fragestellung systematisch zu untersuchen. Dazu wurde eine Modellumgebung entwickelt, die eine ausreichende Netzunabhängigkeit der Ergebnisse gewährleistet. Der Erhärtungs- bzw. Schwindprozess selbst wurde nicht direkt simuliert, sondern die resultierende charakteristische Schüsselform vereinfacht abgeschätzt und als Vorverformung berücksichtigt. Zur Validierung des Modells wurden Balken- und Plattenversuche herangezogen. Mithilfe des entwickelten Modells wurde anhand einer Parameterstudie der Einfluss sowohl infolge Schwinden als auch infolge verschiedener Steifigkeitseinflüsse aus Dämmstoff-Zusammendrückbarkeit und Estrichdicke auf das Versagen untersucht. Die hier erfolgte Extrapolation des experimentell validierten Parameterspektrums ließ eine grundlegende Beurteilung zwar nicht zu, im validierten Bereich zeigte sich jedoch bereits, dass der Einfluss aus Schwinden auf die Bruchlast vernachlässigbar ist. Die Parameterstudie zeigte keinerlei Indizien dafür auf, dass ein Variieren weiterer Randbedingungen einen größeren Einfluss der Aufschüsselung auf die Tragfähigkeit offenbaren wird.

Aufgrund fehlender Bewehrung besteht eine erhöhte Notwendigkeit zur Überprüfung der Netzunabhängigkeit der Ergebnisse bei der Simulation der Biegebeanspruchung. Daher wurden die in *Abaqus* und ANSYS – als für Rissmodellierung übliche Software-Vertreter – implementierten Rissmodelle und deren Umgang mit der Netzunabhängigkeit verglichen und einem weiteren Ansatz aus der Literatur gegenübergestellt. Als Ergebnis dieses Vergleichs ergibt sich zum einen ein besseres Verständnis des hier zur Regularisierung verwendeten Parameters der charakteristischen Länge, aber auch eine bessere Beurteilung der Anwendungsgrenzen der entsprechenden Softwarelösungen. Hier konnten bei Betrachtung eines einfachen Zugversuchs bereits Diskrepanzen zwischen analytischer Lösung und Ergebnissen in der Software herausgestellt werden.

Mithilfe des Modells wurden Balkenversuche und typische Laststellungen auf schwimmenden Estrichplatten simuliert. Anhand verformungsgesteuert geführter Biegezugprüfungen ließ sich der Nachbruchbereich numerisch sehr gut abbilden. Aufgrund stark spröden Versagens des für die Platten verwendeten Fließestrichs konnte der Nachbruchbereich für diese nicht erfasst oder validiert werden. Ein Vergleich der experimentellen und numerischen Daten zeigte bis zum Bruch

---

eine gute Übereinstimmung.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass sich für Beton entwickelte Rissmodelle auf Zementestrich anwenden lassen, unter der Bedingung, dass die Netzunabhängigkeit der Ergebnisse sicher gestellt wird. Mithilfe des Modells lassen sich typische Laststellungen auf Estrichplatten numerisch abbilden, wobei das Modell jedoch genauerer Validierung durch weitere experimentelle Daten bedarf. Der Einfluss aus Schwinden und Dämmsteifigkeit auf das Versagen kann im validierten Bereich als vernachlässigbar eingestuft werden. Im Hinblick auf das Bemessungskonzept besteht in diesem Zusammenhang zunächst kein Handlungsbedarf. Allerdings stellen bereits die Ergebnisse der experimentellen Untersuchung den in anerkannten Bemessungskonzepten als maßgebend identifizierte Lastfall „Einzellast am Plattenrand“ gegenüber dem Lastfall „Einzellast an der Plattenecke“ aufgrund des kritischeren Spannungszustands, der keine Umlagerungen zulässt, und der geringeren Versagenslast zumindest infrage. Es ist nicht eindeutig, welcher Lastfall maßgebend ist. Diese Ergebnisse motivieren eine genauere Gegenüberstellung der beiden Lastfälle, wofür sich das hier entwickelte Modell als numerisches Werkzeug heranziehen lässt. Aus diesem Vergleich ließen sich unter Umständen bindende Handlungsempfehlungen für ein verbessertes Sicherheitskonzept ableiten.



# Abstract

Numerical simulation methods are playing an increasingly important role in many areas of civil engineering. This also includes the (further) development of material laws as well as the verification or extension of their application limits for an increasingly realistic representation of material behavior. The present work takes a closer look at the area of damage prediction in relation to the cracking of cement-bound floating screeds on an insulating layer. Regularly occurring damage patterns with this particularly shrinkage-prone type of binder show that the design basis, which is based on test series' dating back decades, needs to be reviewed. Shrinkage influences not previously considered in the design concept and the resulting bowing up at the edges of the plates were identified as a possible cause.

Material models for the numerical simulation of cracks are available for concrete, a material similar to screed. It can be assumed that these are suitable for cement-based screeds and offer a useful tool for systematically investigating the applicability and answering this open research aspects. For this purpose, a model environment was developed that ensures sufficient mesh independence of the results – which is often limited in crack models. The hardening or shrinkage process itself was not simulated directly, but the resulting characteristic bowl shape was estimated in a simplified manner and taken into account as a pre-deformation. Beam and slab tests were used to validate the model. With the help of the developed model, the influence of both shrinkage and various stiffness influences from insulation compressibility and screed thickness on the failure was investigated using a parameter study. Although the extrapolation of the experimentally validated parameter spectrum carried out here did not allow a fundamental assessment, the validated range already showed that the influence of shrinkage on the breaking load is negligible. The parameter study showed no indication that varying other boundary conditions would reveal a greater influence of shrinkage on the load-bearing capacity.

Due to the lack of reinforcement, there is an increased need to check the mesh independence of the results when simulating the bending stress. Therefore, the crack models implemented in *Abaqus* and ANSYS - as common software representatives for crack modeling - and their handling of mesh dependency were compared and contrasted with another approach from the literature. The result of this comparison gives a better understanding of the parameter of the characteristic length used here for regularization, but also a better assessment of the application limits of the corresponding software solutions. By looking at a simple tensile test, discrepancies between the analytical solution and the results in the software could already be identified.

The model was used to simulate beam tests and typical load positions on floating screed slabs. Using deformation-controlled tensile bending tests, the post-cracking behaviour could be reproduced very well numerically. Due to the highly brittle failure of the flowing screed used for the slabs, the post-failure range for these could not be recorded or validated. A comparison of the experimental and numerical data showed good agreement up to the fracture.

Overall, it can be stated that crack models developed for concrete can be applied to cementitious screed, provided that the mesh independence of the results is ensured. The model can be used to numerically represent typical load positions on screed slabs, although the model requires more

---

precise validation using further experimental data. The influence of shrinkage and insulation stiffness on the failure can be classified as negligible in the validated range. With regard to the design concept, at this time there is no need for action in this context. However, the results of the experimental investigation already call into question the load case "concentrated load at the slab edge" identified in recognized design concepts as decisive compared to the load case "concentrated load at the slab corner". This is due to the more critical stress state, which does not allow any redistributions, and the lower failure load for the corner load case. It is not clear which load case is decisive. These results motivate a more precise comparison of the two load cases, for which the model developed here can be used as a numerical tool. Binding recommendations for an improved safety concept could possibly be derived from this comparison.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Forschungsbedarf und Zielsetzung . . . . .	1
1.2. Vorgehen . . . . .	6
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1. Werkstoff Estrich . . . . .	9
2.1.1. Zusammensetzung und mechanische Eigenschaften . . . . .	9
2.1.2. Schadensfälle und ihre Ursachen . . . . .	14
2.1.3. Bemessungskonzept . . . . .	18
2.1.4. Stand der Forschung: Numerische Modellierung . . . . .	26
2.2. Rissmodellierung im Finite-Elemente-Modell . . . . .	30
2.2.1. Kontinuumsmechanischer Rahmen . . . . .	30
2.2.2. FE-Methode: Lösung nichtlinearer statischer Probleme . . . . .	34
2.2.3. Plastizitätstheorie . . . . .	43
2.2.4. Rissmodellierung . . . . .	50
2.2.5. Netzabhängigkeit und Regularisierung . . . . .	54
2.2.6. Materialinstabilität . . . . .	62
2.2.7. Umsetzung innerhalb kommerzieller Software . . . . .	63
2.3. Zusammenfassung . . . . .	69
<b>3. Strukturmodellierung</b>	<b>71</b>
3.1. Voruntersuchungen zur Netzabhängigkeit . . . . .	71
3.1.1. Zentrischer Zug . . . . .	73
3.1.2. Biegung . . . . .	82
3.2. Bettungsmodellierung . . . . .	89
3.2.1. Modellierung des Aufschüsselns: Kontaktproblem . . . . .	89
3.2.2. Ermittlung der Steifigkeitseigenschaften des Dämmstoffs im Versuch . . . . .	92
3.3. Schlussfolgerungen für die Modellierung schwimmenden Estrichs . . . . .	101
<b>4. Konzept zur Validierung des numerischen Modells</b>	<b>103</b>
<b>5. Gebetteter Balken (1D-Spannungszustand)</b>	<b>111</b>
5.1. Versuche . . . . .	111
5.1.1. Versuchsaufbau und -ablauf . . . . .	111

5.1.2. Ergebnisse . . . . .	114
5.2. Simulationen . . . . .	117
5.2.1. System und Randbedingungen . . . . .	117
5.2.2. Vergleich mit den Messdaten . . . . .	118
5.3. Zusammenfassung . . . . .	124
<b>6. Gebettete Platte (3D-Spannungszustand)</b>	<b>125</b>
6.1. Versuchsaufbau und -ablauf . . . . .	125
6.1.1. Aufbau . . . . .	125
6.1.2. Ablauf (Gesamtrissbild) . . . . .	128
6.2. Versuchsergebnisse . . . . .	131
6.2.1. Schwinden . . . . .	131
6.2.2. Belastung . . . . .	135
6.3. Simulationen . . . . .	141
6.3.1. System und Randbedingungen . . . . .	141
6.3.2. Vergleich mit den Messdaten . . . . .	142
6.4. Zusammenfassung . . . . .	153
<b>7. Anwendung des Modells</b>	<b>155</b>
7.1. Parameterstudie . . . . .	155
7.2. Mögliche Schlussfolgerungen für die Bemessung . . . . .	166
<b>8. Zusammenfassung und Anschlusspunkte</b>	<b>173</b>
8.1. Zusammenfassung . . . . .	173
8.2. Ausblick . . . . .	178
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>179</b>
<b>Anhang</b>	<b>189</b>
<b>A. Theoretische Grundlagen: Werkstoff Estrich</b>	<b>191</b>
<b>B. Schwindsimulationen in croc: Randbedingungen</b>	<b>193</b>
<b>C. Festigkeitsprüfungen</b>	<b>197</b>
<b>D. Versuche: Randbedingungen und Fotos</b>	<b>203</b>
D.1. Dämmstoffversuche . . . . .	203
D.2. Estrichversuche . . . . .	205
D.2.1. Herstellung Probekörper . . . . .	205
D.2.2. Messtechnik Platten und Balken . . . . .	205

<b>E. Versuche: Weitere Messdaten</b>	<b>209</b>
E.1. Balken . . . . .	209
E.2. Platte . . . . .	215
E.2.1. Versuchsablauf . . . . .	215
E.2.2. Dehnungsverläufe . . . . .	216
<b>F. Simulationen: Weitere Daten</b>	<b>221</b>
F.1. Biegezugversuch . . . . .	221
F.2. Balken . . . . .	222
F.3. Platte . . . . .	223
F.3.1. Eigenspannungen aus Schwinden . . . . .	223
F.3.2. Rissbilder . . . . .	226
F.3.3. Parameterstudie: Rissbilder . . . . .	228
F.3.4. Parameterstudie: Kraft-Verformungs-Linien . . . . .	230



# Tabellenverzeichnis

2.1. Estricharten: Kurzbezeichnungen nach DIN EN 13813:2003 und Vor- und Nachteile	10
2.2. Auszug aus DIN 18560-2:2022: Nenndicken und Biegezugfestigkeit unbeheizter Estriche	19
2.3. Auszug aus DIN 18560-1:2021: Tabelle 4, Teil 1 – Schwindklassen für Estriche	25
3.1. Charakteristische Länge in Abhängigkeit des Integrationsschemas und der Elementordnung für den ebenen Fall	74
3.2. Kennzahlen des gewählten Dämmstoffmaterials	93
5.1. Abmessungen und Bruchlasten der Balkenversuche	113
5.2. Abmessungen Balkensimulationen	117
6.1. Gemittelte Abmessungen der Bruchkörper und Bruchlasten (Platte)	136
7.1. Matrix der variierten Parameter	155
7.2. Ergebnis der Parameterstudie: Bruchlast	158
7.3. Simulationsauswertung der maximalen Hauptspannung unter verschiedenen Einzellastniveaus	169
7.4. Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Werten aus dem DENAK-Merkblatt	172
C.1. Festigkeiten nach 14 Tagen	199
C.2. Festigkeiten nach 28 Tagen	200
C.3. Festigkeiten nach Wasserlagerung und 21 Tage Normklima	201
C.4. Biegezugfestigkeiten nach Massenkonstanz	202
C.5. Gewichtsmessung bis zur Massenkonstanz	202
D.1. Laststufen quadratischer Probekörper	203
D.2. Laststufen runder Probekörper	204
E.1. Abmessungen der Bruchkörper für LF Ecke	215
E.2. Abmessungen der Bruchkörper für LF Rand	215
E.3. Platte: Ort der Rissbildung (DMS)	216





# Abbildungsverzeichnis

1.1. Skizze einer dreidimensionalen Verformungsfigur eines schwimmenden Estrichs . . .	2
2.1. Vergleich der Verlege- und Beanspruchungsarten . . . . .	12
2.2. Vertikale Verformungen (Schüsselung) bei schwimmenden Zementestrichen . . . .	16
2.3. Verformungsverhalten von Estrichen zunehmender Größe . . . . .	17
2.4. Gegenüberstellung der klassischen Modellvorstellungen zur Abbildung einer Bau- grundsetzung . . . . .	20
2.5. Biegespannungen in einem Estrich in Abhängigkeit von der Zusammendrückbar- keit der Dämmschicht unter einer Einzellast von 1 kN . . . . .	22
2.6. Visualisierung der betrachteten Lastfälle . . . . .	23
2.7. Erforderliche Dicke der Estriche in Abhängigkeit von der Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht und der Festigkeit . . . . .	24
2.8. Nomogramm aus dem DENAK-Merkblatt für eine Last-Aufstandsfläche $\geq 25\text{cm}^2$	26
2.9. Kontinuumsmechanischer Rahmen eines physikalischen Problems . . . . .	30
2.10. Allgemeingültige Zusammenhänge zwischen inneren und äußeren Kraft- ( $\sigma$ , $\mathbf{p}$ ) bzw. Weggrößen ( $\epsilon$ , $\mathbf{u}$ ) im Rahmen der Kontinuumsmechanik . . . . .	31
2.11. Herleitung der Lösung des physikalischen Problems mithilfe der Finite-Elemente- Lösung . . . . .	34
2.12. Taylorreihenentwicklung und linearisierte Größen in Gleichung (2.12) . . . . .	35
2.13. Globales Koordinatensystem $\mathbf{X}$ , lokales Elementeinheitskoordinatensystem $\xi$ . . .	36
2.14. Diskretisierung der Zustandsgrößen und lokale Elementmatrizen und -vektoren .	37
2.15. Visualisierung des Iterationsablaufs innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens .	39
2.16. Inkrementell-iterativer Newton-Raphson-Algorithmus auf System-Ebene . . . . .	40
2.17. Unterscheidung möglicher Iterationspfade am Beispiel eines Gleichgewichtspfades mit lokalen Extrema, Umkehr- und Verzweigungspunkten . . . . .	41
2.18. Bogenlängenverfahren nach RIKS/WEMPNER/WESSELS . . . . .	42
2.19. Elastische und elasto-plastische Materialtheorien (eindimensionale Visualisierung)	44
2.20. Visualisierung möglicher Beanspruchungszustände innerhalb der isotropen Plas- tizitätstheorie abhängig von den Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . .	47
2.21. Bestimmungsgleichungen einer ratenunabhängigen Plastizitätstheorie und resul- tierendes Anfangswertproblem auf Materialpunktebene . . . . .	48
2.22. Schematischer Ablauf des iterativen Return-Mapping-Algorithmus' . . . . .	49
2.23. Visualisierung des Return-Mapping-Algorithmus' . . . . .	50

2.24. Definition eines fiktiven Risses nach Hillerborg . . . . .	54
2.25. Überführung des FCM ins Kontinuum: Kontinuierisierung . . . . .	56
2.26. Überführung des FCM ins Kontinuum: Entfestigungsverhalten . . . . .	57
2.27. Berechnungsansatz für $l_{ch}$ für den ebenen Fall . . . . .	58
2.28. Veranschaulichung der vereinfachten charakteristischen Länge im Rissband am Beispiel eines Biegeproblems . . . . .	60
2.29. Beispiel für eine variierende Rissrichtung . . . . .	61
2.30. Visualisierung der Fließfläche des Concrete Damaged Plasticity Modells (ebener Spannungszustand) . . . . .	65
2.31. Ver- bzw. Entfestigungsfunktionen des CDP-Modells für Druck und Zug . . . . .	67
2.32. CDP: Einfluss von Ver- bzw. Entfestigung auf die Fließfläche . . . . .	68
3.1. Zentrische Zugprobe: System und Randbedingungen . . . . .	75
3.2. Lineare Entfestigung unter Zug . . . . .	75
3.3. Zugversuch: Kraft-Verformungs-Linie, 2D mit 4 Knoten . . . . .	77
3.4. Zugversuch: Kraft-Verformungs-Linie, Verformung ermittelt aus Dehnungen (ge- mittelt über alle IP), 2D mit 4 Knoten . . . . .	77
3.5. Kraft-Verformungs-Linie, 2D mit 8 Knoten . . . . .	79
3.6. Kraft-Verformungs-Linie, Verformung aus Dehnungen (gemittelt aus allen IP) bestimmt, 2D mit 8 Knoten . . . . .	79
3.7. Kraft-Verformungs-Linie eines Zugversuchs mit verzerrten Elementen bzw. vari- ierten Seitenverhältnissen . . . . .	80
3.8. Beispiel für verzerrte Elementgeometrie . . . . .	81
3.9. Randbedingungen für einen verformungsgesteuerten Biegezugversuch . . . . .	83
3.10. Systemplot des Biegezugbalkens . . . . .	84
3.11. Definition des Elementtyps SC8R . . . . .	85
3.12. Simulation Biegezugversuch, Einflüsse aus Netzdichte und Poisson-Zahl . . . . .	87
3.13. Nachrechnung Biegezugversuch . . . . .	88
3.14. Symmetrienausnutzung bei Simulation der Aufschüsselung . . . . .	90
3.15. Gegenüberstellung des Ablaufs im Versuch gegenüber dem numerischen Berech- nungsablauf . . . . .	92
3.16. Versuchsstand und Dämmstoffproben . . . . .	94
3.17. Vertikale Verformung und Spannungs-Verformungs-Kurve aus dem Lastplatten- druckversuch . . . . .	95
3.18. Gemittelte Spannungs-Verformungs-Kurven aus Lastplattendruckversuchen . . . . .	96
3.19. Prüfung in der Druckprüfmaschine: Dämmstoff TP-GP (steifer) und TP (weicher)	97
3.20. Stempelaufbau im Dämmstoff-Feldversuch . . . . .	98
3.21. Vergleich unbelasteter und vorbelasteter Dämmstoffproben, geprüft im Feld und in der Druckprüfmaschine . . . . .	100
3.22. Ausgleichfunktionen . . . . .	101

---

4.1. Schema des statischen System der gebetteten Platte . . . . .	104
4.2. Schema des statischen System des gebetteten Balkens . . . . .	105
4.3. Beispielhafte Entwicklung der plastischen Dehnungen in der Platte . . . . .	108
4.4. Bestimmung der charakteristischen Länge $l_{ch}$ . . . . .	109
4.5. Exponentiell abfallende Spannungs-Dehnungs-Beziehung wie im CDP-Modell vorgegeben . . . . .	110
5.1. Aufbau der Balkenversuche und Anordnung der Messtechnik . . . . .	112
5.2. Lastaufbringung Balken . . . . .	113
5.3. Beispiele für die Einzelrissbildung der Balkenproben . . . . .	114
5.4. Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA5 . . . . .	116
5.5. Systemplot des gebetteten Balkens . . . . .	117
5.6. Vergleich der Messdaten mit der linearen Simulation: Kraft-Verformungs-Kurven	120
5.7. Vergleich der Messdaten mit der linearen bzw. nichtlinearen Simulation: Kraft-Verformungs-Kurven . . . . .	121
5.8. Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit $d = 60$ , TP-GP . . . . .	122
5.9. Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit $d = 60$ , TP . . . . .	123
5.10. Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit $d = 20$ , TP-GP . . . . .	123
6.1. Anordnung der Wegaufnehmer zur Messung der Schwindverformung . . . . .	126
6.2. Anordnung der Dehnungsmessstreifen . . . . .	127
6.3. Stempelaufbau Platte . . . . .	128
6.4. Plattenprüfung: Finales Rissbild . . . . .	129
6.5. Schwindmessung im Versuch . . . . .	133
6.6. Ergebnis der Schwindsimulation in croc: Vertikale Verformungen . . . . .	134
6.7. Form der Bruchkörper (Platte) . . . . .	136
6.8. Verschiebungsmessung auf der Diagonalen bei Eckbelastung . . . . .	138
6.9. Verschiebungsmessung jenseits der Diagonalen . . . . .	139
6.10. Systemplot der Platte . . . . .	141
6.11. Platte W: Darstellung der Entwicklung der plastischen Dehnungen . . . . .	143
6.12. Platte S: Darstellung der Entwicklung der plastischen Dehnungen . . . . .	143
6.13. Simulation: Kraft-Verformungs-Linien bei Eckbelastung . . . . .	145
6.14. Kraft-Verformungslinien bei Eckbelastung: Einfluss Unterschiedlicher Vernetzung (Elementlänge $L_{elem}$ ) und der Vorverformung . . . . .	146
6.15. Kraft-Verformungslinien bei Eckbelastung (steifere Lagerung): Einfluss verschiedener Randbedingungen . . . . .	147
6.16. Simulationsergebnis Platte S: Dehnungslinie und Verformungsfigur . . . . .	148
6.17. Simulationsergebnis Platte W: Dehnungslinie und Verformungsfigur . . . . .	149
6.18. Kraft-Verformungslinien bei Randbelastung: Vergleich der Messwerte mit den Simulationswerten entlang der Mittellinie . . . . .	150

6.19. Entwicklung der plastischen Dehnungen bei Randbelastung an der Ober- und Unterseite der Platte . . . . .	151
7.1. Kraft-Verformungslinien im Rahmen der durchgeführten Parameterstudie . . . . .	157
7.2. Parameterstudie: Einfluss auf Bruchkraft . . . . .	159
7.3. Parameterstudie: Einfluss auf Verformung . . . . .	159
7.4. Rissbilder der Parameterstudie – Variieren der Plattendicke . . . . .	160
7.5. Rissbilder der Parameterstudie – Variieren der Vorverformung . . . . .	161
7.6. Parameterstudie: Einfluss der Dicke . . . . .	163
7.7. Parameterstudie: Einfluss der Vorverformung . . . . .	164
7.8. Vergleich der Berechnungsformeln nach Westergaard mit dem Berechnungsmodell	167
7.9. Entwicklung der plastischen Dehnungen bei Randbelastung an der Ober- und Unterseite der Platte, jeweils ausgewertet bei Erreichen der Bruchlast . . . . .	170
7.10. Nomogramm aus dem DENAK-Merkblatt für eine Last-Aufstandsfläche $\geq 25\text{cm}^2$	171
A.1. Biegespannung aus ungleichem Schwinden (DENAK) . . . . .	192
B.1. Mechanische Vorgaben . . . . .	195
B.2. Feuchtetechnische Vorgaben . . . . .	195
C.1. Aufbau eines verformungsgesteuerten Biegezugversuchs . . . . .	197
C.2. Biegezugversuch mit zentrisch an Unterseite aufgeklebtem DMS . . . . .	198
C.3. Nachrechnung der Probe-Biegezugprüfung mit DMS . . . . .	199
D.1. Bestimmung Ausbreitmaß und LP-Gehalt . . . . .	205
D.2. Aufbau Balkenversuch (Probe 60-2) . . . . .	206
D.3. Schalung mit eingebauter Dämmung . . . . .	207
D.4. Aufbau WA Platte S . . . . .	207
D.5. Aufbau WA Platte W . . . . .	208
D.6. Risskrümmung Plattenkante . . . . .	208
E.1. Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA1 . . . . .	210
E.2. Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA2 . . . . .	211
E.3. Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA3 . . . . .	212
E.4. Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA4 . . . . .	213
E.5. Ablauf der Plattenversuche: Reihenfolge der Prüfung . . . . .	215
E.6. Form der Bruchkörper (Platte) . . . . .	215
E.7. Dehnungsmessung bei Eckbelastung Platte S (steifer) . . . . .	217
E.8. Dehnungsmessung bei Eckbelastung Platte W (weicher) . . . . .	218
E.9. Dehnungsmessung bei Randbelastung Platte W (weicher): Rand links . . . . .	219
E.10. Dehnungsmessung über die Dicke bei Randbelastung Platte W (weicher): Belastung Rand links . . . . .	220

---

F.1. Spannungen und plastische Dehnungen über den Querschnitt am Lastangriffspunkt	221
F.2. Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit $d = 80$ , TP-GP	222
F.3. Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit $d = 40$ , TP-GP	222
F.4. Vergleich Dehnungsverlauf und Verformungsfigur: mit und ohne Eigenspannungen aus Schwinden	223
F.5. Ergebnis der Schwindsimulation in croc: Eigenspannungen	224
F.6. Darstellung des Orts bzw. des Verlaufs der maximalen Hauptspannung über die Plattendicke für jeden Zeitschritt	225
F.7. Platte W: Darstellung der Entwicklung der plastischen Dehnungen (RPZ erzwun- gen)	226
F.8. Platte S: Darstellung der Entwicklung der plastischen Dehnungen (RPZ erzwungen)	226
F.9. Entwicklung der plastischen Dehnungen bei Randbelastung: Draufsicht Ober- und Unterseite	227
F.10. Rissbilder der Parameterstudie – Variieren der Plattendicke	228
F.11. Rissbilder der Parameterstudie: Variieren der Vorverformung	229
F.12. Kraft-Verformungslinien im Rahmen der durchgeführten Parameterstudie (leicht vergrößerte Darstellung)	230



# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Vektor innerer Variablen im Verzerrungsraum (Plastizitätstheorie)
$\alpha, \beta, \hat{\gamma}$	Parameter der Fließfläche (CDP-Modell, <i>Abaqus</i> )
$\Gamma$	Berandung eines Bereichs $\Omega$
$\gamma$	Konsistenzparameter (Plastizitätstheorie)
$\delta(\bullet)$	Variation einer Variablen ( $\bullet$ )
$\Delta(\bullet)$	Inkrement einer Variablen ( $\bullet$ ) gegenüber einem Grundzustand ( $\bar{\bullet}$ )
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungen [-], Verzerrungstensor
$\varepsilon^{pl}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$	plastische Verzerrungen, plastischer Verzerrungstensor
$\dot{\varepsilon}$	Änderungsrate der Verzerrung mit ( $\dot{\bullet}$ ) Zeitableitung einer Variablen ( $\dot{\bullet}$ )
$\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)^T$	Elementeinheitskoordinatensystem
$\theta$	Lode-Winkel [°] (Spannungsinvariante)
$\lambda$	skalarer Lastfaktor [-]
$\lambda_m, \lambda_r, \lambda_e$	Momentenbeiwerte für die Lastfälle Einzellast in der Mitte ( $m$ ), am Rand ( $r$ ), in der Ecke ( $e$ )
$\nu, \mu$	Querdehnzahl [-]
$\nu$	Effektive Querdehnzahl [-]
$\rho$	Rohdichte [g/cm <sup>3</sup> ]
$\sigma, \boldsymbol{\sigma}$	Spannungen [N/mm <sup>2</sup> ], Spannungstensor, -matrix
$\sigma_B$	Bettungsspannungen [N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_B - \sigma_L$	= 1.75 kPa, Spannungswert zur Ermittlung der Zusammendrückbarkeit nach Manns und Zeus (1980)
$\phi$	Verdrehung
$\psi, \psi^{pq}$	Dilatanzwinkel [°]
$\Omega$	Bereich mit Berandung $\Gamma$

**Lateinische Buchstaben**

$a$	Belastungskreishalbmesser [m]
$A$	Fläche [mm <sup>2</sup> ]
$b$	Querschnittsbreite [mm]
$b_{\text{RPZ}}$	Breite der Rissprozesszone
$B, B^0, B^t$	Körper im Raum, Index 0: Referenzkonfiguration, Index t: Momentankonfiguration
<b>B</b>	Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix
$c_p$	Zusammendrückbarkeit [mm]
$C_{\text{KS}}$	experimentell abgeschätzte Steifeziffer der Dämmung [MN/m <sup>3</sup> ]
<b>C<sub>T</sub></b>	tangentialer Materialtensor
$d, h$	Bauteildicke/ Querschnittshöhe [mm]
$d_D$	Dicke des Dämmstoffs [mm]
$d_L$	Lieferdicke eines Dämmstoffs [mm]
$d_B$	Dicke eines Dämmstoffs nach definierter Belastung [mm]
<b>D</b>	Differentialoperatoren
$E, \mathbf{E}$	Elastizitätsmodul [kN/m <sup>2</sup> ] bzw. -matrix/-tensor
$\mathbf{E}_\sigma$	Elastischer Spannungsraum
$E_s$	Steifemodul [kN/m <sup>2</sup> ]
$f$	skalare Funktion; Fließ-/Bruchbedingung, -fläche (Plastizitäts-/Bruchtheorie)
$f_t, f_{ct}$	(Beton-/Estrich-)Zugfestigkeit
$f_{tr}$	Restspannung (Spannungs-Dehnungslinie oder -Rissweitenlinie)
$f_c$	Druckfestigkeit
$f_b$	Biegezugfestigkeit
$F$	Einzellast [kN]
<b>F</b>	Deformationsgradient
$\mathbf{F}_{\text{int}}$	Vektor der inneren Kräfte
$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	Vektor der äußeren Kräfte
$G_f = G_f^*(w = w_{\text{Bruch}})$	(rissweitenabhängige) Bruchenergie pro Einheitsfläche (FCM, Materialeigenschaft)
$g_f = g_f^*(\varepsilon_{x'}^{pl} = \varepsilon_{x', \text{Bruch}}^{pl})$	(dehnungsabhängige) spezifische Energie pro Einheitsvolumen (Kontinuum, Modelleigenschaft)



---

$G_{f, RB}^*$	im gesamten Rissband dissipierte Rissenergie (FEM)
$\mathbf{G}$	Matrix, die Variationen der Verzerrungsformfunktionen enthält
$\mathbf{h}$	Funktion zur Beschreibung der Verfestigung (Plastizitätstheorie)
$\hat{\mathbf{h}}$	Matrix zur Beschreibung der Evolutionsgleichung der äquivalenten plastischen Verzerrungen (CDP-Modell)
$H$	plastisches Potential (CDP-Modell)
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{J}$	Jacobimatrix
KS, $k_v$	Bettungszahl/-ziffer [MN/m <sup>3</sup> ]
$k_Q$	Lastfaktor für Einzellast $Q$
$\mathbf{K}_T$	Tangentiale Steifigkeitsmatrix
$l$	Bauteil-/Balkenlänge, Grenzlänge, Elementlänge [mm]
$l_{ch}$	charakteristische oder effektive Länge [mm]
$\Delta L$	Schwindmaß [mm/m] nach DIN 18560-1:2021
$m, Q$	Biegemoment infolge Einzellast $Q$
$\mathbf{N}$	Matrix der Formfunktionen
$n$	Dimension des betrachteten Raums
$n_{\text{dim}}$	Dimension eines Körpers
$n_e$	Anzahl der finiten Elemente je Körper
$n_{\text{FG}}$	Anzahl der Knotenfreiheitsgerade je Knoten
$n_K$	Anzahl der Elementknoten
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$p$	Druckspannung [N/mm <sup>2</sup> ] (als hydrostatischer Druck = Spannungsinvariante)
$\mathbf{P}$	Lastvektor
$\mathbf{P}_u$	Vektor der Ungleichgewichtskräfte
$\mathbf{q}$	Vektor innerer Variablen im Spannungsraum (Plastizitätstheorie)
$q$	äquivalente von-Mises-Spannung (Spannungsinvariante) [N/mm <sup>2</sup> ]
$Q$	Einzellast [MN]
$\mathbf{r}$	geometrische Randbedingungen (Kap. 2.2.1)
$\mathbf{r}$	Funktion zur Beschreibung des plastischen Fließens
$R$	Residuen (Return-Mapping-Algorithmus)

<b>R</b>	Gleichgewichtsfunktion der inneren Kräfte
$\Delta S$	Quellmaß [mm/m] nach DIN 18560-1:2021
<b>S</b>	deviatorischer Spannungstensor
$t$	Pseudozeit
<b>T</b>	dynamische Randbedingungen
<b>t</b>	Tangentenvektor
<b>u</b>	Verschiebungsvektor
$\mathbf{v} = \mathbf{u}_k$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade je Element
$V$	Volumen [mm <sup>3</sup> ]
$s$	Einsenkung, Setzung [mm]
$w$	Rissweite [mm]
$w_c$	kritische Rissweite [mm]
$W, W_{\text{int}}, W_{\text{ext}}$	(innere oder äußere) Arbeit bzw. Energie
$\mathbf{x}, \mathbf{X}$	Ortsvektoren
$\mathbf{x}' = (x', y', z')$	lokales Riss-Koordinatensystem

### Abkürzungen

CBM	Crack Band Model nach Bazant
CDP	Concrete Damaged Plasticity Model ( <i>Abaqus</i> )
CMOD	crack mouth opening displacement
DMS	Dehnungsmessstreifen
DPM	Druckprüfmaschine
EG	Eigengewicht
el	elastisch
Elem	Element
EVR, EHL, RR, ..	Bezeichnung der Messstellen/Laststellung auf der Platte (E/R – Ecke/Rand, V/H – vorn/hinten, R/L – rechts/links, M – Mitte)
FCM	Fictitious Crack Model nach Hillerborg
Feld	Prüfung im Versuchsfeld anstelle der Prüfmaschine
FEM	Finite-Elemente-Methode
GZ	Grundzustand
IP	Integrationspunkt

---

lin	linear
MW	Menetrey-Willam Modell (ANSYS)
mV	mit Vorbelastung/ Vorverformung
NZ	Nachbarzustand
nlin	nichtlinear
oV	ohne Vorbelastung/ Vorverformung
PVV	Prinzip der virtuellen verschiebungen
pl	plastisch
RB	Rissband
RPZ	Rissprozesszone
SC8R	Bezeichnung eines kontinuumsbasierten, 8-knoteigen Schalenelements ( <i>Abaqus</i> )
Sim	Simulation
TP, TP-GP	Bezeichnung der verwendeten Dämmstoffe (TP weicher, TP-GP steifer)
WA	Wegaufnehmer
ww, w, s, ss	Bezeichnung der untersuchten Steifigkeiten (Parameterstudie)
TP 20-1	Probenbezeichnung Dämmstoff (Typ-Abmessung-Probennummer)
20-1	Probenbezeichnung Estrichbalken (Estrichdicke-Probennummer)
Platte S, W	Probenbezeichnung Estrichplatten (S – Lagerung auf TP-GP, W – Lagerung auf TP)



# 1. Einleitung

In vielen Bereichen des Bauwesens spielt die Methode der numerischen Simulation eine zunehmend größere Rolle. Dazu gehört unter anderem auch die (Weiter-)Entwicklung von Materialgesetzen sowie die Überprüfung bzw. Erweiterung ihrer Anwendungsgrenzen zur immer realistischeren Abbildung des Werkstoffverhaltens. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Bereich der Schadensprognose in Bezug auf die Rissbildung in zementgebundenen Estrichplatten auf Dämmschicht näher beleuchtet.

Regelmäßig auftretende Schadensbilder (Müller und Limp, 2015, Langer, 2017) bei schwimmendem Zementestrich zeigen, dass die Bemessungsgrundlage, die auf Jahrzehnte zurückliegenden Versuchsreihen basiert (Manns und Zeus, 1980), einer Überprüfung bedarf. Im Bemessungskonzept bisher unberücksichtigte Schwindeinflüsse und daraus resultierende Aufschüsselungen an den Bauteilrändern werden als eine mögliche Ursache identifiziert. Ergänzend zur nahe liegenden und in anderen Veröffentlichungen bereits untersuchten Optimierung von Estrichrezepturen hin zu schwindärmeren Optionen wird im Folgenden die Möglichkeit zur numerischen Rissmodellierung von schwimmendem Zementestrich betrachtet.

Eine Vielzahl numerischer Ansätze zur Beschreibung der Rissentwicklung von Werkstoffen ist, insbesondere für quasi-spröde Werkstoffe wie Estrich und Beton, Gegenstand aktueller Forschung. Im Vordergrund dieser Arbeit steht, daraus einen angemessenen Ansatz zur Beschreibung des Rissverhaltens von Zementestrich zu wählen, um damit numerisch zu untersuchen, welchen Einfluss das Aufschüsseln der Estrichplatten und die Interaktion zwischen Estrich und Dämmung auf das Versagen hat, und inwiefern sich aus numerischen Simulationen in diesem Kontext Möglichkeiten zur Entwicklung eines besseren Bemessungs- und Rissprognose-Konzepts ergeben können.

## 1.1. Forschungsbedarf und Zielsetzung

Estriche, insbesondere zementgebundene, stellen in der Baupraxis riss- und schadensanfällige Bauteile dar. Eine für tragende Bauteile übliche ingenieurtechnische Bemessung findet in der Regel nicht statt. Auch wenn Estrich zum Lastabtrag im Gebäude nicht beiträgt, ist die Entwicklung von Rissen für die Gebrauchstauglichkeit zu minimieren. Das Bemessungskonzept für insbesondere schwindanfällige Zementestriche auf Dämmschicht, welches in DIN 18560-2:2022

geregelt ist, legt tabellarisch Estrichnenndicken in Abhängigkeit von der Nutzlast, der Biegezugfestigkeitsklasse und der Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht für verschiedene, über Einzel- und Flächenlasten definierte Nutzlastniveaus fest. Die Grundlage für die Bemessungstabellen lieferten Manns und Zeus (1980). Die dort hergeleiteten Bemessungsvorschläge für Estriche auf dicken Dämmschichten beruhen auf empirischen Formeln nach Westergaard (1926), welche auf dem Bettungsmodulverfahren basieren. Diese wurden für den Straßenbau zur Bemessung von Bodenplatten entwickelt und idealisieren den Boden – analog zur Estrichdämmschicht – als elastische Bettung.

Der Einfluss der Platte-Dämmungs-Interaktion auf die Verformungen und den Spannungszustand bleibt allerdings bei dieser Modellierung bisher ebenso unberücksichtigt wie die eingangs genannten Schwindverformungen. Bei auftretender Rissbildung kann es zu Spannungsumlagerungen kommen, deren Entwicklung durch veränderte Reaktionsspannungen in der elastischen Bettung beeinflusst werden. Zusätzlich wird das Tragverhalten von Schwindverformungen während des Erhärtungsprozesses beeinflusst. Infolge Hydratationswärme und eines ungleichmäßigen Austrocknungsprozesses über die Plattendicke entstehen aus einem durch die Aktivierung des Eigengewichts behinderten Verformungsbestreben Zwangsspannungen in der Platte (Timm et al. 2019). Zwangsspannungen infolge von behinderten Schwindverformungen, insbesondere die vor allem bei Zementestrich beobachtete Schüsselbildung (vgl. Abbildung 1.1) noch vor der eigentlichen Nutzlast-Beanspruchung des Estrichs, haben einen Einfluss auf den Ort und die Größe der Rissbildung in schwimmend gelagerten Estrichplatten. Inwiefern die genannten Effekte aus Dämmstoff-Estrich-Wechselwirkung und Schwindverformung eine für die Bemessung maßgebende Rolle spielen und ob die bisher fehlende Berücksichtigung im Bemessungskonzept eine Ursache für die auftretenden Schadensfälle sein könnten, soll in der vorliegenden Arbeit beleuchtet werden.

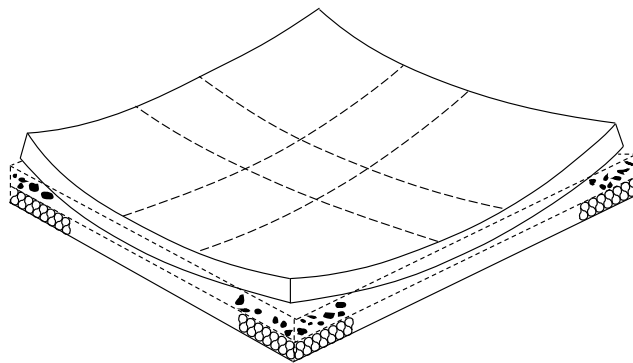


Abbildung 1.1.: Skizze einer dreidimensionalen Verformungsfigur eines schwimmenden Estrichs infolge eines linearen Dehnungsgradienten: Aufschüsseln der Estrichränder und -ecken (Schießl und Wiegink, 2005)

Gleichzeitig ist der Stand der Forschung weiter fortgeschritten, was die numerische Modellierung physikalisch nichtlinearen Materialverhaltens quasi-spröder Werkstoffe, insbesondere die von Stahl(faser)beton und Beton, angeht (Hofstetter, 2006; Gödde, 2013). Die Tatsache, dass die auf Basis von Bettungs- und Steifemodulverfahren zur Bemessung hergeleiteten Tabellenwerke heutzutage durch Stabwerks- bzw. FE-Programme ersetzt werden (Vogt, 2018), spricht dafür, dass eine vergleichende Überprüfung des Bemessungsansatzes mithilfe numerischer Berechnungen sinnvoll und zeitgemäß ist.

Um die oben genannten Aspekte bei der Bemessung von Estrichplatten berücksichtigen bzw. um das Tragverhalten grundsätzlich numerisch untersuchen zu können, wird ein Materialmodell für Zementestrich benötigt. Ein konkretes Materialgesetz, wie es für Beton oder Stahlbeton in Form von Spannungs-Dehnungslinien (DIN EN 1992-1-1:2011) oder Bruchbildern (DIN EN 12390-3:2019) bereits existiert und als gesichert gilt, gibt es für Zementestrich bisher weder in der Norm noch in der Literatur (Merkblatt Zementestrich (2015)). Die Ähnlichkeit in der Zusammensetzung legt jedoch nahe, dass Materialmodelle, die sich für Beton bewährt haben, auf Zementestrich übertragbar sind und diese das Entfestigungsverhalten auch von Zementestrich gut numerisch abbilden können. Trotz Vergleichbarkeit der Zusammensetzung mit Beton gibt es in der Literatur bislang keine vergleichenden Untersuchungen, die das Ableiten eines Materialgesetzes im Sinne einer klassischen ingenieurtechnischen Bemessung für den Werkstoff Zementestrich unmittelbar ermöglichen würden. Zur Verifizierung der Realitätsnähe des zu entwickelnden Modells sind experimentelle Daten an Platten aus der Literatur oder eigenen Versuchen heranzuziehen und anhand dieser Daten die Ergebnisse aus den numerischen Simulationen zu validieren.

Im Bereich Zementestrich gab es bislang vorwiegend experimentelle Untersuchungen zur Beurteilung des Trag- und Trocknungsverhaltens. Forschungsberichte aus den 80er und 90er Jahren zielen in der Regel darauf ab, Empfehlungen für die Praxis abzuleiten, sodass die dokumentierten Daten für eine numerische Nachrechnung nur einige Anhaltspunkte wie die maximale Einsenkung oder ggf. Rissbreite liefern können. Häufig werden in diesen Veröffentlichungen Großversuche an Platten unterschiedlicher Geometrie dokumentiert, bei denen empirisch verschiedene Einflüsse (Steifigkeit der unterliegenden Dämmung, Estrichdicke, Austrocknungsverhalten (Schnell, 1983; Manns und Zeus, 1980; Wiegrink, 2002) auf die Gebrauchstauglichkeit und das Tragverhalten untersucht werden bzw. das geltende Bemessungskonzept anhand der Versuchsergebnisse überprüft wird (Schnell, 1994; Schnell, 1990; Schnell, 1983; Manns und Zeus, 1980). Vom Institut für Baustoffprüfung und Fußbodenforschung (IBF) wurden in den letzten 20 Jahren regelmäßig Veröffentlichungen zu Schadensbildern und möglichen Ursachen veröffentlicht (Müller und Limp, 2015; Müller, 2017). Daneben gibt es experimentelle Untersuchungen zum Trocknungs- und Schwindverhalten und möglicher Optimierung von Prüfmethoden und Nachbehandlungsmaßnahmen (Dollase, 2019; Schneider und Pleyers, 2003), bei denen zum Teil in jüngerer Vergangenheit auch numerische Verfahren zur Modellierung der Erhärtungsphase Anwendung fin-

den (Ambroise et al., 2002; Jaafri et al., 2019). Hier liegt der Fokus auf der Untersuchung des Schwind- bzw. Austrocknungsverhaltens, um materialtechnologisch das Rissverhalten zu verbessern. Auch in diesem Zusammenhang gibt es mehr, und umfassendere Veröffentlichungen zum Werkstoff Beton, häufig mit dem Fokus auf Berechnung von Zwangsbeanspruchung und Rissbreitenbegrenzung (Schlicke und Viet Tue, 2016a bzw. Schlicke und Viet Tue, 2016b, Nietner, Schlicke und Viet Tue, 2011), und vergleichsweise sehr wenige, die sich mit Estrich befassen (Georgin et al., 2008; Ambroise et al., 2002; Wiegrink (2002)). Das Rissverhalten wird hier nur am Rande, und nicht unter Verwendung für Beton bereits üblicher nichtlinearer Rissmodelle untersucht.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass die Problematik der Rissbildung unbewehrter quasi-spröder Bauteile und der Konsequenzen der fehlenden Bewehrung im Hinblick auf eine netzunabhängige numerische Simulation der Rissbildung bisher wenig systematisch untersucht wurden. Im Fall von Zementestrich wie auch Estrich im Allgemeinen gab es einige empirische und auch einige wenige numerische Untersuchungen, die sich allerdings auf die Modellierung der Zwangseinflüsse infolge Austrocknung beschränken. Eine numerische Untersuchung der Rissbildung erfolgte nicht.

Stahlbeton und Stahlfaserbeton sind im Bauwesen übliche Verbundwerkstoffe, deren Rissverhalten, sowie die numerische Modellierung dessen, in der Literatur seit Jahrzehnten Forschungsgegenstand ist. Zur Modellierung mithilfe finiter Elemente (FE) stehen verschiedene Materialmodelle in kommerziellen Software-Produkten (u. a. *Abaqus*, ANSYS, LS-DYNA, ADINA, ATENA) zur Verfügung. Estrich wird allerdings im Gegensatz zu Beton in der Regel unbewehrt eingebaut. In den meisten der zahlreichen Veröffentlichungen zur Rissmodellierung von Beton werden bewehrte Bauteile untersucht (Feenstra und de Borst, 1995; V. Cervenka, J. Cervenka und Kadlec, 2018; Gödde, 2013; Thomée, 2005). Unbewehrter Beton wird selten in größerem Umfang numerisch simuliert bzw. fokussiert sich der Anwendungsbereich auf die Berechnung von kleinen Formaten im Rahmen von Festigkeitsuntersuchungen (Brünig und Michalski, 2020; Thabet und Haldane, 2001; Cotsovos und Kotsovos, 2011), und seltener größeren Bauwerken (Rüd, Fleischer und Stephan, 2023).

Bei fehlender Bewehrung spielt der Aspekt der Netzabhängigkeit bei Modellierung der Diskontinuität, die durch die Rissbildung im Finie-Element-Netz abzubilden ist, bei den hier verwendeten verschmierten Rissmodellen eine größere Rolle als bei bewehrtem Beton ((Gödde, 2013), Dassault Systèmes, 2021). Unter den genannten verschmierten Rissmodellen existieren noch weitere Ansätze zur Rissmodellierung neben den hier verwendeten Plastizitätsmodellen. Nach de Borst und Verhoosel (2016) verfolgen gradientenbasierte Modelle oder Phasenfeldmodelle zum Beispiel ebenfalls einen verschmierten Ansatz, zielen aber darauf ab, die Diskontinuität so abzubilden, dass keine Netzabhängigkeit entsteht. Bevor sich der Fokus verstärkt auf diese verschmierten Modelle verschoben hat, wurde der gegensätzliche Ansatz einer diskreten Model-



lierung der Diskontinuität verfolgt (de Borst und Verhoosel, 2016). Dies hatte den Vorteil, dass ein Riss physikalisch als Trennung der Elemente an dieser Stelle modelliert wurde. Der erhöhte Rechenaufwand und notwendige Algorithmen und Elemententwicklungen zur adaptiven Vernetzung führten zunächst zur vermehrten Ablösung durch verschmierte Modelle. Wie de Borst und Verhoosel (2016) beschreiben, sind durch die Weiterentwicklung der numerischen Verfahren auch diskrete Modelle mittlerweile vermehrt in der Anwendung, wobei auch hier weiterhin Forschungsbedarf hinsichtlich einer robusten Implementierung besteht. In der vorliegenden Arbeit finden nur verschmierte, plastizitätsbasierte Modelle Anwendung, da diese für die angestrebte Modellierung geeignet und in den meisten kommerziellen Programmen implementiert sind, was für die praktische Anwendung des entwickelten Modells von Vorteil ist.

Verschmierte Rissmodelle, die u. a. für quasi-spröde Werkstoffe wie Beton entwickelt wurden, verwenden bruchmechanische Konzepte innerhalb der ursprünglich für homogene, duktile Werkstoffe (z.B. Stahl) entwickelten Plastizitätstheorie (Hofstetter, 2006; de Borst, Crisfield et al., 2012; Gödde, 2013). Aufgrund von Diskrepanzen zwischen den grundlegenden bruchmechanischen Annahmen zur Beschreibung der Rissbildung und den Gegebenheiten in der Finite-Elemente-Definition (infinitesimaler Riss ohne Übertragung von Spannungen gegenüber einem kontinuierlichen Verformungszustand der finiten Elemente) kommt es in diesen Modellen zu einer Abhängigkeit der Ergebnisse von der Netzgeometrie bzw. -verfeinerung. Diese kann u.a. durch einen modellierungsabhängigen Längenparameter, die „charakteristische Länge“, beeinflusst bzw. korrigiert werden (de Borst, Crisfield et al., 2012; Gödde, 2013). Bei Betrachtung von Stahlbeton wird das Entfestigungs- bzw. Rissverhalten des Betons unter Zugbeanspruchung maßgebend vom Tragverhalten der Bewehrung überlagert. In diesem Fall zeigt eine mögliche Netzabhängigkeit des Beton-Materialmodells u. U. keinen entscheidenden Einfluss auf die Berechnungsergebnisse. Für unbewehrten Estrich aber hat diese Problematik in der Regel einen signifikanten Effekt (Gödde, 2013).

Die in den Software-Produkten implementierten Rissmodelle unterscheiden sich u. a. im Hinblick auf ihren Umgang mit der Netzabhängigkeit, wurden in der Literatur aber selten direkt vergleichend gegenübergestellt (Cotsovos, Zeris und Abbas, 2009). Auf die Netzabhängigkeit wird in vielen anderen Veröffentlichungen mit bewehrten Betonbauteilen nicht explizit eingegangen (V. Cervenka, J. Cervenka und Kadlec, 2018; Feenstra und de Borst, 1995). Auch bei Betrachtung unbewehrter Betonbauteile wurde im Rahmen der Materialparameter die charakteristische Länge als Modellierungsparameter bzw. die Problematik einer Netzabhängigkeit bei Verwendung von Strain-Softening-Modellen genannt, aber ihr Einfluss oft nicht allgemeingültig erläutert oder untersucht, sondern die Netzunabhängigkeit ggf. problemabhängig erreicht (z. B. J. Červenka, V. Červenka und Laserna, 2018; Hatzigeorgiou et al., 2001; Thabet und Haldane, 2001). Im Bereich von Stahlfaserbeton wurde die Problematik in einigen Veröffentlichungen bereits aufgegriffen, da der Einfluss der Netzabhängigkeit hier weniger zu vernachlässigen ist (Gödde, 2013; Thomée,

2005). Gödde (2013) entwickelte eine eigene Definition für den Parameter der charakteristischen Länge und schaffte auf Basis dessen ein FE-Modell zur realitätsnahen Simulation stabartiger und flächenhafter Bauteile aus Stahlfaserbeton. Im Hinblick auf die Netzabhängigkeit und den in Software-Paketen implementierten, und daher default-mäßig verwendeten, aber zum Teil wenig beachteten Parameter der charakteristischen Länge besteht insbesondere im Hinblick auf unbewehrte Bauteile weiterer Forschungsbedarf.

Die Weiterentwicklung der Möglichkeiten in der Numerik, das Rissverhalten quasi-spröder Werkstoffe präziser erfassen zu können, und die Hinweise, dass Schadensfälle bei zementgebundenem Estrich mit dem Schwind- und Schüsselverhalten zusammenhängen könnten, führen auf folgende Zielsetzung der vorliegenden Arbeit:

1. Identifikation eines geeigneten Materialmodells und Einordnung vorhandener Regularisierungskonzepte in kommerzieller Software zur netzunabhängigen Abbildung des Entfestigungsverhaltens von zementgebundenem Estrich,
2. Validierung des Modells anhand geeigneter experimenteller Untersuchungen an schwimmend gelagerten Estrichplatten,
3. Systematische Untersuchung des Systems „schwimmender Estrich“ mit dem Fokus auf dem Einfluss der Wechselwirkung zwischen Dämmstoffsteifigkeit und Schüsselbildung auf die Rissbildung bzw. Tragfähigkeit,
4. Erkenntnisgewinn zur Diskussion und Bewertung des genormten Bemessungskonzepts für Zementestrich auf Dämmschicht zur Reduzierung der in der Praxis auftretenden Schadensfälle.

## 1.2. Vorgehen

Als Untersuchungsmethode für die genannten Einflussgrößen wird die numerische Vergleichsrechnung innerhalb des FE-Programms *Abaqus* gewählt, wobei Biegezugversuche an Balken und Platten und deren Rissbilder zur Kalibrierung des Materialmodells herangezogen werden. Wenige, aussagekräftige Versuche werden als ausreichend vorausgesetzt, weil das zugrunde gelegte Materialmodell (Concrete Damaged Plasticity) mit Beton bereits für einen dem zu untersuchenden Zementestrich ähnlichen Baustoff nachgewiesen bzw. kalibriert wurde.

Zur Erläuterung der Hintergründe des infrage gestellten Bemessungskonzepts nach Manns und Zeus (1980) dient Kapitel 2.1 und gibt einen Überblick über die Eigenschaften und das Tragverhalten von Zementestrich. Die Anwendung nichtlinearer Materialmodelle verlangt nachfolgend eine Einführung in die Theorie verschmierter Rissmodelle, ausgehend von den kontinuumsmechanischen Grundlagen über die Kernaspekte der Verwendung eines plastizitätstheoretisch basierten Materialmodells innerhalb der Finite-Elemente-Methode bis hin zur Problematik der Netzab-

hängigkeit (Kapitel 2.2). In *Abaqus* steht eine umfassende Material- und Elementdatenbank zur Verfügung. Diese wurde bereits für Stahlfaser- und Stahlbeton zur Abbildung des Rissverhaltens, insbesondere unter Verwendung des auch hier gewählten Konzepts zur Sicherstellung der Netzunabhängigkeit erfolgreich verwendet (Gödde, 2013). Untersuchungen in Form einer Gegenüberstellung dieses Regularisierungskonzepts mit in kommerzieller Software bereits enthaltenen Optionen werden in Kapitel 3.1 vorgestellt, um daraus den bestmöglichen Ansatz für eine objektive Modellierung abzuleiten. Darauf folgt die experimentelle Ermittlung und Modellierung der Dämmsteifigkeit in Kapitel 3.2. Im so entwickelten Modell für das Platte-Dämmung-System stehen insbesondere Schwindeinflüsse auf die Rissbildung im Fokus. Diese sollen im Rahmen einer Kooperation mit Prof. Nietner der HTWK Leipzig berücksichtigt werden. Dazu werden Vorverformungen und ggf. Vorspannungen aus vorgelagerten thermischen, Finite-Elemente-basierten Simulationen des Schüsselverhaltens infolge Schwindens im Modell in *Abaqus* eingepreist. Zur Abbildung des anschließenden Absenkens der Platte infolge äußerer Belastung ist eine geeignete Kontaktformulierung zwischen Estrich und elastischer Bettung zu definieren (Verhindern einer Durchdringung). Das Konzept zur Modellbildung wird in Kapitel 4 noch einmal zusammengefasst und führt über eine Erläuterung der daraus abgeleiteten Versuchsplanung schließlich auf den Vergleich der experimentellen und numerischen Untersuchungen. In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Balken- und in Kapitel 6 die der Plattenversuche den Simulationsergebnissen gegenübergestellt und das Modell validiert. Schließlich wird das Modell in Kapitel 7 zur Durchführung einer Parameterstudie zur Einordnung des Einflusses der zentralen Parameter (Schüsselbildung und Dämmsteifigkeit) verwendet und abschließend Erkenntnisse zur Bewertung des Bemessungskonzepts abgeleitet.



## 2. Theoretische Grundlagen

Im Bereich der numerischen Rissmodellierung gibt es verschiedene Ansätze in der Literatur. Um eine Auswahl für die vorliegende Anwendung bei Estrichplatten auf Dämmschichten zu treffen, sind die werkstofflichen und mechanischen Eigenschaften und das Tragverhalten im betrachteten Anwendungsbereich des Werkstoffs zu berücksichtigen. Für einen Beitrag zur Optimierung der Bemessung bei Lagerung auf Dämmschichten ist die aktuelle Normung von Relevanz. Dieses Kapitel gibt hier einen Überblick und liefert auf Basis offenkundiger Gemeinsamkeiten mit dem Werkstoff Beton mögliche Rissmodell-Ansätze für die numerische Modellierung. Nach einer grundlegenden Einführung in die Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FE-Methode, FEM) bei nichtlinearem Materialverhalten führt ein Überblick über die in der Literatur vorhandenen Ansätze auf die für diese Arbeit gewählten verschmierten Rissmodelle. Insbesondere wird auf Schwachstellen wie die auftretende Netzabhängigkeit eingegangen und welche Lösungsmöglichkeiten die Literatur aufzeigt. Anschließend wird mit Blick auf die konkrete Anwendung im Programmpaket *Abaqus* eines dieser Modelle genauer vorgestellt.

### 2.1. Werkstoff Estrich

#### 2.1.1. Zusammensetzung und mechanische Eigenschaften

Zur Beurteilung des für die Bemessung relevanten Tragverhaltens werden zunächst die mechanischen und werkstofflichen Eigenschaften des betrachteten Werkstoffs vorgestellt. Werkstofflich ist Estrich vergleichbar mit dem Werkstoff Beton: Es handelt sich um einen Verbundwerkstoff, der unter Zugabe von Wasser aus einem Bindemittel und Zuschlagstoffen hergestellt wird. Zuschlagstoffe sind in der Regel mittel- bis feinkörnig, übliche Sieblinien sind B/C 8 bzw. C8. Die Art des Bindemittels variiert im Vergleich zu Beton: Im Bauwesen werden Estriche nach der Art des verwendeten Bindemittels in Zement-, Calciumsulfat-, Magnesia-, Gussasphalt- und Kunstharzestriche eingeteilt. Die Auswahl des Estrichs für einen bestimmten Anwendungsbereich ist von den Eigenschaften des jeweiligen Estrichs abhängig, einen groben Überblick über die Vor- und Nachteile auf Basis des Bindemittels gibt Tabelle 2.1 (Timm, Allmendinger und Strehle, 2019). Zum Teil werden zusätzliche Stoffe wie Fließmittel hinzugegeben, um den Wasser-Bindemittel-Wert zu regulieren, was das Austrocknungsverhalten günstig beeinflussen kann. Aus diesem Grund und für ein günstigeres Schwindverhalten kann einer Zementestrichmischung auch Calciumsulfat in geringer Menge zugesetzt werden.

Bei den beiden am häufigsten verwendeten Estricharten, Zement- und Calciumsulfatestrich, wird dabei explizit unterschieden, ob es sich um eine konventionelle Bauart und damit erdfeuchte Konsistenz oder um eine Ausführung als Fließestrich handelt. Die Zugabe von Fließmitteln soll eine schnellere Erhärtung bzw. ein beschleunigtes Austrocknen und dadurch ein früheres Begehen bzw. Beanspruchen des Estrichs ermöglichen. Fließestriche werden aufgrund dieser Eigenschaften häufig eingesetzt und national wurde in DIN 18560-2:2022 explizit das Kurzzeichen CAF für CA-Fließestrich eingeführt (vgl. Tabelle 2.1).

Tabelle 2.1.: Estricharten: Kurzbezeichnungen nach DIN EN 13813:2003 und Vor- und Nachteile (nach Timm, Allmendinger und Strehle, 2019)

Kurzzeichen	Bedeutung	Vorteile	Nachteile
CT	Zementestrich (cementitious screed)	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ relativ kostengünstig</li> <li>◦ bewährt; einfache Herstellung (Baustellenmischung, Sackware)</li> <li>◦ für fast alle Einsatzbereiche geeignet (nicht brennbar, frost-/tausalzbeständig, elektrisch ableitfähig)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ CO<sub>2</sub>-intensive Herstellung</li> <li>◦ schwindanfällig</li> </ul>
CA (CAF)	Calciumsulfatestrich (calcium sulfate screed)	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ raumbeständig (Schwinden vernachlässigbar)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ feuchteempfindlich</li> </ul>
MA	Magnesiaestrich (magnesite screed)	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ hohe Verschleiß-/Festigkeit (geeignet als Industrieestrich)</li> <li>◦ gute Durchfärbbarkeit</li> <li>◦ raumbeständig</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ korrosiver Angriff auf Metalle</li> <li>◦ feuchteempfindlich</li> <li>◦ erforderliche Expertise bei Herstellung</li> </ul>
AS	Gussasphaltestrich (mastic asphalt screed)	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ frühe Belegbarkeit</li> <li>◦ geringe Einbaudicke (geeignet im Sanierungsbereich)</li> <li>◦ thermoplastische Verformbarkeit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ ggf. gesundheitsgefährdend bei Heißverarbeitung (Schutz des Einbaupersonals)</li> </ul>
SR	Kunstharzestrich (synthetic resin screed)	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ schnelle Erhärtung</li> <li>◦ hohe Festigkeit</li> <li>◦ optisch ansprechend</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ feuchte- und temperaturempfindlich in der Einbauphase</li> <li>◦ anfällig gegenüber Mischfehlern</li> <li>◦ kostenintensiv</li> <li>◦ kratzempfindlich</li> </ul>

Im Hinblick auf die mechanischen Eigenschaften von Estrich ist die normative Beschreibung des Tragverhaltens nicht vergleichbar mit Beton, da auch der Anwendungsbereich deutlich be-

grenzt ist: Estriche werden sowohl im Wohnungs- als auch im Industriebau auf Massivdecken oder Bodenplatten eingesetzt. Im Wohnungsbau können sie zur Aufnahme eines Bodenbelags dienen, als Heizestrich zur Aufnahme der Fußbodenheizung, oder auf Dämmschicht gelagert zum Schallschutz beitragen. Als Industriefußboden kann Estrich selbst tragfähiger Aufnahmeboden, oder eine mit einem Tragbeton so verbundene Schicht sein, dass „auf ihn einwirkende vor allem schleifende, rollende, stoßende und schlagende Beanspruchungen über die Haftbrücke aufgenommen werden“ können (Schütze, 1973). Festlegungen zum Materialgesetz und umfangreiche Bemessungsregeln für eine ingenieurmäßige Auslegung wie im Fall des Eurocodes 2 für Stahlbetonbauten gibt es aufgrund des beschränkten und eher gebrauchstauglich relevanten Einsatzbereichs für Estrich bisher nicht. Auch wird Estrich in der Regel unbewehrt eingebaut, da eine Bewehrung keine Verbesserung der Festigkeit oder Tragfähigkeit zur Folge hat und auch eine Rissbildung nicht verhindern kann (Timm, Allmendinger und Strehle, 2019). Lediglich zur Verhinderung eines Risseintrags in den aufliegenden Belag kann die Anordnung von Bewehrung günstig sein (Schnell, 1987).

Neben der Bindemittelart lassen sich Estriche vor allem hinsichtlich ihrer Verlegeart unterscheiden, die für das Tragverhalten und die normative Bemessung entscheidend ist. Bei Anforderungen an den Schall- und Wärmeschutz wird der Estrich schwimmend ausgeführt, das heißt als eine von angrenzenden Wänden oder Deckendurchbrechungen getrennte, frei bewegliche, auf Dämmschicht gelagerte, lastverteilende Platte. Estrich und Dämmschicht bilden so ein Masse-Federelement, wodurch Trittschall- und Wärmedämmwirkung erhöht werden (Schütze, 1974). Zur Vermeidung einer rückseitigen Feuchtebelastung und aufwändiger Untergrundvorbereitung kann der Estrich auf Trennschicht ausgeführt werden. Bei hohen Anforderungen an die Beanspruchbarkeit wird Verbundestrich eingesetzt. (Timm, Allmendinger und Strehle, 2019) In Abbildung 2.1 sind die drei genannten Verlegearten sowie die damit einhergehenden primären Beanspruchungsformen dargestellt: Verbundestrich trägt vor allem über Druck ab, bei schwimmendem Estrich ist die Biegezugtragfähigkeit maßgebend. Estrich auf Trennschicht trägt überwiegend über Druck ab, wobei auch Biegezugspannungen auftreten können.

Für den in dieser Arbeit betrachteten schwimmenden Estrich ist somit insbesondere das Biegezugtragverhalten von Bedeutung, worauf in Kapitel 2.1.3 zur Herleitung des Bemessungskonzepts noch im Detail eingegangen wird. Im folgenden Abschnitt wird schon einmal auf die aus den mechanischen Eigenschaften abgeleiteten Prüfmethode eingegangen, sowohl für den Estrich selbst als auch für die Dämmstoffunterlage. Im Anschluss wird das Schwindverhalten und das Phänomen des Schüsselns genauer beschrieben.



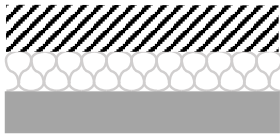
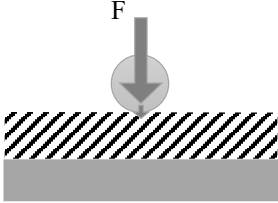
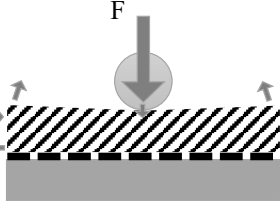
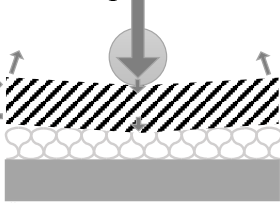
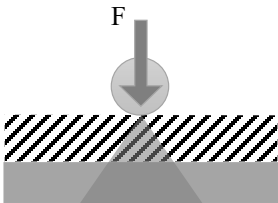
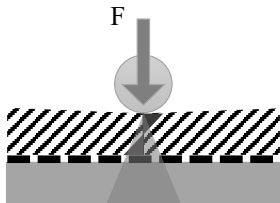
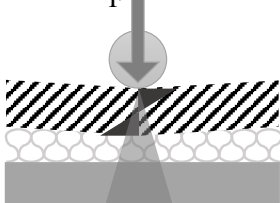
Estrichart	Verbundestrich	Estrich auf Trennschicht	Estrich auf Dämmschicht
Aufbau			
Verformung	 Zusammendrücken des Estrichs, nahezu keine Querdehnung	 Zusammendrücken des Estrichs, Querdehnung und leichtes Aufwölben (leichte Biegung)	 Überwiegend Biegung des Estrichs, nur leichtes Zusammendrücken, dafür starke Verformung der Dämmung
Spannung	 Lastabtrag über Druckspannungen	 Lastabtrag überwiegend über Druckspannungen, leichte Biegezugspannungen	 Lastabtrag überwiegend über Biegezugspannungen, nur noch leichte Druckspannungen

Abbildung 2.1.: Vergleich der Verlege- und Beanspruchungsarten (nach Merkblatt Zementestrich (2015))

## Prüfmethoden

Estriche im Bauwesen sind in den Teilen der DIN 18560 geregelt, wobei die Klassen der mechanischen Kennwerte in DIN EN 13813:2003 festgelegt sind. Für die oben genannten Estricharten gilt nach DIN 18560-1:2021, dass sie den Beanspruchungen genügen, wenn Druck- bzw. Biegezugfestigkeitsklassen eingehalten werden. Im Falle hochbeanspruchbarer Estriche gibt es zusätzliche Anforderungen an die Oberflächenhärte und den Verschleißwiderstand (Teil 7 der Norm).

Zur Feststellung der mechanischen Eigenschaften werden Festigkeits- bzw. Bestätigungsprüfungen durchgeführt. Die verschiedenen Teile der Reihe DIN 18560 regeln die Art der Prüfung abhängig von der Verlegeart des Estrichs. Bei schwimmender Lagerung auf weichem Untergrund wird die Estrichplatte wie oben beschrieben vor allem auf Biegung beansprucht und die maßgebende Bemessungsgröße ist die Biegezugfestigkeit. Diese ist nach DIN EN 13892-2:2003 (Festigkeitsprüfung) bzw. DIN 18560-2:2022 (Bestätigungsprüfung) zu ermitteln. Eine Beschreibung der Prüfungen ist im Anhang A dargestellt. Neben diesen genormten Prüfmethoden, welche nur



das reine Balkentragverhalten eines Estrichs berücksichtigen, werden zur Beurteilung der Tragfähigkeit von schwimmend gelagerten Estrichen in der Praxis außerdem Belastungsprüfungen an Platten auf Dämmstoff durchgeführt. Dabei werden Platten auf Dämmstoff hergestellt und in der Regel die Bruchlast bei Belastung der Plattenecken mit einer Einzellast dokumentiert (IBF, 2019).

Eine schwimmende Lagerung des Estrichs dient vor allem dem Trittschall- und ggf. dem Wärmeschutz. DIN 4109 regelt den Schallschutz im Hochbau, wobei nur Angaben zur Ermittlung der Trittschallminderung allgemein, nicht zu den Dämmstoffeigenschaften gemacht werden. Teile der DIN 4108 regeln den baulichen Wärmeschutz: In DIN 4108-10:2021 sind mögliche Wärmedämmstofftypen angegeben, wobei EN-Normen wie DIN EN 13162:2015 (Mineralwolle) und DIN EN 13163:2017 (Polystyrol (EPS)) zusätzliche Angaben zu häufig verwendeten Dämmstofftypen machen. Darin wird auch festgelegt, mit welcher Nutzlast der aufliegende Estrich in Abhängigkeit der Zusammendrückbarkeit belastet werden darf. Für die verwendeten Dämmstoffe gibt es genormte Prüfmethode zur Klassifizierung der für die Tragfähigkeit zentralen Größe der Zusammendrückbarkeit  $c_p$ . Diese ergibt sich nach DIN EN ISO 29770:2022 aus der Differenz von (Liefer-)Dicke  $d_L$  (unter einer Belastung von  $0.25 \text{ MN/m}^2$  gemessen) und der Dicke  $d_B$  (unter einer Belastung von  $2 \text{ MN/m}^2$  und mindestens 120 s nach Entfernen einer „kurzzeitigen“ zusätzlichen Last von  $48 \text{ MN/m}^2$  gemessen). Die Ermittlung und Einteilung der Zusammendrückbarkeit ergibt sich nach der Norm des jeweiligen Dämmstofftyps zu

$$c_p = d_B - d_L \quad (2.1)$$

Abhängig von diesem Wert wird festgelegt, welcher Stufe von CP2 ( $c \leq 2 \text{ mm}$ , Nutzlast  $\leq 5 \text{ kPa}$ ) bis CP5 ( $c \leq 5 \text{ mm}$ , Nutzlast  $\leq 2 \text{ kPa}$ ) der Dämmstoff zuzuordnen ist. Die Angaben zur maximalen Nutzlast entsprechen grob denen der Bemessungsnorm für schwimmenden Estrich (DIN 18560-2:2022), wobei hier genauere Angaben auch zur Estrichdicke und -biegezugfestigkeit gemacht werden. Hierauf wird in Kapitel 2.1.3 im Detail eingegangen.

### Schwinden & Schüsseln

In der Vergangenheit wurde im Bauwesen aufgrund der genannten Vorteile von geringen Kosten bis hin zur einfachen Herstellung vornehmlich Zementestrich eingesetzt (Schütze, 1974). Bei Zementestrich kommt es jedoch infolge unterschiedlicher Austrocknung bzw. Schwindens häufig zu einer oberseitigen Verkürzung und dadurch zu einer Verformung, die als „Schüsselung“ bezeichnet wird. Ein umgekehrter Feuchtegradient führt entsprechend zu einer Randabsenkung. Beide Phänomene können zu Rissen und Schäden am Bodenbelag führen. Durch die günstigeren Schwind- und Trocknungseigenschaften werden zunehmend andere Estrichzusammensetzungen, vor allem fließfähige Calciumsulfatestriche erforscht und eingesetzt (Schießl und Wiegrink, 2005). Durch das beschleunigte Austrocknen, welches bei diesen beiden Estricharten durch Einsatz als

Fließestrich erreicht werden kann, steigt allerdings die Gefahr des Schüsselns (oben schnelles, unten langsames Austrocknen), wodurch Zwangsspannungen infolge des zunehmend wirksamen Eigengewichts eingetragen werden (Timm, Allmendinger und Strehle, 2019).

Das Phänomen des Schüsselns steht in Verbindung mit der Verlegeart auf Dämmschicht im Fokus dieser Arbeit, da dies als eine zentrale Ursache für Schadensfälle angenommen wird, wie im folgenden Kapitel noch näher erläutert wird. Das Zusammenwirken des Masse-Federelements mit den Zwangsspannungen infolge Aufschüsselns ist bislang nicht im normativen Bemessungskonzept berücksichtigt, wie in Kapitel 2.1.3 im Detail aufgezeigt wird. In diesen Ausführungen stehen vor allem Zementestriche im Fokus, da diese Bindemittelart insbesondere schwindanfällig ist, und auch in den zur Validierung des in dieser Arbeit entwickelten Riss-Modells durchgeführten Versuchen ein Fließ-Zementestrich verwendet wurde. Grundsätzlich kann das Modell jedoch auch bei anderen schwindanfälligen Estrichrezepturen mit ähnlichen Werkstoffeigenschaften Anwendung finden.

### 2.1.2. Schadensfälle und ihre Ursachen

Estrich ist in der Regel nicht allein tragend, sondern liegt direkt oder auf Trenn- oder Dämmschicht gelagert auf einem tragenden Untergrund auf und dient nach DIN EN 13318 dazu

- eine vorgegebene Höhenlage zu erreichen,
- einen Bodenbelag aufzunehmen,
- unmittelbar genutzt zu werden.

Erfüllt ein Estrich diese an ihn gestellten Anforderungen nicht, spricht man von Mängeln oder Schäden am Estrich. Nach Aurnhammer (2008) werden diese zunächst ursachenbedingt in Schäden eingeteilt, die bei bestimmten Konstruktions- bzw. Verlegearten vorkommen, und in solche, die eher baustoffbedingt auftreten, also abhängig von der Zusammensetzung bzw. Bindemittelart des Estrichs sind. Zu den zahlreichen Schadensarten zählen z. B. Absenkungen durch Veränderungen des Untergrunds oder der Dämmschicht (konstruktionsbedingt), oder Zerfall und Festigkeitsverlust, z. B. infolge überaltertem, unzureichend reaktionsfähigem Bindemittel oder Entmischung beim Transport (baustoffbedingt). Auch Rissbildung ist ein häufig auftretender Schadensfall, insbesondere bei schwimmendem Zementestrich, weshalb dieser im Fokus der vorliegenden Arbeit steht.

Wie Beton ist Estrich ein quasi-spröder Werkstoff und reißt daher bei Überschreiten der im Gegensatz zur Druckfestigkeit geringen Zugfestigkeit. Einem Teil der auftretenden Rissbildung wird durch Anordnung von Fugen entgegengewirkt. Dabei wird unterschieden in

- Bewegungs- und Rand-/Raumfugen (dauerhaft erforderlich, um Längenänderungen und vertikale Bewegungen aufzunehmen)

- Scheinfugen (zeitlich begrenzt erforderlich, Sollrissstellen; Festlegung durch z. B. Verfüllen).

Ein Fugenplan gibt die Lage und Art der Fugen abhängig von u.a. thermischen und belastungstechnischen Randbedingungen an. Scheinfugen sind Sollrissstellen, um willkürliche Schwindrisse im Erhärtungszeitraum an kritischen Stellen wie einspringenden Ecken, Aussparungen, etc. zu vermeiden. Grundsätzlich sollten die durch Fugen begrenzten Feldgrößen abhängig vom Schwindmaß geplant werden, eine feste Angabe dazu gibt es jedoch nicht (Timm, Allmendinger und Strehle, 2019). Grundsätzlich sind Maßnahmen in Form von Fugen nicht immer ausreichend zur Verhinderung von Schäden an kritischen Stellen. Für eine genauere Erläuterung von Fugenarten und ihrer Wirksamkeit sei auf die Ausführungen von Timm, Allmendinger und Strehle (2019) verwiesen. Neben dem so versuchten Verhindern ungünstiger Rissbildung besteht die Möglichkeit, Risse zu beheben. Vor allem im Industriebereich mit zum Teil erhöhten Anforderungen an die Untergrundoberfläche (z. B. für Staplerverkehr, oder bei chemischem Angriff) stellen Risse einen Mangel dar. Sie sind zu beheben, wenn sie normativ oder auftraggeberseitig festgelegte Grenzwerte überschreiten, z. B. durch Kraft übertragende Festlegung der Risse. Die Oberfläche gilt dann wieder als rissfrei. Hier ist es aber nach Timm, Allmendinger und Strehle (2019) zwingend erforderlich, die Ursache zu kennen, da andernfalls z.B. bei durch Belastung entstandenen Rissen die Gefahr einer wiederholten Rissbildung besteht.

Aurnhammer (2008) zählt als Ursachen für Schäden an Estrichen auf Dämmschichten folgende auf:

- Schadenswirksame Spannungen und Verformungen,
  - infolge Nutzlast
  - infolge Schwinden und thermisch bedingter Längenänderung,
  - infolge ungleichmäßiger hygrischer oder thermischer Einflüsse,
  - infolge Zwangspunkten (z.B. einspringende Ecken) im Grundriss,
- Ungenügende Festigkeit oder zu geringe Estrichdicke,
- Herstellungsbedingte Mängel,
- Absenkung durch zu weiche Dämmschicht oder ungleiche Unterlage.

Bei herstellungsbedingten Mängeln ist hier vor allem eine der weichen Unterlage geschuldete schwierigere Verdichtungsmöglichkeit gemeint. Dadurch weist das Estrichgefüge an der Unterseite u. U. eine porösere Verdichtung und geringere Festigkeit auf. Diese über die Dicke ungleichmäßige Festigkeit hat Einfluss auf die Tragfähigkeit. Bei der Verwendung von Fließestrich mit seinem einfacheren Einbauvorgang treten diese Probleme weniger auf (Aurnhammer, 2008). Insgesamt wird in der vorliegenden Arbeit vor allem die erste Gruppe von Ursachen betrachtet, da diese auch für die Bemessung Relevanz besitzen.

Estrich auf Dämmschicht wird durch Einzel-Nutzlasten vor allem auf Biegung beansprucht. Aurnhammer (2008) weist in diesem Zusammenhang auf Untersuchungen von Manns und Zeus (1980) hin, bei denen schwimmender Estrich unter verschiedenen Lastfällen untersucht wurde. Hier wurden letztendlich für Estriche im Wohnungsbau empirisch Mindestwerte für Schichtdicke und Nennfestigkeit in Abhängigkeit der Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht aus einer geringen Anzahl Versuche abgeleitet. Hieraus sind schließlich die normativen Regelungen der DIN 18560 entstanden.



Abbildung 2.2.: Vertikale Verformungen (Schüsselung) bei schwimmenden Zementestrichen (sichtbarer Abstand unter der Richtplatte, siehe Markierungen in rot; Müller und Limp (2015))

Hygrische und thermische Einflüsse spielen bei Estrich auf Dämm- und Trennschichten eine große Rolle, da die Estrichplatte sich in diesem Fall bei ungleichmäßigem Formänderungsstreben zwischen der Ober- und Unterseite frei verkrümmen und dabei lokal von der Unterlage abheben kann. Dies kann entweder in Form des Abhebens (Aufschüsseln, z.B. infolge Schwinden während des Austrocknens, siehe Abbildung 2.2) oder Absenkens (z.B. Quellvorgang infolge Wasseraufnahme an der Oberseite) der Ränder erfolgen. In beiden Fällen führt die (während der Hydratation zunehmende) Wirkung des Platteneigengewichts zu Biegespannungen innerhalb der Platte. Je nach Größe der Estrichfläche und -dicke können sich die abhebenden Bereiche aufgrund der Wirkung des Eigengewichts über die komplette Fläche oder nur an den Rändern über eine gewisse Grenzlänge (i.d.R.  $\leq 2$  m) erstrecken (siehe Abbildung 2.3, Aurnhammer, 2008). Bei mehrschichtig hergestellten Estrichen mit unterschiedlichen Stoffkennwerten über die Höhe können diese Phänomene deutlicher auftreten, aber auch bei einschichtigen schwindanfälligen Fließestrichen ist ein Abheben in den äußeren Bereichen während des Aushärtens messbar (Aurnhammer, 2008, Timm, Allmendinger und Strehle, 2019). Eine Belastung durch Nutzlast an Ecken und Rändern führt entsprechend zu Rissen oder Abbrechen der belasteten Bereiche, wenn sich diese Verformungen nicht im Laufe des Austrocknungsprozesses abgebaut haben. Diesem Verhalten lässt sich in der Regel durch eine möglichst quell- und schwindarme

Rezeptur sowie eine sachgerechte Nachbehandlung, die ein möglichst langsames Austrocknen gewährleistet, entgegenwirken (Timm, Allmendinger und Strehle, 2019). Dies steht allerdings häufig dem Betriebsablauf auf der Baustelle entgegen. Bei den Rissen handelt es sich in der Regel um Einzel-Trennrisse (Aurnhammer, 2008, Manns und Zeus, 1980). Neben dieser Rissart können auch Krakelee-Riss (feine Rissnetze an der Oberfläche) auftreten. Deren Wirkung auf die mechanischen Eigenschaften ist jedoch vernachlässigbar (Merkblatt Zementestrich (2015)), sodass diese hier keine Berücksichtigung finden.

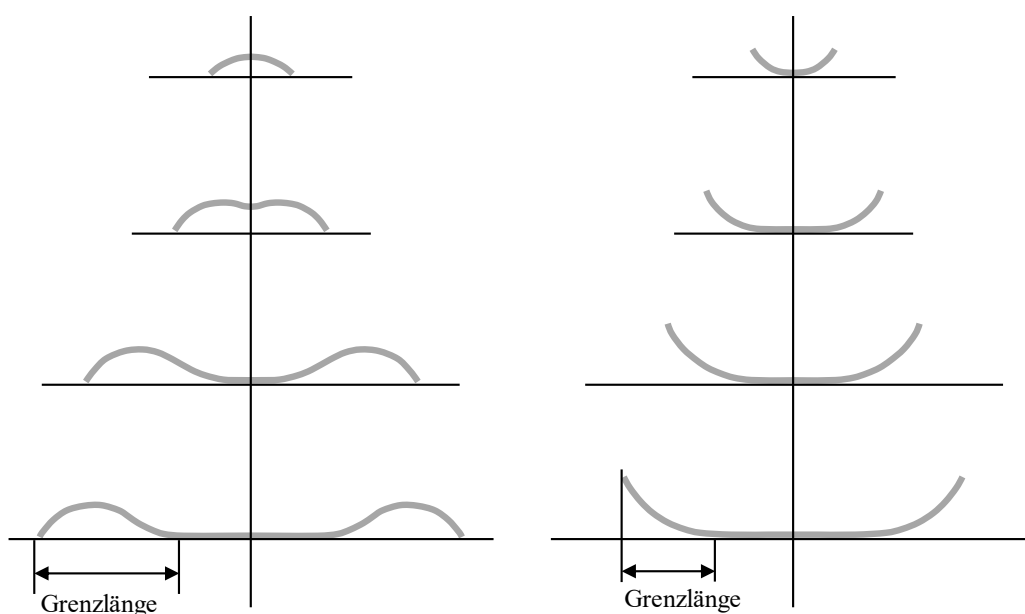


Abbildung 2.3.: Verformungsverhalten von Estrichen zunehmender Größe; links unter konvexen, rechts unter konkaven Verwölbungsbestrebungen (Aurnhammer, 2008)

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass bei Estrichen auf Dämmschichten eine Vielzahl an Schadensfällen mit verschiedenen möglichen Ursachen bekannt ist. Bei Rissbildung lassen sich diese Ursachen nicht immer unmittelbar zuordnen, sodass ein nachträgliches Beheben der Schäden bedingt möglich ist. Vor allem die für eine bessere Verdichtung anzustrebende weichere Konsistenz, insbesondere bei dicken bzw. weichen Dämmschichten, steht einem günstigen Austrocknungsverhalten bei steiferer Konsistenz mit geringerem Wasser- bzw. Zementleimgehalt entgegen. Dieser Umstand verhindert eine „einfache“ Lösung, wie sie in der Norm bzw. Literatur angestrebt wird, bei der vor allem empirische Versuchsergebnisse herangezogen werden, um die Schadensursachen bzw. das Tragverhalten empirisch zu beurteilen und im besten Fall durch normative Vorgaben und Nachbehandlungsmaßnahmen präventiv zu verhindern (Manns und Zeus, 1980, Schnell, 1990, Schneider und Pleyers, 2003, Lorenz und Schmidt, 1996, Gebauer et al., 2017). Außerdem werden Verformungseinflüsse aus Schwinden in diesen Vorgaben nur bedingt

berücksichtigt. Das Zusammenwirken von weicher Dämmstofflagerung, u. U. ungleichmäßig verdichtetem Estrich, Aufschüsseln infolge Schwinden und Belastung durch Einzellast lässt sich schwer empirisch abdecken, wie die nach wie vor auftretenden Schadensfälle andeuten. Mindestens wären umfangreiche Versuchsserien notwendig, um diese sich gegenseitig beeinflussenden Aspekte angemessen zu berücksichtigen. Bei weitem nicht alle Schadensfälle sind auf die halbempirische Normengrundlage zurückzuführen, und inwiefern eine numerische Untersuchung hier eine Verbesserung bringen kann, ist zu untersuchen. Zunächst soll das folgende Kapitel einen Überblick zum Stand der Technik hinsichtlich der Bemessung von Estrichen auf Dämmschicht liefern.

### 2.1.3. Bemessungskonzept

Je größer die Last und je größer die Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht unter dem Estrich, desto größer ist die Biegebeanspruchung der Platte (Aurnhammer, 2008, Manns und Zeus, 1980, Timm, Allmendinger und Strehle, 2019). Das Bemessungskonzept für Estrich auf Dämmschicht, welches in der DIN 18560-2:2022 geregelt ist, legt tabellarisch Estrichnenndicken in Abhängigkeit von der Nutzlast, der Biegezugfestigkeitsklasse und der Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht fest (DIN 18560-2:2022). Die Estrichnenndicken sind tabellarisch festgelegt, siehe Abbildung 2.2. DIN 18560-2:2022 macht lediglich Angaben zu Einzellasten bis 4 kN bzw. Flächenlasten bis 5 kN/m<sup>2</sup> (siehe Abbildung 2.2). Größere Einzel- oder Flächenlasten oder Fahrbelastungen allgemein verlangen zusätzliche Überlegungen durch die planende Person (Timm, Allmendinger und Strehle, 2019). Die Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht ist abhängig vom Lastniveau begrenzt auf maximal 5 bzw. 3 mm. Bei der kleinsten Flächenlast bis 2 kN/m<sup>2</sup> sind per Fußnote auch größere Zusammendrückbarkeiten bis 10 mm zugelassen, wobei dann die Estrichdicke um 5 mm zu erhöhen ist.

Eine erste Grundlage für diese normativen Festlegungen lieferten Manns und Zeus (1980). Die 1980 hergeleiteten Bemessungsvorschläge für Estriche auf dicken Dämmschichten beruhen auf vergleichenden Untersuchungen zwischen experimentellen Daten aus Belastungsversuchen gegenüber Ergebnissen empirischer Formeln nach Westergaard (1926), die auf dem Bettungsmodulverfahren basieren. Bis zu diesem Zeitpunkt war DIN 4109-4:1962 die maßgebende Bemessungsnorm für schwimmende Estriche. Die dortigen Anforderungen bezogen sich im Hinblick auf Dämmstoffdicken von maximal 35 mm auf die damaligen Angaben zum Wärme- und Schallschutz in den Normen DIN 4108 und DIN 4109. In den 70er Jahren kam es im Zuge des Heizölpreises zum Einbau dickerer Dämmstoffe, um neue Regelungen im Wärmeschutz einzuhalten (Schnell, 1983). Um den Einfluss der Zusammendrückbarkeit auf die Beanspruchbarkeit des Estrichs zu beurteilen, wurden u. a. von Manns und Zeus (1980) und Schnell (1983) Untersuchungen zu dickeren Dämmschichten durchgeführt. Wie Schnell (1983) ausführte, sind andere Faktoren, insbesondere diejenigen, die Konsistenz und Verdichtbarkeit beeinflussen, von größerer Bedeutung für die Beanspruchbarkeit als die Dämmstoffdicke. Schnell (1983) wies aber in seinem Überblick zu den

Tabelle 2.2.: Auszug aus DIN 18560-2:2022: Tabelle 1 – Nenndicken und Biegezugfestigkeit unbeheizter Estriche auf Dämmschichten für verschiedene lotrechte Nutzlasten

Estrichart	Biegezugfestigkeitsklasse nach DIN EN 13813	Estrichnenndicken <sup>a</sup> in mm EL=Einzellasten <sup>d</sup> FL=Flächenlasten				Bestätigungsprüfung Biegezugfestigkeit $\sigma_{BZ}$ N/mm <sup>2</sup>	
		bei einer Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht $C$					
		$\leq 5$ mm <sup>c</sup>		$\leq 3$ mm		kleinster Einzelwert	Mittelwert
EL $\leq 1$ kN FL $\leq 2$ kN/m <sup>2</sup>	EL $\leq 2$ kN FL $\leq 3$ kN/m <sup>2</sup>	EL $\leq 3$ kN FL $\leq 4$ kN/m <sup>2</sup>	EL $\leq 4$ kN FL $\leq 5$ kN/m <sup>2</sup>				
Calcium-sulfat-Fließestrich CAF	F4	$\geq 35$	$\geq 50$	$\geq 60$	$\geq 65$	$\geq 3,5$	$\geq 4,0$
	F5	$\geq 35$	$\geq 45$	$\geq 50$	$\geq 55$	$\geq 4,5$	$\geq 5,0$
	F7	$\geq 35$	$\geq 40$	$\geq 45$	$\geq 50$	$\geq 6,5$	$\geq 7,0$
Calcium-sulfat-estrich CA	F4	$\geq 45$	$\geq 65$	$\geq 70$	$\geq 75$	$\geq 2,0$	$\geq 2,5$
	F5	$\geq 40$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 65$	$\geq 2,5$	$\geq 3,5$
	F7	$\geq 35$	$\geq 50$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 3,5$	$\geq 4,5$
Kunstharzestrich SR	F7	$\geq 35$	$\geq 50$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 4,5$	$\geq 5,5$
	F10	$\geq 30$	$\geq 40$	$\geq 45$	$\geq 50$	$\geq 6,5$	$\geq 7$
Magnesiaestrich <sup>b</sup> MA	F4	$\geq 45$	$\geq 65$	$\geq 70$	$\geq 75$	$\geq 2,0$	$\geq 2,5$
	F5	$\geq 40$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 65$	$\geq 2,5$	$\geq 3,5$
	F7	$\geq 35$	$\geq 50$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 3,5$	$\geq 4,5$
Zementestrich CT	F4	$\geq 45$	$\geq 65$	$\geq 70$	$\geq 75$	$\geq 2,0$	$\geq 2,5$
	F5	$\geq 40$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 65$	$\geq 2,5$	$\geq 3,5$

<sup>a</sup> Bei Dämmschichten  $\leq 40$  mm kann die Estrichdicke um 5 mm reduziert werden, die Mindestnenndicke von 35 mm darf nicht unterschritten werden.

<sup>b</sup> Die Oberflächenhärte bei Steinholzestrichen muss mindestens SH30 nach DIN EN 13813 betragen.

<sup>c</sup> Bei lotrechten Nutzlasten bis 2,0 kN/m<sup>2</sup> sind im Ausnahmefall höhere Zusammendrückbarkeiten bis 10 mm zulässig. In diesem Fall muss die Estrichnenndicke um 5 mm erhöht werden.

<sup>d</sup> Bei Einzellasten sind für deren Aufstandsflächen im Allgemeinen zusätzliche planerische Überlegungen erforderlich. Das Gleiche gilt für Fahrbeanspruchung.

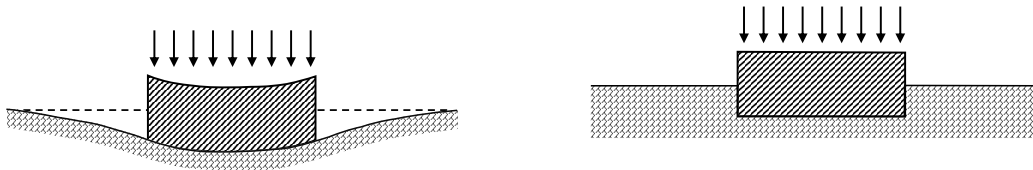
bis zur Ablösung von DIN 4109-4:1962 durch DIN 18560-2:1981 von verschiedenen Seiten durchgeführten praktischen und theoretischen Untersuchungen darauf hin, dass übereinstimmend die schwierige Verdichtbarkeit bei zu nachgiebiger Unterlage sowie die besondere Gefährdung der Eck- und Randbereiche erwähnt wird. Schließlich waren vor allem die guten Übereinstimmungen zwischen Versuchsdaten und Formeln nach dem Bettungsmodulverfahren im Hinblick auf die maximalen Spannungen und Verformungen bei Manns und Zeus (1980) ausschlaggebend für die in DIN 18560-2:1981 übernommenen normativen Vorgaben. (Schnell, 1983)

Der Einfluss des Dämmstoffs geht in den dortigen rechnerischen Ansatz nach Westergaard über die Zusammendrückbarkeit ein. Aus der Zusammendrückbarkeit ergibt sich die Bettungszahl (KS) nach Manns und Zeus (1980) zu

$$KS = \frac{p}{s} \approx \frac{2 - 0.25}{d_L - d_B} = \frac{1.75}{d_L - d_B} \quad [\text{MN/m}^3]. \quad (2.2)$$

wobei diese Formel aus der für den Bettungsmodul mit der Pressung  $p$  und der Einsenkung  $s$  des Baugrunds abgeleitet wird. Die Pressung entspricht der normativ geregelten Spannung, unter der die Dicke  $d_B$  (2 kPa) bzw. die Lieferdicke  $d_L$  (0.25 kPa) zu messen ist, jedoch unter Vernachlässigung der zwischenzeitlich aufzubringenden zusätzlichen Last von 48 kPa (vgl. Kapitel 2.1.1). Eine mögliche Einsenkung des Unterbaus oder Untergrunds, auf dem der Dämmstoff aufliegt, wurde von (Manns und Zeus, 1980) für die Bettungszahl des Dämmstoffs als vernachlässigbar aufgrund der viel geringeren Größe im Vergleich zur Einsenkung des Dämmstoffs eingestuft.

Die genannten Westergaard-Formeln wurden für den Straßenbau zur Bemessung von Bodenplatten entwickelt und idealisieren den Boden – analog zur Estrichdämmschicht – als elastische Bettung. Sowohl im Straßenbau zur Berechnung von Betonplatten als auch im Fall von Industriefußböden aus Beton sowie schwimmendem Estrich finden die zum Teil überarbeiteten Formeln nach Westergaard (1926) noch heute Anwendung (Lohmeyer und Ebeling, 1988; Stenzel, 2006). Einige Aspekte der speziellen Anforderungen an Estrich bzw. der Beanspruchung des Estrichs bleiben bei diesem Bemessungskonzept jedoch unberücksichtigt.



(a) Qualitative Verformungen beim Steifemodulverfahren (Vogt, 2018)      (b) Qualitative Verformung beim Bettungsmodulverfahren

Abbildung 2.4.: Gegenüberstellung der klassischen Modellvorstellungen zur Abbildung einer Baugrundsetzung

Das Bettungsmodulverfahren ist eines von zwei im Straßen- und Grundbau zur Berechnung der Schnittgrößen in elastisch gegründeten Biegebalken oder -platten verwendeten Verfahren. Das andere ist das Steifemodulverfahren. Die Bettungsmodultheorie beruht auf der Annahme, dass die Reaktionen  $\sigma_B$  im Untergrund vertikal und proportional den Einsenkungen  $s$  des aufliegenden Bauwerks, zum Beispiel der aufliegenden Platte, sind, daher gilt mit  $C$  als Proportionalitätskonstante

$$\sigma_B = C \cdot s. \tag{2.3}$$

Der Baugrund wird damit als System unabhängiger, linear elastischer Einzelfedern idealisiert. Im Gegensatz dazu wird beim Steifemodulverfahren der Boden als linear elastischer, isotroper Halbraum definiert, also als System gekoppelter Federn. Die Steifigkeit des Baugrunds wird hier über den Steifemodul  $E_s$  berücksichtigt, der sich als Ergebnis eines Oedometerversuchs, abhängig von der Querkontraktion und dem Elastizitätsmodul, als reine Bodenkenngröße ergibt. Der Bettungsmodul  $C$  hingegen ist keine reine Untergrundkenngröße, sondern als Ergebnis einer Set-



zungsberechnung oder eines Lastplattendruckversuchs unter anderem von Form und Größe des Fundaments abhängig (Vogt, 2018).

Das Bettungsmodulverfahren liefert im Gegensatz zum Steifemodulverfahren lediglich für die Schnittgrößen der Platte realitätsnahe Ergebnisse, jedoch nicht für die Setzungen des Baugrunds. Beim Steifemodulverfahren wird der Einfluss aus benachbartem Baugrund bei der Setzung berücksichtigt (Setzungsmulde, siehe Abbildung 2.4), im Fall des Bettungsmodulverfahrens ergäbe sich ein Setzungsgraben, bei dem nur der Boden direkt unterhalb des Fundaments nachgibt. Nach Manns und Zeus (1980) lässt sich die Modellvorstellung des elastisch isotropen Halbraums für Boden nicht auf eine Dämmschicht vergleichsweise begrenzter Dicke auf steifer Unterlage übertragen, daher wählten Manns und Zeus (1980) für ihre Berechnungen Ansätze basierend auf dem Bettungsmodulverfahren. Diese von Westergaard (1926) entwickelten Gleichungen lauten bei

Einzellast in Plattenmitte

$$\sigma_m = \frac{0.275 \cdot Q}{h^2} \cdot (1 + \mu) \cdot \left[ \lg \left( \frac{E \cdot h^3}{KS \cdot b^4} \right) - 0.436 \right] \quad [\text{N/mm}^2] \quad (2.4)$$

Einzellast am Plattenrand

$$\sigma_R = \frac{0.529 \cdot Q}{h^2} \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \left[ \lg \left( \frac{E \cdot h^3}{KS \cdot b^4} \right) - 1.08 \right] \quad [\text{N/mm}^2] \quad (2.5)$$

Einzellast in Plattenecke

$$\sigma_E = \frac{3 \cdot Q}{h^2} \cdot \left[ 1 - \left( l \cdot a \cdot \sqrt{2} \right)^1 \cdot .2 \right] \quad [\text{N/mm}^2] \quad (2.6)$$

mit

$Q$  = Last in MN

$h$  = Dicke des Estrichs in m

$E$  = Elastizitätsmodul des Estrichs = 20000 N/mm<sup>2</sup>

$\mu$  = Querdehnzahl = 0.2

$a$  = Belastungskreishalbmesser in m

$b = \sqrt{1.6 \cdot a^2 + h^2} - 0.675 \cdot h$  für  $a < 1.724 \cdot h$  in m

$b = a$  für  $a > 1.724 \cdot h$  in m

$KS$  = Bettungszahl MN/m<sup>3</sup> =  $\frac{1.75}{d_L - d_B}$

Sie dienen der Bestimmung der Biegezugspannung in einem Estrich (vgl. Anhang A für Gleichungen zur Bestimmung der Einsenkung eines schwimmenden Estrichs (Manns und Zeus, 1980)) und

basieren auf der vereinfachenden Annahme eines konstanten und von der Größe der Einsenkung unabhängigen Bettungsmoduls. Als Bettungsmodul wird hier die aus der Zusammendrückbarkeit abgeleitete Bettungszahl des Dämmstoffs eingesetzt. Manns und Zeus (1980) vergleichen Ergebnisse der Westergaard-Formeln mit Versuchsergebnissen für die drei Lastfälle Einzellast in Plattenmitte, am Plattenrand und an einer Plattenecke, gemessen an 4×4 m Estrichplatten auf zwei unterschiedlichen Dämmstoffaufbauten von 80 mm Dicke, wobei die Einzellast von 1 kN jeweils auf einer Kreis- bzw. Halbkreisfläche mit Radius 25 mm verteilt ist. Dies wird von Manns und Zeus (1980) als das für den Wohnungsbau maßgebende Einzellastfall-Niveau identifiziert.

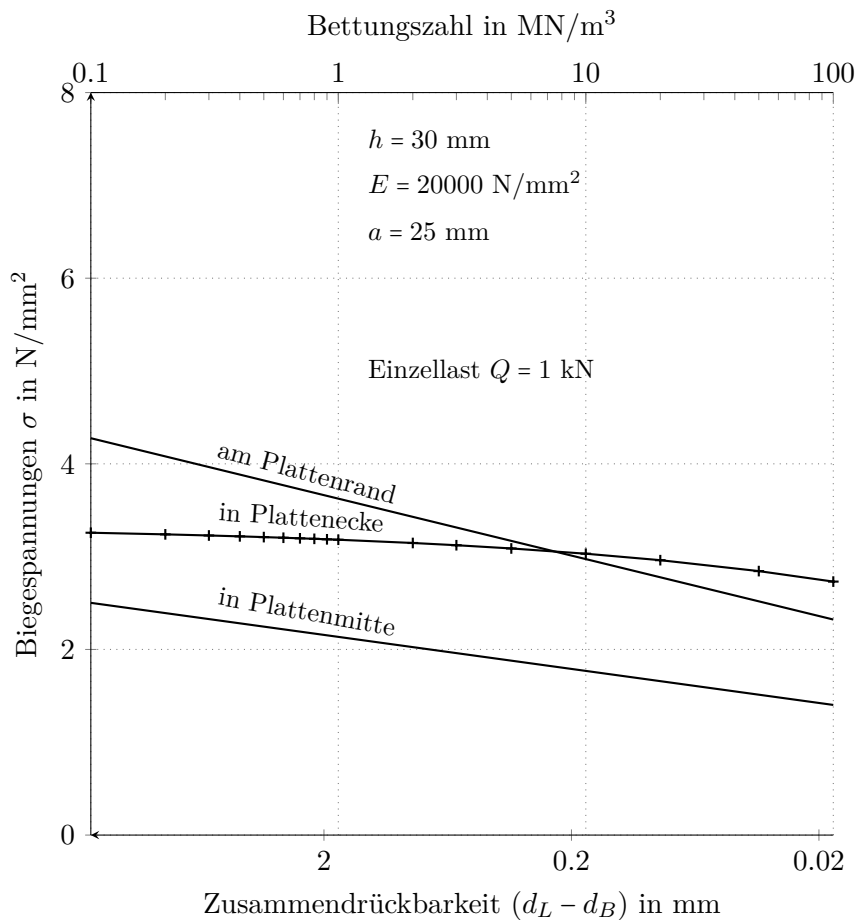


Abbildung 2.5.: Biegespannungen in einem Estrich der Dicke  $h = 30 \text{ mm}$  unter einer Einzellast von  $1 \text{ kN}$  in Abhängigkeit von der Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht (Manns und Zeus, 1980)

Trotz der genannten Vereinfachungen hinsichtlich der Modellvorstellung lieferte die Untersuchung gute Übereinstimmungen zwischen Spannungsgleichung und Versuchsergebnis für die maßgeblichen Lastfälle Plattenrand und -ecke. Für den als maßgebend identifizierten Lastfall Einzellast am Plattenrand ergaben sich an der Plattenunterseite die maximalen Zugspannungen.

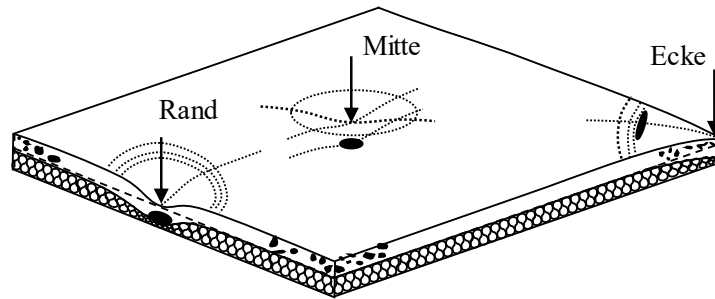


Abbildung 2.6.: Visualisierung der betrachteten Lastfälle und des Orts der maximalen Spannung nach Manns und Zeus (1980): Einzellast in Plattenmitte ( $\sigma_{\max}$  an der Unterseite), am Plattenrand ( $\sigma_{\max}$  an der Unterseite), an der Plattenecke ( $\sigma_{\max}$  an der Oberseite) (Schießl und Wiegrink, 2005)

Beim Lastfall Plattenecke sind die gemessenen Dehnungen bzw. entsprechend daraus abgeleiteten Spannungen unter 1 kN-Einzellast für den weicheren Dämmstoff geringfügig kleiner, für den steiferen ähnlich zum Randlastfall, allerdings ist die Bruchlast etwa halb so groß wie am Plattenrand. Die Maximalspannungen ergeben sich für den Ecklastfall an der Plattenoberseite, für den Randlastfall an der Unterseite (vgl. Abbildung 2.6).

Als Ergebnis der Untersuchungen geben Manns und Zeus (1980) u.a. die in Abbildung 2.5 und Abbildung 2.7 dargestellten Diagramme an. In Abbildung 2.5 ist eine Auswertung der Spannungsgleichungen für die drei Lastfälle dargestellt: Nur bei sehr harten Dämmstoffunterlagen (d. h. bei sehr geringer Zusammendrückbarkeit) wird der Lastfall Plattenecke hier maßgebend. Der Lastfall Plattenmitte ist in der Regel von untergeordneter Bedeutung. In Abbildung 2.7 haben Manns und Zeus (1980) ein Nomogramm entwickelt, welches in Abhängigkeit der damaligen Biegezugfestigkeitsklassen aufgetragen über der Zusammendrückbarkeit (unten) bzw. der Bettungszahl (oben) die notwendige Estrichdicke für eine Einzellast am Plattenrand von 1 kN anzeigt. Mit abnehmender Zusammendrückbarkeit und zunehmender Estrichdicke bzw. -steifigkeit nehmen die Biegespannungen ab. Die Dicke der Dämmschicht und der Elastizitätsmodul haben im Gegensatz zur Größe der Lasteinleitungsfläche rechnerisch einen geringeren Einfluss. (Aurnhammer, 2008; Schnell, 1983; Manns und Zeus, 1980)

Was diese Modellvorstellung allerdings nicht angemessen berücksichtigen kann, ist die Schüsselbildung, die infolge des Austrocknungsprozesses bei Estrich häufig auftritt. In den Versuchen wurde diese sogar explizit ausgeschlossen, indem ein verkleinerter Plattenbereich, der kein Abheben vom Dämmstoff zeigte, untersucht wurde. Die Schüsselung entspricht einer Vorverformung bzw. Vorbelastung infolge Zwang für den maßgebenden Bemessungslastfall, sodass für eine Untersuchung des Einflusses dieser Schüsselung grundsätzlich ein genaueres Verfahren notwendig

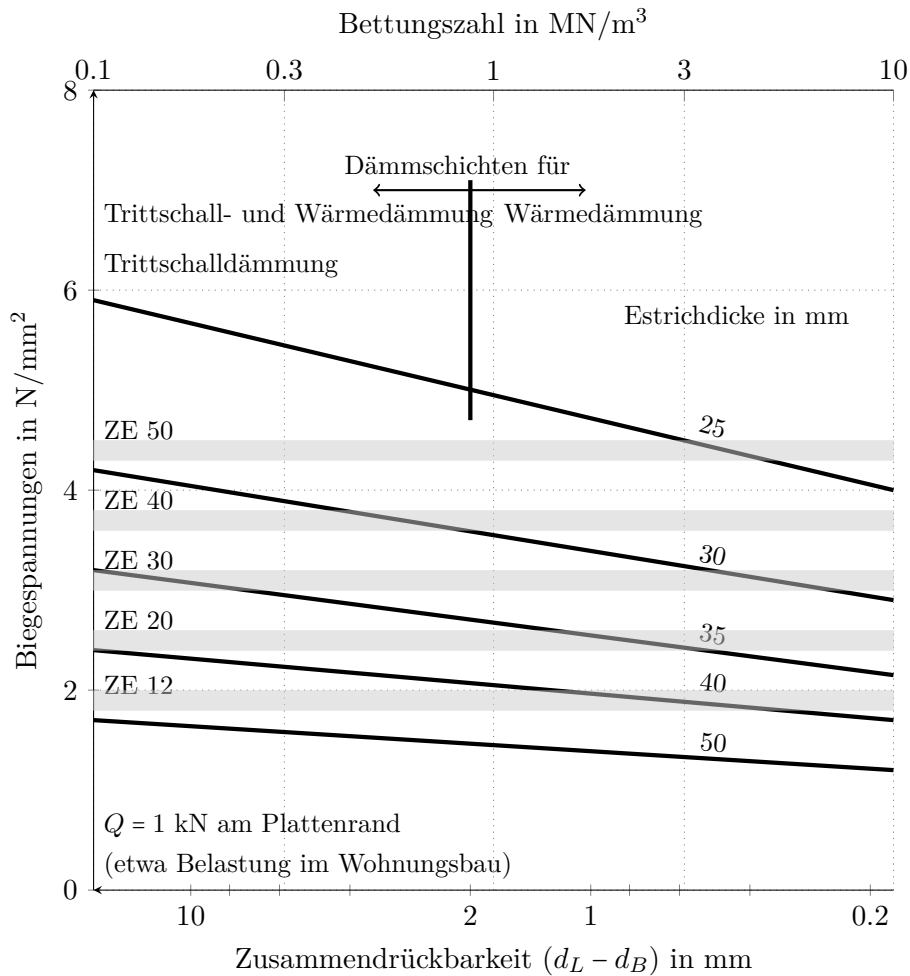


Abbildung 2.7.: Erforderliche Dicke von Zementestrichen in Abhängigkeit von der Zusammendrückbarkeit der Dämmschicht und der Festigkeitsklasse ZE (nach Manns und Zeus (1980) mit  $\sigma_B - \sigma_L = 1.75$  kPa; (Aurnhammer, 2008)

ist. Auch wird im beschriebenen Bemessungsansatz ein Einfluss der Mehrlagigkeit und der unterschiedlichen Eigenschaften des Estrichs über die Dicke nicht berücksichtigt. Zementestrich weist wie bereits im vorangegangenen Kapitel erläutert an der Unterseite meist ein haufwerksporiges Gefüge auf, insbesondere verstärkt durch eine schwierigere Verdichtung bei schwimmender Verlegeart, sodass dieser Bereich weniger zur Gesamtfestigkeit beiträgt.

Die zuletzt 2021 eingeführten Änderungen in DIN 18560-1:2021 beziehen sich vor allem auf die Einführung von Schwindklassen im Hinblick auf die „Dimensionsstabilität“ des Estrichs. Die Bestimmung der Dimensionsstabilität (d.h. des Schwindens und Quellens) wird in DIN EN 13892-9:2018 geregelt, wobei dieser Teil der Norm 2018 neu eingeführt wurde. Die Änderungen in DIN 18560-1:2021 sind möglicherweise eine Reaktion darauf und erkennen so erstmalig den Schwindeinfluss bei der Bemessung von Estrich normativ an. In DIN 18560-1:2021 wird festge-

stellt, dass das Schwindverhalten maßgeblichen Einfluss auf die Rissgefahr bzw. auf die Verformungen in Rand- und Fugenbereichen hat. In Teil 2 der Norm, der die Bemessung von Estrichen auf Dämmschichten behandelt, wurden für Zement- und Magnesia-Estriche zusätzliche, höhere Festigkeitsklassen und höhere Nenndicken eingeführt, deren Anwendbarkeit jedoch an die Einhaltung der Schwindklasse geknüpft ist.

Tabelle 2.3.: Auszug aus DIN 18560-1:2021: Tabelle 4, Teil 1 – Schwindklassen für Estriche

Schwindklasse	Dimensionsstabilität DL	Beschreibung
	mm/m	
SW3	$\Delta L \geq 0.5$	normal
SW2	$0.2 \leq \Delta L < 0.5$	schwindreduziert
SW1	$\Delta L < 0.2$	schwindarm
SW0	$\Delta S > 0$	quellend
Dabei ist $\Delta L$ Schwindmaß (mm/m) $\Delta S$ Quellmaß (mm/m)		

Zusätzlich zur beschriebenen normativen Regelung gibt es Merkblätter der Deutschen Naturstein Akademie (DENAK), die in Teil 2 ihrer „Bemessung von Bodenkonstruktionen“ Nomogramme zur Bemessung der Lastverteilungsschicht z. B. in Form von schwimmendem Estrich angibt (DENAK-Merkblatt 8-2, 2021). In Abbildung 2.8 ist beispielhaft eines dieser Nomogramme dargestellt, in denen für eine bestimmte Aufstandsfläche (zwischen  $\geq 25$  und  $\geq 2500\text{cm}^2$  werden sechs Diagramme abgebildet) die Belastung  $F$  [kN] abhängig von der mittleren Biegezugfestigkeit, der Estrichdicke  $d_E$  und der Bettungsziffer  $k_v$  abgelesen werden kann. Obwohl in Teil 1 des Merkblatts in den allgemeinen Anforderungen an die Bodenkonstruktion auch auf die Belastung durch Temperatur und Schwinden eingegangen wird, findet dies in den Nomogrammen keine erkennbare Berücksichtigung. Stattdessen wird in einem gesonderten Abschnitt ein Diagramm zur Abschätzung der Biegespannungen infolge Schwinden bzw. Aufschüsseln in Abhängigkeit eines Maßes  $\Delta\varepsilon$  für „ungleiches Schwinden“ zwischen Ober- und Unterseite der Platte angegeben (vgl. Abb. A.1 im Anhang). Für eine rechnerische Bemessung wird Gleichung (2.5) auf Basis der Untersuchungen von Manns und Zeus (1980) angegeben. Diese entspricht dem Lastfall Einzellast am Plattenrand.

Die Formeln nach Westergaard werden daneben auch für die Bemessung von Betonböden herangezogen (Lohmeyer und Ebeling, 1988). Bemerkenswert ist dabei allerdings, dass bei der Abschätzung des maximalen Biegemoments für die drei Lastfälle der Ecklastfall den größten Momentenbeiwert  $\lambda$  bezogen auf den Referenzlastfall Plattenmitte zugewiesen bekommt. Das geringste Moment entsteht nach Lohmeyer und Ebeling (1988) für den Lastfall in Plattenmitte, an der Plattenecke entsteht ein etwas mehr als doppelt so großes ( $\lambda_e = 2.1$ ) und für den Rand

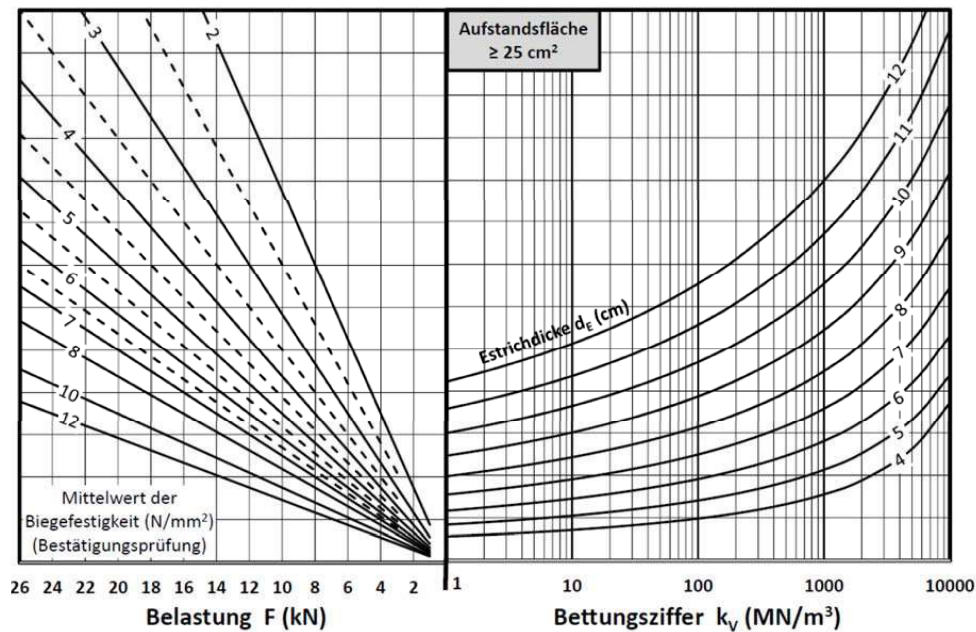


Abbildung 2.8.: Nomogramm aus dem DENAK-Merkblatt für eine Last-Aufstandsfläche  $\geq 25\text{cm}^2$  (DENAK-Merkblatt 8-2, 2021)

ergibt sich ein Wert knapp darunter ( $\lambda_r = 1.8$ ) für

$$m_{i,Q} = \lambda_i \cdot k_Q \cdot m_{m,Q} = \lambda \cdot k_Q \cdot \lambda_m \cdot Q_d, \quad (2.7)$$

mit Biegemoment  $m_{i,Q}$  für eine Einzellast  $Q_d$ , Momentenbeiwerte  $\lambda_i$  mit  $i = \{m, r, e\}$  für Mitte, Rand und Ecke und Lastfaktor  $k_Q$  abhängig von Fugenarten und Verzahnung. Bei diesem Berechnungsansatz besteht außerdem die Möglichkeit, den Einfluss zweier zusätzlicher Einzellasten im Sinne einer Fahrbeanspruchung zu berücksichtigen. Im Detail soll auf diesen Ansatz hier nicht weiter eingegangen werden. Die Tatsache, dass sowohl bei der Prüfung von Estrichplatten in der Praxis als auch bei diesem Berechnungsansatz der Ecklastfall als maßgebend betrachtet wird, motiviert eine Überprüfung des Randlastfalls als maßgebenden Bemessungslastfall für die Estrichbemessung.

#### 2.1.4. Stand der Forschung: Numerische Modellierung

Die Zahl an Veröffentlichungen, die sich mit Estrich, insbesondere Zementestrich beschäftigen, ist vergleichsweise klein. Neben den genannten Untersuchungen von Manns und Zeus (1980) und Schnell (1983) sind u. a. Untersuchungen zum Schüsselverhalten von Schneider und Pleyers (2003) im Hinblick auf die Effektivität von Nachbehandlungsmaßnahmen zu nennen (wie Imprägnierung, Folienabdeckung). Konkret wurden bei Manns und Zeus (1980) quadratische Platten

(4 × 4 m) auf unterschiedlich steifer Bettung gelagert und mit Einzellasten in unterschiedlicher Laststellung belastet. Gemessen wurden Dehnung und Einsenkung der Platte, um die Ergebnisse anschließend wie beschrieben zur Überprüfung von Handrechenformeln nach Westergaard zu verwenden. Schnell (1983) untersuchte gebettete Estrichplatten verschiedener Estricharten (etwa 3,70 m × 4,90 m und 4 m × 4 m) unter unterschiedlichen Witterungsbedingungen, zum Teil im Rahmen echter Bauvorhaben, zum Teil in Versuchseinrichtungen. Dabei wurden u. a. Anzahl und Länge der entstehenden Risse sowie die Einsenkungen unter verschiedenen Lasten gemessen. Aus nachträglich entnommenen Proben wurden Rohdichte und Festigkeiten bestimmt. In verschiedenen Forschungsberichten des IBF (u. a. Müller, 2017) wurden das Schüsselverhalten und dessen Einflussfaktoren empirisch dokumentiert. Dabei wurde von Müller (2017) neben den Festigkeits- und Feuchteigenschaften sowie der Zusammensetzung die vertikale Verformung während des Austrocknens vor und nach der Verlegung verschiedener Bodenbeläge über die Zeit gemessen. Die Auswirkungen auf den Belag werden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

Zum Teil sind experimentelle Auswertungen dieser Art geeignet für eine numerische Simulation, zum Teil fehlen jedoch exakte Angaben z. B. zur tatsächlich wirksamen Dämmsteifigkeit. In anderen Veröffentlichungen gibt es bereits Ansätze, zumindest die Zwangsspannungen während des Erhärtungsvorgangs numerisch zu erfassen. In der Literatur steht hier jedoch der Werkstoff (Stahl-)Beton stärker im Fokus, wobei die Erkenntnisse zur Modellierung auch für die Simulation von Zementestrich herangezogen werden könnten. Zur Berechnung hydrationsbedingter Zwangsspannungen mit Blick auf die Rissbreitenbegrenzung wurde in den letzten Jahren vermehrt geforscht (Schlicke und Viet Tue, 2016b; Nietner, Schlicke und Viet Tue, 2011). Untersuchungen von Nietner, Schlicke und Viet Tue (2011) zur Zwangsbeanspruchung erhärtender Massenbetonbauteile befassten sich mit dem Hydrationsprozess von Beton, wobei ein von Nietner (2009) entwickeltes Finite-Elemente-Programm zur Berechnung des gekoppelten Wärme- und Feuchtetransports (Nietner, 2019), u. a. auf Basis von Berechnungsmodellen von Künzel (1994) auch bereits auf Zementestrich angewendet wurde. Wie in Kapitel 3.2.1 noch näher erläutert wird, findet dieses Programm indirekt auch in dieser Arbeit zur Abschätzung der Schwind- und Hydrations-Einflüsse auf das Verformungsverhalten in den durchgeführten Versuchen Anwendung.

Für Estrich gab es einige Veröffentlichungen zur numerischen Simulation, wobei auch hier die Ursachen des Schüsselverhaltens und der chemischen Einflüsse beim Hydrationsprozess im Fokus standen. Ambroise et al. (2002), Georgin et al. (2008) und Jaafri et al. (2019) haben in den vergangenen Jahren das Schüsselverhalten vor allem von Calciumsulfatestrich numerisch untersucht. Ambroise et al. (2002) fanden bei Finite-Elemente-Simulation des Aufschüsseln eine gute Übereinstimmung der vertikalen Verformung mit den durchgeführten Laborversuchen, Georgin et al. (2008) führten ähnliche Untersuchungen für Zement- und Calciumsulfatestrichbinder

durch. Dabei bestätigte sich, dass Calciumsulfatestrich ein deutlich geringeres Schwind- bzw. Schüsselrisiko besitzt als Zementestrich. Jaafri et al. (2019) nutzten berührungslose Messmethoden zur Erfassung des Schüssels verschiedener Estrichmischungen, was ein besseres Verständnis der verschiedenen chemischen Einflüsse (relative Feuchte, Porosität, Hydratationsgrad) auf das Schüsselverhalten liefert. Das numerische Modell zeigte sehr gute Übereinstimmungen mit dem experimentell gemessenen Verhalten, was zur Identifikation viskoelastischer Parameter beiträgt.

Untersuchungen zum Rissverhalten, vor allem der Wechselwirkung von Aufschüsseln und Dämmstofflagerung jenseits empirischer Versuche fehlen weitgehend. Schießl und Wiegrink (2005) untersuchten Calciumsulfatestrich hinsichtlich des Einflusses einspringender Ecken auf die Rissentwicklung, eine numerische Untersuchung des Rissverhaltens auf Basis nichtlinearer Rissmodelle wurde jedoch nicht durchgeführt. Wiegrink (2002) entwickelte Nomogramme zur Bestimmung der Trocknungszeit und Ermittlung der resultierenden Spannungen im Eckbereich infolge des Aufschüssels. Eine numerische Untersuchung unter Verwendung nichtlinearer Materialgesetze und der möglichen exakteren Abschätzung der Rissbildung wird im Ausblick angedeutet.

Veröffentlichungen zur numerischen Rissmodellierung von Beton und Stahlfaserbeton gibt es allerdings in großem Umfang, u.a. auf Basis der FE-Methode (Hofstetter, 2006; V. Cervenka, J. Cervenka und Kadlec, 2018; Feenstra und de Borst, 1995; Götde, 2013; Thomée, 2005). Die Problematik der Netzabhängigkeit verschmierter Rissmodelle spielt für bewehrte Bauteile (z. B. Stahlbeton) in vielen Fällen eine untergeordnete Rolle, da ab einem bestimmten Zeitpunkt während der Entfestigung die Bewehrung aktiviert wird. Die exakte Abbildung des Betonrissverhaltens hat in diesem Fall eine untergeordnete Relevanz. Der Einfluss des Betons auf das Gesamttragverhalten nimmt immer weiter ab, sodass eine Netzabhängigkeit auf die Ergebnisse kaum Einfluss hat, wie viele Veröffentlichungen zu diesem Thema zeigen, bei denen sich die dargestellte Problematik nicht näher thematisiert wird (z. B. V. Cervenka, J. Cervenka und Kadlec, 2018; Feenstra und de Borst, 1995).

Im Fall von Stahlfaserbeton spielt das Betontragverhalten eine größere Rolle, da die Stahlfasern zum Tragverhalten des Bauteils anders beitragen als die Bewehrung und das Verhalten eher reinem Beton mit einem duktileren Nachbruchverhalten ähnelt. Auch hier sieht man an den Entfestigungskurven in experimentellen Versuchen, dass der abfallende Ast aufgrund der Wirkung der Stahlfasern nicht auf Null absinkt (Götde, 2013; Thomée, 2005). Eine Netzabhängigkeit in der Betonmodellierung würde die Ergebnisse allerdings stärker beeinflussen und unter Umständen unbrauchbar machen (Götde, 2013). Bei unbewehrten Bauteilen, so auch bei z. B. schwimmendem Zementestrich, ist dieser Einfluss umso extremer. Auf diese Rissmodelle soll im folgenden Kapitel näher eingegangen werden, nachdem zunächst eine grundlegende Einführung in den kontinuumsmechanischen Rahmen und die verwendeten numerischen Lösungsverfahren innerhalb der nichtlinearen FE-Methode gegeben wurde.



## **Fazit**

Zementestrich ist ein schwindanfälliger Baustoff, der als tragender Untergrund oder Aufnahmegrund für Bodenbeläge Anwendung findet. Schwimmend gelagert wirkt sich die schwindinduzierte Schüsselbildung auf das biegezug-geprägte Tragverhalten und die Platte-Dämmungs-Interaktion aus. Inwiefern dieses im Bemessungskonzept bislang unberücksichtigte Verhalten Einfluss auf die Nutzlast-induzierte Rissbildung hat, ist zu überprüfen. Dazu soll eine numerische Untersuchung der Einflüsse aus der Dämmstoff- und Estrichsteifigkeit sowie der Schüsselbildung erfolgen. Die Modellbildung für eine solche, in der Literatur bislang nicht vorhandene Simulation erfordert zunächst die Einführung in die Grundlagen der Rissmodellierung und die Wahl eines geeigneten Rissmodells auf Basis der für Beton bereits etablierten Ansätze.

## 2.2. Rissmodellierung im Finite-Elemente-Modell

Zur Erläuterung der verwendeten numerischen Modelle für die Berechnung der Rissbildung im Estrich wird auf Elemente der Kontinuumsmechanik zurückgegriffen. In einem für die Folgekapitel notwendigen Rahmen wird zunächst auf einige Definitionen eingegangen sowie grundlegend die Theorie der Finite-Elemente-Methode bei Berücksichtigung von Nichtlinearitäten erläutert. In der vorliegenden Problemstellung ist vor allem das Materialgesetz nichtlinear zu betrachten. Das verwendete Materialmodell und die dort eingehenden Parameter werden erläutert und führen schließlich auf die gewählte Rissmodellierung. In diesem Kapitel konzentrieren sich die Erläuterungen der zugrundeliegenden bruchmechanischen Ansätze auf die für diese Arbeit relevanten Aspekte. Die folgenden Kapitel basieren auf Wriggers (2001) und Pfister (2008).

### 2.2.1. Kontinuumsmechanischer Rahmen

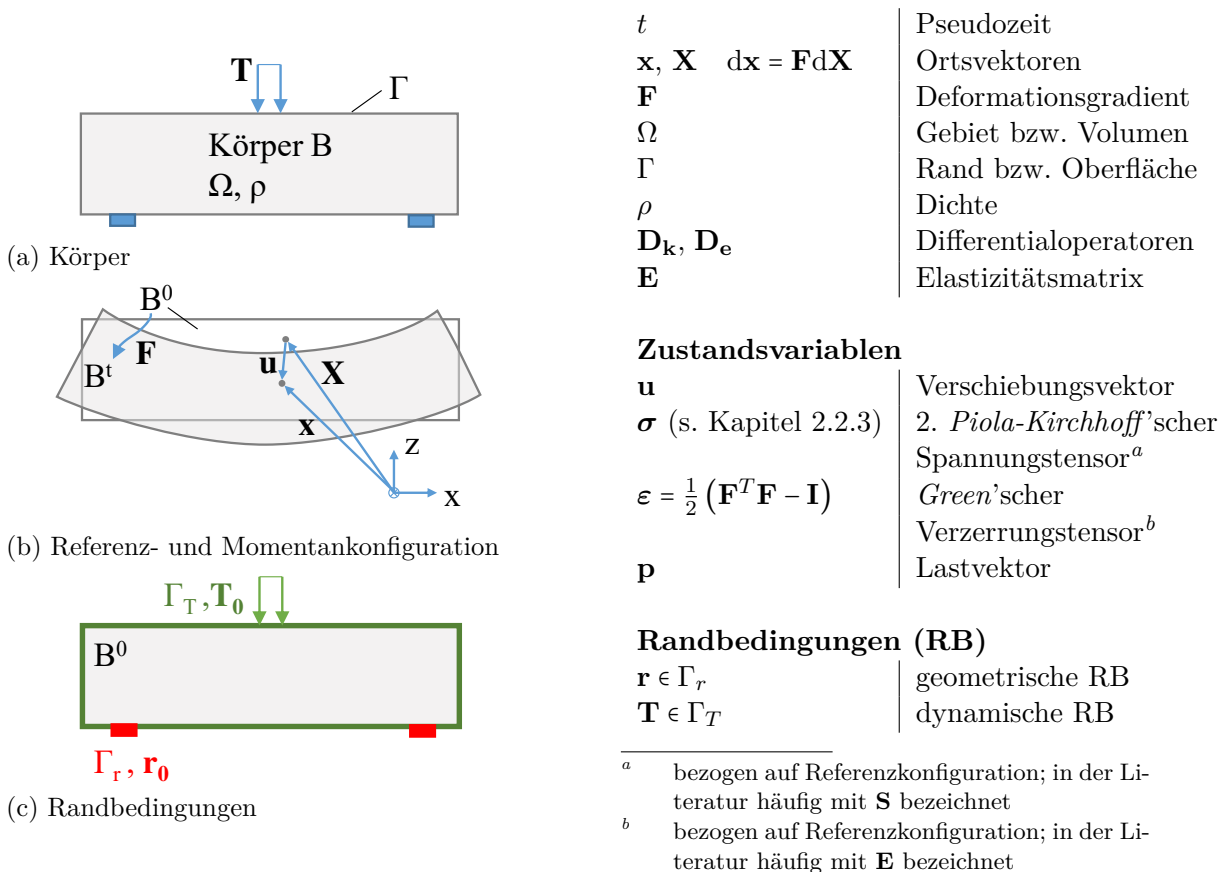


Abbildung 2.9.: Kontinuumsmechanischer Rahmen eines physikalischen Problems: a) Referenzkonfiguration des Körpers  $B$ , definiert auf dem Gebiet  $\Omega$  mit Rand  $\Gamma$ , b) Referenz- (hell,  $B^0, \mathbf{x}$ ) und Momentankonfiguration (grau,  $B^t, \mathbf{X}$ ) des Körpers infolge einer Deformation beschrieben durch  $\mathbf{F}$ , c) Geometrische (rot) und dynamische (grün) Randbedingungen

Die Kontinuumsmechanik liefert den Rahmen zur Beschreibung von Körperbewegungen im Raum, wenn diese eine gewisse Ausdehnung und Homogenität auch im Sinne ihres Verformungsverhaltens und der Spannungsgrößen aufweisen. In dem Fall kann der Körper vereinfachend auf der Makroebene betrachtet werden, ohne z. B. bei Verbundwerkstoffen einzelne Bestandteile wie Gesteinskörnung und Zementmatrix (Mesoebene) oder die kristalline Struktur (Mikroebene) zu betrachten. Ein Größtkorn von 8 mm wird bei Estrich in der Regel nicht überschritten, sodass ebenso wie bei Beton eine Betrachtung der Makroebene angemessen ist. Selbst im Falle einer Stahlfaserbewehrung wird aufgrund der zufälligen Verteilung der Stahlfasern in der Regel eine Betrachtung der Makroebene als ausreichend erachtet (Altenbach, 2018).

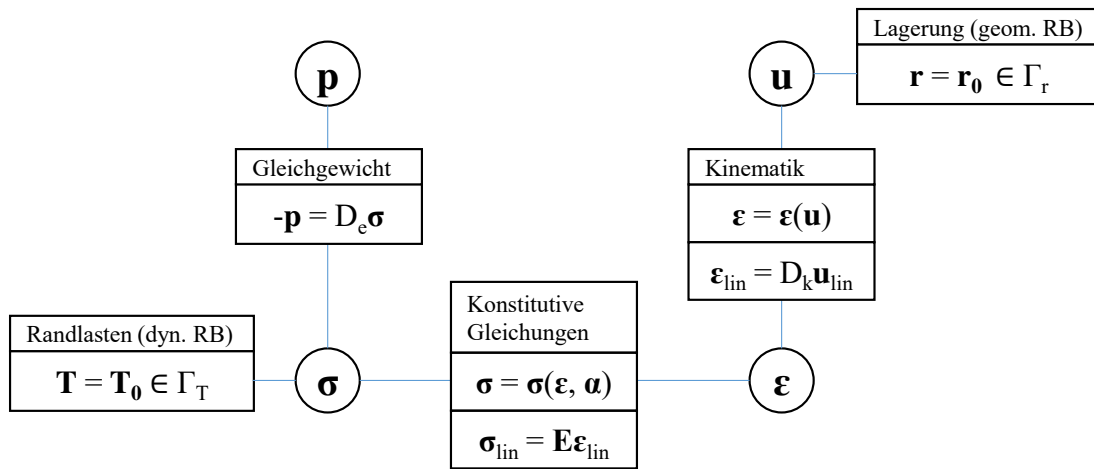


Abbildung 2.10.: Allgemeingültige Zusammenhänge zwischen inneren und äußeren Kraft- ( $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{p}$ ) bzw. Weggrößen ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{u}$ ) im Rahmen der Kontinuumsmechanik

Auf Basis dieser Betrachtungsweise werden Bauteile als Körper (begrenzt über ihre Oberfläche  $\Gamma$ , mit Volumen  $\Omega$  und Dichte  $\rho$ , siehe Abbildung 2.9) im kartesischen Koordinatensystem definiert, deren Bewegungen bzw. Verformungen im Raum nach *Lagrange*<sup>1</sup> bezogen auf die Referenzkonfiguration (Index 0) beschrieben werden (siehe Abbildung 2.9). Infolge der Lasten  $\mathbf{p}$  erfährt der Körper eine Zustandsänderung von seiner Referenz- in die Momentankonfiguration (Index t). Zur Beschreibung der Zustandsänderung werden die Verformungen, Verzerrungen und Spannungen in der Regel in Tensorvariablen  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  formuliert, mit deren Hilfe die physikalische Problemstellung in einem mathematischen Randwertproblem ausgedrückt werden kann. Dafür gelten die in Abbildung 2.10 zunächst für jede Problemstellung allgemeingültig dargestellten Zusammenhänge: Die äußere Belastungssituation  $\mathbf{p}$  ist bekannt und muss mit den inneren Kraftgrößen

<sup>1</sup> üblich für strukturmechanische Problemstellungen; Im Gegensatz dazu wird nach *Euler* die Momentankonfiguration (Index t) verfolgt. Diese Betrachtungsweise wird bei Problemstellungen in der Thermodynamik bevorzugt verwendet.

bzw. Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  im Gleichgewicht stehen. Die inneren Kraftgrößen stehen mit den inneren Weggrößen, den Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , über konstitutive Gleichungen in Beziehung. Die Kinematik definiert schließlich den Zusammenhang zwischen diesen inneren und den äußeren Weggrößen, den Verformungen  $\mathbf{u}$ . Bei einer Gleichgewichtsbetrachtung am verformten System und einem beliebigen, ggf. nichtlinearen Materialgesetz, bei dem die Belastungsgeschichte zu berücksichtigen ist (im folgenden durch die inneren Variablen  $\boldsymbol{\alpha}$  symbolisiert), ergibt sich ein System nichtlinearer Differentialgleichungen. Diese leitet sich aus den Beziehungen in Abbildung 2.10 her, wobei die äußere Belastungssituation den inneren, von der Verformung  $u$  abhängigen Kräften, gleichgesetzt wird:

$$-\mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{u}). \quad (2.8)$$

Im linear-elastischen Fall lässt sich bei Betrachtung des unverformten Zustands (Annahme kleiner Verformungen) ein System linearer, partieller (Navier-) Differentialgleichungen formulieren

$$-\mathbf{p} = \mathbf{D}_e \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_e \mathbf{E} \mathbf{D}_k \mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Diese theoretische Beschreibung ist für jeden Tragwerkstyp (Balken, Schale, etc.) möglich. Eine analytische Lösung dieser starken Form des Randwertproblems ist jedoch selbst im Linearen für die wenigsten praktischen Probleme bekannt. Aus diesem Grund werden numerische Näherungsverfahren angewendet, wie die Methode der finiten Elemente.

Diese nutzt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und die Bedingung, dass unter Ansatz einer beliebigen, infinitesimal kleinen virtuellen Verformungsänderung  $\delta \mathbf{u}$  die innere virtuelle Arbeit  $W_{\text{int}}$  der äußeren virtuellen Arbeit  $W_{\text{ext}}$  entspricht:

$$\delta W = \underbrace{\int_{\Omega^0} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^0}_{\delta W_{\text{int}}} - \underbrace{\left( \int_{\Omega^0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \, d\Omega^0 + \int_{\Gamma^0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \, d\Gamma^0 \right)}_{\delta W_{\text{ext}}} = 0. \quad (2.10)$$

Die virtuelle Verformungsänderung kann man sich als mathematische Test- oder Wichtungsfunktion vorstellen. Gleichung 2.10 stellt eine integrale und damit schwache Form des in Abbildung 2.10 beschriebenen Randwertproblems im betrachteten Gebiet dar. Das heißt, diese Formulierung liefert keine exakt analytische Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen in Abbildung 2.10 (starke Form des Gleichgewichts). Es wird nur in integraler Form gelöst und es lässt sich somit bei Diskretisierung des Systems in finite Elemente und Anwendung numerischer Algorithmen eine Näherungslösung des Randwertproblems ermitteln. Bei zunehmender Verfeinerung des Elementnetzes konvergiert der Verformungszustand gegen die wahre Lösung. Im Grenzfall unendlich kleiner Elemente würde sich auch hier die zur starken Form des Gleichgewichts korrespondierende exakte Lösung einstellen. Auf die Theorie der FE-Methode und relevante Algorithmen wird in Kapitel 2.2.2 für den nichtlinearen Fall genauer eingegangen, für detailliertere Ausführungen sei u. a. auf de Borst, Crisfield et al. (2012), Kuna (2010) und

Wriggers (2001) verwiesen.

Wie in Abbildung 2.10 bereits in Zusammenhang mit der Kinematik und den konstitutiven Gleichungen angedeutet, gibt es verschiedene Typen von Nichtlinearität, die sich nach Wriggers (2001) wie folgt einteilen lassen:

- Geometrische Nichtlinearität: große Verschiebungen und -verdrehungen (bei kleinen Verzerrungen)  $\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$
- Große Deformationen: große Verzerrungen<sup>2</sup>
- Physikalische Nichtlinearität: nichtlineares Werkstoffverhalten (nichtlinear-elastisch oder elastisch-plastisch)  $\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$
- Stabilitätsprobleme (Reaktion auf Imperfektionen)
  - geometrische Instabilität (Verzweigung (Knicken, Beulen), Durchschlagen)
  - Materialinstabilität (Einschnürung, Lokalisierung der Deformation (Riss))
- Nichtlineare Randbedingungen (Kontakt, Wärmeabstrahlung)
- Gekoppelte Probleme (Kopplung unterschiedlicher Feldprobleme, z. B. thermomechanische Kopplung beim Abbindeprozess von Beton)

Sind die konstitutiven Gleichungen aufgrund physikalischer Nichtlinearität oder die kinematischen Gleichungen infolge zu berücksichtigender großer Verformungen nichtlinear anzusetzen, sind weitergehende Ansätze zur Lösung des Randwertproblems erforderlich. Bei in dieser Arbeit betrachteter elasto-plastischer Materialformulierung hängt der Spannungszustand nichtlinear von den Verzerrungen bzw. den Verformungen ab und die Belastungsgeschichte muss mithilfe zusätzlicher innerer Variablen  $\boldsymbol{\alpha}$  berücksichtigt werden. Wie in Abbildung 2.10 dargestellt, lassen sich in diesem Fall die Zustandsgrößen nicht unmittelbar ineinander überführen.

Daneben spielen in dieser Arbeit auch Materialinstabilitäten bei der Betrachtung des Rissverhaltens eine Rolle. Auf die Verformungslokalisierung bei entfestigendem Materialverhalten wird in den Kapiteln 2.2.4 und 2.2.5 genauer eingegangen. Nichtlineare Einflüsse in den Randbedingungen, wie im Fall zweier in Berührung kommender Körper, müssen ebenfalls berücksichtigt werden. Ein solches Kontaktproblem entsteht in der vorliegenden Arbeit beim belastungsinduzierten Ablegen der aufgeschüsselten Ecke des Estrichs auf dem Dämmstoff. Auf die Modellierung dieses Kontakts wird in Kapitel 3.2.1 genauer eingegangen.

Die thermomechanische Entwicklung des Schüsselns im Zuge des Abbindeprozesses des Estrichs stellt einen für die Thematik dieser Arbeit relevanten Aspekt, aber auch ein für sich genommen komplexes Problem dar. Daher ist dieses Thema an anderer Stelle insbesondere für Beton, aber auch konkret Estrich, bereits Forschungsgegenstand (vgl. Nietner, Schlicke und Viet Tue, 2011;

---

<sup>2</sup> relevant bei gummiartigen Materialien, Umformprozessen von Metall; außerhalb des Rahmens dieser Arbeit

Schlicke und Viet Tue, 2013; Schlicke und Viet Tue, 2016a; Ambroise et al., 2002; Geogin et al., 2008). Der Fokus liegt hier dagegen auf der strukturellen Untersuchung an der bereits aufgeschüsselten Platte, ohne den Prozess des Aufschüsselns selbst im Detail zu simulieren. Auf die thermomechanischen Aspekte wird nicht im Detail eingegangen, sondern auf die genannte Literatur verwiesen.

### 2.2.2. FE-Methode: Lösung nichtlinearer statischer Probleme

Zur Lösung nichtlinearer statischer Probleme wird ein inkrementell-iterativer Ansatz verwendet. Wie in Abbildung 2.11 veranschaulicht, ist dafür die integrale, schwache Form in Gleichung (2.10), also das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PVV), der Ausgangspunkt.  $\lambda$  ist als skalarer Lastfaktor der betrachteten Last  $\mathbf{P}$  zu lesen.

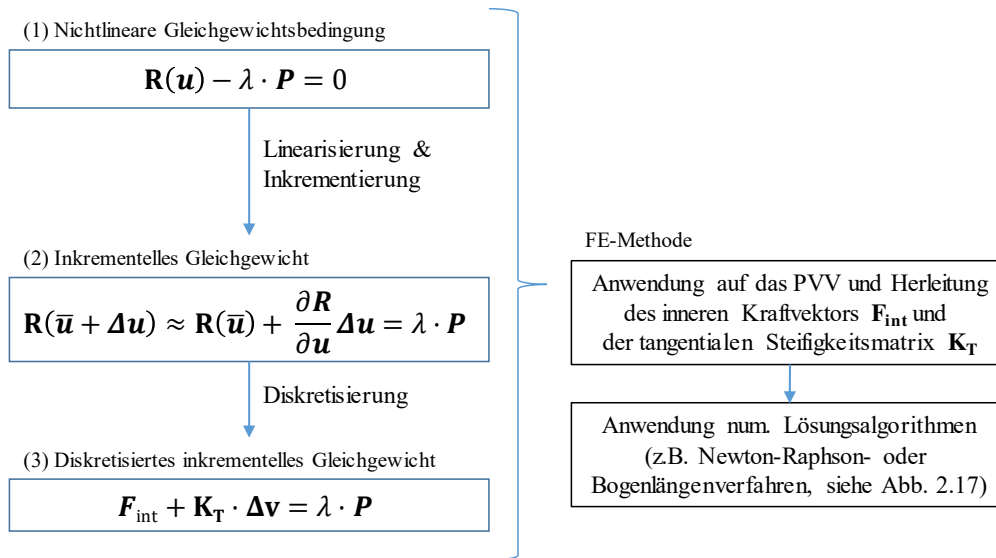


Abbildung 2.11.: Herleitung der Lösung des physikalischen Problems mithilfe der Finite-Elemente-Lösung

Zunächst wird Gleichung (2.10) inkrementiert, sodass der Verschiebungszustand durch den gesuchten Verschiebungszuwachs  $\Delta\mathbf{u}$  gegenüber dem Grundzustand  $\bar{\mathbf{u}}$  mit

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u} \quad (2.11)$$

ausgedrückt wird. Für eine nichtlineare Kinematik bzw. ein nichtlineares Materialgesetz lassen sich Verzerrungs- bzw. Spannungszustand nicht unmittelbar inkrementieren. Zur Herauslösung der Zuwachsgrößen werden Kinematik und Materialgesetz in einer Taylorreihe um den Grund-

zustand entwickelt. Die Linearisierung durch Abbruch der entsprechenden Taylorreihenentwicklung (siehe Abbildung 2.12a) liefert folgende, mit (\*) als Näherungslösung  $\delta W^*$  gekennzeichnete Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \delta W^*(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) &= \delta W(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) + \delta \Delta W(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \\
 &= \delta W(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) + \frac{\partial \delta W(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} : \Delta \mathbf{u} \\
 &= \left[ \int_{\Omega^0} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^0 - \left( \int_{\Omega^0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \, d\Omega^0 + \int_{\Gamma^0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \, d\Gamma^0 \right) \right] \\
 &\quad + \left[ \int_{\Omega^0} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^0 \right] = 0. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

$  \begin{aligned}  f(\mathbf{x}) &= f(\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}) \\  &= f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + R \\  &\approx f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \\  &= f(\bar{\mathbf{x}}) + \Delta f(\bar{\mathbf{x}}, \Delta \mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}) \\  \\  \Delta f(\bar{\mathbf{x}}, \Delta \mathbf{x}) &= \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \\  &= \left. \frac{d}{d\eta} [f(\bar{\mathbf{x}} + \eta \Delta \mathbf{x})] \right _{\eta=0}  \end{aligned}  $		$  \begin{aligned}  \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u} \\  \\  \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} : \Delta \mathbf{u} \\  &= \frac{1}{2} \left[ (1 + \text{grad}^T \bar{\mathbf{u}}) \text{grad}^T \Delta \mathbf{u} \right. \\  &\quad \left. + \text{grad}^T \Delta \mathbf{u} (1 + \text{grad} \bar{\mathbf{u}}) \right] \\  \\  \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\partial \delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} : \Delta \mathbf{u} \\  \\  \Delta \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}} : \Delta \mathbf{u} = \mathbf{C}_T : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\  &\quad (\text{s. Kapitel 2.2.3})  \end{aligned}  $
---	--	---

(a) Taylorreihenentwicklung einer Funktion  $f$

(b) Linearisierung der Zustandsgrößen

Abbildung 2.12.: Taylorreihenentwicklung und linearisierte Größen in Gleichung (2.12)

Bei Annahme konservativer Lasten, deren Richtung sich durch Änderung des Verformungszustands nicht ändert, ergeben sich die zugehörigen Terme der äußeren Arbeit im linearen Term zu Null, sodass in der zweiten Klammer nur Anteile aus der inneren Arbeit enthalten sind. Eine detaillierte Herleitung des Linearisierungsvorgangs findet sich z. B. bei Pfister (2008) oder Wriggers (2001). Hier sei lediglich auf die Zusammenstellung der linearisierten Zustandsgrößen und ihre Variationen in Abbildung 2.12b hingewiesen. Bei Bestimmung der Variationen werden nur die linearen Zuwächse variiert, der Grundzustand ist bekannt und steht damit fest. Bei  $C_T$  handelt es sich im Falle nichtlinearer konstitutiver Gleichungen um einen inkrementellen, tangentialen Materialtensor, der aufgrund der Pfadabhängigkeit des nichtlinearen Materialgesetzes auf Materialpunktebene zur Ermittlung der Grundzustandsspannungen aus den Grundzustandsverzerrungen integriert wird. Dies wird in Kapitel 2.2.3 bei der Beschreibung der betrachteten Materialmodelle aufgegriffen. Seine Definition ist vom betrachteten Materialmodell abhängig und er ist bei nichtlinearen Materialien im Allgemeinen iterativ zu bestimmen.

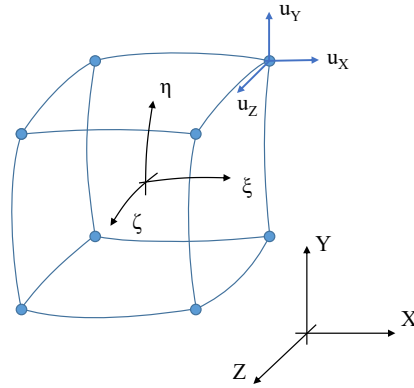


Abbildung 2.13.: Globales Koordinatensystem  $\mathbf{X}$ , lokales Elementeinheitskoordinatensystem  $\boldsymbol{\xi}$  und Knotenfreiheitsgrade  $u_x, u_y$  und  $u_z$  am Beispiel eines Kontinuumselements

Entsprechend Abbildung 2.11 ist diese linearisierte Form des PVV nun im Sinne der FE-Methode zu diskretisieren. Dafür wird der Körper in  $n_e$  finite Elemente eingeteilt, die diesen je nach Geometrie und Elementform näherungsweise erfassen. Den  $n_K$  Knoten dieser Elemente wird eine bestimmte Zahl  $n_{FG}$  von Freiheitsgraden zugeordnet (vgl. Abbildung 2.13, hier:  $n_{FG} = 3$  Verschiebungsfreiheitsgrade je Knoten zusammengefasst in  $\mathbf{v}$ ). Für den gesuchten Verschiebungszustand  $\mathbf{u}$  werden Ansatzfunktionen  $N(\boldsymbol{\xi})$  im Element-Einheitskoordinatensystem  $\boldsymbol{\xi}$  und in Abhängigkeit dieser Freiheitsgrade gewählt. Zur Berechnung nichtlinearer statischer Probleme hat sich die Familie der sog. isoparametrischen Elemente bewährt, sodass im Folgenden dieser Ansatz vorausgesetzt wird (Wriggers, 2001). In diesem Fall wird für die Geometrie und die Verschiebungen der gleiche funktionale Ansatz  $N_I(\boldsymbol{\xi})$  für die Knoten gewählt:

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{X}_e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_e} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_{k,I} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_k \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_e} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_{k,I} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_k = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{v} \quad (2.14)$$

$$d\mathbf{X} = \frac{d\mathbf{X}}{d\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{J} d\boldsymbol{\xi} \quad (2.15)$$

mit Jacobimatrix  $\mathbf{J}$  und  $\mathbf{X}_k, \mathbf{u}_k = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_K \cdot n_{FG}}$  und

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_e(\boldsymbol{\xi}) &: \mathbb{R}^{n_{\dim}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\xi}) &: \mathbb{R}^{n_{\dim}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\dim}}, \\ \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) &: \mathbb{R}^{n_{\dim}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_K \cdot n_{FG}}, \end{aligned}$$



wobei  $n$  die Dimension des betrachteten Raums und  $n_{\text{dim}}$  die Dimension des betrachteten Körpers darin erfasst. Für übliche Formfunktionen sei z. B. auf Wriggers (2001) verwiesen. Die im Folgenden eingeführten, mithilfe der genannten Formfunktionen diskretisierten Größen des Prinzips der virtuellen Verschiebungen werden anstelle der in der Kontinuumsmechanik üblicheren Tensor-Notation des vorangegangenen Kapitels (z. B. Skalarprodukt für Tensoren  $\delta\varepsilon : \sigma$ ) in Matrizen und Vektoren (Skalarprodukt:  $\delta\varepsilon^T \sigma$ ) ausgedrückt.

Die Zustandsgrößen können somit in Abhängigkeit der Formfunktionen  $\mathbf{N}(\xi)$  ausgedrückt werden, siehe Abbildung 2.14. Dies liefert für das Prinzip der virtuellen Verschiebung folgende Näherung:

$$\begin{aligned} \delta W_e^* = & \left[ \delta \mathbf{v}^T \int_{\Omega_e^0} \delta \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_e^0 - \left( \delta \mathbf{v}^T \int_{\Omega_e^0} \mathbf{N}^T \mathbf{p} \, d\Omega_e^0 + \delta \mathbf{v}^T \int_{\Gamma_e^0} \mathbf{N}^T \mathbf{T} \, d\Gamma_e^0 \right) \right] \\ & + \left[ \delta \mathbf{v}^T \int_{\Omega_e^0} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_e^0 \Delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}^T \int_{\Omega_e^0} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} \, d\Omega_e^0 \Delta \mathbf{v} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Verschiebungen $\mathbf{u} \quad \approx \mathbf{u}_e^*(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{v}$ $\delta \mathbf{u} \quad \approx \delta \mathbf{u}_e^*(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \delta \mathbf{v}$ $\Delta \mathbf{u} \quad \approx \Delta \mathbf{u}_e^*(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \Delta \mathbf{v}$		Verzerrungen $\varepsilon \quad \approx \varepsilon_e^*(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{v}$ $\delta \varepsilon \quad \approx \delta \varepsilon_e^*(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \delta \mathbf{v}$ $\Delta \varepsilon \quad \approx \Delta \varepsilon_e^*(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \Delta \mathbf{v}$ $\delta \Delta \varepsilon \quad \approx \delta \Delta \varepsilon_e^*(\xi) = \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}(\xi) \delta \mathbf{v}$ Spannungen $\Delta \boldsymbol{\sigma} \quad \approx \Delta \boldsymbol{\sigma}_e^*(\xi) = \mathbf{C}_T \mathbf{B}(\xi) \Delta \mathbf{v}$
---	--	--

Abbildung 2.14.: Diskretisierung der Zustandsgrößen und lokale Elementmatrizen und -vektoren

wobei  $d\Omega_e^0$  jeweils mithilfe einer Jacobi-Transformation in das lokale Elementkoordinatensystem  $\xi$  zu transformieren ist. Die Vektoren der Knotenfreiheitsgrade  $\mathbf{v}^T$  sind konstant und wurden daher ebenso wie ihre Variation  $\delta \mathbf{v}^T$  aus dem jeweiligen Integral herausgezogen. Da Gleichung (2.16) für jede Variation erfüllt sein muss bzw. die triviale Lösung für  $\delta \mathbf{v} = 0$  vernachlässigbar ist, können auch die Variationsterme gestrichen werden und es ergibt sich die lokale Gleichgewichtsbedingung für das einzelne Element zu

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{T,\sigma} + \mathbf{K}_{T,u})}_{\mathbf{K}_T} \Delta \mathbf{v} = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2.17)$$

wobei die Elementmatrizen und -vektoren wie folgt definiert sind:

$$\text{Vektor der inneren Kräfte:} \quad \mathbf{F}_{\text{int}} = \int_{\Omega_e^0} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e^0 \quad (2.18)$$

$$\text{Lastvektor:} \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{\Omega_e^0} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Omega_e^0 + \int_{\Gamma_e^0} \mathbf{N}^T \mathbf{T} d\Gamma_e^0 \quad (2.19)$$

$$\text{Geometrische oder Anfangsspannungsmatrix:} \quad \mathbf{K}_{\mathbf{T},\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\Omega_e^0} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e^0 \quad (2.20)$$

$$\text{Nichtlineare Steifigkeitsmatrix:} \quad \mathbf{K}_{\mathbf{T},\mathbf{u}} = \int_{\Omega_e^0} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{\mathbf{T}} \mathbf{B} d\Omega_e^0. \quad (2.21)$$

$\mathbf{B}$  wird als Verzerrungs-Verschiebungsmatrix bezeichnet und enthält die Formfunktionen der Verzerrungen. Die Materialmoduli  $\mathbf{C}_{\mathbf{T}}$  gehen im zugehörigen Steifigkeitsterm  $\mathbf{K}_{\mathbf{T},\boldsymbol{\sigma}}$  im Gegensatz zu den Grundzustandsverzerrungen nicht ein, weshalb die zugehörige Matrix auch als Anfangsspannungsmatrix bezeichnet wird. Die Terme für  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  und  $\mathbf{K}_{\mathbf{T},\mathbf{u}}$  finden sich prinzipiell auch im linearen Fall wieder, wobei für  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}_{\mathbf{T}}$  jeweils die linearen Pendanten  $\mathbf{B}_{\text{lin}}$  und  $\mathbf{E}$  eingesetzt würden.  $\mathbf{G}$  enthält Terme höherer Variationsordnung und würde bei linearer Kinematik verschwinden. Für eine detaillierte Herleitung der Elementmatrizen sei z. B. auf Wriggers (2001) verwiesen.

### Lösungsalgorithmen

Zur numerischen Lösung des Randwertproblems können verschiedene inkrementell-iterative Algorithmen verwendet werden. In dieser Arbeit finden

- das Newton-Raphson-Verfahren (NR) sowie
- das Bogenlängenverfahren (BL)

Anwendung.

Das Newton-Raphson-Verfahren ist das Standard-Verfahren für nichtlineare Problemstellungen in der FE-Methode. Abbildung 2.15 zeigt den prinzipiellen Ablauf vereinfacht für den eindimensionalen Fall. Ausgangspunkt ist ein bekannter Grundzustand  $j-1$ , hier stehen die inneren Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{int},j-1}$  mit den äußeren  $\mathbf{F}_{\text{ext},j-1}$  im Gleichgewicht. Aufgrund eines Lastzuwachses  $\Delta \mathbf{P}_j$  gerät das System von der Gleichgewichtskurve ab und der nächste, zu  $\mathbf{F}_{\text{ext},j} = \mathbf{F}_{\text{ext},j-1} + \Delta \mathbf{P}_j$  korrespondierende Gleichgewichtszustand  $j$  muss iterativ durch Minimierung der Ungleichgewichtskräfte  $\mathbf{P}_{\mathbf{u}}$  bestimmt werden. Der zugehörige iterative Ablauf ist in Abbildung 2.16 dargestellt. Eingangswerte für die Iteration liefert ein Prädiktorschritt aus dem Grundzustand heraus. Aus dem hieraus ermittelten Verformungszuwachs lassen sich die tangentielle Steifigkeit  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$  und der Vektor der inneren Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  aktualisieren.

Dies geschieht auf Elementebene, wobei grundsätzlich die analytische Bestimmung der Element-

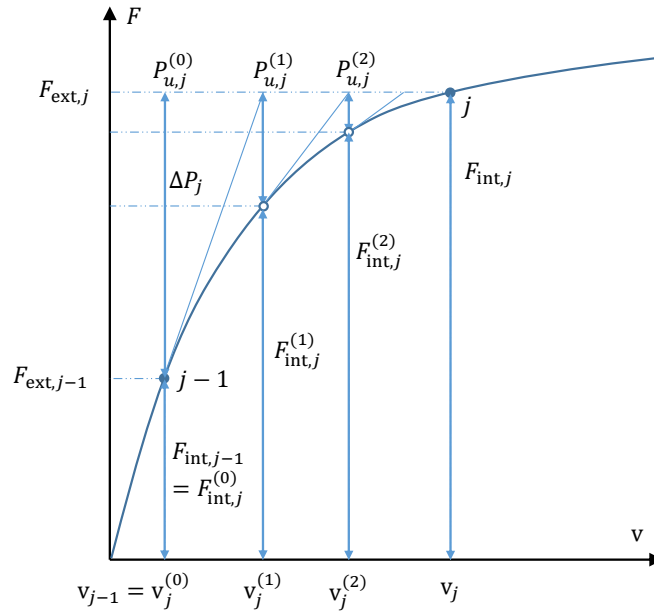


Abbildung 2.15.: Visualisierung des Iterationsablaufs innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens nach Abbildung 2.16 (Kuna, 2010)

steifigkeitsmatrizen und -vektoren nur in Sonderfällen möglich ist. Andernfalls sind numerische Integrationstechniken zur Lösung der Integrale über das jeweilige Element notwendig. Hier wird in der Regel die Gauß-Integration verwendet, d. h. die Integranden sind in diesem Fall an den für den jeweiligen Elementtyp definierten Gauß-Punkten auszuwerten. Analog zum linearen Fall werden die Matrizen auf Elementebene durch Integration über alle Integrationspunkte bestimmt. Die so ermittelten Komponenten auf Elementebene werden zu globalen Größen auf Systemebene assembliert und zur Bestimmung des Verschiebungszuwachses  $\Delta \mathbf{v}$  der einzelnen Freiheitsgrade verwendet. Bei Auftreten nichtlinearen Materialverhaltens ist innerhalb eines globalen Iterationsschritts zusätzlich lokales Gleichgewicht auf Materialpunktebene und damit in den einzelnen Gauß-Punkten mithilfe eines Return-Mapping-Algorithmus' zu bestimmen. Aus der bisherigen Belastungsgeschichte wird dazu iterativ der lokale Spannungszustand und der materialspezifische Tangentenmodul  $\mathbf{C}_T$  berechnet. Die Ermittlung hängt von der Definition des jeweiligen Materials ab, sodass hierauf in Kapitel 2.2.3 genauer eingegangen wird.

Der Nachteil des Newton-Raphson-Verfahrens besteht darin, dass Extrema im Kraft-Verschiebungs-Verlauf aufgrund der Kraftsteuerung des Verfahrens nicht überwunden werden können. Auch ein Vorzeichenwechsel in der Verschiebung ist denkbar, sodass auch das Einprägen der Beanspruchung als Verschiebung nicht uneingeschränkt funktioniert (vgl. Abbildung 2.17).

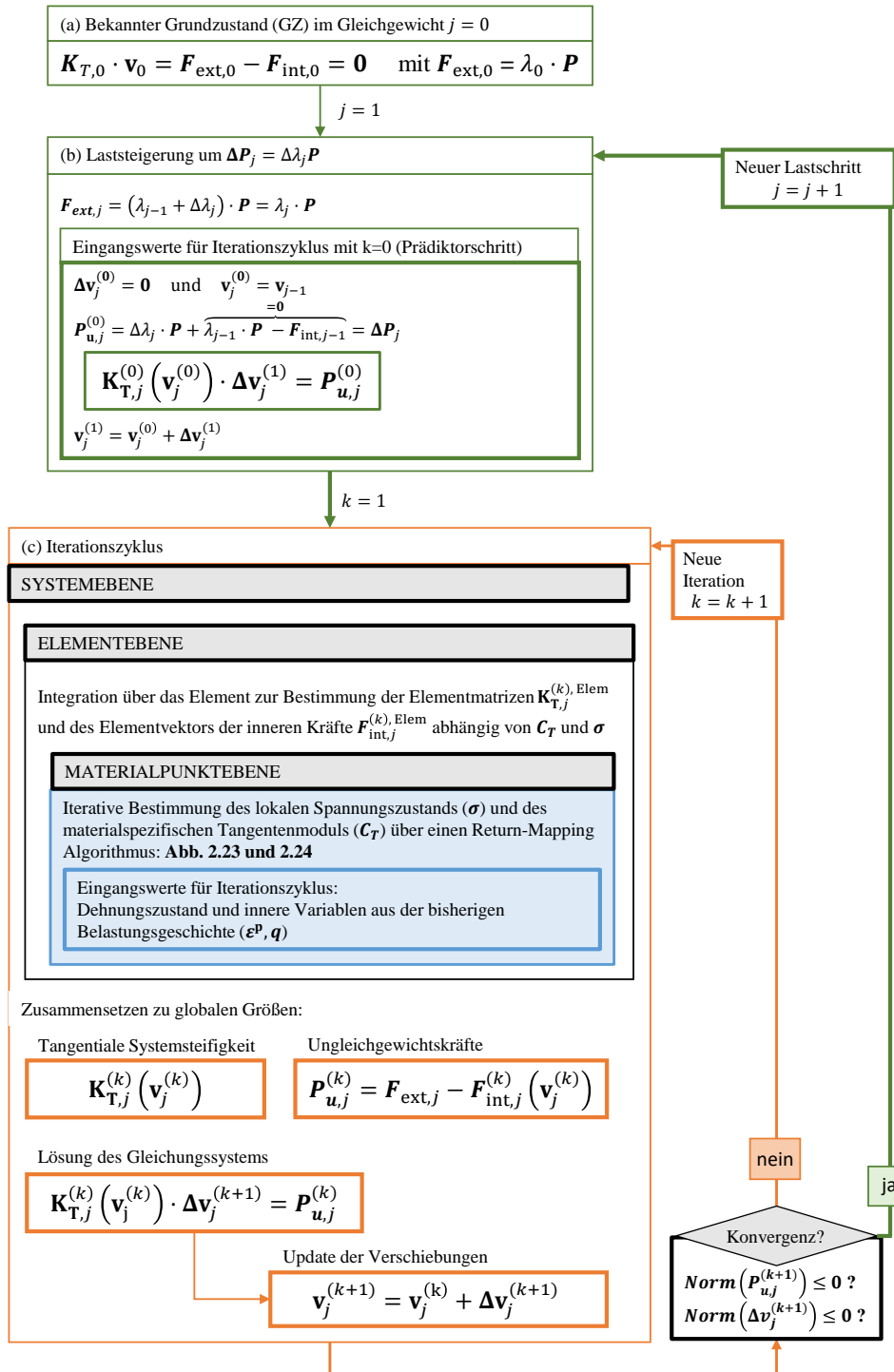


Abbildung 2.16.: Inkrementell-iterativer Newton-Raphson-Algorithmus auf System-Ebene mit Return-Mapping-Algorithmus auf Materialpunktebene

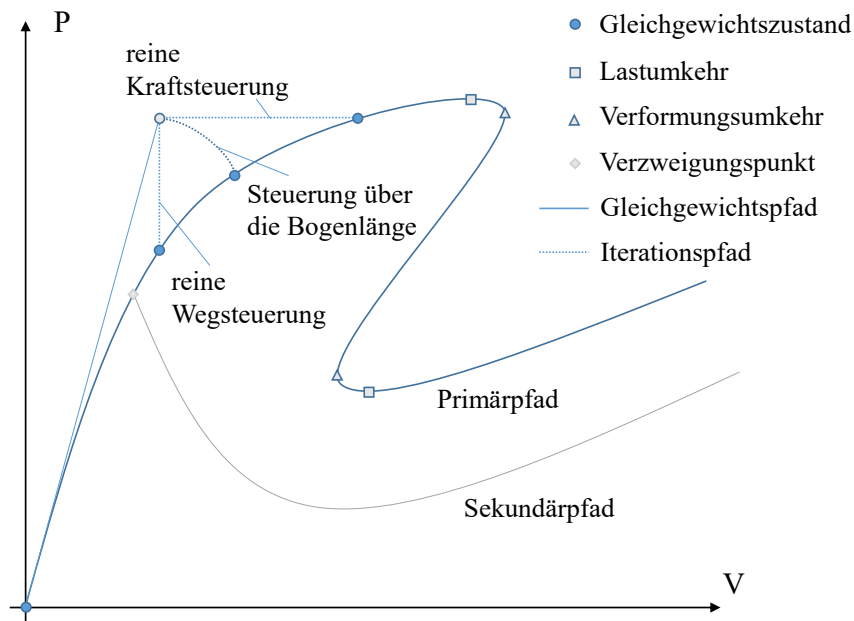


Abbildung 2.17.: Unterscheidung möglicher Iterationspfade bei der Anwendung inkrementell-iterativer Algorithmen am Beispiel eines Gleichgewichtspfades, der lokale Extrema, Umkehrpunkte und einen Verzweigungspunkt besitzt (Abb. nach Zahlten (2011))

Im Gegensatz dazu ist das Bogenlängenverfahren ein Pfadverfolgungsalgorithmus, der über die Bogenlänge gesteuert wird, d. h. über eine Größe, die sich aus dem Lastfaktor und dem Verformungsincrement zusammensetzt, und somit in der Lage ist, auch Gleichgewichtspfade mit Extrema und Umkehrpunkten zu berechnen. Dabei wird nicht wie bei der reinen Kraft- oder Wegsteuerung auf einer Horizontalen oder Vertikalen iteriert, sondern wie in Abbildung 2.17 angedeutet auf einem Kreis oder einer geneigten Geraden. Die Urform des Bogenlängenverfahrens verwendet einen auf der Urtangente senkrecht stehenden Iterationspfad. Es gibt verschiedene Definitionen für dieses Verfahren mit unterschiedlichen Iterationspfaden. Gemein ist allen Bogenlängenverfahren, dass sich die Iteration auch im Fall eines Extremums nicht horizontal über dieses hinweg bewegt, sondern sich hinter dem Extremum wieder auf den Pfad iterieren kann.

Die Iteration auf einer fixen Senkrechten wurde im Ursprung von RIKS, WEMPNER WESSELS hergeleitet (Rust, 2011, Ramm, 1981). Der Prädiktorschritt infolge  $\Delta \mathbf{P}$  läuft wie beim Newton-Raphson-Verfahren ab (vgl. Abb. 2.16 und 2.15 Schritt  $j-1$ ). Ausgehend hiervon wird der nächste Gleichgewichtszustand im Schnittpunkt der Normalen  $\mathbf{n}_0$  zur Tangente an den Gleichgewichtspfad im Grundzustand  $\mathbf{t}_0$  mit dem Gleichgewichtspfad gesucht, siehe Abbildung 2.18. Aus den nach dem Prädiktorschritt vorhandenen Ungleichgewichtskräften ergibt sich ein iterativer Zuwachs  $\Delta \mathbf{v}_{1u}$ , dessen korrespondierendes Lastinkrement unbekannt ist. Der Tangentenvektor  $\mathbf{t}_1$

wird durch  $\mathbf{t}^*$  ersetzt, der sich aus einem beliebigen Lastinkrement  $\Delta\lambda^*$  mit zugehörigem Zuwachs  $\Delta\mathbf{v}^*$  zusammensetzt. Nach Abbildung 2.18 ergibt sich daraus der Normalenvektor  $\mathbf{n}_1$  zu

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{v}_{1u} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{v}_{1u} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{v}^* \\ \Delta\lambda^* \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

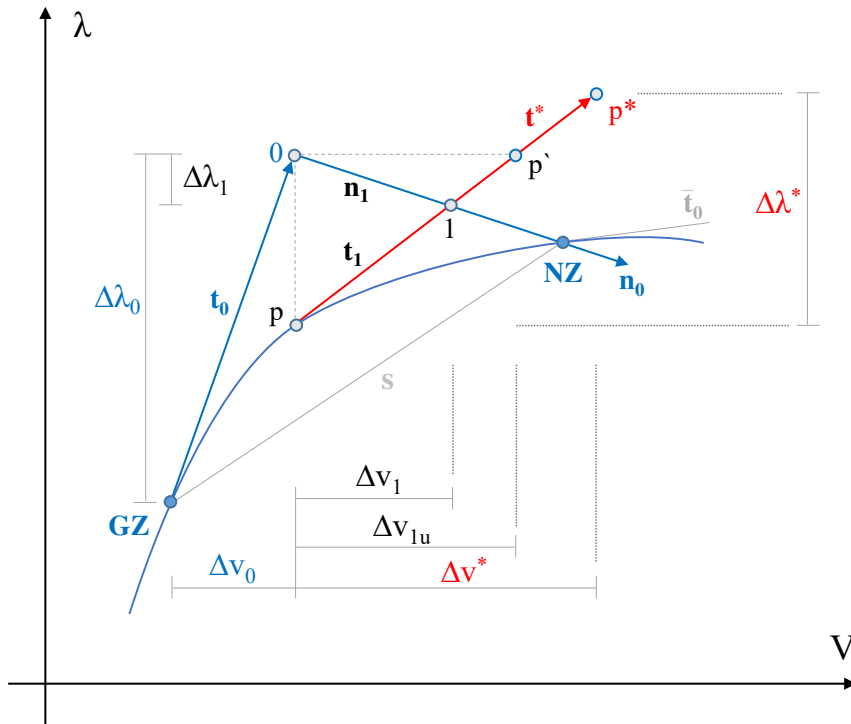


Abbildung 2.18.: Bogenlängenverfahren nach RIKS/WESSELS zur Ermittlung eines Nachbarzustands (NZ) ausgehend von einem Grundzustand (GZ) (Rust, 2011; Abb. nach Zahlten (2011))

Aus der Bedingung, dass das Skalarprodukt zweier orthogonaler Vektoren  $\mathbf{t}_0$  und  $\mathbf{n}_1$  Null sein muss, lässt sich die Variable  $\alpha$  ermitteln zu

$$\alpha = \frac{\Delta\mathbf{v}_0 \Delta\mathbf{v}_{1u}}{\Delta\mathbf{v}_0 \Delta\mathbf{v}^* + \Delta\lambda_0 \Delta\lambda^*} \quad (2.23)$$

Die Inkremente des gesuchten Punkts 1 ergeben sich dann entsprechend zu

$$\Delta\mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{v}_{1u} + \alpha \Delta\mathbf{v}^* \quad \text{und} \quad \Delta\lambda_1 = \alpha \Delta\lambda^*. \quad (2.24)$$

Die Größe des Lastinkrements  $\Delta\lambda^*$  ist beliebig, da nur die Richtung der zugehörigen Tangente zur Bestimmung des nächsten Inkrements von Bedeutung ist. Auch in *Abaqus* ist eine Form des Bogenlängenverfahrens als „modifizierte Riks-Methode“ implementiert (Dassault Systèmes,

2021). Hier wird das Lastinkrement über die Länge der Tangente  $\Delta l = |\mathbf{t}_0|$  gesteuert, welche initial vom Benutzer vorgegeben, und im weiteren Verlauf automatisiert durch den Algorithmus abhängig von der Konvergenzrate angepasst wird. Um Extrema und Umkehrpunkte überwinden zu können, ist es notwendig, das Vorzeichen des Lastinkrements  $\Delta\lambda_0$  an solchen Punkten zu wechseln. In der Literatur gibt es auch hier verschiedene Ansätze. Crisfield (1981) leitet her, dass bei einem Vorzeichenwechsel der Determinante der Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  ein Vorzeichenwechsel erfolgen sollte. Auf einem stabilen, d. h. ansteigenden Gleichgewichtspfad ist die Determinante positiv und die Matrix besitzt nur positive Eigenwerte. Mit Übergang in einen abfallenden Ast, d. h. mit dem Überwinden eines Extremums geht ein negativer Eigenwert der Matrix einher. Dadurch ändert sich das Vorzeichen der Determinante. In *Abaqus* wird stattdessen die Bedingung verwendet, dass das Skalarprodukt der aktuellen Grundzustangente ( $\bar{\mathbf{t}}_0$  in Abb. 2.18) mit dem Vektor der Lösungsinkremente aus dem vorangegangenen Schritt ( $\mathbf{s}$ ) positiv ist (Dassault Systèmes, 2021). Dieses Vorgehen kann bei zu großer Schrittweite oder starker Krümmung des zu verfolgenden Pfads versagen. Solche Fälle werden laut Dokumentation nicht standardmäßig detektiert, da sie zu selten auftreten (Dassault Systèmes, 2021).

Neben Extrema und Umkehrpunkten kann sich der Gleichgewichtspfad eines Systems an einem Verzweigungspunkt außerdem in einen Primär- und Sekundärpfad aufteilen (vgl. Abbildung 2.17). Verzweigungspunkte sind ein Zeichen für einen Verlust der Eindeutigkeit der Lösung. Sie können bei der Berücksichtigung nichtlinearer Effekte auftreten, d. h. bei geometrischer Nichtlinearität zum Beispiel bei Knick- oder Beulproblemen, aber auch durch nichtlineare Einflüsse im Materialmodell (de Borst, Crisfield et al., 2012). Auf die Uneindeutigkeit der Lösung und die daraus resultierenden Materialinstabilitäten wird in Kapitel 2.2.6 weiter eingegangen.

Damit sind der grundlegende numerische Rahmen und die notwendigen Lösungstechniken auf globaler Systemebene gegeben. In den späteren Simulationen finden sowohl das Newton-Raphson- als auch das Bogenlängenverfahren je nach Problemstellung Anwendung. Auf die algorithmischen Besonderheiten auf Materialpunktebene bei nichtlinearem Materialverhalten (vgl. Abb. 2.16, Materialpunktebene) wird im folgenden Kapitel eingegangen.

### 2.2.3. Plastizitätstheorie

Das in dieser Arbeit verwendete Material- bzw. Rissmodell (Concrete-Damaged-Plasticity-Modell (*Abaqus*)) nutzt zur Herleitung die Ähnlichkeit zwischen verschmierten Rissmodellen und der Plastizitätstheorie. Daher wird zunächst ein Überblick über die Komponenten der klassischen Plastizitätstheorie gegeben, um im anschließenden Kapitel das gewählte Materialmodell und die bruchmechanische Basis in das Spektrum vorhandener Rissmodelle für quasi-spröde Materialien einzuordnen. Nach Die folgenden Ausführungen sind Simo und Hughes (2000) und de Borst, Crisfield et al. (2012) entnommen.

Inelastisches Materialverhalten beschreibt grundsätzlich den Effekt, dass sich ein Körper bei Entlastung nicht in seine Ausgangskonfiguration zurück verformt. Wie in Abbildung 2.19 gegenübergestellt verbleibt im Falle inelastischen, bzw. hier speziell elastisch-plastischen Materialverhaltens ein Teil der Dehnung  $\epsilon^p$  im Körper. Man unterscheidet grundsätzlich zwischen ideal-plastischem, verfestigendem und entfestigendem Materialverhalten.

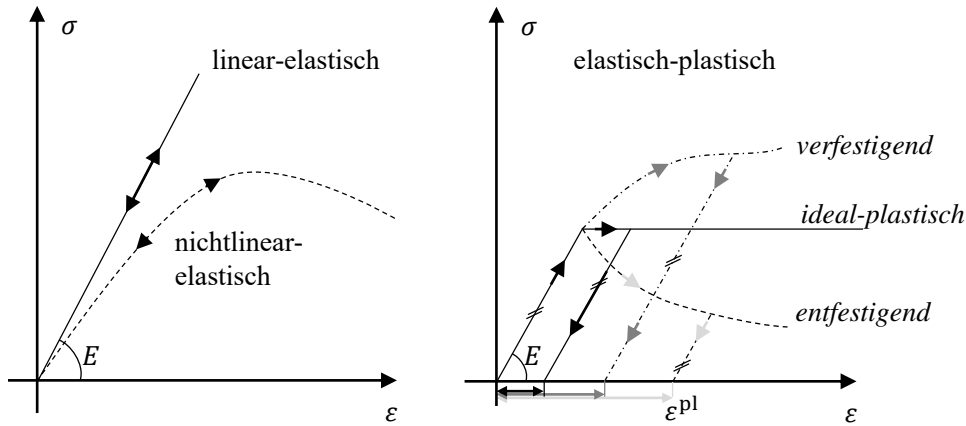


Abbildung 2.19.: Elastische und elasto-plastische Materialtheorien (eindimensionale Visualisierung)

In der Plastizitätstheorie, die klassisch vor allem bei Metallen Anwendung findet, wird somit zunächst der Verzerrungszustand aufgespalten in einen elastischen und einen plastischen Anteil:

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \quad (2.25)$$

mit der Änderungsrate  $\dot{\epsilon}$ . Im Unterschied zur Elastizitätstheorie wird somit eine mögliche Energiedissipation als Folge bleibender, plastischer Verzerrungen bei unveränderter Materialsteifigkeit eingeführt. Das Materialmodell wird dadurch pfadabhängig: Die Belastungsgeschichte beeinflusst das Materialverhalten. Nur in einem begrenzten Spannungsraum wird die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes  $\sigma = \mathbf{E}\epsilon$  angenommen. Jenseits dessen wirkt nur der elastische Anteil der Verzerrungen spannungserzeugend:

$$\sigma = \mathbf{E} : \epsilon^{el} = \mathbf{E} : (\epsilon - \epsilon^{pl}) \quad (2.26)$$

Der Raum zulässiger Spannungszustände wird definiert über die sog. Fließbedingung mit  $f \leq 0$ , wobei

- $f < 0$ , linear-elastisches Verhalten,
- $f = 0$ , elasto-plastisches Verhalten,



- $f > 0$  nicht aufnehmbarer Spannungszustand, im Rahmen einer ratenunabhängigen Theorie nicht zulässig.

Im Dreidimensionalen entspricht diese einer begrenzenden Fläche. Im eindimensionalen (siehe Abbildung 2.19) reduziert sich diese Fläche auf einen Punkt, im Zweidimensionalen auf eine linienförmige (hier elliptische) Begrenzung, wie in Abbildung 2.20 am ebenen Spannungszustand visualisiert. Bei ideal-plastischem Materialverhalten verändert sich die Form bzw. Position dieser Fließbedingung nicht, dann ist die Fließbedingung lediglich abhängig vom Spannungszustand  $f = f(\boldsymbol{\sigma})$ . Andernfalls wird die Belastungsgeschichte zusätzlich von inneren Variablen  $\mathbf{q}$  erfasst, die bestimmen, wie sich die Fließfläche infolge plastischer Belastung verändert. Hier wird unterschieden nach:

- isotrop: positionstreue Aufweitung der Fließfläche,
- kinematisch: Verschiebung der Fließfläche ohne Formänderung,
- isotrop und kinematisch: Verschiebung und Aufweitung der Fließfläche.

In der vorliegenden Arbeit wird nur der Fall isotroper Ver- bzw. Entfestigung Anwendung finden. Entfestigendes Materialverhalten würde ein Zusammenziehen der Fließfläche bedeuten. Diese Form der Plastizität stellt insofern einen Sonderfall dar, dass für Entfestigung (bzw. strain softening) das für stabiles Materialverhalten notwendige Drucker'sche Stabilitätspostulat<sup>3</sup> nicht erfüllt ist (Simo und Hughes, 2000). Auf dieses Verhalten und die daraus resultierenden Instabilitäten wird in den folgenden Kapiteln noch genauer eingegangen.

Zur Beschreibung der pfadabhängigen Evolution der Fließfläche  $f$  ist die Definition einer Fließregel und ggf. eines Verfestigungsgesetzes erforderlich. Die Fließregel beschreibt die Entwicklung der plastischen Dehnungen, und kann aus der Fließfläche abgeleitet (assoziiert) oder unabhängig davon definiert werden (nicht-assoziiert):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{pl}} = \gamma \cdot \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad \text{nicht-assoziiert} \quad (2.27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{pl}} = \gamma \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{assoziiert,} \quad (2.28)$$

mit Konsistenzparameter  $\gamma$  und Funktion  $\mathbf{r}$  zur Beschreibung des plastischen Fließens. Aus dem genannten Stabilitätspostulat leitet sich der Sonderfall der assoziierten Fließregel und einer konvexen Fließfläche ab (Thomé, 2005), um Materialinstabilitäten zu vermeiden. Bei einer assoziierten Fließregel ist sichergestellt, dass die Richtung der plastischen Verzerrungen orthogonal zur Fließfläche verlaufen, und die tangentielle Spannungs-Dehnungs-Beziehung symmetrisch ist, was bei der numerischen Umsetzung vorteilhaft ist.

<sup>3</sup> Drucker'sches Stabilitätspostulat: Die durch ein Spannungsinkrement geleistete, plastische Arbeit darf nicht negativ sein.  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{pl}} \geq 0$

Die Entwicklung der inneren Verfestigungsvariablen  $\mathbf{q}$  wird definiert über das Verfestigungsgesetz

$$\dot{\mathbf{q}} = -\gamma \cdot \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad \text{nicht-assoziert} \quad (2.29)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\gamma \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{assoziert.} \quad (2.30)$$

wobei die Funktion  $\mathbf{h}$  den Prozess der Verfestigung beschreibt. Die Matrix  $\mathbf{D}$  enthält plastische Verfestigungsmoduli und verbindet die im Spannungsraum definierten inneren Variablen  $\mathbf{q}$  mit den energetisch äquivalenten Variablen im Verzerrungsraum  $\boldsymbol{\alpha}$ :  $\mathbf{q} = -\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}$ .

Wie in Abbildung 2.20 zu sehen ist, werden im Rahmen von auf der Plastizitätstheorie beruhenden Materialmodellen gewisse Be- bzw. Entlastungszustände anhand der sog. Kuhn-Tucker-Bedingungen unterschieden:

$$\gamma \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \gamma \cdot f = 0 \quad (2.31)$$

Hierbei ist  $\gamma$  ein skalarer Parameter, dessen Wert die Intensität des plastischen Fließens berücksichtigt und der über die zusätzlich herangezogene Konsistenzbedingung

$$\gamma \cdot \dot{f} = 0 \quad (2.32)$$

sicherstellt, dass der Spannungszustand bei plastischer Belastung auf der Fließfläche verbleibt. Solange  $\gamma = 0$  gültig ist, tritt kein plastisches Fließen auf. Alle Punkte innerhalb der elliptisch dargestellten Fließfläche sind elastisch (1). Bewegt sich der Zustand des Materialpunkts auf dieser Berandung, ohne dass sich diese verändert, handelt es sich um eine neutrale Belastung, die ebenfalls keine plastischen Dehnungen hervorruft (2). Eine Bewegung von dort zurück ins Innere beschreibt eine elastische Entlastung (3). Um eine plastische Belastung, bei der bleibende Dehnungen hervorgerufen werden ( $\gamma > 0$ ), handelt es sich, wenn sich der (Test-)Zustand ( $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{trial}}$ ) aus der Fließfläche herausbewegen würde. Die Punkte außerhalb der Fließfläche beschreiben unzulässige Spannungszustände, sodass ein Herausbewegen grundsätzlich nicht möglich ist. Über die Konsistenzbedingung in Gleichung (2.32) wird der Wert des Konsistenzparameters  $\gamma$  iterativ im jeweiligen Materialpunkt bestimmt und daraus leitet sich ab, wie sich die Fließfläche aufgrund der entstehenden plastischen Verformungen verändert. Diese Änderung wird durch das definierte Verfestigungsgesetz gesteuert. Im Falle der in Abbildung 2.20 veranschaulichten isotropen Verfestigung vergrößert sich die Fließfläche entsprechend. Bei kinematischer Verfestigung bleibt die Form der Fließfläche unverändert, aber ihr Ursprung verschiebt sich in Richtung des plastischen Fließens.

Die algorithmische Bestimmung der Spannungsantwort erfordert im Rahmen der Plastizitätstheorie besondere Überlegungen aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Verzerrung. Für jeden Iterationsschritt auf globaler Ebene (vgl. Abbildung 2.16) ist die iterative Auswertung der elasto-plastischen Konstitutivbeziehung auf Materialpunktebene

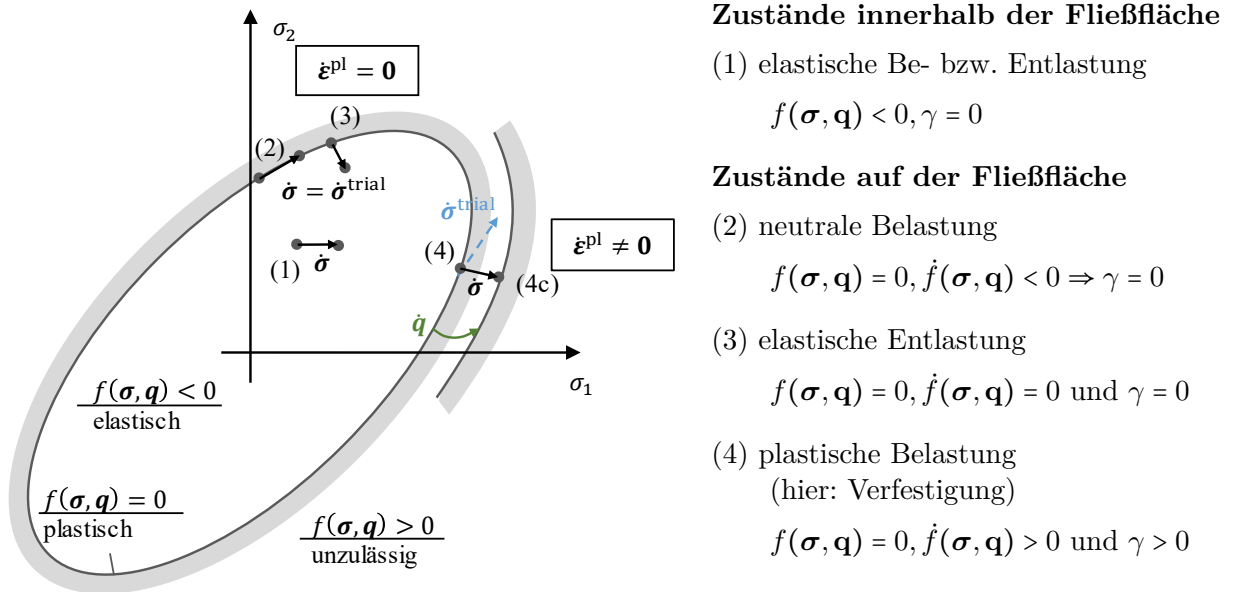


Abbildung 2.20.: Visualisierung möglicher Beanspruchungszustände innerhalb der isotropen Plastizitätstheorie abhängig von den Kuhn-Tucker-Bedingungen (Abb. angelehnt an Gödde (2013))

erforderlich. Neben der konsistenten elasto-plastischen Matrix der Materialmoduli  $C_T$  ist der Spannungszustand  $\sigma$  für die globale inkrementell-iterative Berechnung erforderlich. Zur Formulierung des zugehörigen Anfangswertproblems auf Materialpunktebene werden die oben genannten Materialgleichungen und Bedingungen herangezogen (vgl. Abbildung 2.21):

- Evolutionsgleichungen (Hooke'sches Gesetz, Fließregel, ggf. Verfestigungsgesetz),
- Randbedingungen (Kuhn-Tucker-Bedingungen),
- Anfangsbedingungen (n-ter Schritt).

### Numerische Lösung des Anfangswertproblems

Die Evolutionsgleichungen werden durch Anwendung des impliziten Eulerverfahrens inkrementiert. Zu einem Verzerrunginkrement  $\Delta\varepsilon_n$  werden bei der Lösung der strukturellen Gleichgewichtsbedingungen die unbekannt materiellen Zustandsgrößen bestimmt, also der n+1-te Schritt der plastischen Verzerrung, der Spannung und der inneren Variablen, siehe Abbildung 2.21. Der numerische Return-Mapping-Algorithmus zur Bestimmung dieser Größen ist in Abbildung 2.22 vereinfacht dargestellt. Aus dem vorangegangenen globalen Verschiebungszuwachs ergibt sich ein Verzerrunginkrement. Aus der Annahme, dass der plastische Verzerrungszuwachs  $\Delta\varepsilon_{n+1}^p = 0$  ist, lässt sich der zugehörige Testzustand mithilfe der Fließbedingung

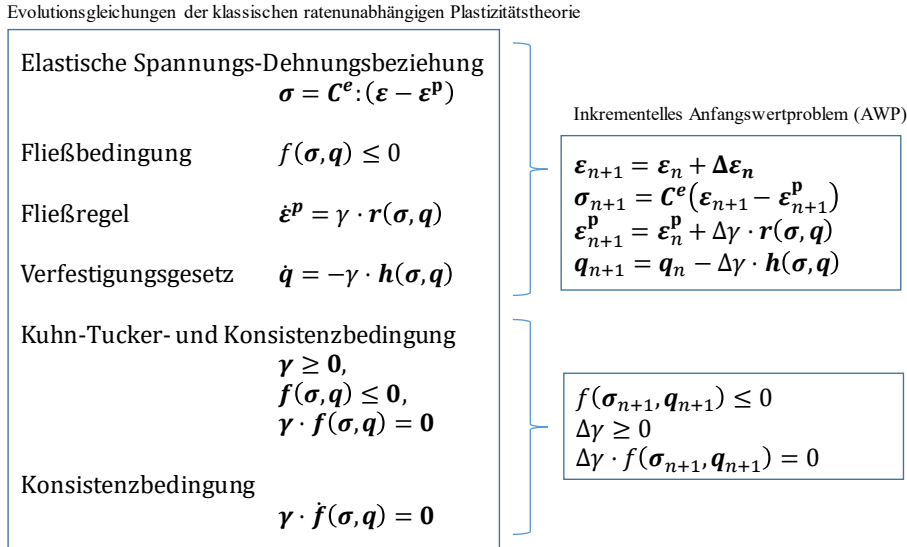


Abbildung 2.21.: Bestimmungsgleichungen einer ratenunabhängigen Plastizitätstheorie und resultierendes Anfangswertproblem auf Materialpunkzebene ( $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  ergibt sich aus dem Verformungszuwachs infolge eines Lastinkrements) (Simo und Hughes, 2000)

prüfen: Ist die Bedingung  $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$  erfüllt, handelt es sich um einen elastischen Schritt und der Testzustand entspricht dem gesuchten Spannungszustand. Ist dies nicht der Fall, ist es notwendig, den plastischen Verzerrungszuwachs iterativ mithilfe der Konsistenzbedingung zu ermitteln. Die konsistenten, tangentialen Materialmoduli werden durch Inkrementierung der elastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Kombination mit der Fließregel und ggf. der Verfestigungsgesetze bestimmt. Als Abbruchkriterium wird bei jeder Iteration geprüft, ob die Fließbedingung erfüllt bzw. die Residuen  $\|R_{n+1}^{(k)}\|$  gleich Null sind (numerisch eine Schranke nahe Null unterschreiten). Für eine detaillierte Herleitung dieser Größen sei auf Simo und Hughes (2000) verwiesen.

Anschaulich bezeichnet man das numerische Verfahren als Return-Mapping-Algorithmus, weil es dazu dient, den initialen Test-Spannungszustand, der sich bei verfestigendem Material zunächst aus dem Bereich der zulässigen Spannungen jenseits der Fließfläche herausbewegt, wieder auf die Fließfläche zurück abzubilden (return-mapping). In Abbildung 2.23 ist das Vorgehen auf zwei Arten veranschaulicht: Abbildung 2.23a zeigt für eine eindimensionale Spannungs-Dehnungsbeziehung, dass sich ausgehend von Zustand  $\sigma_n$  in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ein Testzustand  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  infolge des Dehnungszuwachses  $\Delta \varepsilon_n$  einstellt, der oberhalb der Verfestigungsgeraden liegt. Mithilfe des Return-Mapping-Schritts wird der Materialpunkt in den zulässigen Spannungsbereich, und damit zurück auf die Spannungs-Dehnungs-Linie geholt. Im mehrdimensionalen Fall ist der in Abbildung 2.22 beschriebene und in Abbildung 2.23b vereinfacht

veranschaulichte iterative Algorithmus notwendig, bei dem iterativ der Schnittpunkt zwischen linearisierter Randbedingung und der Fließbedingung  $f = 0$  gefunden wird.

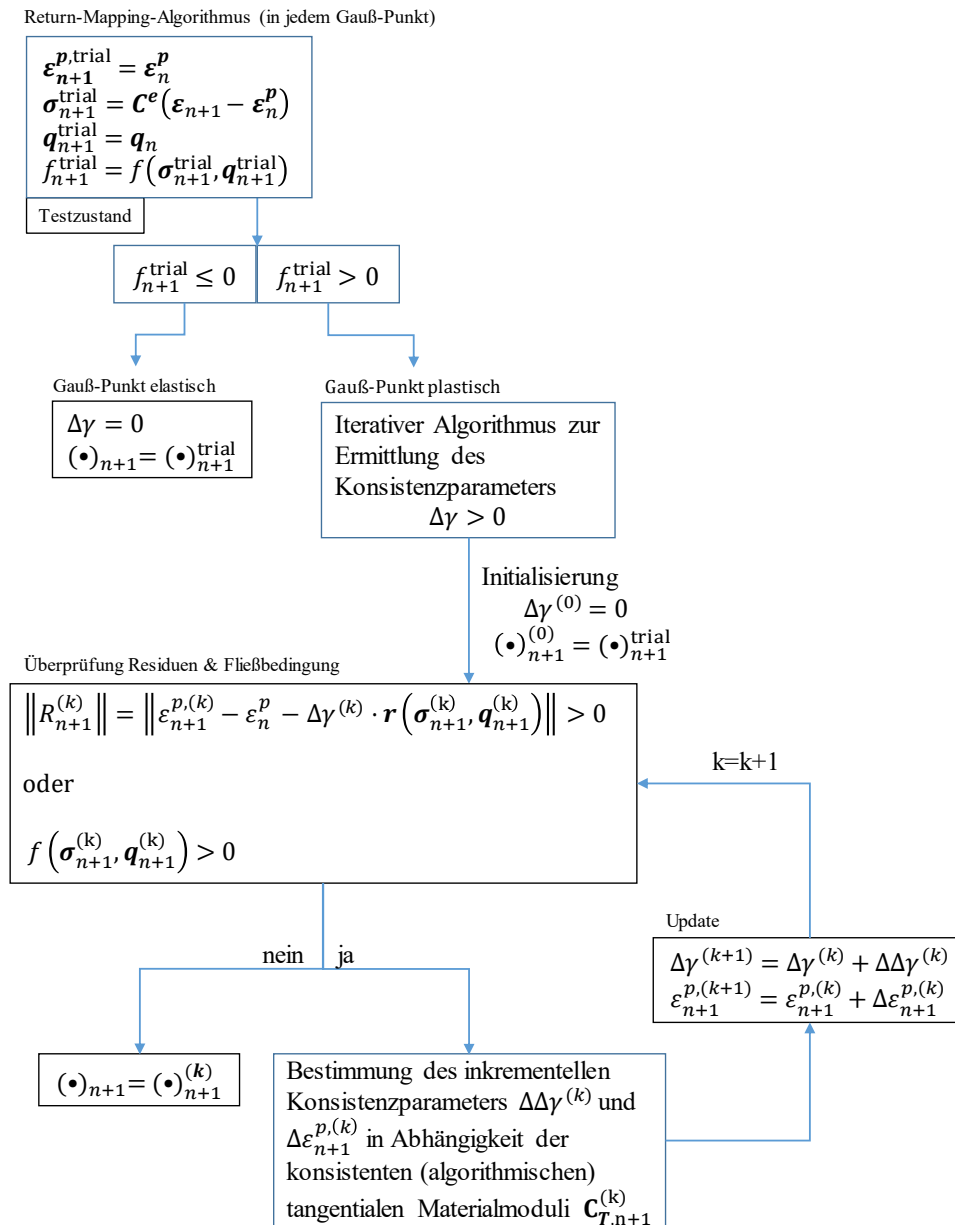


Abbildung 2.22.: Schematischer Ablauf des iterativen Return-Mapping-Algorithmus' (für Iterationsschritt  $k$ )

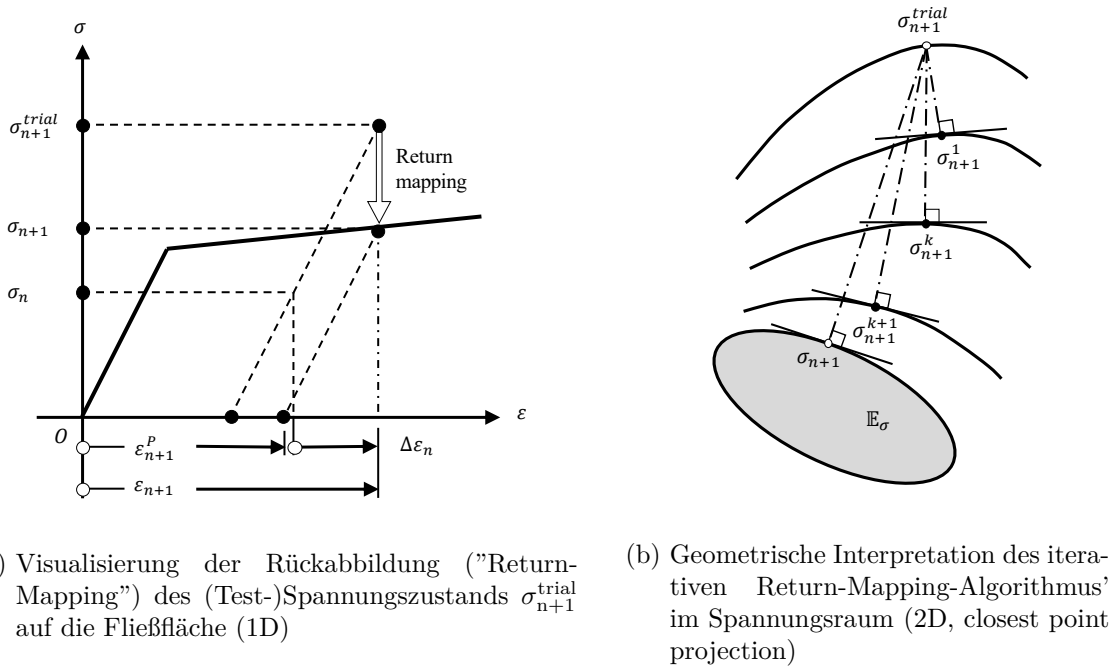


Abbildung 2.23.: Visualisierung des Return-Mapping-Algorithmus' (nach Simo und Hughes (2000))

### 2.2.4. Rissmodellierung

Für die numerische Modellierung von Rissen gibt es zwei grundlegend verschiedene Ansätze in der Literatur. Bei diskreten Rissmodellen gilt es, die geometrische Diskontinuität als solche durch Trennung der finiten Elemente an der Stelle des Risses zum Beispiel durch Interface-Elemente oder Anreicherung von Elementen mit zusätzlichen Freiheitsgraden (eXtended Finite Element Method (XFEM)) abzubilden (Hofstetter, 2006). Bei der Verwendung von Interface-Elementen muss die Software somit über Algorithmen und Elementtypen verfügen, die eine adaptive Vernetzung gewährleisten können. Dies hat eine fortwährende Änderung der Topologie der Diskretisierung zur Folge, und die Rissentwicklung ist auf die Netzlinien bzw. Elementgrenzen des Modells beschränkt. Dadurch ist es notwendig, den Rissort zumindest näherungsweise schon vorher zu kennen. Bei der XFEM-Methode wird der Rissverlauf durch Erweiterung die Formfunktionen des Elements von der zugrundeliegenden Diskretisierung entkoppelt, um so die Diskontinuität auch innerhalb der Elemente zu realisieren. Diskrete Modelle dieser Art sind seit den 60er Jahren Gegenstand der Forschung, weisen aber trotz der Optimierung dieser rechenleistungsintensiveren Methode dennoch Limitierungen auf. Die robuste Implementierung dieser Methoden selbst stellt ebenso eine Herausforderung dar wie eine angemessene Modellierung gekrümmter Rissformen innerhalb dieser Methoden. (Hofstetter, 2006; de Borst und Verhoosel, 2016)

Eine grundlegend andere Herangehensweise wird mit der verschmierten Rissmodellierung verfolgt, bei der die Diskontinuität über eine gewisse Breite verteilt wird. Darunter fallen sowohl plastizitäts- als auch schädigungs-basierte Modelle, bei denen die lokale Materialdefinition eine Entfestigung beschreibt (strain softening). Diese Entfestigung führt, wie bereits im vorangehenden Kapitel angedeutet, zu einer Änderung bzw. zum Verlust des elliptischen Charakters des zuhörigen, bestimmenden partiellen Differentialgleichungssystems. Dies bringt u. a. den Nachteil mit sich, dass die Ergebnisse der FE-Lösung netzabhängig werden. Diese Netzabhängigkeit zu reduzieren oder gar zu vermeiden ist Gegenstand aktueller Forschung. Bei der in kommerzieller Software häufig implementierten und auch hier verwendeten Methode wird ein zusätzlicher Längenparameter eingeführt, um die Objektivität bei Verfeinerung des Netzes zu verbessern oder idealerweise wiederherzustellen. Die Güte der Verbesserung ist abhängig von der Definition des Parameters, für den es in der Literatur verschiedene Ansätze gibt (Oliver, 1989; Gödde, 2013; Rots, 1988; Thomée, 2005; Dassault Systèmes, 2021), sowie von der Komplexität der Problemstellung bzw. Rissentwicklung. Häufig wird der Parameter als Elementeigenschaft problembezogen definiert. Wie Gödde (2013) zeigte, ist mit einer energiebasierten Definition eine theoretische Herleitung des Parameters möglich, allerdings ist die Anwendbarkeit je nach Komplexität des Problems mit Aufwand verbunden und schwierig zu automatisieren. Neben dieser Art der Regularisierung gibt es in der Literatur Ansätze zur Vermeidung des genannten Verlusts der Elliptizität bzw. Erhaltung der Wohl-Gestelltheit (well-posedness) des Problems und damit auch der Netzunabhängigkeit. Dazu zählen Ansätze wie die nicht-lokalen (nonlocal) oder gradienten-erweiterten Modelle (gradient enhanced plasticity, gradient enhanced damage models), bei denen zur Abbildung der Diskontinuität die lokale Definition der äquivalenten Dehnung durch eine gemittelte Größe ersetzt (nonlocal) oder Gradienten höherer Ordnung ergänzt werden (gradient enhanced). Phasenfeldmodelle dagegen ersetzen die punktuelle Diskontinuität mit einem finiten Bereich starken Gefälles. de Borst und Verhoosel (2016) zeigte auf, dass Phasenfeldmodelle und gradienten-erweiterte Modelle eine vergleichbare Charakteristik, damit jedoch auch ähnlich Nachteile, z. B. in Form einer stärkeren Ausbreitung des Rissbereichs zeigen, was die Modelle zur Modellierung eines Einzel-Trennrisses weniger geeignet macht. Dieses Verhalten kann zwar optimiert werden, dies ist jedoch mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden. Beide Modelle sind in den vergangenen Jahren zunehmend Forschungsgegenstand. (de Borst und Verhoosel, 2016)

Im nachfolgenden Kapitel 2.2.5 wird jedoch auf die erstgenannte Art der Regularisierung innerhalb der verschmierten Theorie mithilfe eines Längenparameters im Detail eingegangen. Gödde (2013) weist die Anwendbarkeit des in *Abaqus* für Beton und andere quasi-spröde Materialien implementierten Concrete Damaged Plasticity Models in Kombination mit seinem für Stahlfaserbeton entwickelten Regularisierungskonzept nach, dessen Tendenz zu Einzelrissbildung dem dokumentierten Rissverhalten von Zementestrich gut entspricht. Auch wenn eine Vermeidung der Nachteile des Strain-Softening von vornherein erstrebenswert ist, weisen die gradienten-

basierten Ansätze andere Einschränkungen auf, und sind in kommerzieller Software bislang nicht standardmäßig implementiert. Somit findet das Konzept nach GÖdde (2013) aufgrund seiner zugänglichen Anwendbarkeit und unmittelbaren Vereinbarkeit mit der verwendeten Software-Lösung in dieser Arbeit Anwendung. Dies soll eine Verwendung des entwickelten Modells für auf dieser Arbeit aufbauende Untersuchungen erleichtern. Das zugrunde gelegte Materialmodell wird in den nachfolgenden Kapiteln im Detail erläutert, nachdem im Folgenden zunächst die Grundlagen verschmierter Rissmodelle eingeführt werden.

### **Verschmierte Rissmodellierung**

Die Bruchmechanik ist Teil der Kontinuumsmechanik. Zur Beschreibung bruchmechanischer Prozesse werden Änderungen auf mikroskopischer Ebene durch skalare oder tensorwertige Variablen im Kontinuumsmodell berücksichtigt. Hier liegt eine Ähnlichkeit zur Plastizitätstheorie vor, bei der ebenfalls der Einfluss der Belastungsgeschichte auf das Kontinuum über innere Variablen gesteuert wird. Auch wird ebenfalls die Abhängigkeit von der Belastungsgeschichte durch eine Be- bzw. Entlastungsfunktion ähnlich der Fließbedingung in der Plastizitätstheorie beschrieben, und auch die Entwicklung der inneren Variablen ist über eine Evolutionsgleichung ähnlich einer Fließregel gegeben. Die zugehörigen Be- und Entlastungszustände werden über die Kuhn-Tucker-Bedingungen geregelt. (de Borst, Crisfield et al., 2012)

Neben diesen Parallelen liefern bruchmechanische Konzepte die Möglichkeit, mithilfe von skalaren Schädigungsvariablen einen lokalen Steifigkeits- und Festigkeitsverlust spröder Materialien zu berücksichtigen. Allerdings sind Baumaterialien wie Beton nicht perfekt spröde. Dies motiviert die Betrachtung von Kohäsionsrissmodellen (cohesive zone): An der Risspitze existiert ein Bereich, in dem Mikrorisse entstehen, sowie Porenbildung, -wachstum und -zusammenschluss stattfinden (siehe Abbildung 2.24 oben). Solange dieser Bereich ausreichend klein ist, können die dort wirksamen kohäsiven Kräfte in der sogenannten Rissprozesszone (RPZ) vernachlässigt werden, andernfalls sind diese zum Beispiel durch das für Beton und ähnliche Quasi-Sprödwerkstoffe entwickelte „Fictitious Crack Model“ nach Hillerborg, Modéer und Petersson (1976) zu berücksichtigen. Hieraus geht die Entwicklung sogenannter verschmierter Rissmodelle hervor. (de Borst, Crisfield et al., 2012)

Typischerweise basieren diese verschmierten Rissmodelle auf bruchmechanischen Ansätzen. Die Ansätze, die in der Literatur am häufigsten Anwendung finden, sind das „Fictitious Crack Model“ (FCM) nach Hillerborg und das „Crack Band Model“ (CBM) nach Bazant. Über einen realen Riss können keine Spannungen übertragen werden, ein fiktiver Riss dagegen wird so definiert, dass bis zu einer bestimmten Rissweite eine Spannungsübertragung weiterhin möglich ist. Nach anfänglicher Mikrorissbildung konzentriert sich der Riss nach Überschreiten der



Zugfestigkeit in einem räumlich beschränkten (infinitesimal kleinen (Hillerborg) bzw. finiten (Bazant)) Bereich, der sogenannten Rissprozesszone. In Abbildung 2.24 ist das bruchmechanische Konzept dargestellt. Im ungerissenen Bereich der Zugprobe gilt das Hooke'sche Gesetz als Spannungs-Dehnungs-Beziehung, im gerissenen Bereich entfestigt das Material nach Erreichen der Zugfestigkeit  $f_t$ . In diesem Bereich wird das Verhalten durch eine Spannungs-Rissweiten-Beziehung beschrieben. Für den in Abbildung 2.24 unten rechts dargestellten, hier linear abfallenden Spannungs-Rissbreitenverlauf gibt es in der Literatur verschiedene funktionale Ansätze.

Alle haben gemeinsam, dass die Fläche unter der Kurve als Materialparameter  $G_f$  verstanden wird. Die Bruchenergie  $G_f$  beschreibt die Energie pro Einheitsfläche, die zur vollständigen Separation der Rissufer notwendig ist und beschreibt somit eine Materialeigenschaft (Gödde, 2013). Im Vergleich zum FCM (Hillerborg) wird im CBM (Bazant) ein endliches Rissband anstelle eines infinitesimalen, fiktiven Risses betrachtet. Das entfestigende Materialverhalten  $\sigma(\varepsilon)$  wird in Abhängigkeit einer über das Rissband konstanten Dehnung  $\varepsilon_{RPZ}$  formuliert und nicht über die Rissweite  $w$ . Über die Breite der Rissprozesszone  $b_{RPZ}$  lassen sich die beiden Formulierungen jedoch weitestgehend ineinander überführen (Gödde, 2013):

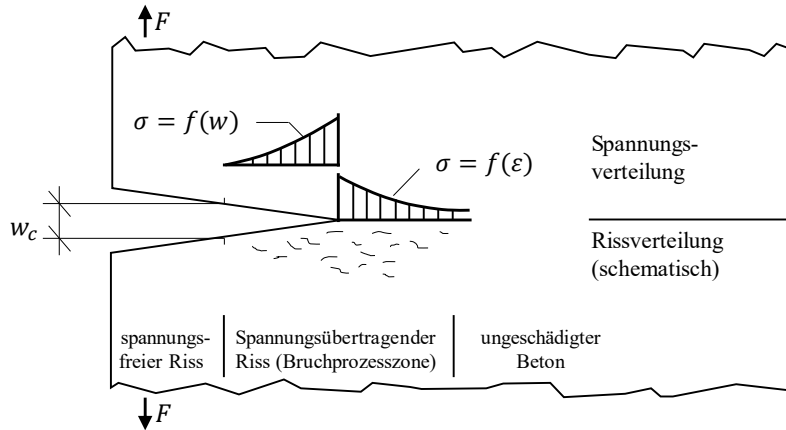
$$\varepsilon_{RPZ} = \frac{w}{b_{RPZ}}. \quad (2.33)$$

Häufig sind bruchmechanische Problemstellungen durch Betrachtung von Modus I-Rissbildung erfasst, der reinen Rissöffnung in Richtung der Hauptzugspannung. Schubeeinflüsse in Form von Modus II (Längsscherung) und III (Querschering) können in der Definition der Bruchenergie ebenfalls berücksichtigt werden (de Borst, Crisfield et al., 2012), finden in der vorliegenden Arbeit aber keine Anwendung.

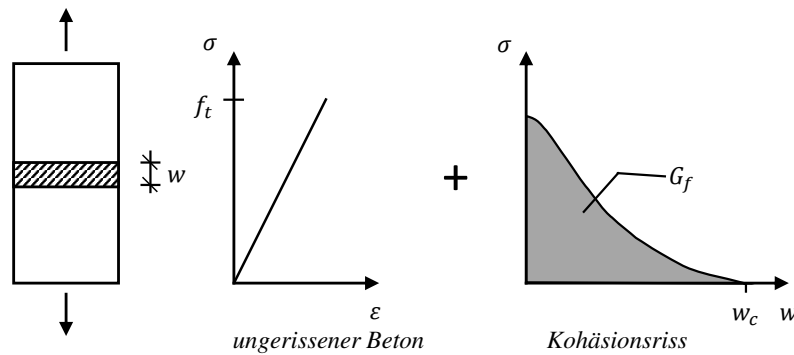
Der jeweilige bruchmechanische Ansatz wird zur Verwendung innerhalb der FE-Methode in der Regel in Materialgesetze auf Basis der klassischen Plastizitätstheorie implementiert. Hier werden inelastische Dehnungen anhand einer Bruchfläche analog zur Fließregel der Plastizitätstheorie beschrieben. Bei dieser Implementierung ist allerdings darauf zu achten, dass die Netzunabhängigkeit des Modells gewahrt bleibt (Hofstetter, 2006; Gödde, 2013). Durch Übertragung des bruchmechanischen Konzepts  $G_f$  in das diskretisierte Kontinuum entsteht eine Abhängigkeit der Ergebnisse von der Modellierung bzw. insbesondere von den Abmessungen des dann nicht mehr infinitesimal kleinen Rissbands. Zur Wahrung der Objektivität der Ergebnisse muss sichergestellt werden, dass die volumenspezifische, im diskretisierten Kontinuum dissipierte Energie  $g_f$  konsistent zur Bruchenergie des zugrundegelegten bruchmechanischen Konzepts ist. Dies wird durch Einführung eines sogenannten Regularisierungskonzepts realisiert, bei dem in der Regel die Spannungs-Rissweiten-Beziehung in eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung umgewandelt wird. Dafür wird ein modellierungsabhängiger Parameter, die sog. „charakteristische“ oder „effektive“ Länge  $l_{ch}$  eingeführt. Über diese wird die Rissweite des bruchmechanischen Konzepts  $w$

in die innerhalb der Plastizitätstheorie vorhandene plastische Dehnung  $\varepsilon^{pl}$  überführt:

$$\varepsilon^{pl} = \frac{w}{l_{ch}}. \quad (2.34)$$



- (a) Fortpflanzung der Bruchprozesszone mit zunehmender Beanspruchung ins Bauteilinnere (wie unter Biegezugbeanspruchung); Beschreibung des Materialverhaltens nach Hillerborg über eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung außerhalb der Bruch- bzw. Rissprozesszone (RPZ) und über eine Spannungs-Rissweiten-Beziehung in einem begrenzten Rissbereich innerhalb der RPZ, in dem bis zum Erreichen der kritischen Rissweite  $w_c$  auch über den (fiktiven) Riss hinweg noch Spannungen übertragen werden können (Kessler-Kramer, 2002)



- (b) Erstrecken der RPZ über den gesamten Querschnitt bei einer Zugprobe (schraffiert) und Definition der Bruchenergie  $G_f$  als Fläche unter der Spannungs-Rissweiten-Kurve (Kessler-Kramer, 2002)

Abbildung 2.24.: Definition eines fiktiven Risses nach Hillerborg

### 2.2.5. Netzabhängigkeit und Regularisierung

Wie bereits erläutert, wird in der vorliegenden Arbeit das Regularisierungskonzept angewendet, welches Gödde (2013) für Stahlfaserbeton aus der Definition nach Oliver (1989) entwickelt hat.

Im Folgenden werden die Grundzüge wiedergegeben und die Verwendung in dieser Arbeit erläutert. Dies dient u. a. dazu, diesen Ansatz den implementierten Definitionen in *Abaqus* und ANSYS in Kapitel 3.1 gegenüberzustellen. Für eine detaillierte Herleitung und Validierung des Ansatzes sei auf Gödde (2013) verwiesen.

### **Ansatz nach Gödde (2013)**

Der Ansatz nach Gödde (2013) wurde im Gegensatz zu vielen in der Literatur angegebenen Ansätzen für die charakteristische Länge nicht empirisch und damit problemspezifisch ermittelt, sondern war motiviert davon, einen Ansatz zu finden, der die folgenden Anforderungen erfüllt:

- Für eine konsistente<sup>4</sup> Rissbandausbildung muss  $l_{ch}$  korrekt bestimmt werden. Korrekt heißt in diesem Fall, dass eine vollständige Regularisierung und damit eine Objektivität des Ergebnisses gewährleistet sein muss (keine Netzabhängigkeit)
- Für eine inkonsistente<sup>5</sup> Rissbandausbildung ist die Konvergenz gegen die objektive Lösung bzw. die Lösung des bruchmechanischen Konzepts bei sukzessiver Netzverfeinerung zu gewährleisten.
- Praktikable Umsetzung des Ansatzes.

Empirisch hergeleitete Definitionen erfüllen diese Anforderungen in der Regel nicht problemunabhängig. Auch in kommerziellen Software-Produkten implementierte Definitionen decken diese Bedingungen nicht ab, wie in Kapitel 3.1 noch gezeigt wird. Das resultiert in einer Einschränkung der Programmsysteme hinsichtlich der Diskretisierung, aber auch hinsichtlich der Wahl des Elementtyps, wie sich in den Folgekapiteln noch zeigen wird. In den beiden Programmsystemen *Abaqus* und ANSYS entspricht die charakteristische Länge einer Elementeigenschaft. Das heißt, die Art der Rissbandausbildung und die Ausdehnung des Rissbands spielen bei der Festlegung von  $l_{ch}$  wenn überhaupt eine untergeordnete Rolle und die energetische Konsistenz ist nicht zwingend gegeben.

Der nachfolgend beschriebene Ansatz wurde durch den von Oliver (1989) inspiriert, der erstmals nicht über Empirie, sondern aufbauend auf einer Energiebilanzierung die Problematik der Netzabhängigkeit zu lösen versucht (Gödde, 2013). Oliver (1989) betrachtet bei seiner Herleitung allerdings das einzelne finite Element und die jeweiligen Integrationspunkte, was die Anwendung auf Rissbandausbildungen beschränkt, die sich nur über eine einzelne Elementreihe erstrecken. Dagegen erweitert Gödde (2013) diesen Ansatz auf die Betrachtung des gesamten Rissbands, da nur so die oben genannten Anforderungen erfüllt werden können.

---

<sup>4</sup> Voraussetzung: zugrunde liegende diskrete Rissbildung mit unveränderlicher Rissrichtung und Rissbreite; konstantes Spannungsfeld  $\sigma_{xx}$ ; parallele Rissbandufer  $\Gamma^s$

<sup>5</sup> Die von Gödde (2013) definierten Klassifizierungen der möglichen Formen der Rissbandausbildung und die Auswirkungen auf die Bestimmung von  $l_{ch}$  können in Kapitel 5.5.5 seiner Arbeit nachgelesen werden. Hier soll nicht weiter darauf eingegangen, sondern vom einfachsten Fall einer mindestens näherungsweise konsistenten Rissbandausbildung ausgegangen werden

### Rissbildung im Kontinuum

Bei der Herleitung wird das Fictitious Crack Model (FCM) nach Hillerborg zugrunde gelegt. Dieses wird zunächst überführt in einen kontinuumsmechanischen Rahmen, das heißt aus der im FCM betrachteten Rissfläche wird ein Rissbandvolumen (vgl. Abb. 2.25).

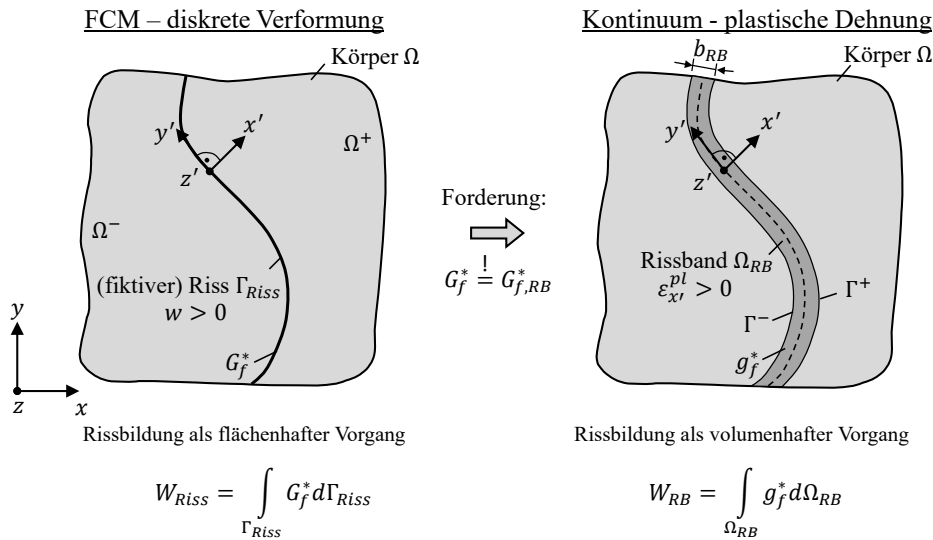


Abbildung 2.25.: Überführung des FCM ins Kontinuum: Kontinuierisierung (Gödde, 2013)

Unter der Annahme eines konstanten Spannungsfelds entlang der Rissöffnungsrichtung (vgl. Abb. 2.25: entsprechend des lokalen Koordinatensystems  $(x', y', z')$  im Rissband in  $x'$ -Richtung) wird im Kontinuum aus dem infinitesimal ausgedehnten fiktiven Riss ein Rissband der Breite  $b_{RB}$  zwischen den Rissbandufern  $\Gamma^-$  und  $\Gamma^+$ . Die Verformungslokalisierung wird überführt in eine Dehnungslokalisierung im Kontinuum. Die plastischen Dehnungen korrespondieren damit zur Rissweite bzw. wird die Rissbreite  $w$  näherungsweise als Integral der plastischen Dehnungen in Rissöffnungsrichtung über die Rissbandbreite formuliert:

$$w(y', z', t) \cong \int_{\Gamma^-}^{\Gamma^+} \varepsilon_{x'}^{pl}(x', y', z', t) dx'$$

Diese kontinuierliche Rissmodellierung stellt für  $b_{RB} > 0$  nur eine Näherung dar. Für  $b_{RB} \rightarrow 0$  nähert sich der Zustand jedoch immer weiter der diskreten Lösung des FCM an.

Das Rissverhalten wird definiert über ein verformungsabhängiges, nichtlineares Materialverhalten. Dieses kann im Fall des flächenbezogenen FCM durch eine verformungsabhängige Bruchener-

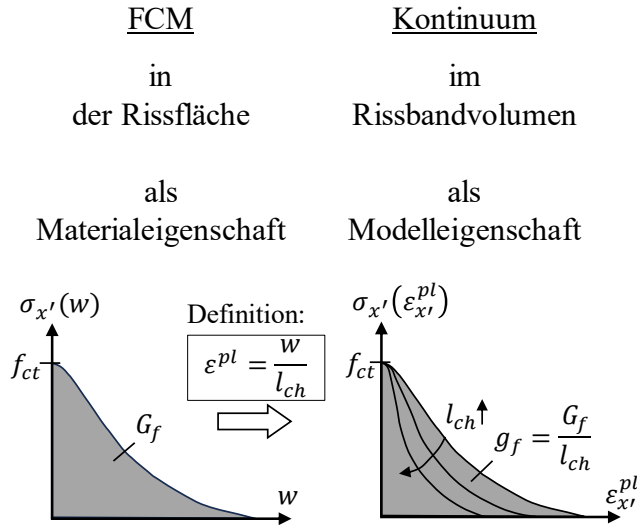


Abbildung 2.26.: Überführung des FCM ins Kontinuum: Entfestigungsverhalten (Gödde, 2013)

gie<sup>6</sup> pro Einheitsfläche  $G_f^*(w(y', z', t))$  und im Fall des volumenhaften Kontinuums durch eine dehnungsabhängige Rissenergie<sup>7</sup> pro Einheitsvolumen  $g_f^*(\varepsilon_{x'}^{pl}(x', y', z', t))$  ausgedrückt werden. Wie in Abbildung 2.26 dargestellt, ist es üblich, das Materialverhalten durch eine Spannungs-Rissbreiten- bzw. Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu formulieren. Die Bruchenergie  $G_f$  als Fläche unter der Spannungs-Rissbreiten-Beziehung ist eine objektive Materialeigenschaft. Durch Überführung in einen kontinuumsmechanischen Rahmen entsteht eine Abhängigkeit von der Modellierung: Die Rissenergie  $g_f$  ist von der Rissbandausbildung bzw. von der Breite  $b_{RB}$  abhängig. Demnach stellt  $g_f$  im Kontinuum eher eine Modelleigenschaft dar. Um die Objektivität wiederherzustellen, muss die Spannungs-Dehnungs-Beziehung daher modellierungsabhängig definiert werden. Dazu wird der Parameter der charakteristischen Länge eingeführt:

$$\varepsilon_{x'}^{pl} = \frac{w}{l_{ch}} \quad \Leftrightarrow \quad l_{ch} = \frac{w}{\varepsilon_{x'}^{pl}}. \quad (2.35)$$

Aus der Bedingung heraus, dass die Rissenergie  $G_{f, RB}^*$ , die bei einer FE-Berechnung im gesamten Rissband dissipiert wird, der Bruchenergie des FCM  $G_f^*$  entsprechen soll

$$G_f^* \stackrel{!}{=} G_{f, RB}^* = \int_{\Gamma^-}^{\Gamma^+} g_f^* dx' \quad (2.36)$$

<sup>6</sup> vgl. Abb. 2.26

$G_f^*(w = w_{\text{Bruch}}) = G_f$

<sup>7</sup>  $g_f^*(\varepsilon_{x'}^{pl} = \varepsilon_{x', \text{Bruch}}^{pl}) = g_f$

und aufgrund der Proportionalität zwischen Rissenergie  $g_f^*$  und plastischer Dehnung können Rissenergie und Bruchenergie des FCM analog mithilfe der charakteristischen Länge ins Verhältnis gesetzt werden (für eine detaillierte Herleitung siehe Gösde (2013), Kapitel 5.5.2 bzw. 5.5.7):

$$l_{ch} = \frac{G_f}{g_f} \quad \text{bzw.} \quad l_{ch} = \frac{G_f^*}{g_f^*}. \quad (2.37)$$

### Übertragung ins diskretisierte Kontinuum

In Abbildung 2.27 ist beispielhaft an einer Zugprobe veranschaulicht, welche Überlegungen notwendig sind, um die obige Beziehung in das Finite-Elemente-Modell zu übertragen: Das FCM bzw. die im gesamten Riss dissipierte Energie  $W_{Riss}^*$  (links) ist gleichzusetzen mit der im Kontinuum im gesamten Rissband dissipierten Energie  $W_{RB}^*$  (rechts).

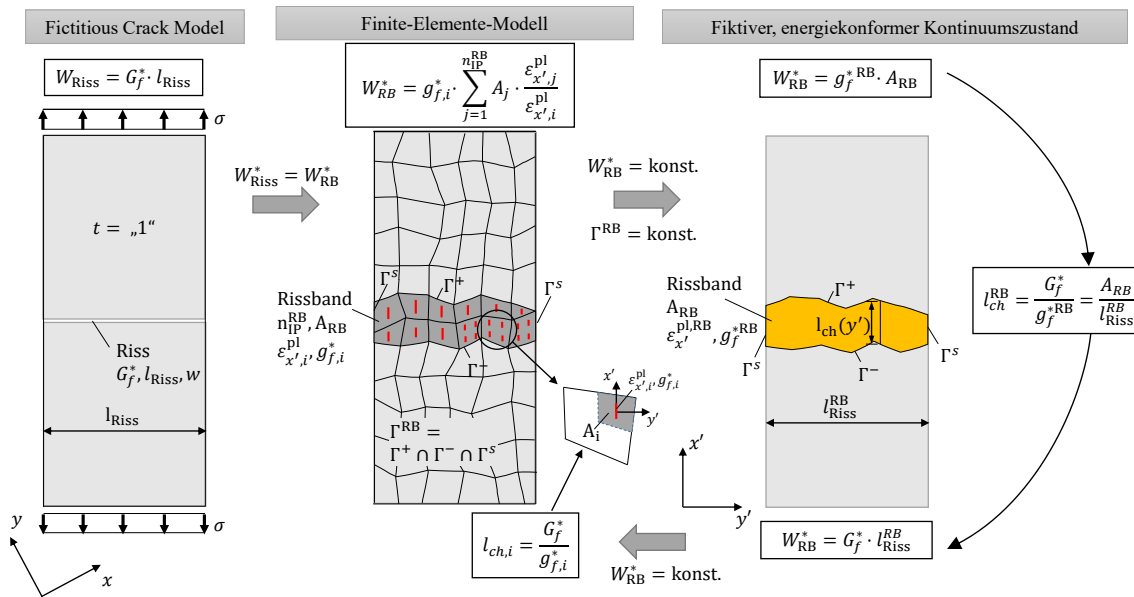


Abbildung 2.27.: Berechnungsansatz für  $l_{ch}$  für den ebenen Fall nach Gösde (2013): Die dissipierte Energie im Riss des fiktiven Rissmodells (links) ist mit der im Finite-Elemente-Modell bzw. im Kontinuum im gesamten Rissband dissipierten Energie gleichzusetzen. Im allgemeinen Fall lässt sich so die charakteristische Länge für jedes Element im Rissband aus dem Flächenanteil und dem Verhältnis der plastischen Dehnungen ermitteln (Abb. nach Gösde, 2013)

Zur Übertragung auf das Finite-Elemente-Modell muss der Energieanteil, der in jedem Element bzw. in jedem Integrationspunkt des Rissbands dissipiert wird, für  $W_{RB}^*$  herangezogen werden

(siehe Abbildung 2.27 Mitte). Daraus ergibt sich die Berechnungsformel

$$l_{ch,i} = \frac{G_f^*}{g_{f,i}^*} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{IP}^{RB}} \Omega_j \cdot \frac{\varepsilon_{t,j}^{pl}}{\varepsilon_{t,i}^{pl}}}{\Gamma_{Riss}^{RB}} \quad (2.38)$$

für die charakteristische Länge  $l_{ch,i}$  im Integrationspunkt  $i$  mit korrespondierender Integrationspunktfläche  $\Omega_i$  bezogen auf eine äquivalente Rissgeometrie<sup>8</sup>  $\Gamma_{Riss}^{RB}$  (vgl. Abbildung 2.27 für den ebenen Fall, und Gödde (2013), Kap. 5.5.7 für eine genauere Herleitung der Gleichung). Ausgehend von der Proportionalität zwischen plastischer Dehnung  $\varepsilon_{t,i}^{pl}$  und dissipierter spezifischer Energie im jeweiligen Integrationspunkt  $g_{f,i}^*$  werden in dieser Formel die plastischen Dehnungen  $\varepsilon_{t,i}^{pl}$  integrationspunktweise ins Verhältnis zueinander gesetzt. Die charakteristische Länge wird also bestimmt vom Anteil der Energie im jeweiligen Integrationspunkt an der im gesamten Rissband dissipierten Energie  $G_{f,RB}^*$ . Sie soll durch die zugrunde gelegte Energiebetrachtung zu einer Netzunabhängigkeit der Ergebnisse führen (bei konsistenter Rissbandausbildung) oder zumindest soll sich so für eine sukzessive Netzverfeinerung der genannte konsistente Energiezustand einstellen (bei inkonsistenter Rissbandausbildung).

### Praktische Umsetzung des Ansatzes

Für die Verwendung dieser Formel müssen folgende Angaben bekannt sein bzw. festgelegt werden:

- Identifizierung der Rissbandgeometrie,
- Identifizierung der Rissbandufer,
- Identifizierung der Rissorientierung bzw. Festlegung des Risskoordinatensystems.

Dies erfordert in der Regel Expertenwissen, weshalb eine Automatisierung von Gödde (2013) als nicht praktikabel erachtet wird. Im Allgemeinen handelt es sich bei der Bestimmung der charakteristischen Länge daher um einen iterativen Prozess: Berechnung des Modells mit Vorgabe eines geschätzten Parameters  $l_{ch}$ , anschließende Ermittlung von  $l_{ch}$  auf Basis der tatsächlichen Rissbandausbildung und erneute Berechnung. In den ersten von Gödde (2013) betrachteten Beispielen zur Definition der charakteristischen Länge wurde zunächst ein akademisches Beispiel, der einaxiale Zugversuch, behandelt. Bei diesem werden gewisse Randbedingungen wie eine Schwächung des Rissquerschnitts durch Reduzierung der Zugfestigkeit bereits vorgegeben, was die Identifizierung des Rissbands vorwegnimmt und damit die Ermittlung der charakteristischen Länge erleichtert. Für den Zugversuch ist diese nach obiger Definition aufgrund des konstanten Spannungsfelds im Querschnitt und der dadurch exakt abbildbaren diskreten Lösung im Kontinuum eindeutig.

<sup>8</sup> Jeweils in Abhängigkeit der Rissränderorientierung  
 3D: äquivalente Rissfläche  $\Gamma_{Riss}^{RB} = A_{Riss}^{RB}$  und Integrationspunktvolumen  $\Omega_j = V_j$ ,  
 2D: äquivalente Risslänge  $\Gamma_{Riss}^{RB} = l_{Riss}^{RB}$  und Integrationspunktfläche  $\Omega_j = A_j$   
 1D:  $\Gamma_{Riss}^{RB} = 1$  [-] und Integrationspunktlänge  $\Omega_j = l_j$

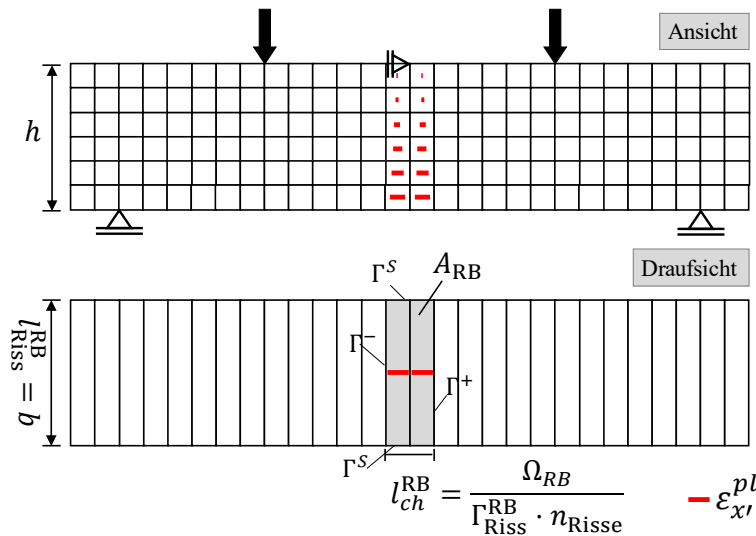


Abbildung 2.28.: Veranschaulichung der vereinfachten charakteristischen Länge im Rissband am Beispiel eines Biegeproblems, wobei die Rissbandelemente zur Induzierung der Lokalisierung durch Reduzierung der Zugfestigkeit geschwächt wurden (Quelle: Ausschnitt aus Abb. 5.25 Gölde, 2013)

Grundsätzlich gestaltet sich die Identifizierung der obigen Randbedingungen bei Beschränkung auf konsistente Rissbandausbildungen als weitgehend unproblematisch. Im Allgemeinen kann es jedoch zu einer räumlichen oder sogar variierenden Rissorientierung kommen, bei der zusätzliche Strategien zur Bestimmung der charakteristischen Länge notwendig sind. Darauf soll hier nicht im Detail eingegangen, sondern auf Gölde (2013) verwiesen werden. Stattdessen werden im Folgenden Besonderheiten bei der Umsetzung in Zusammenhang mit Biegeproblemen erläutert.

Wie in Abbildung 2.28 anhand der größer werdenden dem Riss zugeordneten plastischen Dehnungen angedeutet, entstehen bei Biegeproblemen Risse mit über den Querschnitt zunehmender Breite. Wenn in diesem Fall  $l_{ch}$  wie oben beschrieben auf Integrationspunktebene bestimmt wird, enthält das Verhältnis der plastischen Dehnungen einen Einfluss aus Biegung bzw. der resultierenden Rissbreitenänderung. Entweder müsste in diesem Fall – unter der Voraussetzung einer konstanten Rissorientierung – das Rissband in Abschnitte gleicher Rissbandbreite (und hier auch gleicher charakteristischer Länge) eingeteilt werden, um die variierenden Rissbandeigenschaften über die Höhe zu kompensieren, oder die charakteristische Länge wird vereinfacht auf Rissbandebene bestimmt:

$$l_{ch}^{RB} = \frac{A_{RB}}{l_{RB}^{Riss}} \cdot \quad (2.39)$$



Dabei wird ausgenutzt, dass die in Abbildung 2.28 dargestellten plastischen Dehnungen parallel zueinander und nahezu senkrecht zur Dickenrichtung ausgerichtet sind. Somit liegen diese quasi in der  $x$ - $y$ -Ebene, welche wiederum im gesamten Rissband orthogonal auf den Rissbandufern  $\Gamma^-$  und  $\Gamma^+$  steht. Die Rissbandausbildung ergibt sich nach GÖdde (2013) damit quasi homogen<sup>9</sup> über die Bauteilhöhe, sodass die eigentlich räumliche Rissbandausbildung ohne nennenswerten Fehler auf die  $x$ - $y$ -Ebene reduziert werden kann. Bei konsistenter Rissbandausbildung liefert diese Definition näherungsweise die exakte Lösung, wie GÖdde (2013) an verschiedenen Beispielen zeigt. Diese vereinfachte Definition wird in Kapitel 3 aufgegriffen, um den hier definierten Ansatz mit in kommerzieller Software implementierten Ansätzen zu vergleichen.

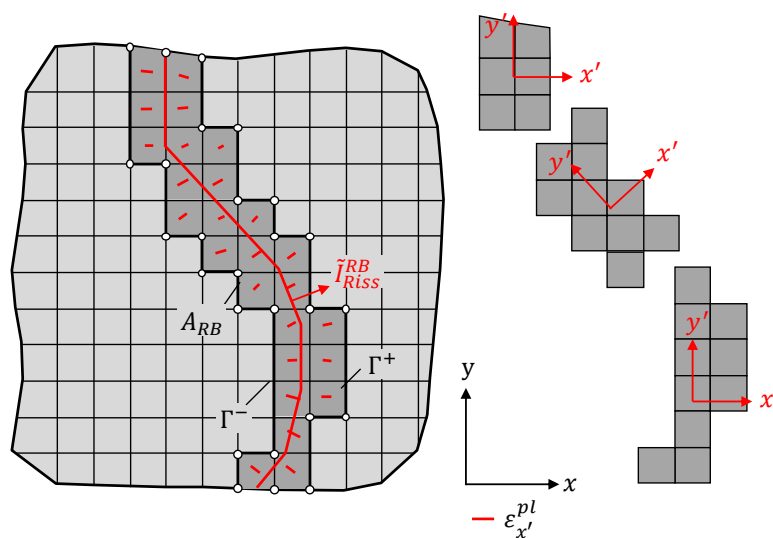


Abbildung 2.29.: Beispiel für eine variierende Rissrichtung (GÖdde, 2013)

Sofern die Voraussetzungen für diese vereinfachte ebene Betrachtung nicht erfüllt sind, oder sich räumlich gekrümmte Rissbilder ergeben, variiert nicht nur die Rissbreite, sondern auch die Rissrichtung, sodass in diesem Fall eine entsprechende Einteilung in Bereiche gleicher Rissrichtung vorgenommen werden muss<sup>10</sup> (vgl. Abbildung 2.29). Bei räumlichen Problemen lassen sich Rissbandgeometrie und -ausdehnung jedoch schwieriger abschätzen, sodass hier trotz vereinfachter Definition für die charakteristische Länge eine iterative Berechnung zwingend erforderlich wird.

GÖdde (2013) forciert nach Möglichkeit bei seinen Nachrechnungen eine homogene Rissband-

<sup>9</sup> homogen bedeutet nach GÖdde (2013), dass die charakteristische Länge für jedes Element des Rissbands gleich ist.

<sup>10</sup> Bei der Bereichseinteilung sind weitere Randbedingungen zu berücksichtigen, wie z. B. der Umstand, dass jeder Bereich mindestens einen Knoten auf jedem der Rissbandränder besitzen sollte. Darauf soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden, da dies in der vorliegenden Arbeit keine Anwendung findet

ausbildung, d. h. eine für das gesamte Rissband gültigen Wert für die charakteristische Länge und orientiert bei räumlichen Biegeproblemen außerdem das FE-Netz an der Rissbildung, um so eine möglichst gute Regularisierung zu erhalten. Auch hieran ist erkennbar, dass die vorliegende Modellierung nicht ohne Weiteres zur Vorhersage von Rissbildung an beliebigen Geometrien verwendet werden kann. Für eine realistische Simulation der Rissbildung muss die Rissbandausbildung und Rissrichtung laut Göttsche (2013) bereits weitgehend bekannt sein, um den Aufwand bei der Modellbildung angemessen zu begrenzen.

### 2.2.6. Materialinstabilität

In der klassischen Plastizitätstheorie, bei der das bereits in Kapitel 2.2.3 angesprochene Drucker'sche Stabilitätspostulat erfüllt ist, ist das Anfangswertproblem wohl-formuliert und seine Lösung eindeutig. Dieser Fall beinhaltet lediglich eine Verfestigung, und damit eine Vergrößerung der Fließfläche.

Im Fall von reißen dem Beton unter Zugbeanspruchung wird an der Stelle eines Risses eine Diskontinuität in das Verformungsfeld eingetragen, welche mithilfe der Plastizitätstheorie modelliert werden kann. Hierbei wird der Riss nicht diskret modelliert, sondern „verschmiert“ in Form der plastischen Dehnungen abstrahiert. Somit muss jedoch das Materialmodell „tension softening“ beinhalten, um den Riss als Dehnungslokalisierung zu erzeugen. Ein abfallender, entfestigender Ast in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung bzw. ein Zusammenziehen der Fließfläche ist mit einer negativen Energiedissipation verbunden. Dies verletzt die Drucker'sche Stabilitätshypothese. Dadurch verliert das Anfangswertproblem die Eigenschaft der Wohl-Formuliertheit, das Problem verliert seine Wohlformuliertheit (wird „ill-posed“), und die Eindeutigkeit der Lösung ist nicht mehr garantiert (Oliver (1989), Lee und Fenves (1998)). Das Materialverhalten wird bedingt durch den Verlust der positiven Definitheit der tangentialen Materialsteifigkeit im Materialpunkt instabil. Dies hat nicht zwingend Auswirkungen auf die Stabilität des Gesamtsystems, allerdings können lokale Instabilitäten zu strukturellen Instabilitäten führen (de Borst, Crisfield et al., 2012).

Eine zusätzliche Auswirkung der beschriebenen Diskontinuität ist, dass eine Netzabhängigkeit in das Modell eingetragen wird. Möglichkeiten, die Netzunabhängigkeit sicherzustellen, wurden in den vorangegangenen Kapiteln bereits erläutert. Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, dass mit der eingebrachten Diskontinuität zur Abbildung eines Risses ebenfalls ein Stabilitätsverlust des Problems zusammenhängt. Mathematisch kann dies auf einen Verlust der elliptischen Form des Anfangswertproblems zurückgeführt werden, welche die Eindeutigkeit der Lösung sicherstellt. Dieser Stabilitätsverlust wird auch durch Einbringen der charakteristischen Länge nicht umgangen, sondern lediglich abgeschwächt. Die Uneindeutigkeit der Lösung bleibt. (de Borst, Crisfield et al., 2012) Daneben steigt auch bei Verwendung einer nicht-assozierten Fließfläche

das Risiko für Instabilitäten. In dem im Folgekapitel erläuterten Materialmodell wird eine solche Fließfläche verwendet. Lee und Fenves (1998) erwähnen dies bereits in ihren Erläuterungen zur von ihnen entwickelten Fließfläche, das Risiko soll jedoch durch geschickte Wahl der eingehenden Parameter reduzierbar sein.

In dem in dieser Arbeit verwendeten Materialmodell gibt es demnach mehrere Ursachen für materielle Instabilitäten, die sich unter Umständen gegenseitig beeinflussen und überlagern, was eine Identifikation schwieriger macht (Crisfield, 1981; de Borst, 1987). In den nachfolgend beschriebenen numerischen Untersuchungen wird an entsprechender Stelle auf Auffälligkeiten in den Ergebnissen hingewiesen, die auf Materialinstabilitäten zurückzuführen sein könnten, und diese entsprechend der obigen Ausführungen eingeordnet. Wie u. a. de Borst (1987) und Crisfield (1981) erläutern, lassen sich Instabilitäten und ihre Ursachen mithilfe von Eigenwertuntersuchungen analog zur Handhabung bei Verzweigungs- und Durchschlagsproblemen bei geometrischer Nichtlinearität eingrenzen. Treten negative Eigenwerte in einer Berechnung auf<sup>11</sup>, ist dies ein Zeichen dafür, dass die positive Definitheit der betrachteten Materialtangente verloren gegangen ist. Inwiefern dies jedoch auf Materialinstabilitäten, Verzweigungspunkte oder eine physikalisch tatsächlich vorhandene Instabilität zurückzuführen ist, muss eine genauere Untersuchung der konkreten Problemstellung z. B. anhand einer Eigenformanalyse zeigen.

Da eine detaillierte Untersuchung im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgt, soll auch hier nicht tiefer auf die mathematischen Hintergründe von Eigenwertuntersuchungen eingegangen werden. Inwiefern weitergehende numerische Untersuchungen ggf. auf Basis weiterer Versuchsdaten sinnvoll erscheinen, wird an entsprechender Stelle in den Folgekapiteln aufgezeigt.

### 2.2.7. Umsetzung innerhalb kommerzieller Software

In vielen kommerziellen FE-Software-Produkten sind bereits Materialmodelle zur Abbildung von Verbundwerkstoffen wie Beton implementiert. Für die in dieser Arbeit angestrebte Modellierung von schwimmendem Estrich mithilfe verschmierter Rissmodelle kommen sowohl *Abaqus*, wie auch ANSYS oder vergleichbare Programmsysteme infrage. Da vor allem eine Sicherstellung der Netzunabhängigkeit mithilfe der von Gödde (2013) vorgestellten Herangehensweise angestrebt wird, und deren Anwendbarkeit bereits in *Abaqus* nachgewiesen ist, wird auch in der vorliegenden Arbeit vor allem *Abaqus* verwendet. Einige vergleichende Untersuchungen zur Netzunabhängigkeit wurden jedoch auch mit ANSYS durchgeführt, sodass in den folgenden Kapiteln auch auf das dort verwendete Modell eingegangen wird. Im Folgenden wird das in *Abaqus* implementierte Modell im Detail erläutert und auf wesentliche Unterschiede zu ANSYS wird an entsprechender Stelle eingegangen.

---

<sup>11</sup> ein Null-Eigenwert ist aufgrund numerischer Rundung nicht möglich, daher können nur negative Eigenwerte nahe Null identifiziert werden

### Concrete Damaged Plasticity (CDP)

Das in *Abaqus* implementierte Materialmodell *Concrete Damaged Plasticity* (CDP) ist für die Modellierung von Stahlbeton geeignet, kann aber auch für Stahlfaser- oder unbewehrten Beton eingesetzt werden (vgl. Dassault Systèmes, 2021; Gödde, 2013). Die maßgebenden Versagenskriterien sind Brechen unter Druck und Reißen unter Zug. Im CDP-Modell werden eine lineare Elastizitätstheorie mit der Option für skalare, isotrope Schädigung und eine Plastizitätstheorie mit isotroper Ver- bzw. Entfestigung für Druck und Zug kombiniert, um das inelastische Verhalten von Beton und anderen Quasi-Sprödwerkstoffen zu beschreiben. Grundsätzlich soll das Modell für monotone, zyklische und auch dynamische Belastungen geeignet sein. In diesem Zusammenhang würde auch die Option auf „damage recovery“, d.h. ein Modellieren des Schließens von Rissen, bestehen. In der vorliegenden Arbeit wird eine Reduzierung der Steifigkeit infolge Schädigung jedoch nicht weiter berücksichtigt, und auch zyklische Belastungen oder damage recovery finden demnach keine Anwendung.

Das Modell bzw. insbesondere die Fließfläche basiert auf den Veröffentlichungen von Lee und Fenves (1998) und Lubliner et al. (1989). Die Fließ- bzw. Bruchfläche wird beschrieben durch

$$f(\sigma, \tilde{\varepsilon}^{pl}) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot [q - 3\alpha \cdot p + \beta(\tilde{\varepsilon}^{pl}) \cdot \langle \hat{\sigma}_{\max} \rangle - \tilde{\gamma} \cdot \langle -\hat{\sigma}_{\max} \rangle] - \sigma_C(\tilde{\varepsilon}^{pl}) \leq 0 \quad (2.40)$$

mit

$$\alpha = \frac{F_{bc0} - 1}{2F_{bc0} - 1}, \quad \alpha \in [0, 0.5]$$

$$\beta = \frac{\bar{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl})}{\bar{\sigma}_t(\tilde{\varepsilon}_t^{pl})} (1 - \alpha) - (1 + \alpha)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{2(1 - K_c)}{2K_c - 1}$$

$$F_{bc0} = \frac{\sigma_{b0}}{\sigma_{c0}} = \text{konstant}, \quad \text{default: } F_{bc0} = 1.16$$

$$K_c = \frac{\bar{q}^{ZM}}{\bar{q}^{DM}} = \frac{\bar{q}(\bar{p}, \bar{\theta} = 0)}{\bar{q}(\bar{p}, \bar{\theta} = 60)} = \text{konstant}, \quad \text{default: } K_c = \frac{2}{3}, \quad K_c \in [0.5, 1]$$

$\hat{\sigma}_{\max}$  = maximale Hauptspannung

$\sigma_{b0}$  = initiale äquibiaxiale Druckspannung

$\sigma_{c0}$  = initiale uniaxiale Druckspannung

$\bar{\sigma}_c, \bar{\sigma}_t$  = uniaxiale Druck- und Zugspannung

mit  $K_c$  als Verhältniswert zwischen dem Wert der äquivalenten von-Mises-Spannung  $q$  auf dem Zugmeridian  $q^{ZM}$  und dem Wert auf dem Druckmeridian  $q_{DM}$  bei initialem Bruchniveau, wobei  $\hat{\sigma}_{\max} < 0$  gilt. Die hydrostatische Druckspannung  $p$  und die äquivalente von-Mises-Spannung  $q$

sind als Spannungsinvarianten definiert zu:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}\text{trace}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (2.41)$$

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2}\bar{\boldsymbol{S}} : \bar{\boldsymbol{S}}} \quad \text{mit } \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} + p\boldsymbol{I} \quad (2.42)$$

mit dem Einheitstensor  $\boldsymbol{I}$ , dem deviatorischen Teil des Spannungstensors  $\bar{\boldsymbol{S}}$  und der Macauly-Klammer definiert als

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

zur Modellierung unterschiedlicher Formen der Fließfläche für Zug- und Druckbeanspruchung ( $\beta$ -Term nur bei Zug,  $\tilde{\gamma}$ -Term nur bei reinem Druck aktiv). Der Querstrich ( $\bar{\bullet}$ ) soll bei berücksichtigtem Schädigungseinfluss effektive Größen kennzeichnen:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-d)} = \boldsymbol{C}_0^{el}(\boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}), \quad (2.43)$$

mit  $\boldsymbol{C}_0^{el}$  als ungeschädigte Anfangssteifigkeit. In der vorliegenden Arbeit werden die Schädigungsparameter  $\mathbf{d} = [d_c, d_t]^T$  weder im Zug- noch Druckbereich berücksichtigt, sodass die Unterscheidung nach effektiven Größen vernachlässigt werden kann. Die Form der Fließfläche kann Abbildung 2.30 entnommen werden.

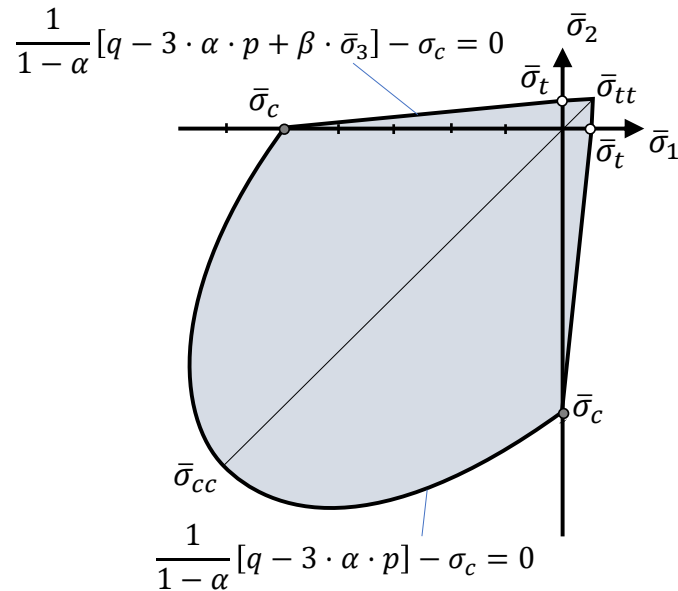


Abbildung 2.30.: Visualisierung der Fließfläche des Concrete Damaged Plasticity Modells (ebener Spannungszustand) (Dassault Systèmes, 2021)

Die Evolution der plastischen Verzerrungen, und damit die Rissevolution, ist definiert über das plastische Potential

$$H(\sigma) = -p \tan(\psi^{pq}) + \sqrt{(\epsilon \sigma_{t0} \tan(\psi^{pq}))^2 + q^2} \quad (2.44)$$

mit

- $\sigma_{t0}$  = initiale Zugfließ- bzw. Bruchspannung,
- $\epsilon$  = Exzentrizität (keine mechanische Bedeutung, dient der numerischen Stabilität),
- $\psi^{pq}$  = Dilatanzwinkel (Maß für die Dilatanz, d.h. den Anteil der plastischen Volumenänderung infolge von Schervorgängen im Beton an der plastischen Gesamtverformungsänderung).

Die Evolutionsgleichung der plastischen Verzerrungen ergibt sich daraus (analog einer Fließregel) zu

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \gamma \frac{\partial H(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \quad (2.45)$$

mit  $\gamma$  als plastischem Multiplikator (Konsistenzparameter). Die nicht-assozierte Plastizität infolge der Verwendung von  $H$  anstelle von  $f$  für die Definition der plastischen Verzerrungsrate hat den Verlust der Symmetrie des zu lösenden Gleichungssystems zur Folge.

### Ver- und Entfestigungsgesetz

Das isotrope Aufweiten bzw. Zusammenziehen der Fließfläche wird durch die für Druck und Zug unabhängigen Ver- bzw. Entfestigungsparameter, die sog. äquivalenten, plastischen Verzerrungen, gesteuert:

$$\tilde{\epsilon}^{pl} = \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_c^{pl} \\ \tilde{\epsilon}_t^{pl} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

In Abbildung 2.31 sind die einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für den Druck- und Zugbereich dargestellt. Diese lassen sich in eine Beziehung zwischen Spannung und plastischer Dehnung umformen, die letztendlich die Evolution der inneren Variablen  $\tilde{\epsilon}_c^{pl}$  (Druck) und  $\tilde{\epsilon}_t^{pl}$  (Zug) steuern. Diese sind definiert über

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_t^{pl} = \mathbf{r}(\hat{\sigma}) \hat{\epsilon}_{\max}^{pl}, \quad (2.47)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_c^{pl} = -(1 - \mathbf{r}(\hat{\sigma})) \hat{\epsilon}_{\min}^{pl} \quad (2.48)$$

$$\text{mit } \mathbf{r}(\hat{\sigma}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\hat{\sigma}_i|} \quad (2.49)$$

mit  $\hat{\epsilon}_{\min}^{pl}$  und  $\hat{\epsilon}_{\max}^{pl}$  als der kleinste ( $\hat{\epsilon}_3^{pl}$ ) bzw. größte Eigenwert ( $\hat{\epsilon}_1^{pl}$ ) des Tensors der plastischen Verzerrungsrate  $\hat{\epsilon}^{pl}$ . Im einaxialen Fall entspricht die plastische Verzerrungsrate der äquivalenten

plastischen Verzerrungsrate:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_t^{pl} = \dot{\varepsilon}_{11}^{pl} \quad \text{einaxialer Zug,} \quad (2.50)$$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_c^{pl} = \dot{\varepsilon}_{11}^{pl} \quad \text{einaxialer Druck.} \quad (2.51)$$

Dies lässt sich in folgender Evolutionsgleichung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}^{pl} &= \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_c^{pl} \\ \tilde{\varepsilon}_t^{pl} \end{bmatrix}^T = \hat{\mathbf{h}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\varepsilon}^{pl}) \cdot \hat{\tilde{\varepsilon}}^{pl} \\ &= \hat{\mathbf{h}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\varepsilon}^{pl}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\tilde{\varepsilon}}_1 \\ \hat{\tilde{\varepsilon}}_2 \\ \hat{\tilde{\varepsilon}}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Der genaue funktionale Zusammenhang für das einaxiale Verhalten wie in Abbildung 2.31 veranschaulicht, lässt sich über Wertepaare  $\sigma(\tilde{\varepsilon}^{pl})$  explizit vorgeben.

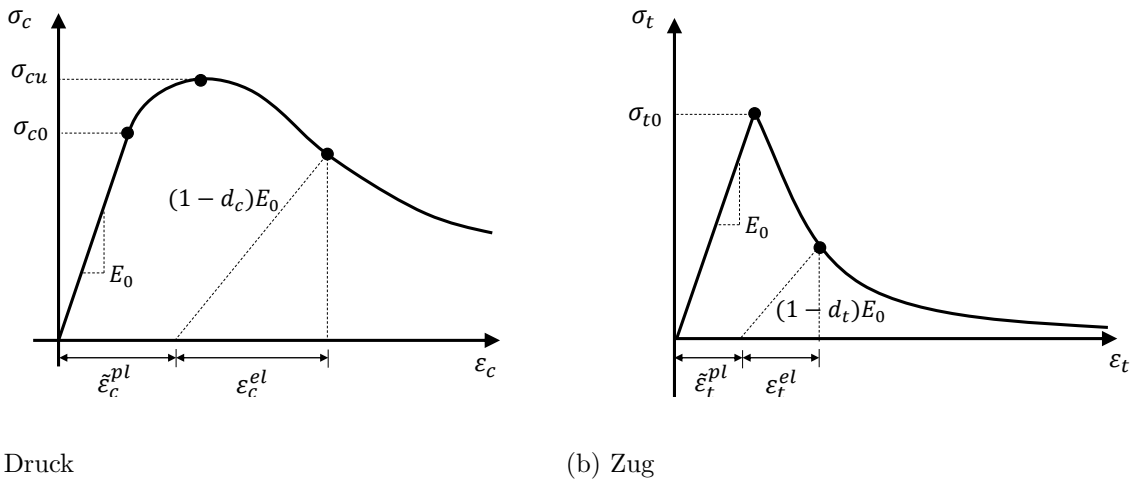


Abbildung 2.31.: Ver- bzw. Entfestigungsfunktionen des CDP-Modells für Druck und Zug (Dassault Systèmes, 2021)

In Abbildung 2.32 ist der Einfluss der Entfestigung auf die Fließfläche für den Zug- und Druckbereich visualisiert. Eine Entfestigung des Zugbereichs (weiße Punkte A und B) führt zum Zusammenziehen des positiven Spannungsbereichs, hat jedoch auf den reinen Druckbereich keinen Einfluss. Eine Entfestigung im Druckbereich (ausgefüllte Punkte A und B) führt zum Zusammenziehen des negativen Spannungsbereichs, hat aber auf den reinen Zugbereich keinen Einfluss. Für Informationen zum Einfluss der übrigen Modell- und Materialparameter des CDP-Modells sei zusätzlich zur Dokumentation (Dassault Systèmes, 2021) auf Gödde (2013) verwiesen, der den Wertebereich einiger Parameter insbesondere im Hinblick auf Stahlfaserbeton näher untersucht

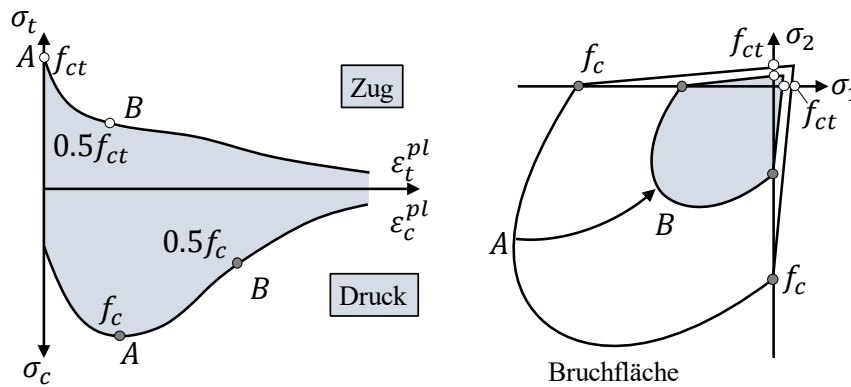


Abbildung 2.32.: CDP: Einfluss von Ver- bzw. Entfestigung auf die Fließfläche (nach Gösde (2013))

hat. Wenn nicht anders angegeben, werden im folgenden die von *Abaqus* vordefinierten Standardwerte verwendet.

In dem beschriebenen Modell kann der Ansatz nach Gösde (2013) zur Sicherstellung der Netzunabhängigkeit bei den in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen leicht berücksichtigt werden. Zur Definition Entfestigungsverhaltens wird im Programm zwischen den Optionen

- „displacement“ (Vorgabe einer  $\sigma_t$ - $w$ -Beziehung und interne Umrechnung in  $\sigma_t$ - $\epsilon_t^{pl}$ -Beziehung durch *Abaqus*),
- „strain“ (direkte Vorgabe einer  $\sigma_t$ - $\epsilon_t^{pl}$ -Beziehung) und
- „Gfi“ (Vorgabe einer Bruchenergie bei linear abfallender Entfestigung)

unterschieden. Bei Verwendung der „strain“-Option kann der Ansatz nach Gösde (2013) nach vorheriger Umrechnung der materialspezifischen Spannungs-Rissweiten-Beziehung in eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung mithilfe der hergeleiteten charakteristischen Länge in *Abaqus* vorgegeben werden. Für das CDP-Modell existiert auch eine *Abaqus*-interne Definition der charakteristischen Länge, die bei Wahl der Option „displacement“ oder „Gfi“ zur Anwendung kommt. Wie in diesem Fall die charakteristische Länge definiert ist und welchen Einfluss das auf die Ergebnisse hat, wird im Verlauf der Arbeit näher untersucht.



## 2.3. Zusammenfassung

Für Estrich wie Beton ist die maßgebende Versagensart Rissbildung. Diese wird bei schwimmendem Einbau durch den weichen Untergrund beeinflusst. Daneben können Eigenspannungen und Vorverformungen aus der Erhärtungsphase infolge Schwinden eine Rolle spielen. Zur numerischen Untersuchung des Rissverhaltens von schwimmendem Estrich wird ein in *Abaqus* implementiertes, verschmiertes Rissmodell verwendet (CDP-Modell), welches auf der hier in Grundzügen vorgestellten Plastizitätstheorie basiert. Zur Lösung des durch Materialnichtlinearität entstehenden nichtlinearen Randwertproblems wird nicht nur die Newton-Raphson-Methode verwendet, sondern bei der Berechnung des Nachbruchbereich sind Pfadverfolgungsalgorithmen erforderlich. In diesem Fall wird die in *Abaqus* implementierte Variante des Bogenlängenverfahrens nach Riks verwendet. Bei einem wie hier angewendeten verschmierten Rissmodell können Materialinstabilitäten auftreten, vor allem ist die Objektivität der Lösung unabhängig vom Vernetzungsgrad sicherzustellen. Dafür wird der Ansatz nach Göttsche (2013) genutzt. Vor diesem Hintergrund werden im Folgenden zunächst einige grundlegende, numerische Voruntersuchungen vorgestellt, die die Eignung des Modells und die Besonderheiten, die bei der Verwendung zu beachten sind, veranschaulichen sollen.



## 3. Strukturmodellierung

Wie in Kapitel 2.2.5 bereits dargelegt, wird für verschmierte Rissmodelle häufig ein Modellparameter  $l_{ch}$  eingeführt, um die in diesen Modellansätzen enthaltene Netzabhängigkeit abzuschwächen bzw. zu korrigieren. Am Zugversuch, einem einfachen akademischen Beispiel, welches einen zentralen Mechanismus bei der Rissentstehung beschreibt, soll der Einfluss dieses Parameters veranschaulicht werden. Da es sich bei den späteren Versagensmechanismen um Biegeprobleme handelt, soll darauf aufbauend auch am Biegezugversuch bzw. einigen an Estrich erfassten Messdaten das Materialmodell bzw. der Modellparameter näher betrachtet werden.

Bei der Modellierung des Aufschüsseln und anschließenden Ablegens unter Belastung gibt es neben der Materialnichtlinearität vor allem infolge der Rissbildung ein nichtlineares Kontaktproblem zwischen Dämmstoff und Estrich. Dieses wird über ein Federmodell realisiert. Hierauf wird in Kapitel 3.2 genauer eingegangen, ebenso wie auf die experimentelle Erfassung der Dämm- bzw. Federsteifigkeit.

### 3.1. Voruntersuchungen zur Netzabhängigkeit

In den folgenden Kapiteln werden zwei verschmierte Rissmodelle, die in den FE-Programmen *Abaqus* und ANSYS implementiert sind, im Hinblick auf ihre Netzabhängigkeit bzw. deren Definition der charakteristischen Länge näher untersucht:

- Concrete Damaged Plasticity Model (*Abaqus*),
- Menetrey-Willam Model (ANSYS).

Das Concrete Damaged Plasticity (CDP) Model in *Abaqus* verwendet als bruchmechanischen Ansatz das Fictitious Crack Model (FCM) nach Hillerborg. Im Menetrey-Willam (MW) Model in ANSYS wird hingegen das Crack Band Model (CBM) nach Bazant verwendet. Wie bereits in Kapitel 2.2.4 erläutert, lassen sich diese Modellvorstellungen jedoch ineinander überführen, sodass ein Vergleich der beiden Modelle Software-übergreifend möglich ist.

Für die hier betrachtete Simulation eines zentrischen Zugversuchs spielt der plastizitätstheoretische Rahmen (Fließfläche, Fließregel, Verfestigungsgesetz im Druckbereich und zugehörige Parameter) eine untergeordnete Rolle, weshalb hier auf die Unterschiede in den beiden betrachteten Modellen nicht grundlegend eingegangen wird. Zur Definition des Entfestigungsverhaltens

stehen im MW-Modell nur die Optionen einer linearen oder exponentiellen Entfestigung zur Auswahl. Im CDP-Modell kann ein beliebiger Entfestigungsverlauf durch tabellarische Eingabe von Wertepaaren vorgegeben werden. Zwischenwerte werden linear interpoliert. Die Definitionen für die „effektive“ oder „charakteristische“ Länge  $l_{ch}$  der beiden genannten Programmsysteme werden dem Ansatz nach Gödde (2013) gegenübergestellt.

#### Definitionen der charakteristischen Länge

Die „effektive Elementlänge“ soll laut ANSYS-Dokumentation Ansys Inc, 2021 eine Netzabhängigkeit des entfestigenden Materialverhaltens verhindern. Dieser Parameter wird dimensions- und integrationstyp-abhängig für jeden Integrationspunkt definiert:

$$l_{ch} = n_{\text{dim}} \sqrt{\Omega_{IP}} \quad (3.1)$$

wobei  $\Omega_{IP}$  dem Integrationspunktvolumen und  $n_{\text{dim}}$  der Elementdimension entspricht. Abhängig von der Dimension  $d$  entspräche  $\Omega_{IP}$  einem Volumen ( $n_{\text{dim}} = 3$ ), einer Fläche ( $n_{\text{dim}} = 2$ ) oder einer Länge ( $n_{\text{dim}} = 1$ ).

In der *Abaqus*-Dokumentation steht zur Definition der charakteristischen Länge (Dassault Systèmes, 2021):

„The characteristic crack length is based on the element geometry and formulation: it is a typical length of a line across an element for a first-order element; it is half of the same typical length for a second-order element. “

Eine exakte Definition dieser typischen Länge liefert die Dokumentation darüber hinaus nicht. Aus dieser Formulierung geht lediglich hervor, dass die Elementgeometrie und -formulierung eine Rolle spielt und sich die Definition für Elemente 1. und 2. Ordnung zusätzlich um den Faktor 2 unterscheiden. Es wird darauf hingewiesen, dass die Form der Elemente möglichst rechteckig sein und große Seitenverhältnisse vermieden werden sollten. Durch eine Benutzer-Subroutine besteht die Möglichkeit, sich die verwendete charakteristische Länge für jeden Integrationspunkt ausgeben zu lassen. Dabei wird deutlich, dass der Wert bei Elementen zweiter Ordnung auch integrationspunktabhängig definiert zu sein scheint, was aus der obigen Formulierung nicht direkt erkennbar ist. Die R&D-Abteilung von *Abaqus* ließ auf Nachfrage wissen, dass die genaue Definition der charakteristischen Länge nicht bekannt gegeben werde. In der Dokumentation wird nicht darauf eingegangen, welche Einschränkungen es im Hinblick auf die Netzabhängigkeit bei der Modellierung gibt.

Auf Basis einiger Variantenuntersuchungen<sup>1</sup> verschiedener Elementtypen und Randbedingungen und durch Vergleich mit der Definition in ANSYS wird folgende Definition für die in *Abaqus*

---

<sup>1</sup> Auf einige wird im weiteren Verlauf des Kapitels eingegangen, für weitere Untersuchungen sei auf Brokbal (2021) verwiesen.

verwendete charakteristische Länge angenommen. In dieser Form wäre sie auch konsistent zur Angabe des Faktors  $\frac{1}{2}$  je nach Elementordnung in der Dokumentation:

$$l_{ch,i} = \begin{cases} n_{\text{dir}} \sqrt{n_{IP} \cdot \Omega_i} & \text{für Elemente 1. Ordnung} \\ \frac{1}{2} \cdot n_{\text{dir}} \sqrt{n_{IP} \cdot \Omega_i} & \text{für Elemente 2. Ordnung} \end{cases} \quad (3.2)$$

mit:

- $n_{\text{dim}}$  - geometrische Dimension des Elements,
- $\Omega_i$  - Integrationspunktvolumen/-fläche/-länge des Integrationspunkts  $i$ ,
- $n_{IP}$  - Anzahl der Integrationspunkte je Element,

Tabelle 3.1 zeigt, wie sich die charakteristische Länge als Elementeigenschaft für verschiedene Integrationsmethoden in ANSYS bzw. *Abaqus* berechnet.

Im Ansatz nach Gödde (2013) ist  $l_{ch}$  keine Elementeigenschaft, da das gesamte Rissband zur Bestimmung der charakteristischen Länge betrachtet werden muss. Aus Gleichung (2.38) kann die Definition nach Gödde (2013) für den ebenen Fall abgeleitet werden:

$$l_{ch,i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{\text{IP}}^{\text{RB}}} \Omega_j \cdot \frac{\varepsilon_{t,j}^{\text{pl}}}{\varepsilon_{t,i}^{\text{pl}}}}{l_{\text{Riss}}^{\text{RB}}}$$

Diese Definition entspricht für den Zugversuch bei konstantem Spannungsfeld und konsistenter Rissbandausbildung der vereinfachten Definition nach Gleichung (2.39):

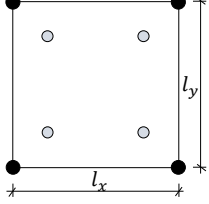
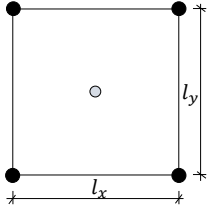
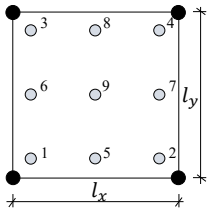
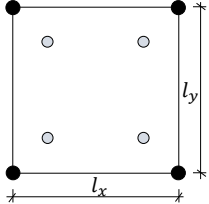
$$l_{ch, \text{RB}} = \frac{A_{\text{RB}}}{l_{\text{Riss}}^{\text{RB}}}.$$

### 3.1.1. Zentrischer Zug

Die in Abbildung 3.1 dargestellte ebene Zugprobe mit konstantem Querschnitt wird – in Ergänzung ähnlicher Voruntersuchungen in Gödde (2013) – zur Überprüfung der Wirkungsweise der verschiedenen Ansätze für den Parameter der charakteristischen Länge herangezogen. Für diesen Fall ist nach Abbau der Spannungen und vollständigem Bruch der Probe eine eindeutige Zuordnung der Differenzverformung der Rissbandufer zu einer abgebildeten äquivalenten Rissbreite möglich. Um eine Lokalisierung des Rissbands zu bewirken, muss das Material in einer Elementreihe geschwächt bzw. in den übrigen Elementen die Zugfestigkeit etwas heraufgesetzt werden.

Für die Diskretisierung wird ein Elementraster von  $4 \times 12$  quadratischen Elementen gewählt. Für das konkrete Beispiel mit den Elementabmessungen  $a = b = 10$  mm ergeben sich die charakteristischen Längen entsprechend der Tabelle 3.1 bei Elementen erster Ordnung einheitlich für alle In-

Tabelle 3.1.: Charakteristische Länge in Abhängigkeit des Integrationsschemas und der Elementordnung für den ebenen Fall

Anzahl IP $n_{IP}$	Elementtypen	$l_{ch}$ in ANSYS	$l_{ch}$ in Abaqus
2 x 2 (1. Ordnung, voll integriert)		$\frac{1}{2} \cdot \sqrt[2]{A_{Elem}}$	$\sqrt[2]{A_{Elem}}$
1 (1. Ordnung, reduziert integriert)		$\sqrt[2]{A_{Elem}}$	$\sqrt[2]{A_{Elem}}$
3 x 3 (2. Ordnung, voll integriert)		$l_{ch,1-4} = \frac{5}{18} \cdot \sqrt{A_{Elem}}$ $l_{ch,5-8} = \frac{\sqrt{10}}{9} \cdot \sqrt{A_{Elem}}$ $l_{ch,9} = \frac{4}{9} \cdot \sqrt{A_{Elem}}$	$l_{ch,1-4} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{A_{Elem}}$ $l_{ch,5-8} = \frac{\sqrt{10}}{6} \cdot \sqrt{A_{Elem}}$ $l_{ch,9} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{A_{Elem}}$
2 x 2 (2. Ordnung, reduziert integriert)		$\frac{1}{2} \cdot \sqrt[2]{A_{Elem}}$	$\frac{1}{2} \sqrt[2]{A_{Elem}}$

tegrationspunkte zu 5 oder 10 mm, bei quadratischen voll integrierten Elementen variiert der Parameter über das Element entsprechend der angegebenen Integrationpunktlage. Für den Ansatz nach Gödde (2013) berechnet sich der Wert Elementtyp- und Integrationsschema-unabhängig aufgrund der konsistenten, homogenen Rissbandausbildung und des konstanten Spannungsfelds:

$$l_{ch,Gödde}^{exakt} = l_{ch,Gödde}^{vereinf} = 10 \text{ mm}$$

### Materialmodell: Entfestigungsverhalten

Das Nachrisstragverhalten wird für das Beispiel über eine linear fallende Spannungs-Dehnungs- bzw. Spannungs-Rissbreiten-Beziehung vorgegeben, die über die Parameter der Zugfestigkeit  $f_t$  und einer Restspannung  $f_{tr}$  gesteuert wird (vgl. Abbildung 3.2). Der Wert der materialspezifischen Bruchenergie geht hier nur indirekt als Fläche unter der Kurve ein.

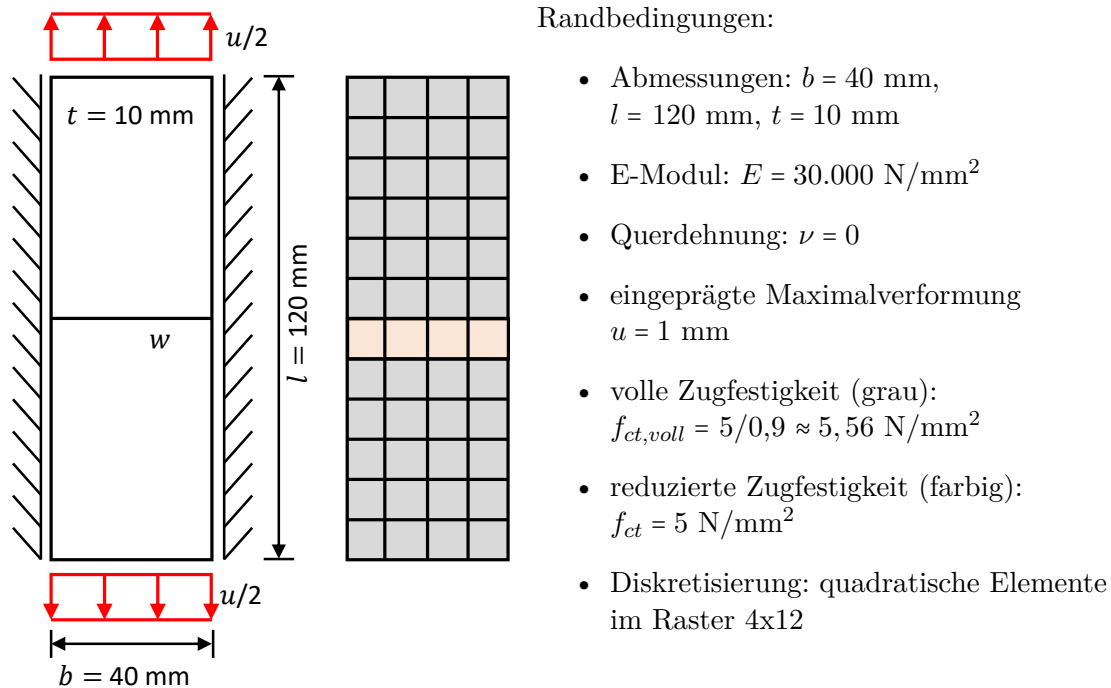
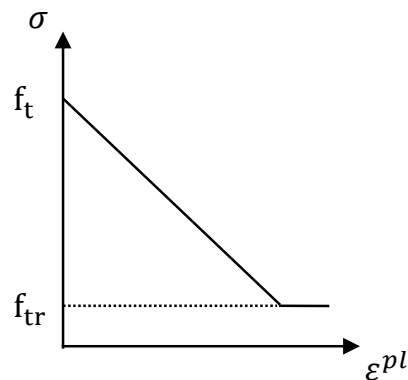


Abbildung 3.1.: Zentrische Zugprobe: System und Randbedingungen

Abbildung 3.2.: Lineare Entfestigung unter Zug, wobei im numerischen Modell eine Restspannung von  $f_{tr}$  nach vollständiger Entfestigung zurückbleibt (numerische Stabilität)

In *Abaqus* wird das Entfestigungsverhalten über Wertepaare aus Spannung und Rissweite, bzw. Spannung und plastischer Dehnung (bei vorheriger Umrechnung aus der Rissweite) beliebig vorgegeben, in *ANSYS* kann der Benutzer für das MW-Modell zwischen linearer und exponentieller Entfestigung entscheiden. Wie aus der *ANSYS*-Dokumentation bei Betrachtung der zugehörigen Formeln auffällt (*ANSYS Inc.*, 2021, 2021), werden bei der Verwendung des linearen Entfesti-

ungsverhaltens keine Maßnahmen gegen Netzabhängigkeit getroffen. Die charakteristische Länge geht hier gar nicht ein. Um eine Netzabhängigkeit zu verhindern, muss der Benutzer in jedem Fall selbst die Spannungs-Dehnungs-Beziehung entsprechend bei Netzverfeinerung mithilfe eines Modell-Parameters modifizieren.

In der folgenden Vergleichsrechnung<sup>2</sup> wurde das Netz nicht variiert, sondern mit der analytischen Lösung verglichen. Bei den ANSYS-Rechnungen wurde jeweils die charakteristische Länge von Hand nach Gleichung (3.1) berechnet und die Spannungs-Dehnungs-Beziehung entsprechend über  $\varepsilon = \frac{w}{l_{ch}}$  modifiziert vorgegeben. Somit wird für die drei betrachteten Ansätze der charakteristischen Länge wie folgt vorgegangen:

- (i) Ansatz nach ANSYS: Modifizierung des linearen Entfestigungsgesetzes mithilfe von Gleichung (3.1),
- (ii) Ansatz nach *Abaqus*: Vorgabe einer Spannungs-Rissweiten-Beziehung (interne Anwendung der implementierten Definition der charakteristische Länge),
- (iii) Ansatz aus der Literatur nach Gödde (2013): Vorgabe einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung (in *Abaqus*) nach Umrechnung mithilfe von Gleichung (3.1).

#### Vergleich der betrachteten Ansätze

In Abbildung 3.3a ist die Kraft-Verformungslinie für 4-knotige Elemente mit vollständiger Integration im Vergleich zur analytischen Lösung dargestellt. Die analytische Lösung leitet sich aus der vorgegebenen Spannungs-Rissweiten- bzw. -Dehnungs-Beziehung ab (siehe Abb. 3.2). Die Verschiebung  $u$  entspricht der eingepprägten Verformung, die Zugkraft  $F$  den aufsummierten Auflagerkräften am Probenende. Die charakteristische Länge für ein Element mit den Abmessungen 10 mm x 10 mm beträgt nach ANSYS für jeden Integrationspunkt  $l_{ch} = 5$  mm, *Abaqus* kommt ebenso wie Gödde (2013) auf eine charakteristische Länge von  $l_{ch} = 10$  mm je Integrationspunkt.

Es wird deutlich, dass sich der Faktor 2, um den sich die charakteristischen Längen unterscheiden, im Ergebnis widerspiegelt: Die Ergebnisse aus *Abaqus* liefern die exakte Lösung, die sich für den Ansatz nach Gödde (2013) auch für andere Elementabmessungen und -formen nicht ändert, solange das Gesamtrissband gleich bleibt. Das Ergebnis aus ANSYS hingegen zeigt, dass die für einen vollständigen Bruch notwendige Bruchenergie, also die Fläche unter der Kurve, um den Faktor 2 überschätzt wird. Deshalb kann bei einer Verformung von  $u = 1$  mm noch die Hälfte der maximalen Zugkraft übertragen werden, während die Probe bei dieser Ausdehnung bereits vollständig gebrochen sein müsste.

Da die Ansätze nach Gödde (2013) und *Abaqus* für Elemente erster Ordnung unabhängig von der Integrationsordnung das gleiche  $l_{ch}$  liefern, ändert sich der Wert der charakteristischen Länge

---

<sup>2</sup> mit Brokbals, 2021 entwickelt



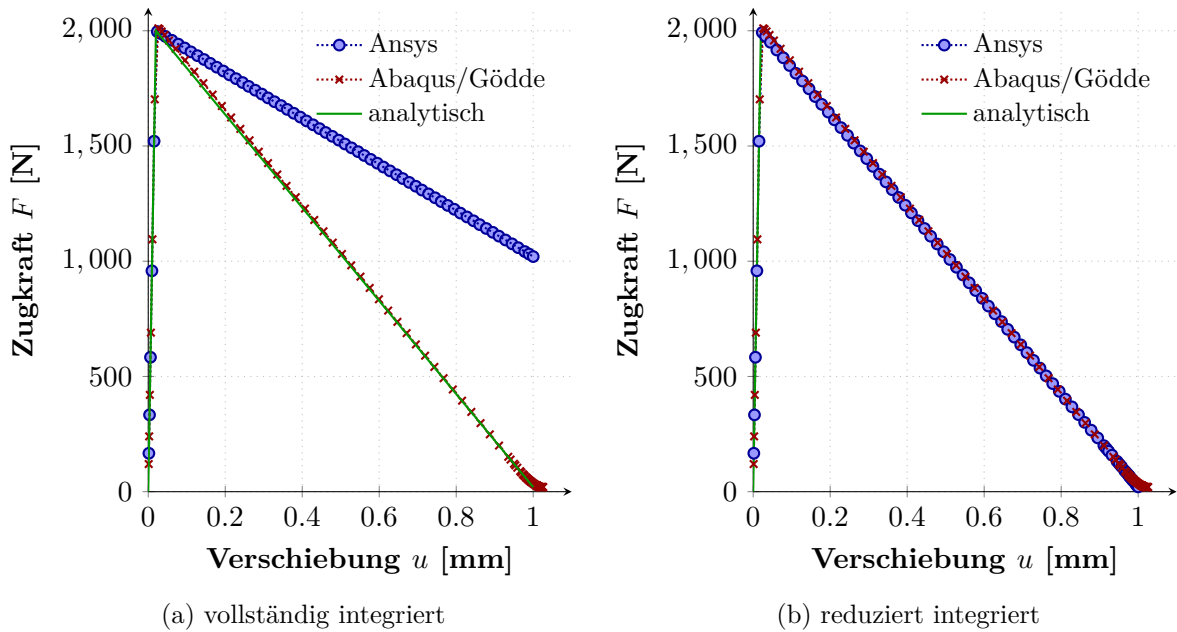


Abbildung 3.3.: Zugversuch: Kraft-Verformungs-Linie, 2D mit 4 Knoten

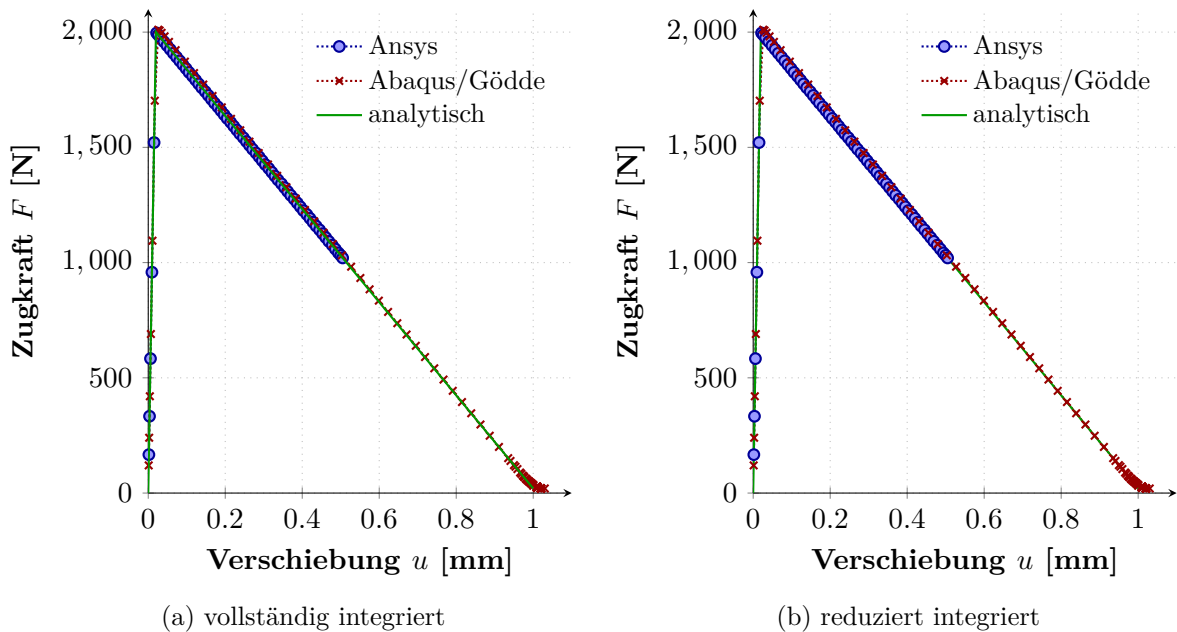


Abbildung 3.4.: Zugversuch: Kraft-Verformungs-Linie, Verformung ermittelt aus Dehnungen (gemittelt über alle IP), 2D mit 4 Knoten

bei Verwendung reduziert integrierter Elemente nicht. Für den ANSYS-Ansatz vergrößert sich die dem Integrationspunkt zugeordnete Fläche bei reduzierter Integration und die charakteristische Länge beträgt nun ebenfalls  $l_{ch} = 10$  mm. Die Ergebnisse für diese Integrationsordnung sind in Abbildung 3.3b dargestellt und entsprechend des gleichen Werts für die charakteristische Länge stimmen alle Graphen mit der analytischen Lösung überein.

Die Gesamtverformung setzt sich analytisch aus einem elastischen Anteil und der Rissweite nach Gleichung (2.35) zusammen. Der elastische Verformungsanteil wird durch Multiplikation mit der Probenlänge  $l$  bestimmt.

$$u = \Delta u_{el} + w = \varepsilon_{el} \cdot h + \varepsilon_{pl} \cdot l_{ch} \quad (3.3)$$

Berechnet man aus den Simulationsergebnissen für den jeweiligen Dehnungsanteil die Verformung über die Formel (3.3), ergeben sich jeweils die Graphen in Abbildung 3.4. Hier liegen alle Graphen auf der analytischen Lösung. Allerdings erreicht die ANSYS-Kurve nur eine Verformung von  $u = 0,5$  mm anstelle der erwarteten  $u = 1$  mm. Auf Nachfrage bei ANSYS<sup>3</sup> wurde dieses Verhalten damit erklärt, dass bei vollständiger Integration bzw. mehr als einer Integrationspunktreihe programmintern von mehr als einem abgebildeten Riss ausgegangen wird. Im Falle der 4-knotigen, vollintegrierten Elemente besitzt das Modell eine Elementreihe mit zwei Integrationspunktfolgen in Rissrichtung. Daher wird je Integrationspunktfolge die durch die Spannungs-Rissweiten-Beziehung angenommene Bruchenergie abgebildet und damit ergibt sich insgesamt für das System die doppelte Energie, wie in Abbildung 3.3 erkennbar. Betrachtet man hingegen die plastische Dehnung bzw. die umgerechnete Kraft-Verformungslinie je Integrationspunkt, wie in Abbildung 3.4, wird das erwartete Materialverhalten erkennbar. Dieses bezieht sich jedoch nur auf einen der beiden laut Materialmodell angesetzten Risse, bzw. eine Integrationspunktfolge. Daher erreicht hier die Verformung auch nur die halbe Rissbreite.

Bei der Verwendung des 8-knotigen Elements steht in ANSYS die Option, vollständig zu integrieren, gar nicht zur Verfügung. Daher fehlt der entsprechende Graph in Abbildung 3.5a und 3.5b. Nach Göttsche (2013) beträgt die charakteristische Länge je Integrationspunkt nach wie vor  $l_{ch} = 10$  mm. Die durch *Abaqus* vorgegebene charakteristische Länge ergibt sich integrationspunktweise:

$$l_{ch,IP1,\dots,4} \approx 4.1667 \text{ mm} \quad l_{ch,IP5,\dots,8} \approx 5.2705 \text{ mm} \quad l_{ch,IP9} \approx 6.6667 \text{ mm}$$

In Abbildung 3.5b sind die Ergebnisse für die Diskretisierung mit reduziert integrierten Elementen dargestellt, bei denen sich die Definition der charakteristischen Länge für den *Abaqus*- und ANSYS-Ansatz nicht unterscheiden und beide für jeden der vier Integrationspunkte den Wert 5 mm annehmen. In beiden Abbildungen sind Knicke bzw. Schwankungen im abfallenden Ast zu beobachten, die auf algorithmische Instabilitäten zurückgeführt werden. Bei Betrachtung der plastischen Dehnungen in den jeweiligen Integrationspunkten zeigt sich, dass zum Zeitpunkt des ersten Knicks bzw. bei Abweichung von der Geraden die plastischen Dehnungen nicht mehr konstant über das Rissband sind, sondern sich für einige Integrationspunkte abweichende Werte ausbilden. Möglicherweise sind diese Effekte durch Stabilisierungsoptionen im jeweiligen Programmsystem zu begrenzen. Ein Variieren der Schrittweite und anderer Algorithmus-spezifischer Parameter sowie ein Wechsel des Algorithmus' hatten allerdings keinen zufriedenstellenden Effekt.

---

<sup>3</sup> über den Vertriebspartner CADFEM, E-Mail vom 16.04.2021 (CADFEM, 2021)

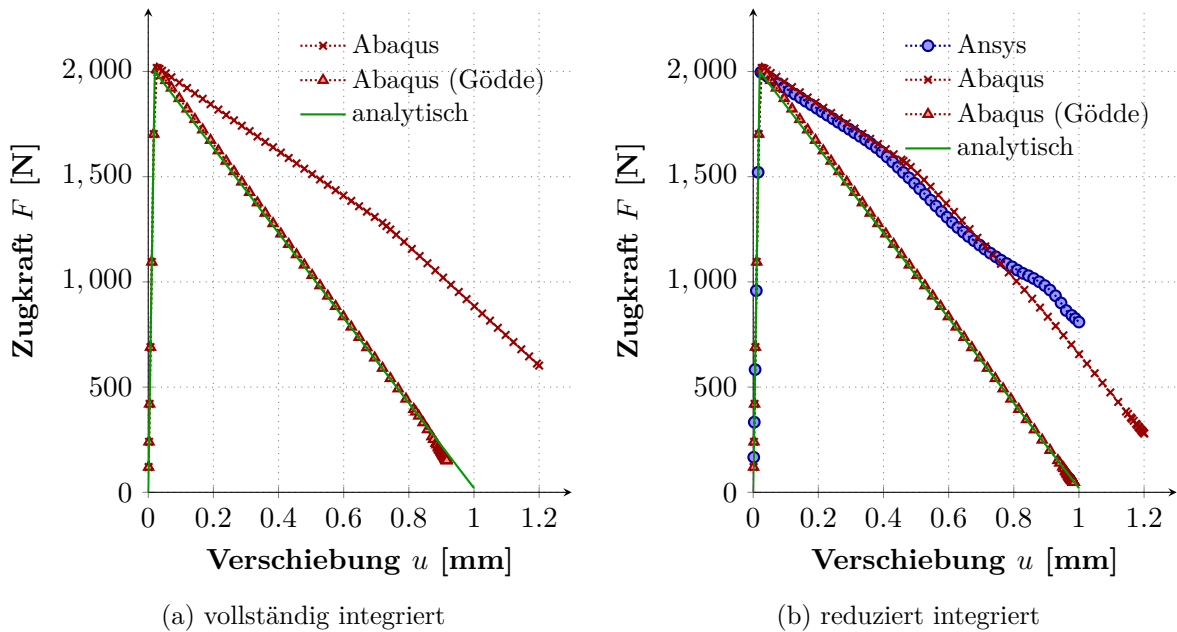


Abbildung 3.5.: Kraft-Verformungs-Linie, 2D mit 8 Knoten

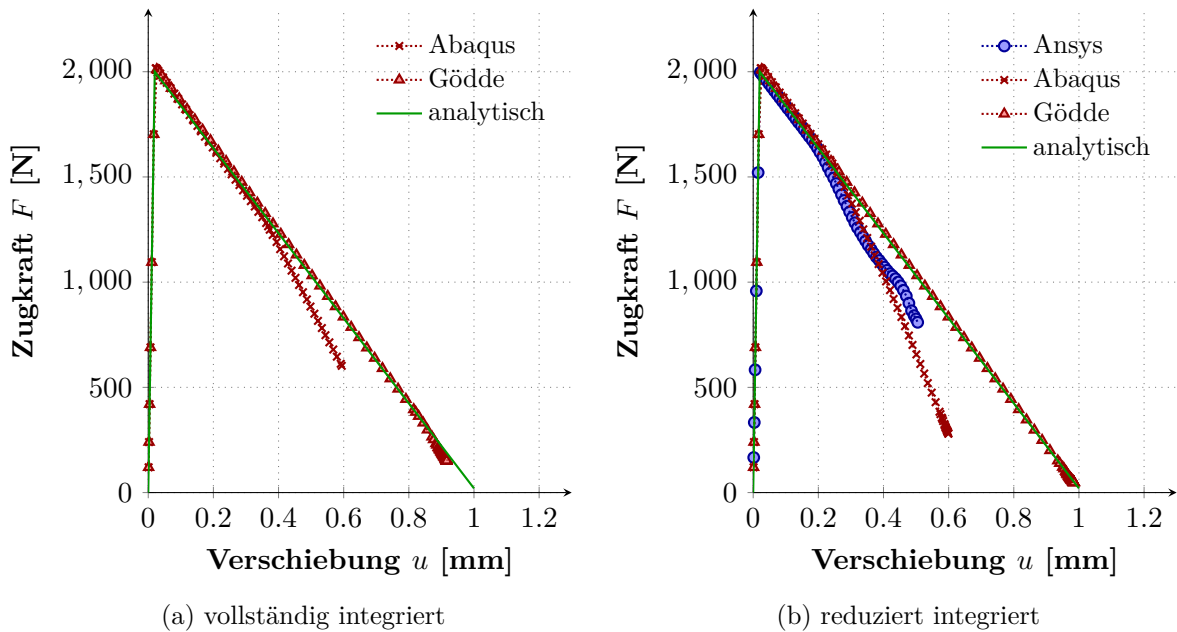
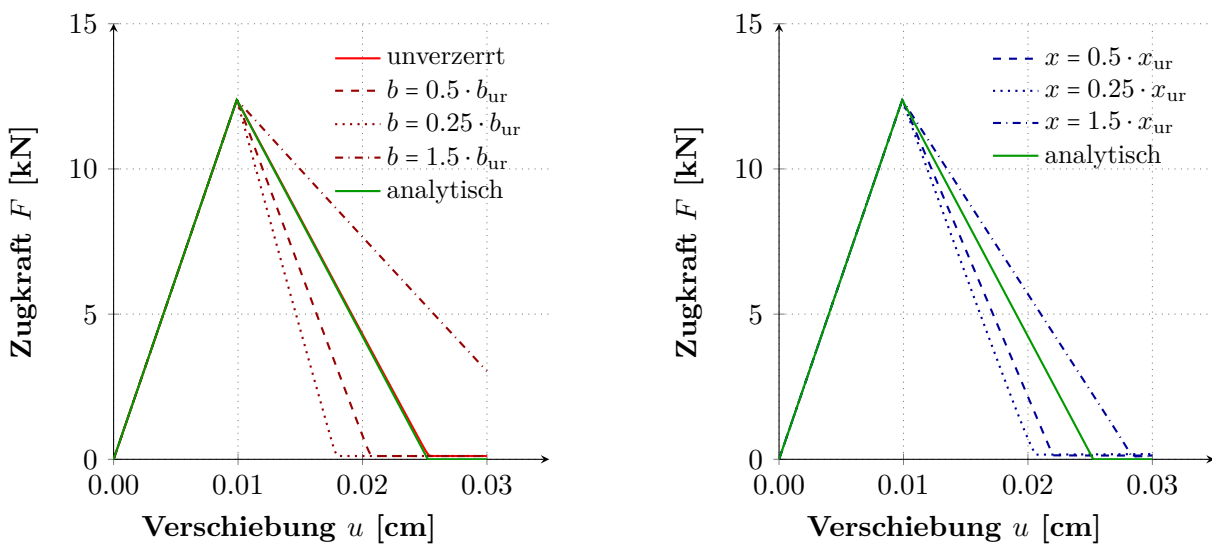


Abbildung 3.6.: Kraft-Verformungs-Linie, Verformung aus Dehnungen (gemittelt aus allen IP) bestimmt, 2D mit 8 Knoten

Bis zum Erreichen des ersten Knicks in der jeweiligen Lösung ist dennoch erkennbar, dass zwischen den jeweils implementierten Definitionen und der von Gödde (2013) wieder der bereits oben erwähnte Faktor 2 liegt: Würde die Gerade gedanklich über den jeweiligen „Störpunkt“

hinaus verlängert, würde der Graph für  $u = 1$  mm bei der Hälfte der maximalen Zugkraft enden. Analog kann auch bei Darstellung der Kraft-Verformungs-Linie aus den Dehnungen eine Korrektur der Lage der Kurve hin zur analytischen Lösung, aber eine Verringerung der Verformung um den Faktor 2 beobachtet werden. Bei der Umrechnung muss ein Mittelwert der plastischen Dehnungen aus den vorhandenen Integrationspunkten je Element bzw. im Rissband gebildet werden, da diese sich ab dem Knick im Falle der implementierten Definitionen stark voneinander unterscheiden.

Aus der Tatsache, dass der Ansatz nach Gödde (2013) in allen Rechnungen eine nahezu exakte Übereinstimmung mit der analytischen Lösung liefert, kann abgeleitet werden, dass die zugehörige Definition der charakteristischen Länge wie angestrebt für das betrachtete Beispiel eine vollkommen objektive Lösung liefert. Wie Gödde (2013) außerdem in seiner Arbeit zeigt, liefern auch verzerrte Elementgeometrien und andere, durch ihn differenzierte Klassen der Rissbandausbildung ein in der Regel exaktes Ergebnis oder zumindest eine näherungsweise gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung.



(a) Verzerrung durch Variieren des Seitenverhältnisses ( $b_{ur}$  entspricht der ursprünglichen Elementbreite)

(b) Verzerrung durch Verschiebung eines Knotens in  $x$ -Richtung ( $x_{ur}$  entspricht der Ursprungsordinate)

Abbildung 3.7.: Kraft-Verformungs-Linie eines Zugversuchs nach Oliver (1989) mit verzerrten Elementen bzw. variierten Seitenverhältnissen

Beispielhaft ist in Abbildung 3.7 untersucht, wie sich eine Abweichung der Elementgeometrie von der quadratischen Form auf die *Abaqus*-Definition auswirkt ( $b$  ist die variierte Elementbreite in 3.8a,  $x$  ist die variierte  $x$ -Koordinate des verschobenen Knotens in 3.8b). Bei Definition der charakteristischen Länge nach Gödde (2013) zeigt sich dieses Verhalten aufgrund der gesamtheitlichen Betrachtung des Rissbands anstelle einer Betrachtung als Elementeigenschaft nicht.

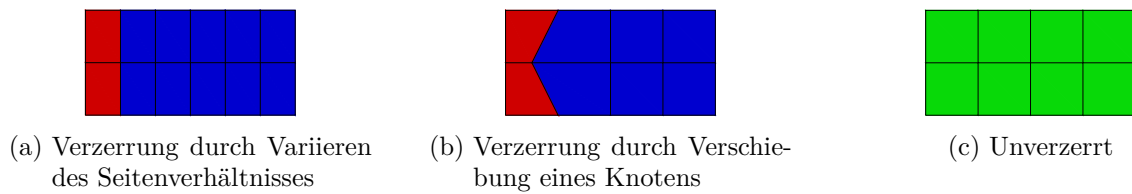


Abbildung 3.8.: Beispiel für verzerrte Elementgeometrie (rot: geschwächte Elemente bzw. Rissband)

### Fazit

Es zeigt sich in den betrachteten zweidimensionalen Elementen, dass die Definition nach Gödde (2013) in allen Fällen element- und integrationsunabhängig die analytische Lösung abbilden kann und damit eine objektive netzunabhängige Regularisierung liefert. Dies ist für die in den kommerziellen Programmen definierten Größen nicht gegeben: *Abaqus* liefert zwar für die Elemente 1. Ordnung zunächst ein besseres Ergebnis als ANSYS, allerdings beruht das „schlechtere“ Ergebnis von ANSYS auf einer falschen Theorie-Annahme auf Basis der Dokumentation, da aus dieser nicht hervorgeht, dass die Anzahl der Integrationspunktzeilen die abgebildete Rissanzahl vorgibt.

Dass diese zugrundegelegte Annahme nicht aus der Dokumentation hervorgeht, erschwert die sinnvolle Anwendung des Modells. Hinzu kommt, dass bei Abbildung eines einzelnen Risses die Verwendung von Elementen mit mehr als einem Integrationspunkt nur eingeschränkt möglich ist: Bei linearer Entfestigung wie im vorliegenden Fall müsste es entweder möglich sein, den Integrationspunkten im Element ein unterschiedliches Materialverhalten vorzugeben<sup>4</sup>, damit nur eine der Integrationspunktzeilen entfestigt. Alternativ müsste man den Elementen eine um den jeweiligen Faktor (bei mehr als einer Elementreihe steigert sich der Faktor auf ein Vielfaches von 2) korrigierte Spannungs-Dehnungs-Linie vorgeben, um den Effekt der Ausbildung zweier Risse bei der Berechnung zu kompensieren. Das ist im Fall des Zugversuchs und der einfach zu identifizierenden Rissrichtung und Integrationspunktzeilen möglich. Aber schon bei dreidimensionalen Elementen, bei denen die Integrationspunkte<sup>5</sup> unter Umständen nicht in Rastern angeordnet sind oder bei Problemen mit gekrümmter oder variierender Rissrichtung ist die Identifikation nicht mehr ohne Weiteres möglich. Hinzu kommt, dass bei linearer Entfestigung standardmäßig keine Regularisierung vorgesehen ist, was nur durch eine genauere Betrachtung der zugehörigen Formeln in der Dokumentation vermittelt wird ANSYS Inc., 2021.

Es ist festzuhalten, dass die Wahl der Integrationsordnung in ANSYS einen großen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Bei der Modellierung eines einzelnen bzw. einer bestimmten Anzahl Risse ist daher die Entwicklung plastischer Dehnungen in den Integrationspunkten sorgfältig zu beur-

<sup>4</sup> Dies ist in ANSYS nicht möglich; in *Abaqus* gelingt dies über eine Benutzer-Subroutine

<sup>5</sup> wie in ANSYS: 14 Integrationspunkte beim Solid186-Element

teilen und bei der Auswertung der Ergebnisse zu berücksichtigen. Am Beispiel des Zugversuchs, bei dem physikalisch nur ein Riss entstehen würde, ist erkennbar, dass die Verwendung voll integrierter Elemente andernfalls zu inkonsistenten Ergebnissen führt. Im Fall der exponentiellen Entfestigung ist der Parameter der charakteristischen Länge im Gegensatz zum linearen Ansatz direkt implementiert und muss nicht mehr in die Spannungs-Dehnungs-Linie in ANSYS eingerechnet werden, um die Netzabhängigkeit zu reduzieren. Das bedeutet allerdings auch, dass eine Beeinflussung des Entfestigungsverhaltens zur Sicherstellung einer korrekten Abbildung der physikalisch vorhandenen Rissanzahl schwieriger wird.

Die Ergebnisse aus *Abaqus* zeigen für Elemente 1. Ordnung im Vergleich zwar bessere Ergebnisse, bei den Elementen 2. Ordnung ist das Verhalten jedoch vergleichbar mit dem in ANSYS. Dieses Verhalten ist nicht wie in ANSYS über die Anzahl der abgebildeten Risse zu erklären (aufgrund der Inkonsistenz zu den Ergebnissen der Elemente 1. Ordnung), und wirkt aufgrund fehlender Erläuterung in der Dokumentation fast willkürlich (Dassault Systèmes, 2021).

Weder in der *Abaqus*- noch in der ANSYS-Dokumentation wird im Detail auf die Besonderheiten der Netzabhängigkeit bei Verwendung dieser verschmierten Rissmodelle eingegangen (Dassault Systèmes, 2021; ANSYS Inc., 2021). Dieses einfache Beispiel zeigt jedoch, dass eine falsche Verwendung bzw. eine Verwendung unter falschen Annahmen große Auswirkungen haben kann. Natürlich ist die Verwendung für unbewehrte Bauteile nicht die Regel und der einfache Zugversuch eher ein akademisches Beispiel, dennoch sollten diese Einschränkungen bei der Modellierung bekannt sein, sodass der Einfluss bei jedem Modell sinnvoll beurteilt werden kann.

Im Hinblick auf die Nachrechnung von Biegebalken- und Plattenversuchen soll im folgenden Kapitel auf die zusätzlichen Besonderheiten im Hinblick auf die Verwendung der charakteristischen Länge bei Biegung, insbesondere auch bei räumlicher Rissbildung im Vergleich zum bisher betrachteten Zugversuch, eingegangen werden.

#### 3.1.2. Biegung

Wie bereits in Kapitel 2.2.5 erwähnt, besteht im Vergleich zum betrachteten Zugversuch bei Biegeproblemen wie dem Biegezugversuch die Besonderheit einer variierenden Rissbreite über das Rissband. Vereinfachend kann die vereinfachte Definition nach Gleichung (2.39) Anwendung finden, was im Rahmen der FE-Berechnung leichter umzusetzen ist. Würde man die exakte Definition implementieren, müsste man u.U. jedem Integrationspunkt bzw. jedem Bereich (vgl. Abbildung 2.29) iterativ ein eigenes Materialgesetz zuweisen. Dies ist im Falle des Biegezugversuchs noch überschaubar, im allgemeinen Fall jedoch sehr aufwendig.

Im folgenden Kapitel werden Messdaten aus Versuchen an Estrich-Biegebalken mithilfe der ver-

einfachten Definition nach Gleichung (2.39) nachgerechnet. Diese Definition hat sich nach Götde (2013) für die Nachrechnung von Biegezugversuchen als ausreichend exakt und praktikabel erwiesen.

### Versuchsdaten

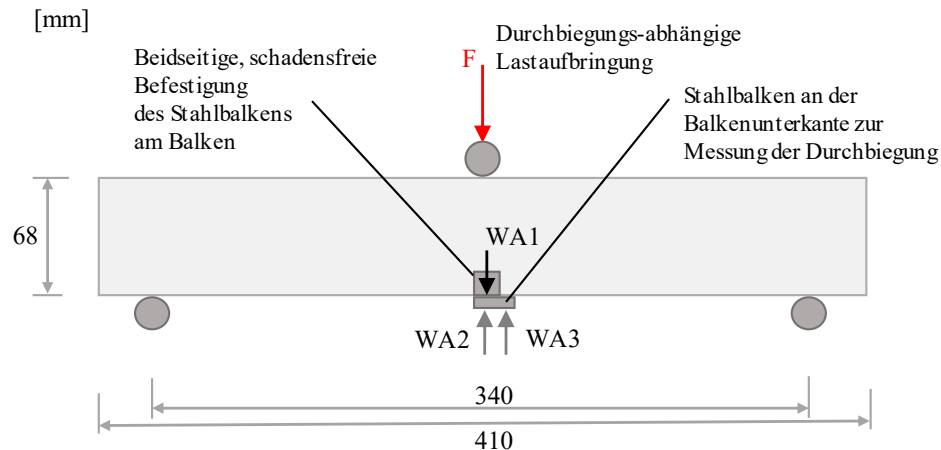


Abbildung 3.9.: Randbedingungen für einen verformungsgesteuerten Biegezugversuch, wobei die Messung aus Wegaufnehmer WA1 dazu dient, die Lastaufbringung zu steuern und WA2 und WA3 kontrollieren die Schiefstellung des Stahlbalkens, der zur Messung der Durchbiegung WA1 an der Unterseite des Balkens positioniert ist (vgl. Abb. C.1)

Im Rahmen einer Untersuchung am Lehr- und Forschungsgebiet für Werkstoffe im Bauwesen (BUW) wurden Prismen verschiedener Dicke systematisch untersucht. Ziel war es, den Einfluss der Einbauhöhe von Estrichen auf über die Höhe veränderliche Materialeigenschaften infolge unterschiedlich stark eingebrachter Verdichtungsenergie zu erfassen. Hierfür wurden Proben aus unterschiedlich dicken Platten entnommen, wobei die Proben höherer Dicke über die Höhe zur Prüfung in zwei bis drei Teile geteilt wurden. So konnten Zug-, Druck- und Biegezugfestigkeit für verschiedene Dicken und über die Höhe bestimmt und verglichen werden. Für die vorliegende Arbeit wurden drei Proben einer 68 mm dicken Platte zusätzlich bis in den Nachrisszugbereich belastet, sodass hier das Nachrissverhalten mithilfe des CDP-Modells aus *Abaqus* nachgerechnet werden konnte. Im Hinblick auf das verwendete Material sind keine genaueren Details zur Zusammensetzung des Estrichs bekannt. Der Versuchsaufbau des Drei-Punkt-Biegezugversuchs kann Abbildung 3.9 (Foto des Versuchsaufbaus siehe Abbildung C.1 im Anhang) entnommen werden.

Die Proben zur Bestimmung der Nachrisszugfestigkeit besitzen jeweils eine Stützweite von

340 mm, eine mittlere Länge von 410 mm und Querschnittsabmessungen von  $d/b = 68/61$  mm. Die aus den Festigkeitsprüfungen bestimmten Werte können dem Anhang (Anhang C) entnommen werden, und dienen der Simulation als Eingangswerte für die Materialparameter der Druck- und Zugfestigkeit (abgeleitet aus der Biegezugfestigkeit  $\approx 2 \cdot$  Zugfestigkeit). In *Abaqus* wird für die Bruchenergie ein Wert zwischen 0.04 und 0.12 N/mm empfohlen. Gödde (2013) verwendet Werte zwischen 0.07 und 0.12 N/mm. Die Bruchenergie wird in den folgenden Nachrechnungen zunächst innerhalb des Intervalls  $[0.04; 0.12]$  N/m variiert und die Kurve so möglichst gut angenähert.

### System und Elementwahl

In Abbildung 3.10 ist beispielhaft ein System mit  $32 \times 9$  Elementen dargestellt. Die Beanspruchung wird als Verformung an den beiden mittleren, oberen Knoten eingepreßt, um auch das Nachbruchverhalten numerisch zu erfassen. Zur Veranschaulichung der Netzunabhängigkeit der Ergebnisse werden drei unterschiedliche Netze betrachtet: 16, 32 und 64 Elemente über die Stützweite, jeweils 9 Elemente über die Höhe. Das CDP-Modell (*Abaqus*) wird mit der vereinfachten Definition für  $l_{ch}$  nach Gödde (2013) und einer exponentiell abfallenden Spannungs-Rissweiten-Beziehung entsprechend

$$\sigma(w) = f_t \cdot e^{-w \frac{f_t}{G_{ft}}}, \quad \text{mit} \quad w = \varepsilon_x^{pl} \cdot l_{ch} \quad (3.4)$$

verwendet. Die charakteristische Länge ergibt sich nach vereinfachter Definition und nach Abbildung 2.28 zu

$$l_{ch} = 2 \cdot l_{x, \text{Elem}} \quad (3.5)$$

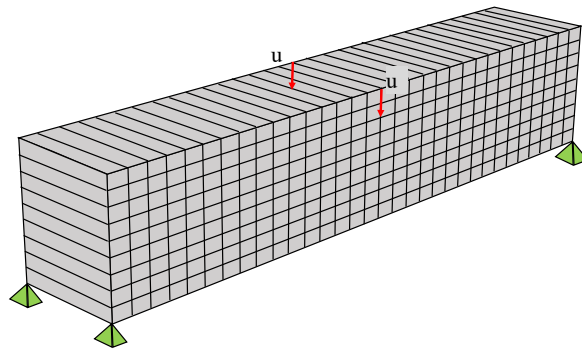
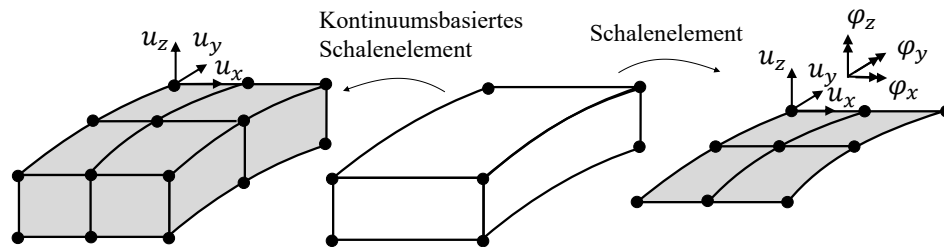


Abbildung 3.10.: Systemplot des Biegezugbalkens mit  $23 \times 9$  kontinuumsbasierten Schalenelementtyps SC8R

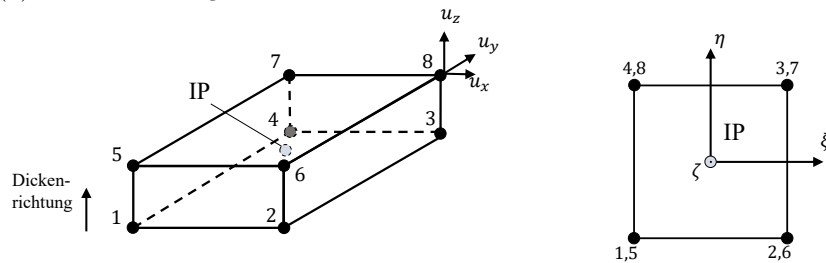
Das in dieser Arbeit verwendete kontinuumsbasierte Schalenelement SC8R entspricht geometrisch einem Kontinuumsselement und besitzt an jedem seiner acht Knoten drei Verschiebungs- und keine Verdrehungsfreiheitsgrade (siehe Abbildung 3.11). Mechanisch basiert das Element auf



einer Schalentheorie, bezieht also die inneren Kraft- und Weggrößen auf die Schalenmittelfläche und besitzt eine „Dickenrichtung“, in welcher entsprechend abweichende Definitionen für die Kinematik und die Materialintegration Anwendung finden. Aufgrund der geometrischen Form lässt sich das Element in Dickenrichtung stapeln (äußeres Mehrschichtenkonzept), bei nichtlinearem Materialverhalten kann es sinnvoll sein, innere „Layer“ zu definieren (inneres Mehrschichtenkonzept zum Beispiel zur Berücksichtigung von Bewehrungseinflüssen; hier nicht angewendet). Gemäß *Abaqus*-Dokumentation kann das Element Biegetragwirkungen sehr gut abbilden. Insbesondere Versteifungseffekte infolge Dicken- bzw. Poisson-Locking, welches durch parasitäre Dickenspannungen verursacht wird, kann durch Null-Setzen einer „effektiven“ Poisson-Zahl zusätzlich zur herkömmlichen Querdehnung verhindert werden (Gödde, 2013; Jun, 2002; Koschnick, 2004; siehe auch Abbildung 3.12). Im Hinblick auf die Lokalisierung infolge der Rissbildung dürfte im betrachteten 3-Punkt-Biegezugversuch theoretisch keine Schwächung der Rissbandelemente notwendig sein, da die Momentenlinie unter der Last ein Maximum aufweist und dort entsprechend der Spannungsanstieg eine Rissbildung unter der Last induziert. Allerdings zeigt sich in der Regel bei Betrachtung der plastischen Dehnungen, dass sich auch hier ein breiteres Rissband einstellt als erwartet. Da dieses Verhalten bisher nicht abschließend erklärt bzw. anders verhindert werden kann, werden in den nachfolgenden Berechnungen analog zum Zugversuch die beiden mittleren Elementreihen durch Reduzierung der Zugfestigkeit geschwächt. Wie hiermit im Hinblick auf die weiteren Simulationen in dieser Arbeit umgegangen wird, wird in Kapitel 4 erläutert.



(a) Unterscheidung zwischen kontinuumsbasiertem und klassischem Schalenelement



(b) Dickenrichtung = Richtung der Stapelung, lokales KOS und Ort des Integrationspunkts

Abbildung 3.11.: Definition des Elementtyps SC8R

Der Elementtyp SC8R weist nur einen Gauß-Integrationspunkt auf, was bei Biegung in der Schalenenebene eine Netzdichte mit mindestens zwei Elementen erforderlich macht (Dassault Systèmes,

2021). Insgesamt ist die Wahl kontinuumsbasierter Schalenelemente aufgrund der zugrundeliegenden Schalentheorie für die Anwendung auf Balken- und Plattensysteme gleichermaßen geeignet, und ist auch numerisch effizienter gegenüber anderen Elementtypen (Gödde, 2013). Nach Gödde (2013) zeigt sich bei Kontinuumselementen ein höherer Elementbedarf, der sich negativ auf den Rechenzeitaufwand auswirkt. Zusammenfassend weist der Elementtyp gegenüber reinen Kontinuums- und Schalenelementen folgende Vorteile auf (Gödde, 2013):

- numerische Effizienzsteigerung infolge der Schalentheorie bei biegebeanspruchten flächigen Strukturen gegenüber der Kontinuumstheorie,
- Mehrschichtenkonzept zur Kompensation des linearen Dehnungsansatzes über die Höhe,
- Hoher Lokalisierungsgrad und effektive Regularisierung infolge niedriger Elementordnung.

#### Simulationsergebnisse

In Abbildung 3.12a ist die zur eingepprägten Verschiebung korrespondierende Kraft gegenüber der Verschiebung in Balkenmitte an der Unterseite dargestellt. Vergleichend sind die Berechnungen dreier Vernetzungen dargestellt, und zusätzlich auch Berechnungen mit der charakteristischen Länge nach *Abaqus*. Es ist erkennbar, dass die Lösungen für die Definition nach Gödde (2013) netzunabhängig übereinstimmen und die Lösungen für die charakteristische Länge nach *Abaqus* leicht davon abweicht, aber in sich auch netzunabhängige Kurven zeigt. Worauf die Abweichung zurückzuführen ist, konnte nicht abschließend geklärt werden. Im weiteren Verlauf wurde das  $32 \times 9$ -Netz weiterverwendet. In Abbildung 3.12b wird der Einfluss der effektiven Querdehnzahl, die bei Schalenelementen definiert werden kann, untersucht. Dieser Parameter beeinflusst die Lokalisierung maßgeblich: Wird die effektive Querdehnzahl gar nicht definiert, wird der Default-Wert  $\nu_{\text{eff}} = 0.5$  angesetzt, was zu einer schlechten Lokalisierung und damit einer deutlichen Überschätzung der maximalen Kraft führt. Damit geht ein nahezu horizontaler Entfestigungsast und eine Überschätzung der Bruchenergie einher. Bei Reduzierung dieser Querdehnzahl senkt sich die Kurve ab und es ergibt sich der erwartete Verlauf für  $\nu_{\text{eff}} = 0$ .

In Abbildung 3.13 sind die Versuchsergebnisse zusammen mit einer homogenen (mit zwei verschiedenen Werten für die Bruchenergie  $G_f$ ) und einer über die Höhe in den Materialeigenschaften variierten Modellierung dargestellt. Für die letzte Variante wurden die Elemente über die Höhe in drei Bereiche eingeteilt und den Elementen die an den gesägten Balken ermittelte Druck- und daraus abgeleitete Zugfestigkeit zugewiesen, wobei die Bruchenergie unveränderlich über die Höhe bei  $G_f = 0.16 \text{ Nmm/mm}^2$  gehalten wurde (jeweils in  $\text{N/mm}^2$ ):

Obere Schicht:  $f_c = 32, f_t = 3.0$

Mittlere Schicht:  $f_c = 25, f_t = 2.8$

Untere Schicht:  $f_c = 24, f_t = 2.6$

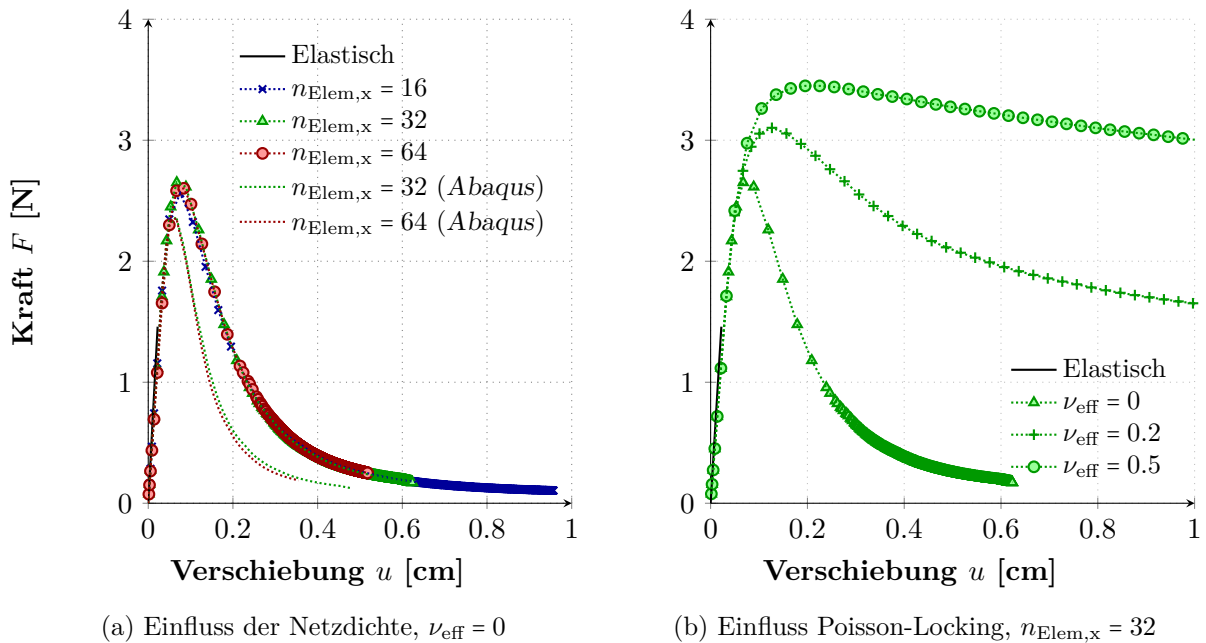


Abbildung 3.12.: Simulation Biegezugversuch, Einflüsse aus Netzdichte und Poisson-Zahl,  $G_f = 0,16$  N/mm

Für den homogenen Fall wurden die Werte aus der unteren Schicht angesetzt. Als E-Modul wird  $E = 33000$  N/mm<sup>2</sup>, als Querkontraktionszahl  $\nu = 0,2$  vorgegeben. Im Diagramm ist erkennbar, dass sich zum einen eine gute Übereinstimmung zwischen den Versuchsergebnissen und den Kurven einstellt und zum anderen, dass das variierende Verhalten über die Querschnittshöhe im Gegensatz zur Bruchenergie kaum einen Einfluss auf den abfallenden Ast zu haben scheint. Der abfallende Ast stimmt mit dem Verlauf der dritten Probe für  $G_f = 0,16$  Nmm/mm<sup>2</sup> am besten überein, die beiden anderen Proben liegen etwas darunter und stimmen im Nachbruchbereich besser mit der niedrigeren Bruchenergie überein.

In Abbildung F.1 im Anhang F.1 sind beispielhaft die Spannungen und plastischen Dehnungen über die Querschnittshöhe dargestellt. Die Umrechnung der plastischen Dehnungen für eine Durchbiegung von  $u = 0,64$  mm am Ende der Berechnung nach Gleichung (2.35) liefert eine Rissweite von  $w = \varepsilon_x^{\text{pl}} \cdot l_{ch} = 0,025 \cdot 21,25$  mm = 0,53 mm. Da die Rissweite im Versuch nicht gemessen wurde, kann dieser Wert nicht mit Versuchswerten verglichen werden. In der DIN EN 14651:2007, die allerdings für Beton mit metallischen Fasern gilt, wird eine Formel zur Umrechnung der „crack mouth opening displacement“ CMOD in eine Durchbiegung angegeben:

$$\delta = 0,85 \cdot CMOD + 0,04, \quad \text{mit } CMOD \text{ in [mm].}$$

Nach dieser Formel ergäbe sich bei Einsetzen der umgerechneten Rissweite für CMOD eine Durchbiegung von 0,49 mm, also ein etwas geringerer Wert als die ermittelte Durchbiegung

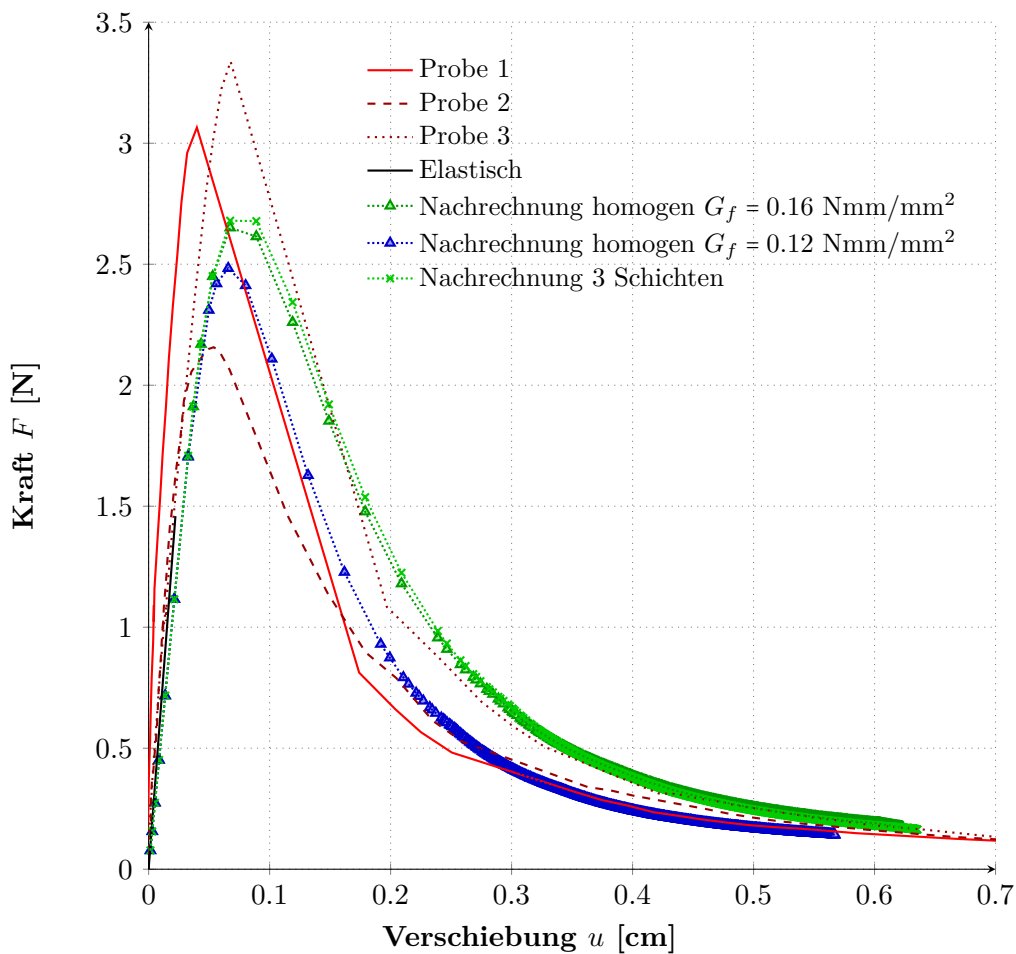


Abbildung 3.13.: Nachrechnung Biegezugversuch (Messdaten aus Roschkowski, 2021)

von etwa 0.64 mm, aber zumindest die Größenordnung ist passend. Die Abweichung kann aus der fehlenden Eignung für Estrich der CMOD-Formel, aber auch aus Versuchsungenauigkeiten rühren. Die Ursache wird hier nicht genauer untersucht.

### Fazit

Die Untersuchungen zu infolge Biegung induzierten Rissen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Messdaten und Simulation eines Biegezugversuchs bis in den Nachbruchbereich. Dass der gewählte Elementtyp inklusive der Regulierung von Locking-Effekten, die das Rissverhalten numerisch beeinflussen können, für die Abbildung von biegebeansprucht reißen Strukturen gut geeignet ist, bestätigen die Simulationsergebnisse. Durch die vereinfachte Definition der charakteristischen Länge nach Gödde (2013) ist keine Netzabhängigkeit erkennbar, sodass das hier verwendete Modell für die weitere Validierung gebetteter Strukturen herangezogen wird. Zunächst sind jedoch Festlegungen zur Dämmsteifigkeit und zur Kontaktmodellierung zu treffen.

## 3.2. Bettungsmodellierung

### 3.2.1. Modellierung des Aufschüsselns: Kontaktproblem

Wie in Kapitel 2.1.1 erläutert, kann es vor allem während der Erhärtung infolge von Schwinden zu einem Aufschüsselns der Estrichplatte kommen, dem das Eigengewicht entgegenwirkt. In Abhängigkeit der Geometrie, der Estrichrezeptur und den äußeren Randbedingungen führt dies zu einer initial aufgeschüsselten Verformungsfigur und einem initialen Spannungszustand aus Zwang infolge Eigengewichts. Daraus ergeben sich für die Modellierung zwei Problemstellungen: Zum einen die Ermittlung der Initialverformungen und -spannungen, zum anderen die Modellierung des Kontaktproblems, sobald sich die Plattenecke infolge äußerer Belastung wieder auf dem Dämmstoff ablegt.

#### Vorverformungen aus Schwinden

Um den Einfluss auf die Rissbildung zu erfassen, wurden sowohl die Schwindverformungen experimentell aufgezeichnet als auch die Initialverformung und Vorbeanspruchung bei der Nachrechnung der Plattenversuche berücksichtigt. Eine tiefer gehende Einarbeitung in die komplexe Problematik der Erhärtungs- und Schwindsimulation würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Nietner (2009) hat zur Untersuchung des Schwindverhaltens von Betonen und Estrichen das FE-Programm *croc* entwickelt (vgl. Nietner, 2009, *croc-Handbuch* (2019)<sup>6</sup>). Um das Schwindverhalten der in dieser Arbeit untersuchten Platte zu berücksichtigen, wurden die Ergebnisse einer *croc*-Simulation als Ausgangspunkt der eigenen Rissimulation verwendet.

Bei der in *croc* durchgeführten Simulation handelt es sich um eine gekoppelte Wärme- und Feuchtetransport-Berechnung, wobei sich die Estrich-Eigenschaften infolge Hydratation während der Berechnung fortlaufend ändern. Für Informationen zu den Eingangsparametern sei auf die Angaben in Anhang B verwiesen. Für die nichtlineare Simulation wurden für die feuchte-technischen Materialkennwerte (Hydratationsgrad abhängig von der Wärmeentwicklung, Festigkeitsentwicklungen abhängig vom Hydratationsgrad) Annahmen basierend auf Literaturangaben (Wiegrink, 2002, Künzel, 1994, Foos, 2005) und Erfahrungswerten getroffen. Hinsichtlich der Zusammensetzung und korrespondierender Eigenschaften wird ein üblicher Zementestrich zugrunde gelegt, da genauere Angaben zur Zusammensetzung für den im Versuch verwendeten Estrich (vgl. Kap. 4) nicht näher bekannt waren. Es ist aufgrund des zusätzlichen Gips-Anteils im verwendeten Estrich davon auszugehen, dass die Annahme eines rein zementgebundenen Estrichs in der Simulation nur eine Näherung liefert. Auch wird der errechnete Spannungszustand aufgrund fehlender Dehnungsmessung und damit fehlender realer Messwerte während der Erhärtung nur näherungsweise mit dem tatsächlichen Zustand übereinstimmen. Für die angestrebte Untersuchung, inwieweit Vorverformung und eingeprägte Zwangsspannungen überhaupt

<sup>6</sup> geschrieben in FreePascal zur Berechnung gekoppelter thermischer, hygrischer und mechanischer Probleme

Einfluss auf die Rissbildung haben, ist dieser Ansatz jedoch ausreichend.

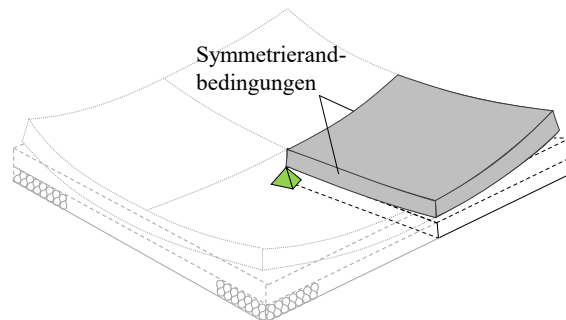


Abbildung 3.14.: Symmetrierausnutzung bei Simulation der Aufschüsselung der Platte infolge Schwinden

In der Schwind-Simulation wird nur ein Viertel der Platte modelliert (vgl. Abbildung 3.14), um den erheblichen Rechenzeitaufwand möglichst gering zu halten. Die Viertelplatte wird in Plattenmitte (Kreuzungspunkt der Symmetrieachsen) vertikal gehalten und weist mechanisch nur Symmetrie-Randbedingungen auf (Unterbau bzw. Dämmstoff werden in *croc* nicht modelliert). Diese Lagerung wurde aufgrund der erwarteten Verformungsfigur gewählt (Abheben der Ecken und Ränder). Aufgrund der isolierenden Folie zwischen Estrich und Unterbau spielt der Unterbau für den simulierten Wärme- und Feuchtetransport keine Rolle. Der Lastfall Eigengewicht wird daher auch erst nach Import in *Abaqus* und unter Bettungsrandbedingungen betrachtet. Da sich herausgestellt hat, dass der Einfluss der so ermittelten Eigenspannungen auf die Ergebnisse im untersuchten Fall vernachlässigbar ist (vgl. Abbildung F.4 im Anhang), wurde schließlich nur die aufgeschüsselte Verformungsfigur aus *croc* als Ausgangszustand für die weiteren in *Abaqus* untersuchten Lastfälle verwendet. Hierauf wird bei der Auswertung der Plattenversuche noch genauer eingegangen. Die *croc*-Simulation lieferte demnach lediglich die Verschiebungsfigur relativ zur fest gehaltenen Plattenmitte, was beim späteren Vergleich mit den Messwerten berücksichtigt werden muss. Die Vorgabe des Verformungszustands erfolgte bei Übernahme des Elementnetzes aus *croc* über die Definition der Knotenkoordinaten entsprechend der verformten Konfiguration. Für die Vorgabe eines initialen Spannungszustands gibt es in *Abaqus* verschiedene Möglichkeiten: Der Spannungszustand kann elementweise vorgegeben werden, d.h. in Form von elementweise gemittelten Spannungen. Alternativ wird den Integrationspunkten der Elemente durch Verwendung einer Benutzer-Subroutine die ungemittelte Spannung zugewiesen.

### Modellierung des Kontakts

In kommerzieller Software wie ANSYS oder *Abaqus* sind Verfahren zur Kontaktmodellierung implementiert, die zum Beispiel über Penalty-Verfahren verhindern, dass sich zwei Körper durchdringen. In der Regel ist ein Körper dabei als „Master“ bzw. „Contact“-Körper und der andere als „Slave“- bzw. „Target“-Körper definiert. Diese Definition sollte sich u.a. nach der Krümmung der Oberflächen, der Steifigkeit der in Berührung kommenden Materialien sowie der Netzfeinheit der beiden Körper richten, um ein stabiles Verhalten sicherzustellen (ANSYS Inc., 2021). Es gibt verschiedene Verfahren, den Kontakt zu modellieren. In jedem Fall entsteht dadurch eine zusätzliche nichtlineare Komponente, die die Stabilität der Berechnung beeinflusst. Da die Bewegung des Estrichs auf den Dämmstoff über eine geringe Distanz erfolgt und der zurückgelegte Weg im Vorhinein bekannt ist, soll der Modellaufbau nicht durch komplexe Kontaktbedingungen verkompliziert werden. Um außerdem eine gewisse Transparenz bei der Modellierung des Kontakts zu gewährleisten, was bei den vorimplementierten Algorithmen nicht zwingend gegeben ist, wird der Kontakt stattdessen über nichtlineare Federn modelliert, die zwischen den kontinuumsbasierten Schalenelementen des Estrichs und den ebenfalls durch Federn modellierten Dämmstoff zwischengeschaltet sind.

In Abbildung 3.15 ist der theoretische Ablauf bei der Modellierung des Kontakts durch Ablegen der Platte infolge des Eigengewichts nach Aufschlüsseln infolge von Schwindeinflüssen zu sehen. Links ist die reale Situation dargestellt: Zunächst ist nur der Dämmstoff frei in der Schalung eingebaut (a). Unmittelbar nach der Betonage ist der Dämmstoff durch das Eigengewicht (EG) der Platte um ein unbekanntes Maß komprimiert (b). Infolge des Erhärtings- und Schwindprozesses schüsselt die Platte auf, sodass der Dämmstoff an den Rändern und Ecken entlastet wird, da sich die Platte anhebt, und in Plattenmitte weiter zusammengedrückt wird (c). Um diesen Vorgang näherungsweise korrekt numerisch abzubilden, werden die Verformungsfigur sowie ggf. die Spannungen infolge von Erhärtung und Schwinden aus *croc* nach *Abaqus* importiert. Das Eigengewicht ist hier noch nicht berücksichtigt (d). In *Abaqus* wird die Platte auf ein System aus Einzelfedern gelagert, deren Steifigkeitseigenschaften die Bettung auf dem jeweiligen Dämmstoff abbilden (e, blaue Federn). Zwischen diesen Federn und der aufgeschüsselten Platte werden nichtlineare Einzelfedern angeordnet (rot), deren Steifigkeit zu Beginn der Simulation bis zum Überwinden der jeweiligen Federlänge näherungsweise Null ist und dann stark ansteigt und die Federn näherungsweise unendlich steif werden. Darüber wird der Kontakt zwischen Platte und Federsystem realisiert, sobald das Eigengewicht der Platte aufgebracht wird, und die Platte sich dadurch absenkt (f). Der Zustand in (f) sollte die reale Situation in (c) ausreichend gut annähern. Es entsteht lediglich ein Fehler aufgrund des unbekanntes Absolutmaßes der Einsenkung des Estrichs in den Dämmstoff (a → b). Im Versuch gemessen und entsprechend in der Simulation vorgegeben werden kann nur die relativ gemessene Verschiebung zwischen (b) und (c). Das Einsenkmaß von (a) nach (b) ist unbekannt, beeinflusst aber den tatsächlichen Abstand zwischen Estrich und Dämmstoff im aufgeschüsselten Zustand (c). Dadurch stimmt die Ordinate der

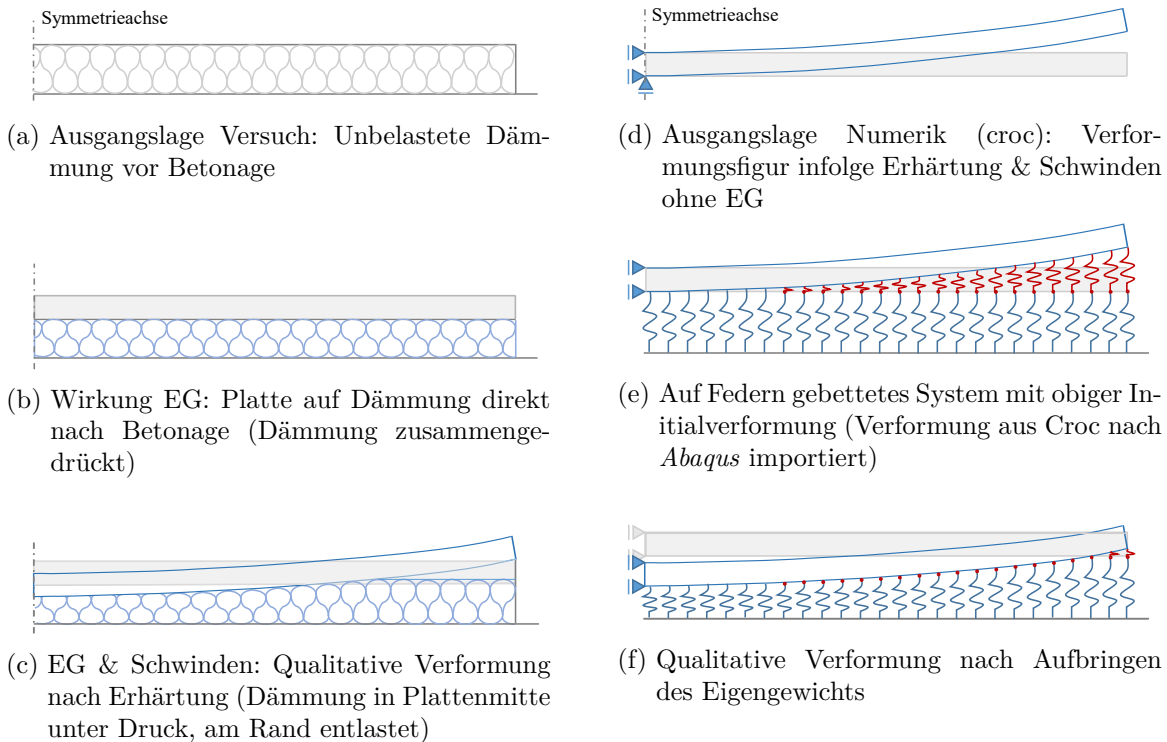


Abbildung 3.15.: Gegenüberstellung der Aufbringung des Eigengewichts (EG) und anschließender Schwindwirkung im Versuch (links) gegenüber der numerischen Modellbildung bei Berücksichtigung des Schwindeinflusses aus externer Rechnung (croc) als Vorverformung und anschließendem Aufbringen des Eigengewichts; Veranschaulichung der Kontaktmodellierung über zwischengeschaltete nichtlineare Federn (rot) zwischen Estrich und Bettung (blau, rechts)

Aufschüsselung an der Ecke (f) zum Endzeitpunkt nach Wirkung des Eigengewichts bei Vorgabe einer relativen Aufschüsselung (d) mit dem gemessenen, relativen (b-c) Maximalwert an der Ecke nicht zwingend überein, da diese auch von der Dämmstoffwirkung zuvor (a-b) abhängt. Diese Unsicherheit ist in den nachfolgend in Kapitel 6.3 und 7.1 beschriebenen Simulationen stets enthalten. Alternativ müsste die Ordinate der initial vorgegebenen Schüsselung iterativ an die aus den Messdaten (und damit ebenfalls nur genäherte) Schüsselung angepasst werden. Es wird davon ausgegangen, dass der Einfluss auf die zentrale Untersuchung des Schwindeinflusses gering ist, da dieser Effekt in allen Berechnungen gleichermaßen unberücksichtigt bleibt. Unter der Annahme, dass die Größenordnung dieses Fehlers im mm-Bereich und damit höchstens im Bereich üblicher Messgenauigkeiten liegt, wird dies nachfolgend vernachlässigt.

#### 3.2.2. Ermittlung der Steifigkeitseigenschaften des Dämmstoffs im Versuch

Neben dem Federgesetz für den Kontakt sind für die darunter angeordneten Federn zur Modellierung des Dämmstoffs die Steifigkeitseigenschaften zu ermitteln. Für die im Rahmen dieser



Arbeit durchgeführten Untersuchungen wurde als Dämmstoffmaterial Steinwolle gewählt, da die Verwendung als Dämmmaterial in der vorliegenden Anwendung üblich ist und Varianten gleichen Materials und unterschiedlicher Steifigkeit zur Verfügung stehen. Um einen Eindruck zu erhalten, welchen Einfluss die Steifigkeit des Dämmstoffs auf die Rissbildung hat, wurde der Dämmstoff mit der höchsten („TP“) und niedrigsten Zusammendrückbarkeit („TP-GP“, Herstellerangabe nach DIN EN 13162:2015, siehe Tabelle 3.2) im Sortiment der Firma Knauf Insulation ausgewählt.

Tabelle 3.2.: Kennzahlen des gewählten Dämmstoffmaterials (nach Produktdatenblatt, Zusammendrückbarkeit bestimmt nach DIN EN ISO 29770:2022 und daraus abgeleitete Bettungszahl KS nach Manns und Zeus (1980))

Bezeichnung Hersteller	Material	Dicke	Verkehrslast	Zusammendrückbarkeit $c_p$ (Messwert im Versuch)	KS [MN/m <sup>3</sup> ]
<b>TP</b>	Steinwolle	30 mm	bis 5 kPa	≤ 5mm (2.6 mm)	0.35 (0.67)
<b>TP-GP</b>	Steinwolle	20 mm	bis 20 kPa	≤ 1mm (0.4 mm)	1.75 (4.38)

### Versuche in Anlehnung an Zusammendrückbarkeitsermittlung

Die vom Hersteller angegebene, normative Zusammendrückbarkeit ist lediglich ein Anhaltswert für die Obergrenze der Steifigkeit des jeweiligen Dämmstoffs. Um eine realistische Steifigkeit und eine mögliche Belastungsabhängigkeit in den zugehörigen Simulationen berücksichtigen zu können, wurden Lastplattendruckversuche an Proben der beiden gewählten Dämmstoffe gefahren. Wie in Abbildung 3.16a zu sehen, besteht der zugehörige Versuchsstand aus zwei übereinander angeordneten Stahlplatten, wobei die untere fest montiert und die obere über eine Kalotte beweglich gelagert ist. Bei der Versuchsdurchführung wurde die Platte horizontal ausgerichtet und die Probekörper zentral darunter eingemessen. Über die obere Stahlplatte wurde kraftgesteuert eine Last auf den Probekörper aufgebracht. Die vorhandene Druckprüfmaschine (DPM) ist auf deutlich höhere Lasten ausgelegt und dadurch für sehr geringe Lastbereiche weniger geeignet, weshalb es vor allem bei den kleinen Probekörpern zu maschinenbedingten Ungenauigkeiten kommen kann. Die vertikale Verformung der Lastplatte wurde über vier an den Ecken angeordnete Wegaufnehmer gemessen (Abbildung 3.16a). Dabei betrug die Abtastfrequenz 20 Hz.

Die Versuchsdurchführung orientiert sich an den normativen Vorgaben in DIN EN ISO 29770:2022. Zur Bestimmung eines genaueren Last-Verformungs-Zusammenhangs wurden, neben den normativ vorgegebenen Spannungsniveaus von 0.25, 2 und 50 kPa, zusätzliche Laststufen berücksichtigt (vgl. Tabellen D.1 und D.2 in Anhang D.1). Die aus den Versuchen abgeleitete Zusammendrückbarkeit ist in Tabelle 3.2 in Klammern angegeben und stimmt trotz der ergänzten Zwischen-Laststufen zumindest für TP-GP mit der Einstufung des Herstellers überein. Für TP ergibt sich eine etwas geringere Zusammendrückbarkeit. Tendenziell passt die Einteilung von TP als weicher und TP-GP als steifer zu den Herstellerangaben.

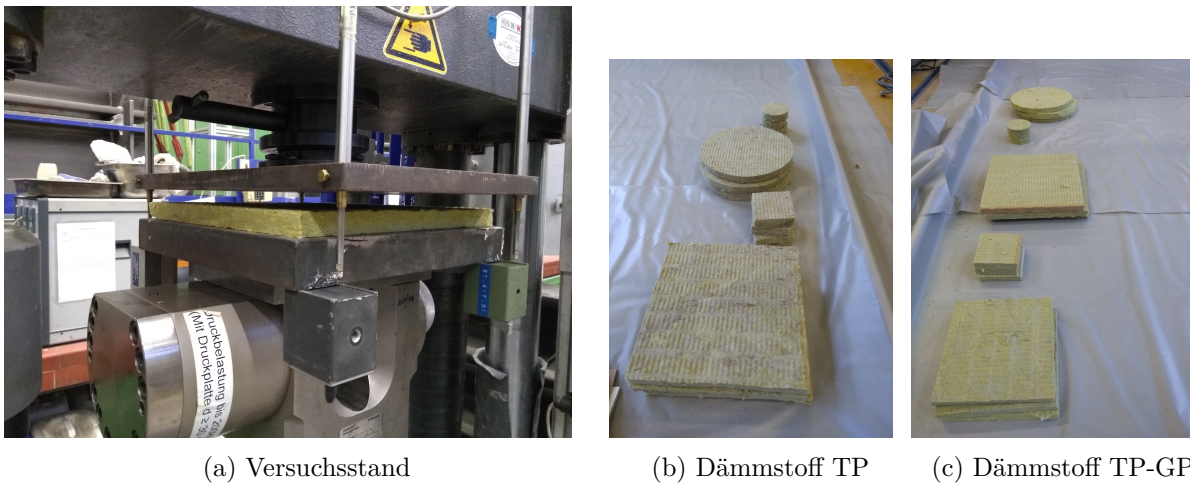


Abbildung 3.16.: Versuchsstand und Dämmstoffproben

Um einen Größeneinfluss im Hinblick auf die spätere Modellierung der Plattenversuche auszuschließen, wurden außerdem verschiedene Probekörperabmessungen und -formen untersucht. Die untersuchten Probekörpergrößen und -formen sind in Abbildung 3.16 (b) und (c) dargestellt. Für beide Dämmstofftypen wurden jeweils Probekörper mit folgenden Abmessungen untersucht:

- quadratisch mit Kantenlänge  $a = 10, 20, 30$  cm,
- rund mit Durchmesser  $D = 10, 30$  cm,

wobei die obere Lastplatte etwas breiter als der mit 30 cm größte Probekörper ist. Die Verwendung unterschiedlicher Probekörpergrößen dient zur Untersuchung des Einflusses aus Querdehnung. Bei der Prüfung der Estrichplatten wird die Querdehnung des Dämmstoffs zu einem gewissen Grad behindert sein. Bei der Bestimmung der Steifigkeit in der Druckprüfmaschine können sich die Probekörper jedoch beliebig zur Seite ausdehnen. Die Verwendung unterschiedlicher Größen und Formen (unterschiedlich große Mantelfläche) soll diesen Einfluss identifizieren bzw. auszuschließen helfen.

Die einzelnen Spannungsstufen wurden entsprechend DIN EN ISO 29770:2022 jeweils etwa 120 s gehalten. In Abbildung 3.17 ist links beispielhaft die über die vier Aufnehmer gemittelte Verschiebung der Lastplatte an den Proben TP-GP-20-4 bzw. TP-20-4 (quadratische Form, Abmessung 20 cm, Probe 4) über die Zeit dargestellt. Die Verläufe der übrigen Proben sind vergleichbar (vgl. Abb. 3.18). Es ist erkennbar, dass in der jeweiligen Laststufe die Verformung eine zunehmend schwächere Steigung beschreibt und nach jeweils 120 s fast horizontal verläuft. Dieses Verhalten wird mit zunehmendem Belastungsniveau ausgeprägter, in den niedrigeren Lastbereichen zeigt

sich tendenziell ein rein horizontaler Verlauf über die Zeit. Diese Änderung bzw. die Zeitabhängigkeit der Verformung unter höherer Last deutet darauf hin, dass bei zunehmender Belastung kein elastisches Verhalten mehr vorliegt, und damit bleibende Verformungen eingepreßt werden. Rechts ist die zugehörige Spannungs-Verschiebungs-Beziehung dargestellt. Die Last wurde in den ersten Versuchen (Proben 20-1 bis 20-3, vgl. Tabellen im Anhang D.1 bzw. Abb. 3.19) zunächst bis zu einer wirksamen Spannung von etwa  $1.25 \text{ N/mm}^2$  gesteigert (das entspricht dem 25-fachen der maximal normativ vorgegebenen Spannung zur Bestimmung der Zusammendrückbarkeit), um einen Anhaltspunkt für den funktionalen Verlauf der Spannungs-Verformungs-Beziehung zu erhalten. Da sich der relevante Verformungsbereich in den späteren Estrichversuchen bis maximal  $10 \text{ mm}$  bewegt, wurden die übrigen Probekörper lediglich bis zu einer Spannung von etwa  $0.06 \text{ N/mm}^2$  belastet. Dies entspricht eher einem Lastniveau, welches auch zur Bestimmung der normativen Zusammendrückbarkeit aufgebracht wird (höchste Laststufe  $0.05 \text{ N/mm}^2$ ). Zur näherungsweisen Überprüfung der normativen Herstellerangabe wird die Verschiebung bis  $120 \text{ s}$  nach Entlastung auf  $2 \text{ kPa}$  (entsprechend DIN EN ISO 29770:2022) aufgezeichnet, sodass hieraus der Vergleichswert in Tabelle 3.2 ermittelt wird.

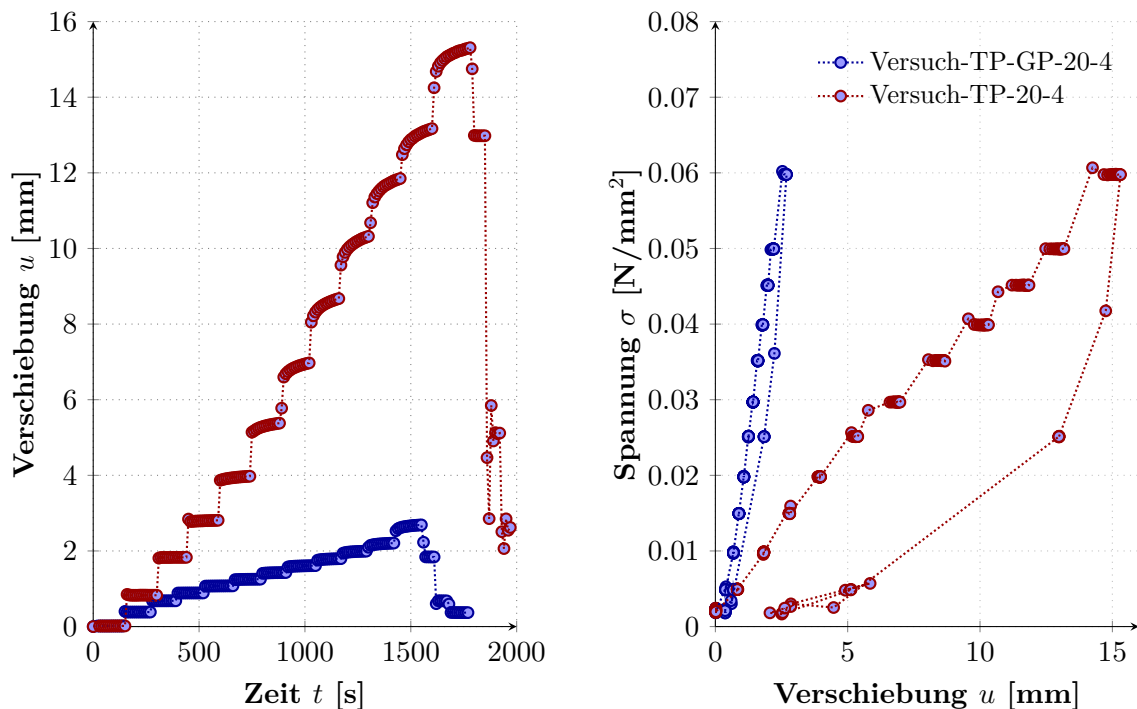


Abbildung 3.17.: Vertikale Verformung und Spannungs-Verformungs-Kurve aus dem Lastplattendruckversuch, beispielhaft dargestellt sind die Proben TP-20-4 und TP-GP-20-4 (Abtastfrequenz im Versuch  $20 \text{ Hz}$ , hier dargestellt  $0.1 \text{ Hz}$ )

Für eine bessere Übersichtlichkeit werden im Folgenden die dargestellten Verläufe auf die Messwerte jeweils am Ende der  $120 \text{ s}$ -Intervalle reduziert, und nur der Belastungspfad dargestellt. Die

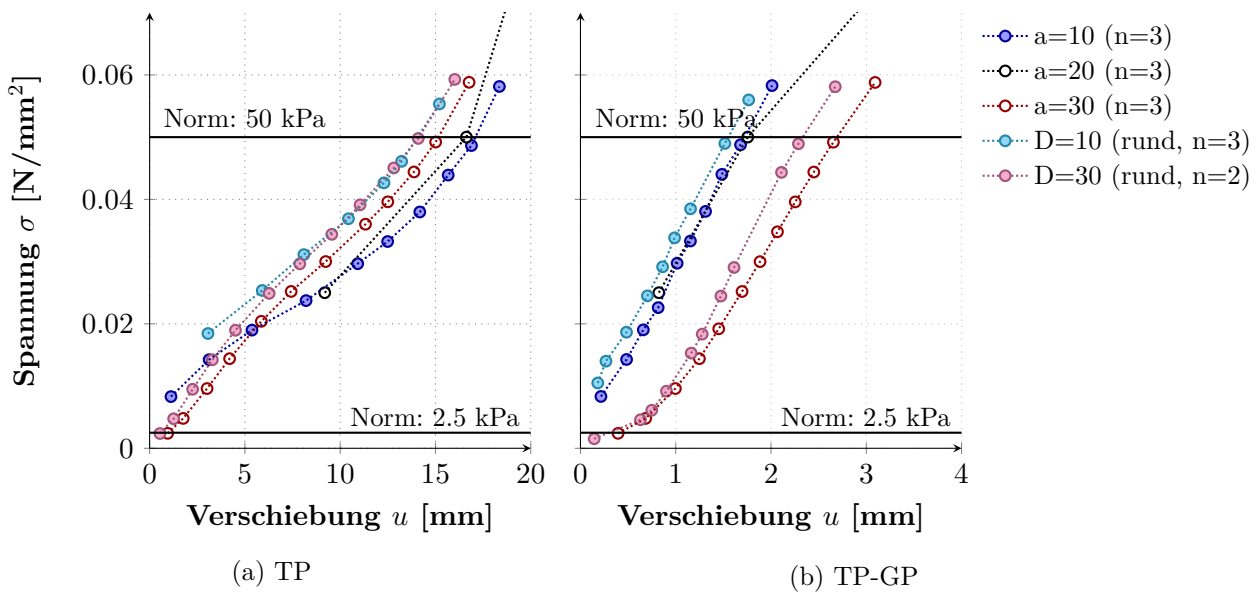


Abbildung 3.18.: Gemittelte Spannungs-Verformungs-Kurven für unterschiedliche Durchmesser ( $D$  [mm]) und Abmessung (quadratisch  $a$  [mm]) der Probekörper bei Prüfung im Lastplattendruckversuch mit Angabe der normativen Spannungsniveaus bei Bestimmung der Zusammendrückbarkeit

gemittelten Verläufe der Lastplattendruckversuche an den unterschiedlich großen bzw. geformten Proben sind in Abbildung 3.18 dargestellt (Durchmesser  $D$  [mm] bei runder und Abmessung  $a$  [mm] bei quadratischer Form). Die Lage der Verläufe variiert leicht zwischen den unterschiedlichen Prüfkörper-Größen und -Formen. Entscheidend für die Beurteilung der Steifigkeit ist die Steigung der Verläufe. Diese stimmt unabhängig von Probekörpergröße und -form näherungsweise gut überein, weshalb davon auszugehen ist, dass ein Einfluss aus Querdehnung in den vorliegenden Versuchen nicht messbar und daher vernachlässigbar gering ist. In Abbildung 3.19 ist der Spannungs-Verschiebungs-Verlauf der beiden Dämmstofftypen noch einmal anhand der 20er-Proben vergleichend dargestellt. Oben ist der Gesamtverlauf dargestellt, der eine Art S-Verlauf beschreibt: Anfangs etwas steiler (bis etwa 5mm (TP)/ 2.5mm (TP-GP)), danach ein Bereich mit geringerer Steigung (bis etwa 10/20mm) bis sich der Dämmstoff hin zu einem fast vertikalen Verlauf versteift (ab etwa 15/25mm).

Vereinfachend wird darauf verzichtet, dem beschriebenen Gesamtverlauf eine möglichst exakte funktionale Beziehung zuzuweisen. Stattdessen wird eine stückweise lineare Ausgleichsfunktion definiert, um diese vor allem an den im Rahmen der späteren Simulationen relevanten Bereich in Abb. 3.19 unten bestmöglich anzupassen bzw. diesen auch im Rahmen der Simulationen leichter variieren zu können. Für TP entspricht dieser Ausgleichsverlauf im relevanten Bereich bis maximal 10 mm einer Geraden, für TP-GP ist eine Steigungsänderung bei 2.5 mm berücksichtigt.

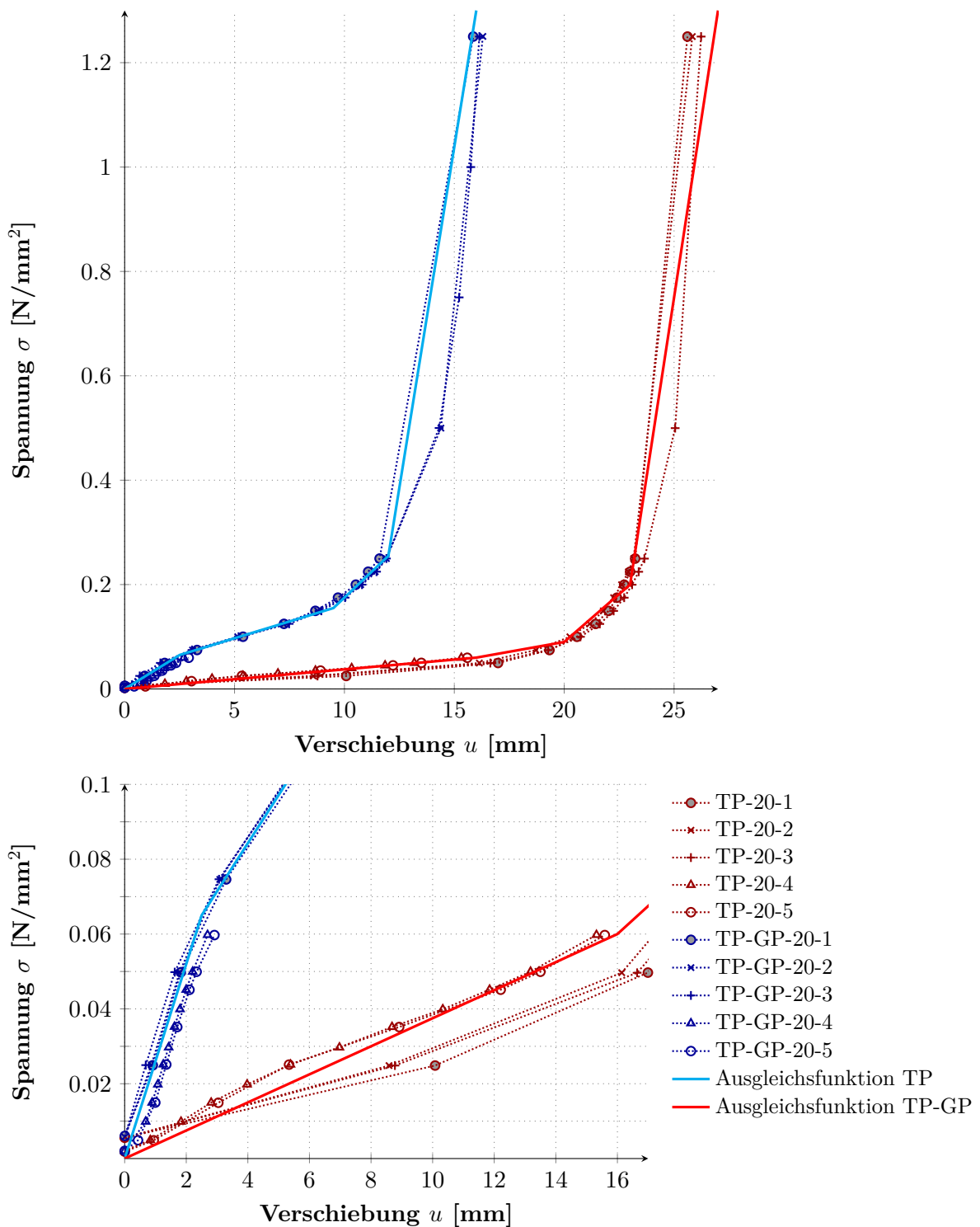


Abbildung 3.19.: Prüfung in der Druckprüfmaschine: Dämmstoff TP-GP (steifer) und TP (weicher), wobei oben der gesamte Versuchsverlauf dargestellt ist, unten ein vergrößerter Ausschnitt des hier relevanten Bereichs

#### Versuche im Anschluss an die Plattenprüfung

Unter anderem die normative Vorgabe, bei Bestimmungen der Zusammendrückbarkeit eine temporäre Zusatzlast von 48 kPa zu berücksichtigen und die Dicke  $d_B$  erst nach Entlastung zu messen, motiviert eine Untersuchung der Steifigkeitseigenschaften der Dämmstoffe nach Durchführung der Estrichversuche. Zunächst wurde der Einfluss der Dämmstoffunterlage ausgeschlossen: Der Vergleich der Ausgleichsfunktion mit einer nachträglich im Feld auf Sandbett eingebauten, unbelasteten Dämmstoffprobe (Feld, oV) zeigt eine gute Übereinstimmung (vgl. Abb. 3.21 in rot verglichen mit schwarz durchgezogener Ausgleichsgerade).

Zur Überprüfung des Eigengewichtseinfluss der aufliegenden Estrichplatte auf die Steifigkeitseigenschaften der Dämmstoffe wurden nach Prüfung der Platten und Entfernen der Bruchstücke Prüfungen an der darunterliegenden Dämmstofffläche durchgeführt. Zum einen wurden die so vorbelasteten (mV, im Vergleich zu unbelasteten Proben (oV)) Dämmstoffe im Versuchsfeld eingebaut (Feld) belassen und dort unter einem runden Laststempel mit 15 cm Durchmesser geprüft. Zum anderen wurden Probekörper mit diesem Durchmesser (15 cm) entnommen und in der Druckprüfmaschine (DPM) getestet. Die Lastaufbringung im Feld erfolgte analog zur Lastaufbringung im Zuge der Plattenprüfung (vgl. Kap. 6) mithilfe eines Hydraulikzylinders, der zwischen einem Stahlbalken und dem Laststempel (Kalotte, Durchmesser 15 cm, Laststempelaufbau siehe Abb. 3.20) angeordnet war. Im Vergleich zur Plattenprüfung wird hier eine feinere Kraftmessdose (bis 2 kN) aufgrund der geringeren Last zwischengeschaltet. Die Spannungs-Verschiebungs-Verläufe wurden um das Eigengewicht des Lastaufbaus nachträglich korrigiert.

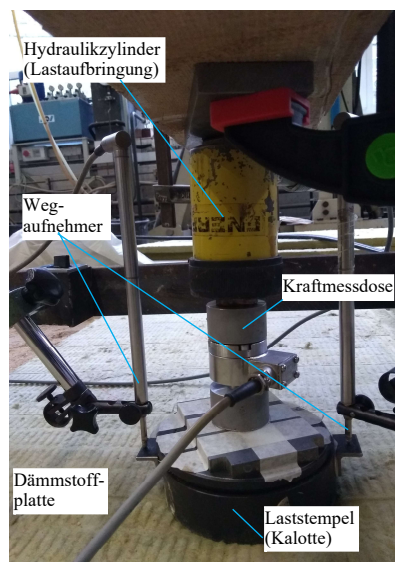
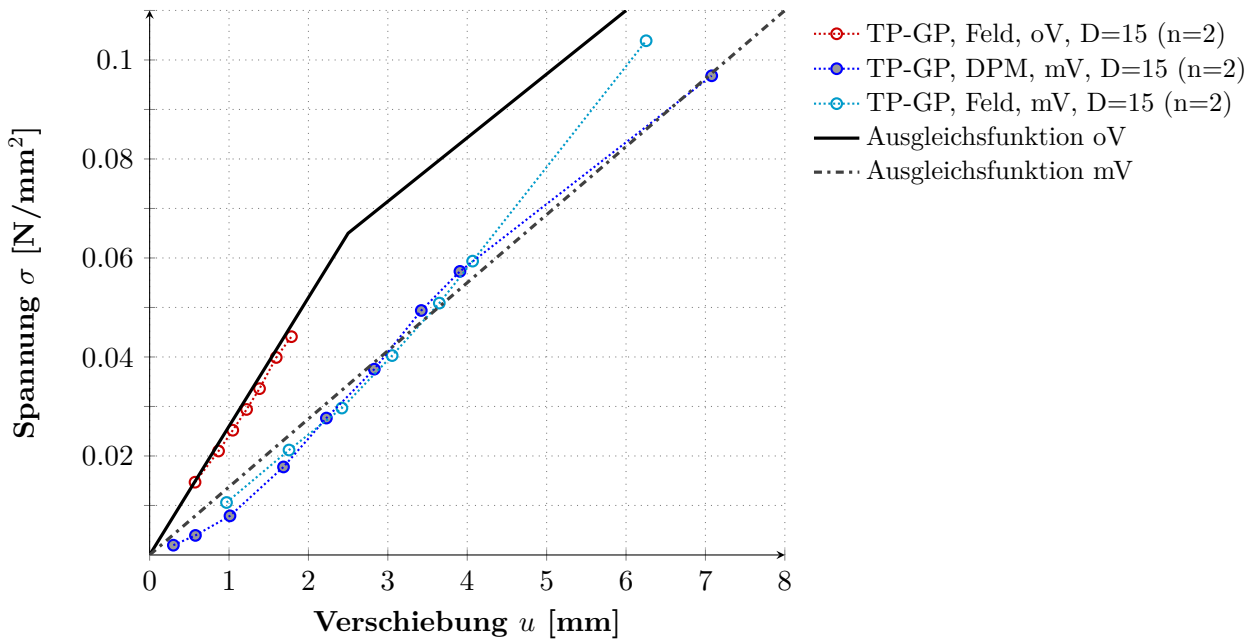


Abbildung 3.20.: Stempelaufbau im Dämmstoff-Feldversuch

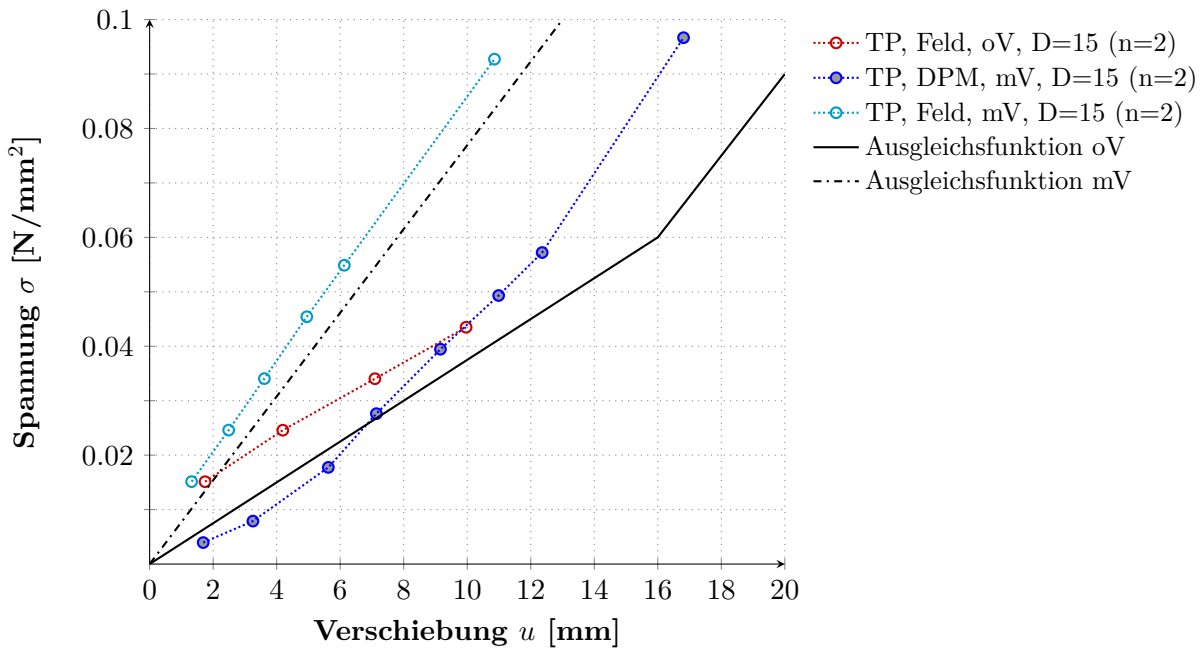
Die in Abbildung 3.21 für die Dämmstofftypen getrennt dargestellten Spannungs-Verschiebungs-Verläufe (blau) zeigen deutliche Abweichungen in der Steigung im Vergleich zu den Ausgleichsfunktionen der vorherigen Untersuchungen (schwarz, durchgezogen). Auch für den vorbelasteten Spannungs-Verschiebungs-Verlauf wird jeweils eine Ausgleichsgerade definiert (schwarz, gestrichelt). Die durch das Estrich-Eigengewicht und die anschließende Prüfung (vgl. Kapitel 6) vorbelastete, steifere Dämmstoffplatte in Abbildung 3.21a zeigt bei Belastung in der Druckprüfmaschine zu Beginn eine geringere Steifigkeit (DPM, mV) und erst im Bereich ab etwa 2 mm eine

ähnliche Steigung wie die der Ausgleichsfunktion ohne Vorbelastung. Ähnlich sieht der Verlauf bei Prüfung im Feld (Feld, mV) mit einer am Ende etwas größeren Steigung aus. Für den weichen Dämmstoff (Abb. 3.21b) zeigt sich ein Gegenteiliges Bild: Die vorbelastete und anschließend erneut im Feld belastete Dämmplatte (Feld, mV) weist im betrachteten Verformungsbereich einen von Beginn an deutlich steileren Verlauf auf. Der in der DPM belastete Verlauf zeigt eine davon abweichende, flachere Steigung zu Beginn, die sich ab etwa 6 mm Verformung dem Feldversuch bzw. der Ausgleichsgerade angleicht.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der Einfluss aus dem Versuchsaufbau vernachlässigbar zu sein scheint: Unabhängig davon, ob es sich um Feld (F)- oder DPM-Prüfungen handelt, weisen die Verläufe eine vergleichbare Steigung auf. Der Einfluss aus Vorbelastung hingegen ist deutlich erkennbar. Durch die Estrichbelastung sinkt die Steifigkeit der steiferen Dämmstoffs und die des weichen steigt an.



(a) Dämmstoff TP-GP (steifer)



(b) Dämmstoff TP (weicher)

Abbildung 3.21.: Vergleich unbelasteter (oV) und vorbelasteter (mV) Dämmstoffproben, geprüft im Feld und in der Druckprüfmaschine (DPM)



### 3.3. Schlussfolgerungen für die Modellierung schwimmenden Estrichs

#### Estrichmodellierung

Die Nachrechnung der verformungsgesteuerten Biegezugversuche zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchsdaten bis in den Nachbruchbereich, sodass das ausgewählte CDP-Modell in Kombination mit dem gewählten Elementtyp und den übrigen Randbedingungen für die weiteren Untersuchungen als geeignet erkannt wird. Hinsichtlich der Eingangsparameter für das Materialmodell werden die hier gewählten Parameter als Richtwerte übernommen, deren genaue Eingrenzung im Zuge der weiteren Versuchsnachrechnung erfolgt. Die Netzunabhängigkeit konnte für die betrachteten Beispiele nachgewiesen werden.

#### Dämmstoffmodellierung

Für die Dämmstoffmodellierung ergeben sich die in Abbildung 3.22 dargestellten Spannungs-Verschiebungsgesetze, die in Abhängigkeit des Einflussbereichs der modellierten Einzelfedern je nach Vernetzung des aufliegenden Estrichs noch entsprechend in Kraft-Weg-Gesetze umzurechnen sind. Die tatsächlich wirksame Dämmsteifigkeit liegt jeweils im Bereich zwischen den Verläufen ohne und mit Vorbelastung. Für die Simulation der Plattenversuche wird für die Dämmsteifigkeit letztendlich nach Variieren in diesem Bereich jeweils der Verlauf mit Berücksichtigung der Vorverformung (jeweils die blau gestrichelten Geraden), und damit im wirksamen Verformungsbereich ein linearer Verlauf gewählt.

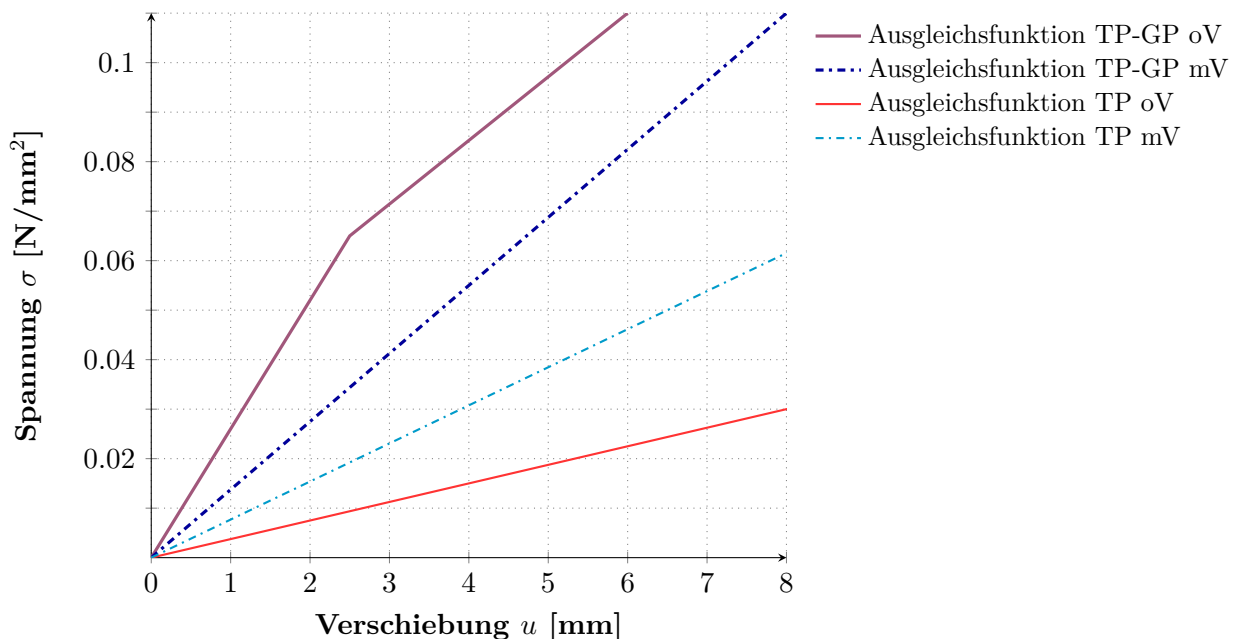


Abbildung 3.22.: Ausgleichfunktionen

Die Spannungs-Verschiebungs-Beziehung bzw. ihre Steigung lässt sich als Steifigkeit  $c_{KS}$  [MN/m<sup>3</sup>] formulieren. Diese Steife-Kennziffer ist jedoch nicht gleichzusetzen mit der von Manns und Zeus (1980) definierten Bettungszahl  $K_S$ , die aus der Zusammendrückbarkeit, und damit aus eine Produktkennzahl, abgeleitet wird. Eine unmittelbare Überführung dieser Kennzahl in die physikalisch wirksame und in der Simulation berücksichtigte Steifigkeit  $c_{KS}$  ist nicht möglich.

## 4. Konzept zur Validierung des numerischen Modells

Um die Eignung der vorgestellten Ansätze für die numerische Modellierung schwimmenden Estrichs nachzuweisen, sind vergleichende experimentelle Untersuchungen notwendig. Für eine erste Beurteilung der Modellierung wurde zunächst die grundlegende Estrich-Dämmungs-Interaktion an einfachen Balken untersucht (1D-Spannungszustand). Hier wurden Estrichdicke und Dämmstoff variiert, um Festigkeitsparameter des Estrichs (aus begleitenden Festigkeitsprüfungen) sowie die Steifigkeitsparameter des Dämmstoffs (vgl. Kapitel 3.2.2) zu verifizieren und Bruchparameter wie die Bruchenergie abzuschätzen. Folgende Varianten wurden betrachtet:

- Estrichdicken: 20, 40, 60, 80 mm, und
- Dämmstoffe: TP-GP (Dicke 20 mm, steifer:  $c_{KS} \approx 13 \text{ MN/m}^3$ ), TP (Dicke 30 mm, weicher:  $c_{KS} \approx 7 \text{ MN/m}^3$ ).

Darauf aufbauend wurden zwei größere Estrichplatten der gleichen Dicke mit  $d = 60 \text{ mm}$  auf den beiden Dämmstoffen

- Platte S auf Dämmstofftyp TP-GP (steifer)
- Platte W auf Dämmstofftyp TP (weicher)

untersucht. Damit bereits in den Balkenversuchen das Plattenverhalten in einer ersten Näherung betrachtet werden kann, wurde ein ähnliches Bruchverhalten bzw. ein ähnliches statisches System angestrebt.

Entsprechend der in der Literatur (Manns und Zeus, 1980, Schnell, 1990) betrachteten Lastfälle werden die Estrichplatten jeweils an der Plattenecke und am Plattenrand mit einer Einzellast bis zum Bruch beansprucht. Besonderer Fokus liegt hier jedoch auf dem Lastfall Plattenecke, da dieser für die Bruchlast maßgebend ist und in der Praxis bei Platten-Laborprüfungen in der Regel Anwendung findet (IBF, 2019). Dies hat hinsichtlich der Validierung den Vorteil, dass an einer Platte vier Prüfungen für diesen Lastfall erfolgen konnten. Manns und Zeus (1980) definierten den Randlastfall als maßgebend, sodass dieser auch für die Norm und andere Bemessungsgrundlagen die Basis liefert, weshalb zusätzlich auch jeweils die Ränder geprüft wurden. Hier konnte je Platte jedoch nur eine Prüfung für die quadratische Geometrie durchgeführt werden.

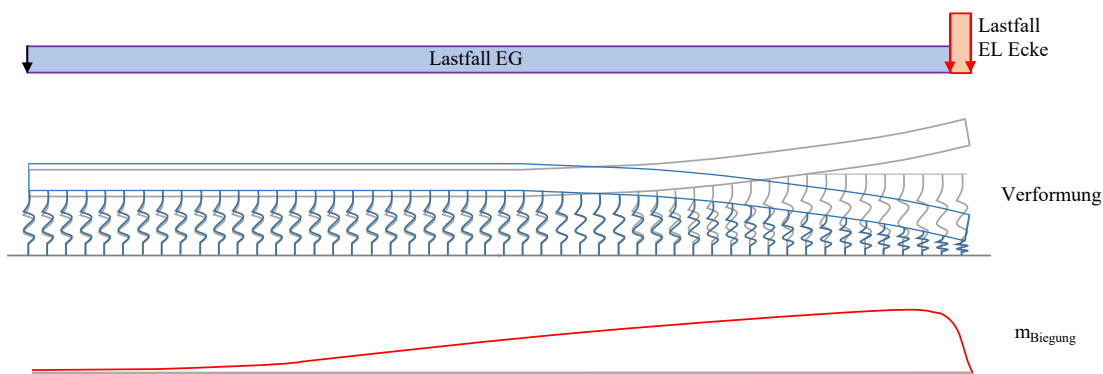


Abbildung 4.1.: Schema des statischen System der gebetteten Platte mit qualitativer Verformungsfigur, resultierenden Bettungsspannungen und Momentenbeanspruchung entlang der Plattendiagonalen

Bei Belastung der Plattenecke wirkt die diagonal gegenüberliegende Plattenhälfte über das Eigengewicht der Belastung entgegen, sodass nahe der belasteten Plattenecke oberseitig die maximale Biegebeanspruchung und damit schließlich ein Einzelriss in der Platte entsteht. Durch das Eigengewicht und die Bettungsreaktionen der Dämmung entsteht eine Einspannwirkung (vgl. Abb. 4.1). Je steifer die unterliegende Dämmung ist, desto näher entsteht der Riss an der Plattenecke. Bei einer quadratischen Platte mit einer Abmessung von  $l = 2500$  mm ist davon auszugehen, dass Beanspruchungen benachbarter Ecken keinen größeren Einfluss aufeinander haben. Die vier an einer Platte durchgeführten Eckprüfungen lassen sich somit als unabhängig vergleichbar betrachten, sodass diese Datenbasis für eine erste grundlegende Validierung des Modells ausreichend ist.

Um dem beschriebenen Trag- bzw. dem erwarteten Bruchverhalten der Platten möglichst nahe zu kommen, wurde für die Balkenversuche die in Abbildung 4.2 dargestellte Lagerung gewählt. Das statische System ist eine Art auf Bettung gelagerter Kragarm: Die Einspannung links wird über ein Kräftepaar erzeugt, das „freie“ Ende wird durch den Dämmstoff gestützt. Bei einem klassischen Kragarm würde der Riss stets in der Einspannung entstehen, eine Rissentstehung im kragenden Bereich würde den Verhältnissen in der Platte jedoch näher kommen. Wie in Abbildung 4.2 entlang der Plattendiagonale visualisiert, wirkt das Eigengewicht der Platte der Einzellast-Beanspruchung an der Ecke entgegen, sodass sich die dargestellte Verformungsfigur und Biegebeanspruchung mit einem Maximum im Bereich der Plattenecke einstellt. Auch um die Rissentstehung besser beobachten und den Dehnungsverlauf mithilfe von Dehnungsmessstreifen aufzeichnen zu können, wurde somit für den Balken ein statisches System mit Zwischenaufleger gewählt. Das bettungsgestützte Ende sollte abhängig von der Balkendicke eine gewisse Mindestlänge überschreiten, andernfalls würde sich die maximale Biegung und damit der Riss nicht in diesem Bereich, sondern direkt über dem zweiten Lager einstellen. Bei ausreichender Länge

wirken die Reaktionskräfte der Bettung der eingetragenen Biegung entgegen, um das maximale Moment nach rechts zu verlagern.

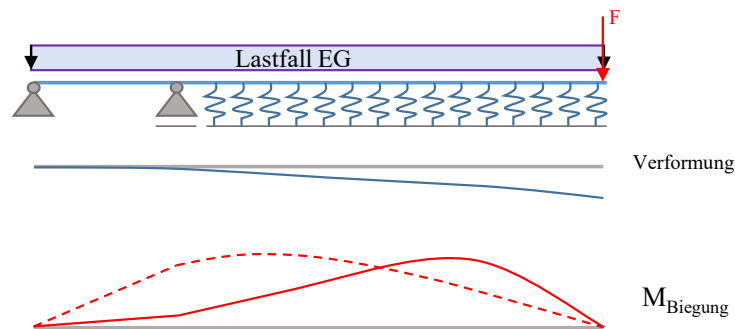


Abbildung 4.2.: Schema des statischen System des gebetteten Balkens mit qualitativer Biegelinie, resultierenden Bettungsspannungen und Momentenlinie; Der Verlauf der Momentenlinie ist abhängig vom Verhältnis der Querschnittshöhe zur Systemlänge ( $L=70$  cm, durchgezogen:  $d < 60$  mm, gestrichelt:  $d \geq 60$  mm)

Die in diesem Sinne dickenabhängig notwendige Länge der auf Dämmung gelagerten Ecke wurde numerisch durch Variieren der Lagerabstände und Kraglängen ermittelt. Allerdings sollten aufgrund der einfachen Herstellung Standard-Balken-Prüflängen untersucht werden, sodass die Länge der Probekörper auf 70 cm festgelegt wurde. Bei dieser Länge und der mit der Balkendicke einhergehenden Steifigkeit entsteht der Riss bei  $d \geq 60$  mm über dem Zwischenauflager, für die dünneren, weicheren Balken mit 20 und 40 mm Dicke aufgrund des größeren Bettungseinflusses wie angestrebt im Bereich zwischen Lager und Lastaufbringung. Dennoch können auch die Versuche mit größerer Dicke zur Validierung der Bruchkraft herangezogen werden, das Tragverhalten weicht in diesem Fall nur insofern stärker ab, dass der Ort der Rissbildung nicht durch die Dämmsteifigkeit beeinflusst wird. Der Dehnungsverlauf im Bereich des so feststehenden Rissbereichs lässt sich hingegen durch präzise Platzierung der Dehnungsmessstreifen über dem Lager sicher messtechnisch erfassen.

Grundsätzlich sind die so geplanten Laborversuche nicht umfassend genug, um das Modell für jeden Estrich beliebiger Zusammensetzung, Geometrie und Lagerung (Art und Steifigkeit des Dämmstoffs) als gesichert beurteilen zu können. Vor allem für den Lastfall Einzellast am Plattenrand wird zwar eine vergleichende Simulation erstellt, für eine detaillierte Beurteilung des Modells für diesen Lastfall reichen die Messdaten nicht aus. Anhand der Eckversuche lässt sich aber durchaus zeigen, dass eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Numerik erreichbar ist. Eine Übertragung auf Estriche mit anderen Randbedingungen ist möglich.

### Herstellung der Probekörper und begleitende Festigkeitsprüfungen

Für die Versuche wurden zwei Estrichplatten mit quadratischer Grundfläche und  $l = 2500$  mm und Dicke  $d = 60$  mm sowie zwölf Balken der Abmessungen  $700 \times 150$  mm<sup>2</sup> und zusätzliche Prismen zur Festigkeitsprüfung aus dem gleichen Material hergestellt. Das Material wurde von der Firma SAKRET Bausysteme zur Verfügung gestellt. Es handelte sich um einen als schwindkompensiert und nach 24 Stunden belegbar gekennzeichneten Zementfließestrich (ZTEfast). Die Probekörperherstellung und -lagerung und sämtliche Versuche erfolgten in der Versuchshalle des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau der BU Wuppertal.

Die Herstellung des schnell erhärtenden Fließestrichs erfolgte händisch, unter Anleitung eines Mitarbeiters der Herstellerfirma. Nach Feststellung des angestrebten Ausbreitmaßes und Luftporrengelhalts wurde der Estrich eimerweise auf die innerhalb der Holzschalung mit Folie abgedeckte Dämmung eingebracht. Nach stichprobenartiger Überprüfung der erforderlichen Dicke wurde die Oberfläche geglättet (Fotos siehe Anhang D.2.1). Im Gegensatz zu den Platten wurden die Balken separat, also nicht auf dem Dämmstoff, sondern in  $700 \times 150$  mm<sup>2</sup> Stahl-Schalung betoniert und erst für die Prüfung auf dem Dämmstoff positioniert.

Bei den Balken wurden keine besonderen Nachbehandlungsmaßnahmen unternommen. Die beiden Platten wurden für eine angestrebte langsamere Austrocknung die ersten vier Tage mit einer Folie bedeckt und waren danach den Umgebungsbedingungen in der Versuchshalle ausgesetzt. Aufgrund der schnellen Erhärtung des Estrichs konnten schon wenige Stunden nach Einbau Wegaufnehmer zur Messung der Schlüsselverformung infolge Schwinden auf der Platte angebracht werden. Zusätzlich wurden Prismen zur Bestimmung der Druck- und Biegezugfestigkeit hergestellt. Die Ergebnisse der Festigkeitsprüfungen sind in Anhang C zusammen mit weiteren Versuchsdaten zu finden und sind zum Teil im Folgenden als Eingangswerte des Modells aufgeführt.

### Numerisches Modell

Für die Definition des numerischen Modells können folgende Festlegungen aus den Voruntersuchungen und Festigkeitsprüfungen (vgl. Anhang C) abgeleitet werden:

$$\text{Elastizitätsmodul } E = 25000 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Druckfestigkeit } f_c = 40 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Biegezugfestigkeit } f_b = 6.8 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Zugfestigkeit } f_t = 3.0 \text{ N/mm}^2 \left( \approx \frac{1}{2} \cdot f_b \right)$$

$$\text{Bruchenergie } G_f = 0.2 \text{ Nmm/mm}^2$$

Eine weitere Vorgabe hinsichtlich der Rissbildung ergibt sich aus der Versuchsbeobachtung: In allen Versuchen versagt das Bauteil infolge Einzelrissbildung. Mikrorisse sind bei den Versuchen

---

nicht festzustellen. Dieses Verhalten ist in der Simulation entsprechend abzubilden, um eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsdaten zu erzielen. Der Nachbruchbereich ist nicht aussagekräftig, da eine Validierung anhand von verformungsgesteuerten Balkenversuchen entsprechend der Versuche aus Kapitel 3.1.2 für das hier verwendete Material nicht erfolgt ist. Die durchgeführten Balken- und Plattenversuche zeigten sprödes Versagen. Dadurch war eine Aufzeichnung des Nachbruchverhaltens mit den gewählten Versuchsrandbedingungen nicht möglich. Für die zentrale Frage der Schwindeinflüsse auf das Trag- bzw. Rissverhalten ist das Verhalten bis zum Bruch maßgebend.

Als Beurteilungskriterium für das numerische Modell diene vor allem der Vergleich mit den Versuchsdaten. Außerdem sollte mit zunehmender Netzfeinheit Konvergenz zu einer eindeutigen Lösung sichtbar werden. Daraus ergeben sich als Beurteilungskriterien für eine nachfolgende Validierung des Modells:

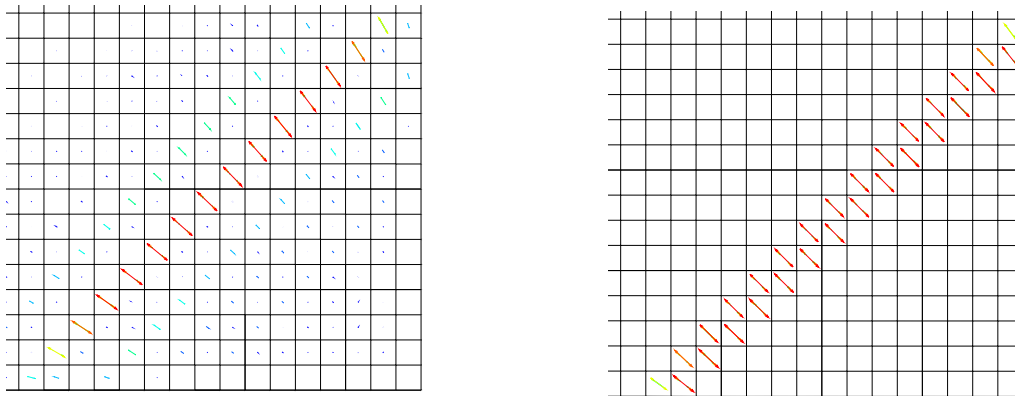
- Vergleich mit den Versuchsdaten,
  - Kraft-Verformungslinie,
  - Verformungs- bzw. Dehnungsverlauf entlang der Diagonalen (Ecke) bzw. der Mittellinie (Rand),
  - Ort des Risses,
- Konvergenz der numerischen Ergebnisse.

### **Ermittlung der charakteristischen Länge**

Zur Ermittlung der charakteristischen Länge entsprechend des auf einer begrenzten Rissprozesszone beruhenden Ansatzes nach Gödde (2013) wurde bei den hier durchgeführten Simulationen ein Konzept zur gezielten Schwächung bzw. Lokalisierung des Risses angesetzt. Dadurch sollte die Entwicklung plastischer Dehnungen auf die Rissprozesszone begrenzt und aus dieser die charakteristische Länge abgeleitet werden. Dazu wurde ein iteratives Vorgehen zur Identifikation der Rissprozesszone angewendet:

- (i) Abschätzen der charakteristischen Länge basierend auf der gewählten Vernetzung und der erwarteten Rissbildung; Berechnung ohne Schwächung und Identifizieren eines Rissbands bei Erreichen der Bruchlast; ggf. Anpassung der charakteristischen Länge,
- (ii) Berechnung mit Schwächung: Leichte Erhöhung (etwa 10 %) der Zugfestigkeit der Elemente außerhalb des in (i) identifizierten Rissbands und Überprüfung der Lokalisierung; ggf. iterative Korrektur der definierten RPZ und der charakteristischen Länge,
- [(iii) ] (nur unter bestimmten Voraussetzungen zielführend bzw. zulässig) Berechnung mit vorgegebenem Rissband: Deutliches Anheben der Zugfestigkeit der Elemente außerhalb des Rissbands, sodass nur im Rissband plastische Dehnungen entstehen.

Schritte (i) und (ii) stimmen mit dem von Gödde (2013) empfohlenen Vorgehen überein. Bei



(a) Entwicklung bei Schwächung der Elemente im identifizierten Rissband      (b) Entwicklung bei starker Schwächung der Elemente und erzwungener Begrenzung der plastischen Dehnungen auf die RPZ

Abbildung 4.3.: Beispielhafte Entwicklung der plastischen Dehnung in der Platte

den bisher und auch nachfolgend beschriebenen Balkensimulationen ist dieses Vorgehen zur Identifikation des Rissbands und zur Berechnung einer mit den Versuchsergebnissen konsistenten Rissentwicklung hinreichend. Bei Betrachtung der Simulation der Platten, insbesondere der im Fokus stehenden Eckprüfungen, stellt sich jedoch in der Simulation ein Verhalten ein, welches der Beobachtung im Versuch zum Teil widerspricht. Es entstehen plastische Dehnungen in einem größeren Bereich als nur konzentriert in einigen benachbarten Elementreihen. Wie Abbildung 4.3 rechts gegenüber dem erwarteten Zustand links zeigt, teilt sich die zunächst in (i) erkannte Lokalisierung in der anschließenden geschwächten Rechnung (ii) offenbar in zwei oder mehr Risse auf, anstatt wie im Versuch nur einen einzelnen Trennriss auszubilden. Alle Versuche (Variieren der Lastaufbringung, der Rissbandform, verschiedener Materialparameter; Ändern der Federsteifigkeiten), die zu einer Korrektur dieses simulierten Verhaltens unternommen wurden, haben nicht die gewünschte Wirkung gezeigt, sodass die Ursache ungeklärt ist. Dennoch wurde aufgrund der speziell bei den Eckprüfungen vorliegenden Randbedingungen der unter (iii) beschriebene Lösungsansatz verfolgt. Nachteilig an diesem Vorgehen bzw. am resultierenden Modell ist die Beeinflussung des resultierenden Spannungszustands im Zuge der Stärkung des Materials außerhalb der RPZ. Bei einer möglichen Spannungsumlagerung hätte dies insbesondere einen verfälschenden Charakter. Aufgrund der Belastungssituation bei der Eckprüfung, die keine Spannungsumlagerungen zulässt, und da der Nachbruchbereich nicht betrachtet wird, auf den die genannte Beeinflussung des Spannungszustands eher einen Einfluss haben dürfte, wurde dieses Vorgehen mit Blick auf die Zielsetzung dieser Arbeit als zielführend erachtet. Da im Versuch keine Mikrorissbildung oder weitere Risse zusätzlich zum Trennriss sichtbar waren, die mit dem Vorhandensein plastischer Dehnungen außerhalb der Rissprozesszone korrespondieren, kann andernfalls keine zwingende Übereinstimmung mit den Versuchswerten erwartet werden. Eine vergleichende Auswertung der Modelle für Schritt (ii) und (iii) zeigte für die vorliegende



Untersuchung eine sehr gute Übereinstimmung der Kraft-Verformungs-Kurven und beide Rechnungen liefern die gleiche Bruchlast (vgl. Abb. 6.13). Hierauf wird an entsprechender Stelle in Kapitel 6.2.2 noch weiter eingegangen. Weiterhin wird das oben beschriebene Vorgehen als angemessen erachtet, da der Manipulation des Modells ein weitgehend objektiver, iterativer Prozess zur Festlegung des Rissbands vorausgeht, wobei wie in Kapitel 2.2.5 erläutert, die Rissrichtung, wenn auch nicht die genaue Stelle, als weitgehend bekannt vorausgesetzt wird (Abb. 3.9). Bei komplexerer Rissbandausbildung müsste ein genaueres Vorgehen herangezogen werden.

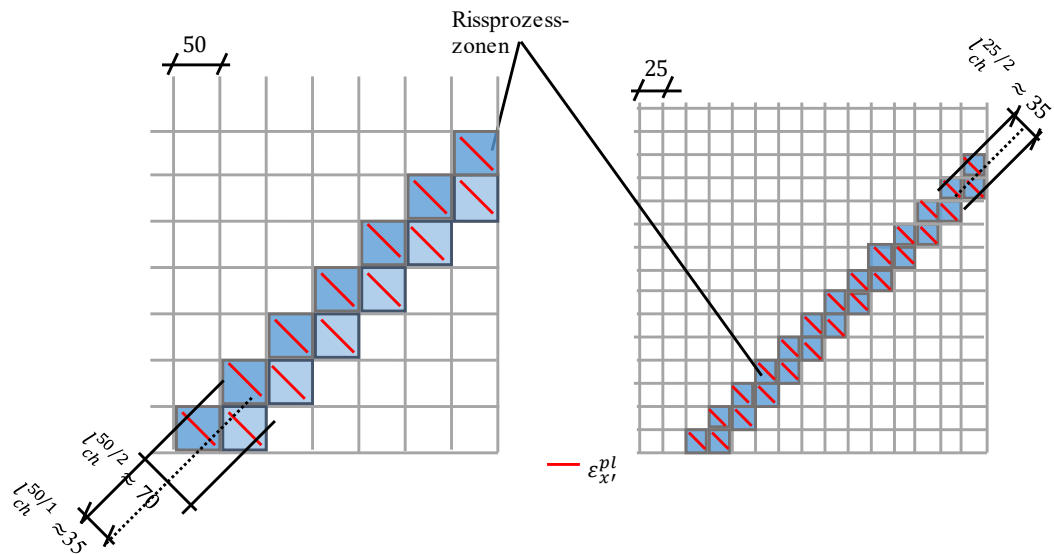


Abbildung 4.4.: Bestimmung der charakteristischen Länge  $l_{ch}$  [mm] nach der vereinfachten Definition nach Gödde (2013) als Breite der Rissprozesszone am Beispiel der beiden Netze  $l_{Elem} = 25$  und  $50$  mm (hier: Ausbreitung über je zwei Elementreihen)

In Abbildung 4.4 ist für das numerische Plattenmodell für zwei verschiedene Netzgeometrien ( $L_{Elem} = 50$  bzw.  $25$ ) die Lokalisierung der plastischen Dehnungen bei Einzelrissbildung über eine (heller eingefärbt) oder zwei Rissreihen veranschaulicht. Dabei wird mit Blick auf die parallele Ausrichtung der plastischen Dehnungen in Richtung der Plattendiagonalen (vgl. entsprechend Abb. 4.3 links) ebenso wie in Abb. 2.29 eine näherungsweise konsistente, homogene Rissbandausbildung angenommen. Die Rissbandufer sind parallel und stehen senkrecht auf den plastischen Dehnungen. Somit kann wie im Biegezugversuch die dargestellte  $x'$ - $y'$ -Ebene zur ebenen Berechnung von  $l_{ch}$  nach Gleichung (2.39) herangezogen werden. Die charakteristische Länge ergibt sich wie hier visualisiert zu  $35$  mm bei einer Elementreihe oder  $2 \times 35$  mm für zwei Elementreihen für das gröbere Netz mit Elementabmessung  $50$  mm ermittelt. Entsprechend sind in Abbildung 4.5 die Funktionsverläufe des Entfestigungsgesetzes dargestellt, die im CDP-Modell (*Abaqus*) als Wertepaare abhängig von der charakteristischen Länge (hier: Breite der Rissprozesszone) bzw. der Vernetzung vorgegeben werden.

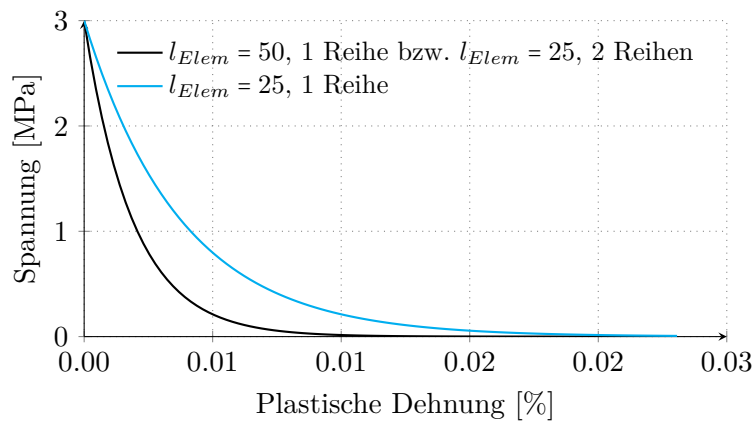


Abbildung 4.5.: Exponentiell abfallende Spannungs-Dehnungs-Beziehung wie im CDP-Modell als Wertepaare für die Entfestigung im Zugbereich vorgegeben für eine Bruchenergie von  $0.2 \text{ Nmm/mm}^2$

#### Fazit

Damit ist die Strukturmodellierung sowie die Herangehensweise für die Versuche vollständig beschrieben. In den nachfolgenden Kapiteln 5 und 6 wird jeweils der experimentelle Aufbau und Besonderheiten bei der Versuchsdurchführung beschrieben, bevor die gemessenen Daten erläutert und den Simulationsergebnissen gegenübergestellt werden. Auf die vorstehend genannten Einschränkungen bei der Regularisierung der Plattensimulationen wird an entsprechender Stelle noch einmal eingegangen. Es sei darauf hingewiesen, dass das beschriebene Vorgehen aufgrund des nachweislich geringen Einflusses auf die Kraft-Verformungs-Kurven und damit auch die Bruchlast als ausreichend erachtet wird. Eine Netzunabhängigkeit kann so näherungsweise erreicht werden und Abweichungen im Spannungszustand aufgrund der veränderten Materialeigenschaften haben erst im Nachbruchbereich Auswirkungen, da bei der Belastungssituation ohnehin keine Spannungsumlagerungen zu erwarten sind. Bei Betrachtung des Randlastfalls, bei dem der Nachbruchbereich eine größere Rolle spielt, ist das Vorgehen nicht ohne Weiteres übertragbar. Hier kann es zu Spannungsumlagerungen kommen, sodass ein optimiertes Vorgehen notwendig ist, sodass die nachfolgende Auswertung des Randlastfalls nur eine erste Näherung darstellt.

## 5. Gebetteter Balken (1D-Spannungszustand)

Zur Eingrenzung der Modell- und Materialparameter wird zunächst eine Balkenserie verschiedener Dicken im Versuch geprüft. Nach Erläuterung des Versuchsstands und der Versuchsergebnisse werden die Randbedingungen anhand eines vereinfachten linear-elastischen Modells kalibriert und schließlich auch die Eignung des nichtlinearen Materialmodells gezeigt. Aufgrund eines starken, unmittelbaren Sprödversagens bei sämtlichen Probekörpern konnte jedoch der Nachbruchbereich nicht genauer validiert werden.

### 5.1. Versuche

#### 5.1.1. Versuchsaufbau und -ablauf

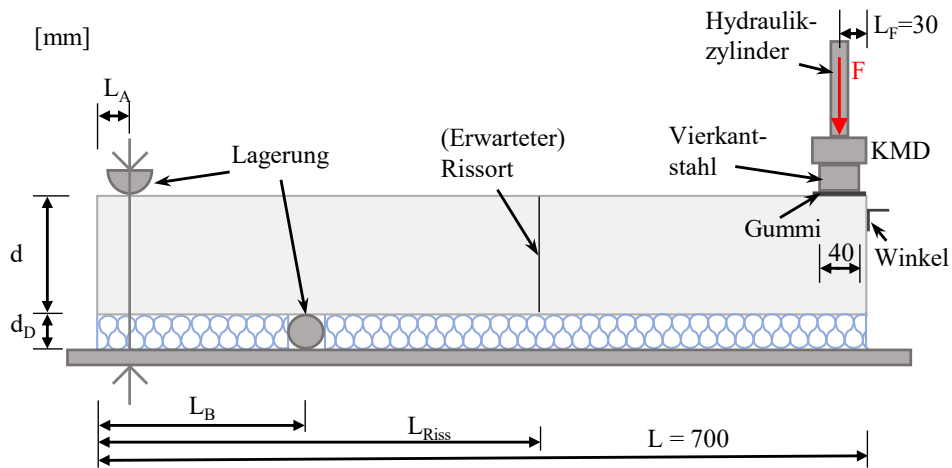
Für die nachfolgend beschriebene Versuchsserie wurden insgesamt zwölf Balken mit einer Grundfläche von  $700 \times 150 \text{ mm}^2$  in unterschiedlicher Dicke hergestellt. Der schematische Versuchsaufbau kann Abbildung 5.1 entnommen werden. Die Seitenansicht in Abbildung 5.1a zeigt die Lagerung und den Laststempel-Aufbau. Eine Seite des Balkens ist vertikal gegen Abheben gelagert und im Abstand  $L_a$  ist ein Rollenlager unterhalb des Balkens angeordnet. Außerdem liegt der gesamte Balken auf einer auf den Balken zugeschnittenen Dämmstoffplatte auf. Die Probekörper 60-4 bis 60-6 (vgl. Tabelle 5.1) werden mit dem weichen Dämmstoff (TP) kombiniert, um den Einfluss der Dämmsteifigkeit zu erfassen. Alle anderen Balken werden auf Dämmstofftyp TP-GP (dem steiferen der beiden untersuchten Dämmstoffe) gelagert:

- 20-1 bis 60-3, 80-1, 80-2 auf Dämmstofftyp TP-GP
- 60-4 bis 60-6 auf Dämmstofftyp TP.

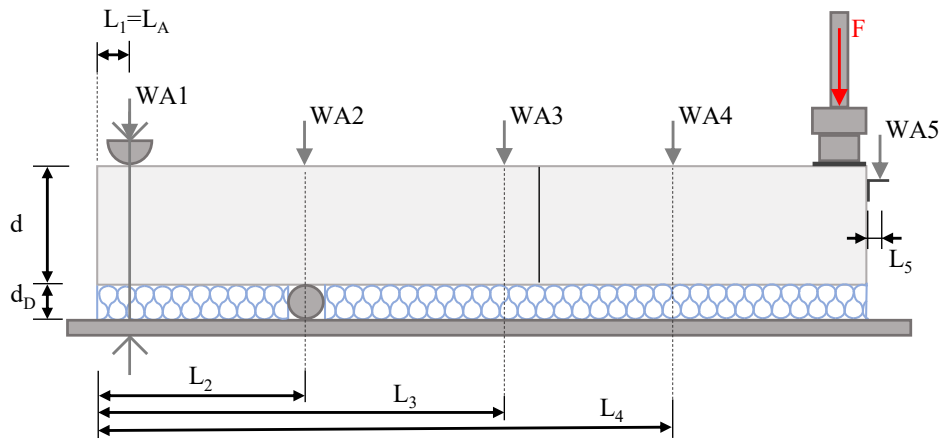
Wirksam ist die Dämmung während des Versuchs nur rechts des Zwischenauflegers, für einen einfacheren Einbau wird der Dämmstoff unter dem gesamten Balken eingebaut. In der zweiten Ansicht in Abbildung 5.1b sind die Wegaufnehmer-Positionen und in der Draufsicht darunter (Abb. 5.1c) zusätzlich die Position der Dehnungsmessstreifen eingezeichnet.

In Tabelle 5.1 sind die Längenvariablen wie in Abbildung 5.1 für die einzelnen Probekörper dokumentiert. Der Grund für die verschiedenen Lagerabstände für die unterschiedlich starke Dicke der Balken ist das in Kapitel 4 erläuterte unterschiedliche Rissverhalten zwischen geringerer (Riss im „Kragbereich“) und höherer (Riss über dem Lager) Balkendicke. Bei  $d \leq 40$  ist das Zwischenaufleger etwas näher am Endaufleger, um die Rissbildung im „Kragbereich“ zu

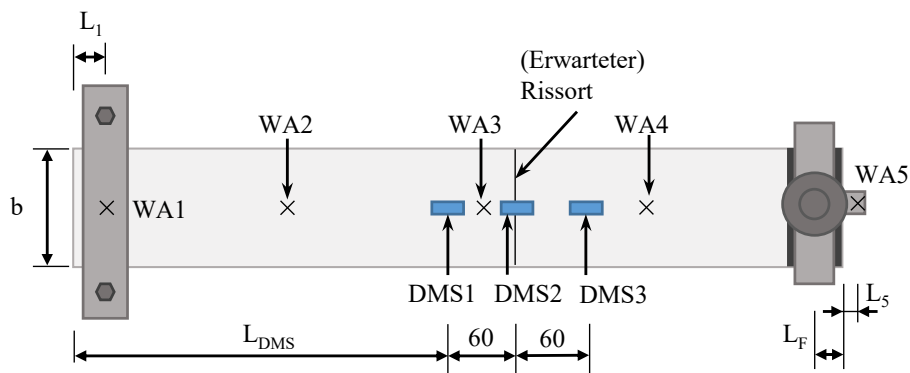
5. Gebetteter Balken (1D-Spannungszustand)



(a) Seitenansicht – Lagerung und Lastaufbringung



(b) Seitenansicht – Wegaufnehmer (WA)



(c) Draufsicht – Dehnungsmessstreifen (DMS)

Abbildung 5.1.: Aufbau der Balkenversuche und Anordnung der Messtechnik ([mm])

Tabelle 5.1.: Abmessungen und Bruchlasten der Balkenversuche [mm]

Probe	$d$	$d_D$	$L_A = L_1$	$L_B$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_{DMS}$	$L_{Riss}$	Rissort	Bruchlast [kN]
20-1	20	20	40	165	165	355	510 <sup>a</sup>	38	475	475	DMS 1	2.0
20-2	20	20	40	165	165	355	510 <sup>a</sup>	38	475	353	-	1.64
20-3	20	20	40	165	165	355	510 <sup>a</sup>	38	475	359	-	1.64
40-1	40	20	40	165	165	355	525	38	260	166	-	2.53
40-2	40	20	40	175 <sup>b</sup>	165	355	525	38	260	260	DMS 1	2.60
60-1	60	20	50	355 <sup>b</sup>	175	350 <sup>a</sup>	525	38	240	355	DMS 3	2.69
60-2	60	20	50	300	175	350 <sup>a</sup>	525	38	240	320	DMS 2/3	3.0
60-3	60	20	50	300	175	380 <sup>a</sup>	525	38	240	282	DMS 1/2	2.76
60-4	60	30	50	300	175	380	525	38	240	305	DMS 2	1.61
60-5	60	30	50	300	175	380	525	38	240	310	DMS 2	1.56
80-1	80	20	50	300	175	380 <sup>a</sup>	525	38	240	280	DMS 1/2	3.24
80-2	80	20	50	300	175	380 <sup>a</sup>	525	38	240	282	DMS 1/2	3.0

<sup>a</sup> verschoben aufgrund von DMS-Anordnung <sup>b</sup> fehlerhaft eingemessen

begünstigen. Dies hat jedoch bei Probe 40-1 keine Wirkung gezeigt (vgl.  $L_{Riss}$  in Tabelle 5.1), die Probe ist dennoch direkt über dem Lager gerissen.

Bei der Durchführung der Balkenversuche kam es zu Komplikationen beim Versuchsaufbau, da die Dicke des Dämmstoffs zum Teil etwas über der angegebenen Lieferdicke lag. Der Rollendurchmesser für das Zwischenaufleger entsprach exakt den 2 bzw. 3 cm Lieferdicke, sodass bei einigen Versuchen die Zwischenaufleger-Rolle mit Unterlegscheiben leicht angehoben werden musste. Dennoch kamen bei einigen Versuchen die Balken erst nach Lastaufbringung auf dem Zwischenaufleger zum Liegen. Auch das Klemmlager am Balkenanfang hatte mehr Spiel als erwartet. Die Fixierung durch die Muttern in Wechselwirkung mit der Lagerung des Balkens auf dem Dämmstoff war daher im ersten Versuch (Probe 60-1) noch deutlich zu locker, wurde bei den restlichen Versuchen zwar angepasst, zeigte aber immer noch eine geringe Bewegung (vgl. Messwerte der Wegaufnehmer WA1 bis WA3 in Anhang D).

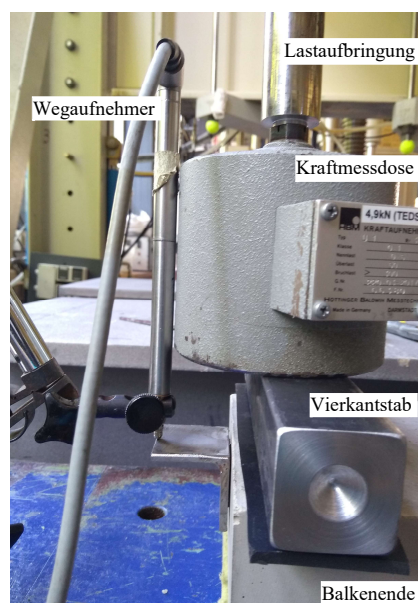


Abbildung 5.2.: Lastaufbringung Balken

Der in Abbildung 5.2 dargestellte Stempel-Aufbau zeigt die Zylinderstange, über die weggeregelt die Belastung aufgebracht wurde. Eine zusätzlich zwischengeschaltete Kraftmessdose (KMD) hat die Last aufgezeichnet. Der darunterliegende Vierkantstab diente der Lastverteilung über die Breite. Um eine lokale Schädigung aus der Lastaufbringung zu vermeiden, wurde ein elas-

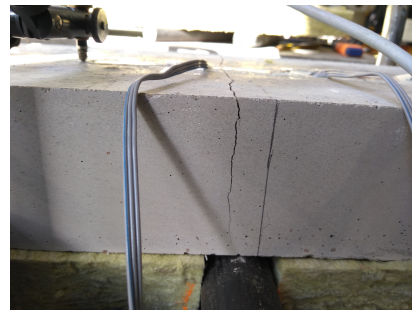
tisches Material untergelegt. Da die KMD das zusätzliche Gewicht aus diesem Aufbau nicht erfassen kann, wurde die Messung zu Beginn auf Null gesetzt und anschließend die Daten um das Eigengewicht des Stempelaufbaus korrigiert.

### 5.1.2. Ergebnisse

Wie bereits angedeutet sind die Probekörper spröde gebrochen, das heißt ohne Ankündigung durch sichtbare Rissbildung. Die Versuche liefern somit nur Daten bis zum Bruch, der Nachbruchbereich konnte mit dem gewählten Versuchsaufbau nicht erfasst werden. In Abbildung 5.3 ist beispielhaft das Bruchbild der Proben 20-1 und 60-3 dargestellt. Der Bruch verläuft vertikal und weitgehend gerade durch die Probe.



(a) Draufsicht Probe 20-1 mit angeklebten DMS (Riss durch DMS 1)



(b) Ansicht Probe 60-3: Einzelner Trennriss ohne erkennbar Mikrorissbildung

Abbildung 5.3.: Beispiele für die Einzelrissbildung der Balkenproben

### Kraft-Verformungs-Linien

Die Kraft-Verformungs-Kurven in Abbildung 5.4 zeigen die gemessene Kraft über der Verschiebung des Aufnehmers WA5 (nahe Lastaufbringung, vgl. Abbildung 5.1b). Die Verläufe der übrigen Aufnehmer sind Anhang E.1 zu entnehmen. Wie in Abbildung E.1 und E.2 zu sehen ist, wurden über den Auflagern zum Teil deutliche Verschiebungen infolge der Lastaufbringung gemessen. Auf die Rissbildung hat dies nicht zwingend Einfluss. Bei der Nachrechnung des Versuchs sind diese Verschiebungen jedoch zu berücksichtigen. Außerdem ist der Winkel, auf dem der Wegaufnehmer WA5 angebracht war, während der Prüfung der Probe 40-1 abgefallen. So ist der horizontale Verlauf dieser Probe ab einer Verformung von etwa 1.75 mm zu erklären (siehe Abbildung 5.4). In Tabelle 5.1 sind die Ergebnisse zusammengestellt: In Abhängigkeit der Dicke  $d_D$  des Dämmstoffs und der Position des ersten DMS  $l_{DMS}$  zeigt die Tabelle die Position des Risses  $l_{Riss}$ , an welchem DMS und bei welcher maximalen Last dieser entstanden ist. Bei fehlender Angabe („-“) ist der Riss außerhalb des DMS-Bereichs aufgetreten. Bei den dünneren Balken zeigt sich somit eine Abweichung von der auf Basis der Vorsimulation erwarteten Rissposition. Hierfür können verschiedene Ursachen infrage kommen, u.a. genannte Abweichungen bei der

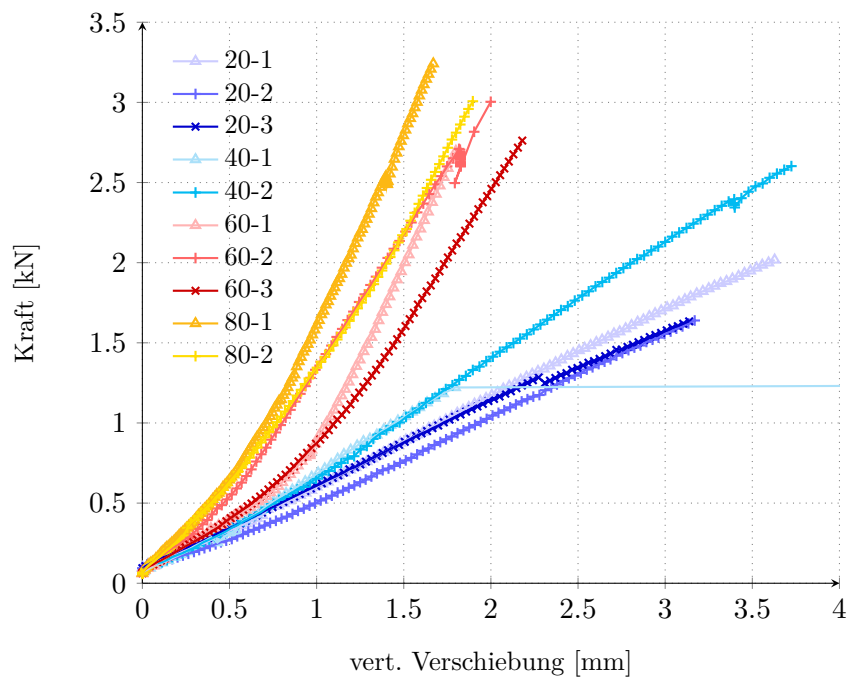
---

Installation der Lagerung, der Aufbringung der Last oder eine lokale unplanmäßige Schwächung des Materials.

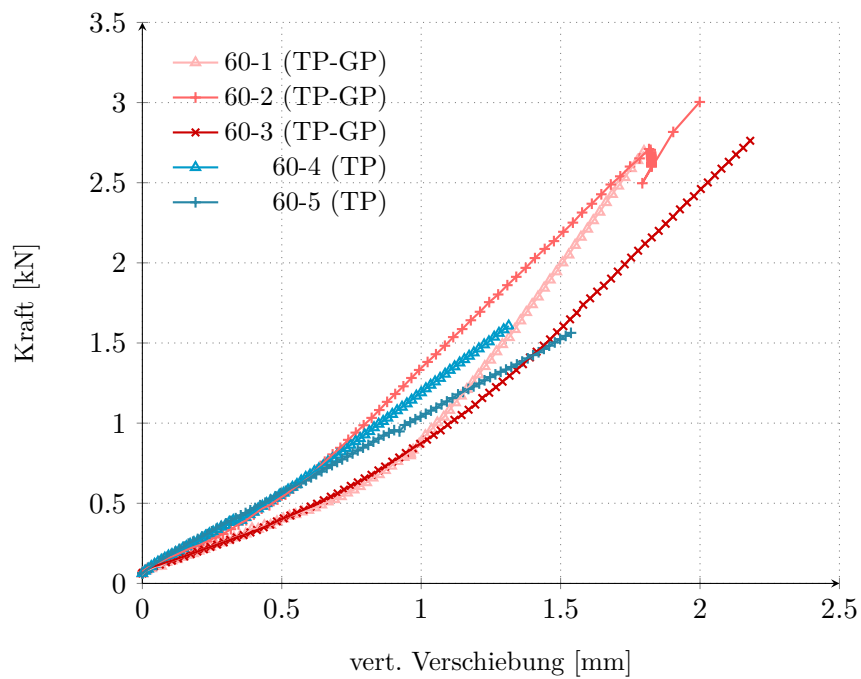
Grundsätzlich zeigen die Kraft-Verformungs-Kurven eine übereinstimmende Tendenz bei gleichen Eigenschaften. Je weicher der Dämmstoff desto geringer die Bruchlast. Je höher die Dicke des Balkens desto höher die Bruchlast bei geringerer Maximalverformung. Die erwartete Rissposition weicht zum Teil etwas von den Versuchsdaten ab. Für  $d = 20$  ergibt sich bei Probe 20-1 eine etwas größere Maximallast und Verformung, die im Vergleich zu den beiden anderen Proben mit einer versetzten Rissposition einhergeht. Die Rissposition der Probe 20-1 stimmt mit der Rissprognose auf Basis der Vorsimulationen überein (Riss genau auf Höhe des mittleren DMS). Dass die Rissposition der Proben 2 und 3 miteinander übereinstimmt, lässt vermuten, dass der Rissversatz im Vergleich zur Vorsimulation nicht auf eine willkürliche, lokale Materialschwächung der beiden Balken zurückzuführen ist. Was stattdessen die Ursache ist, konnte nicht abschließend geklärt werden. Der Verlauf von Kurve 60-1 weicht von den beiden anderen (60-2, 60-3) ab, was auf die bereits genannte Nachgiebigkeit der Lagerung zurückzuführen ist. Eine ähnliche Abweichung zeigt sich auch bei den Verläufen der 80er-Proben mit gleicher Ursache (vgl. Anhang, Abb. E.1). Die Kurven 60-4 und 60-5, die auf dem weicheren Dämmstoff geprüft wurden, weisen im Vergleich zu den übrigen 60er-Kurven eine deutlich geringere Last ( $F_{TP} \approx 0.5 F_{TP-GP}$ ) und reduzierte Maximalverschiebung auf ( $w_{TP} \approx 0.75 w_{TP-GP}$ ). Die Bruchlast steigt und die Verformung sinkt mit zunehmender Dicke. Es gibt eine leichte Tendenz, dass der weichere Dämmstoff und die dünneren Balken eine weniger ausgeprägte Krümmung in der Kraft-Verformungslinie zeigen als der steifere Dämmstoff und die dickeren Balken.

Die Kraft-Verformungs-Kurven in Abbildung 5.4 weisen keine wie in Biegezugprüfungen üblicherweise messbare Schwächung kurz vor dem Bruch (Abflachen der Kurve) bzw. Abfallen gegenüber dem elastischen Pfad auf. Im Gegenteil kommt es in einigen Kurven eher zu einem Anstieg der Steigung, also zu einer Versteifung des Systems. Dies ist möglicherweise darauf zurückzuführen, dass der jeweilige Balken zu Versuchsbeginn noch nicht kraftschlüssig auf dem Dämmstoff auflag und nach vollständiger Kontakttherstellung ein steilerer Anstieg der Kurve erfolgt. Grundsätzlich zeigen die dünneren Balken einen eher abflachenden als versteifenden Verlauf im Vergleich zu den dickeren Balken, deren Verlauf umgekehrt eher zunehmend versteifend ist.

Eine grundlegende inhaltliche Interpretation der Ergebnisse im Hinblick auf das Balkentragverhalten bei elastischer Bettung ist aufgrund der genannten zahlreichen, wenn auch kleineren Abweichungen vom geplanten Versuchshergang nicht angebracht. Inwiefern aus der Dämmstoffwirkung versteifende oder aufweichende Kurvenverläufe resultieren, bleibt hier offen. Das Ziel der Balkenversuche war es jedoch vor allem, eine erste Näherung des Estrichtragverhaltens auf Dämmschicht zu validieren. Dies gelingt auch mit den kleineren Abweichungen im Versuchsablauf



(a) Balken: unterschiedliche Dicke



(b) Balken: unterschiedlicher Dämmstoff

Abbildung 5.4.: Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA5

durch entsprechende Abbildung im Modell. Wie im folgenden Kapitel aus den vergleichenden Simulationen abzuleiten ist, ist die beobachtete Tendenz mindestens zum Teil auf die bereits genannte ungeplant nachgiebigere Lagerung zurückzuführen: Die Verläufe folgen der nichtlinearen



Nachgiebigkeit der Lager (siehe gemessene Verformung an den Auflagern (WA1 bzw. WA2/3) in Anhang D). Ohne Berücksichtigung der beweglichen Lagerung ergeben sich bei den Balken größerer Dicke deutliche Abweichungen zwischen Versuch und Simulation.

## 5.2. Simulationen

### 5.2.1. System und Randbedingungen

Aufgrund des nicht messbaren Nachbruchbereichs ist es für eine erste numerische Näherung der gemessenen Kraft-Verformungslinien ausreichend, das System auf eindimensionale Balkenelemente mit linear elastischem Materialverhalten zu reduzieren. Die Eingangslängenparameter für dieses Modell sind abhängig von der Lage der Fixierungen im Versuch in Abbildung 5.5 und Tabelle 5.2 angegeben. Als Belastung wurde die maximal gemessene Kraft aufgebracht (vgl. Tabelle 5.1)

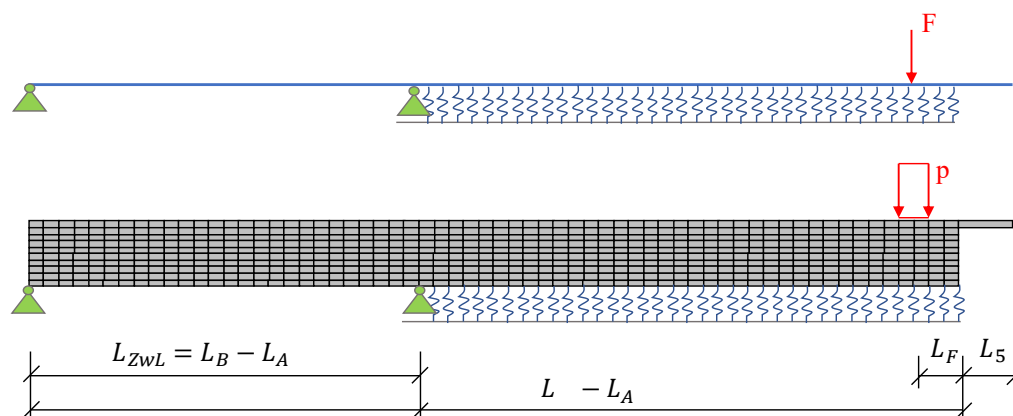


Abbildung 5.5.: Systemplot des gebetteten Balkens (Diskretisierung mit Balkenelementen (oben) bzw. kontinuumsbasierten Schalenelementen (unten))

Tabelle 5.2.: Abmessungen Balkensimulationen

$d$	$L = 700 - L_A$	$L_{ZwL} = L_B - L_A$	Last [kN]	
			TP-GP	TP
20	660	135	2.0	-
40	660	125	2.5	-
60	650	250	2.7	1.5
80	650	250	3.25	-

In Abbildung 5.5 ist auch das numerische Modell für eine materiell-nichtlineare Berechnung der Balkenversuche anhand eines Volumenmodells dargestellt. Um die Messdaten des Wegaufnehmers WA5 auf dem Winkel am Balkenende der Lastaufbringung mit den Simulationsdaten vergleichen zu können, wird ein Element mit entsprechender Länge an dieser Stelle in beiden Modelltypen ergänzt. Die nachgiebige Lagerung wird so modelliert, dass an den Lagern eine dem Messverlauf entsprechende Verformung eingepreßt wird. Der Dämmstoff wird über unabhängige Federn an jedem Knoten modelliert. Die in Kapitel 3.3 erläuterten Steifigkeitsverläufe werden entsprechend der Elementabmessung bzw. der dadurch entstehenden Feder-Einzugsfläche berechnet und dem Federelement als Kraft-Weg-Eigenschaft zugewiesen.

### 5.2.2. Vergleich mit den Messdaten

#### Kraft-Verformungslinien

In Abbildung 5.6 sind die Messergebnisse (schwarz) gegenüber den linear-elastischen Simulationsergebnissen (rot) dargestellt. Die gestrichelten Kurven zeigen Simulationsverläufe, bei denen die Lagerbedingungen als nicht nachgiebig angesetzt sind. Es ist deutlich zu erkennen, dass bei  $d = 20$  mm der Einfluss der festen Lagerung im Vergleich zur nachgiebigen im Versuch vernachlässigbar ist. Das liegt zum einen daran, dass die Lager bei diesen Versuchen deutlich weniger nachgiebig waren (WA1 kaum Bewegung, WA2 in geringem Maß, siehe Anhang Abb. E.1 und E.2). Zum anderen spielt die Lagernachgiebigkeit bei den dickeren Balken eine größere Rolle, weil die abhebende Kraft am ersten Lager im Zuge der höheren Balkensteifigkeit größer ist. Für die Balken größerer Dicke ist die Modellierung der Lagernachgiebigkeit zwingend notwendig, um den Kraft-Verformungsverlauf zu simulieren. Für alle Berechnungen gilt, dass die Übereinstimmung gut ist, solange die Randbedingungen den Versuchsbedingungen entsprechen: Die berechnete Verformung bei vorgegebener Maximallast entspricht in etwa den am Balkenende gemessenen Verformungen. Bei der geringsten und höchsten Dicke wird die Verformung im Vergleich zu den Versuchen leicht über- bzw. unterschätzt, aber die Abweichung ist mit etwa 15 % bei dem vorhandenen Datenumfang mit versuchstechnischen Abweichungen zu erklären.

Um neben dem bei der elastischen Rechnung bereits eingegangenen E-Modul auch die übrigen Materialeigenschaften wie Zugfestigkeit und Entfestigungsparameter hinsichtlich der maximalen Verformung und Bruchlast zu beurteilen, wird eine nichtlineare Berechnung mit Volumenelementen durchgeführt, jedoch nur für die Proben der Dicke 20 und 60 mm (jeweils mit steiferem und weicherem Dämmstoff), d.h. für die in Abbildung 5.6 jeweils links dargestellten Daten, da dies zur Beurteilung der Eingangsparameter ausreichend ist. Die Ergebnisse dazu sind in Abbildung 5.7 dargestellt.

Entscheidend ist vor allem die Übereinstimmung der maximal gemessenen Kraft und Verformung: Für die in blau dargestellten Kurven mit den Eingangsparametern entsprechend der in

Kapitel 4 gewählten Werte ( $f_t = 3 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_f = 0.2 \text{ Nmm/mm}^2$ ) zeigt sich bei allen Verläufen ein entfestigender Abfall der Steigung hin zum Maximum. Die Krümmung der Kurve in diesem Bereich ausgeprägter zu sehen als bei den beiden anderen Modellen. Für Dicke 20 mm ist die Krümmung am schwächsten und wird erst kurz vor dem Bruch überhaupt leicht erkennbar. Dieser Abfall der Steigung ist in den gemessenen Daten ganz leicht bei  $d = 20 \text{ mm}$  zu erahnen, bei den übrigen Kurven gar nicht sichtbar. Für  $d = 20 \text{ mm}$  zeigt sich eine Unterschätzung der Verformung für die nichtlineare Berechnung, für  $G_f = 0.2$  deutlicher als für  $G_f = 0.3 \text{ Nmm/mm}^2$ . Diese ist bei den dickeren Balken unabhängig von der Dämmsteifigkeit besser getroffen. Bei allen Verläufen wird die Bruchlast etwas unterschätzt, bei  $d = 20 \text{ mm}$  ebenfalls deutlicher.

Variiert wurde der Wert für die Bruchenergie, um diesen näher einzugrenzen. Bei höherer Bruchenergie von 0.3 (hellblau) statt  $0.2 \text{ Nmm/mm}^2$  (dunkelblau) steigt die mögliche Belastung auf etwa das gemessene Niveau (bei  $d = 20 \text{ mm}$  immer noch etwas unterschätzt), allerdings wird dafür die Verformung größer. Eine Änderung der Zugfestigkeit würde die Werte ähnlich beeinflussen, insofern ist es schwierig, mit den vorhandenen Daten diese präzise einzugrenzen. Ein Variieren des Dilatanzwinkels zeigte keinen merkbaren Einfluss. Die vorhandene Untersuchung zeigt, dass die Größenordnung der angenommenen Werte in Ordnung ist und auch für die Platten Anwendung finden kann.

### Dehnungs- und Verformungsverläufe

Die in den Abbildungen 5.8 bis 5.10 sowie im Anhang (Abb. F.2 und F.3) dargestellten Dehnungsverläufe (jeweils oben: Dehnung über die Balkenlänge) und Verformungsverläufe (jeweils unten: vertikale Verschiebung über die Balkenlänge) zum Bruchzeitpunkt zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Messpunkten im Rahmen der zu erwartenden versuchsbedingten Streuung. In Abbildung 5.8 weisen die Messwerte, hier als einzelne Marker dargestellt, bei den Proben 60-2 und 60-3 einen Ausreißer auf Höhe des Zwischenauflegers auf, was auf äußere Störungen der Wegaufnehmer WA2 und WA3 bei der Prüfung zurückzuführen ist. Die in den Dehnungsverläufen dargestellten vertikalen Markierungen kennzeichnen den Ort der gemessenen Rissbildung. Neben den punktuell am Ort der Messaufnehmer dargestellten Versuchsdaten sind hier jeweils die lineare Simulation als schwarze durchgezogene Kurve, sowie die nichtlinearen Simulationen in Graustufen (dunkel:  $G_f = 0.2$ , hell:  $G_f = 0.3$ ) abgebildet.

Qualitativ stimmen bereits die linear-elastisch ermittelten Dehnungsverläufe recht gut mit den DMS-Werten überein. Die durch die 20 mm langen DMS gemessenen Werte sind als Mittelwert über die Länge zu verstehen, sodass die Messwerte die tatsächlichen Dehnung tendenziell etwas unterschätzen. Die nichtlinearen Verläufe liegen in der Regel unter den linear-elastischen Verläufen, und weichen im Rissbereich deutlich ab, da hier eine Art Diskontinuität bzw. Singularität im Rissbereich sichtbar wird. Die linear elastisch ermittelte, maximale Dehnung trifft die Mes-

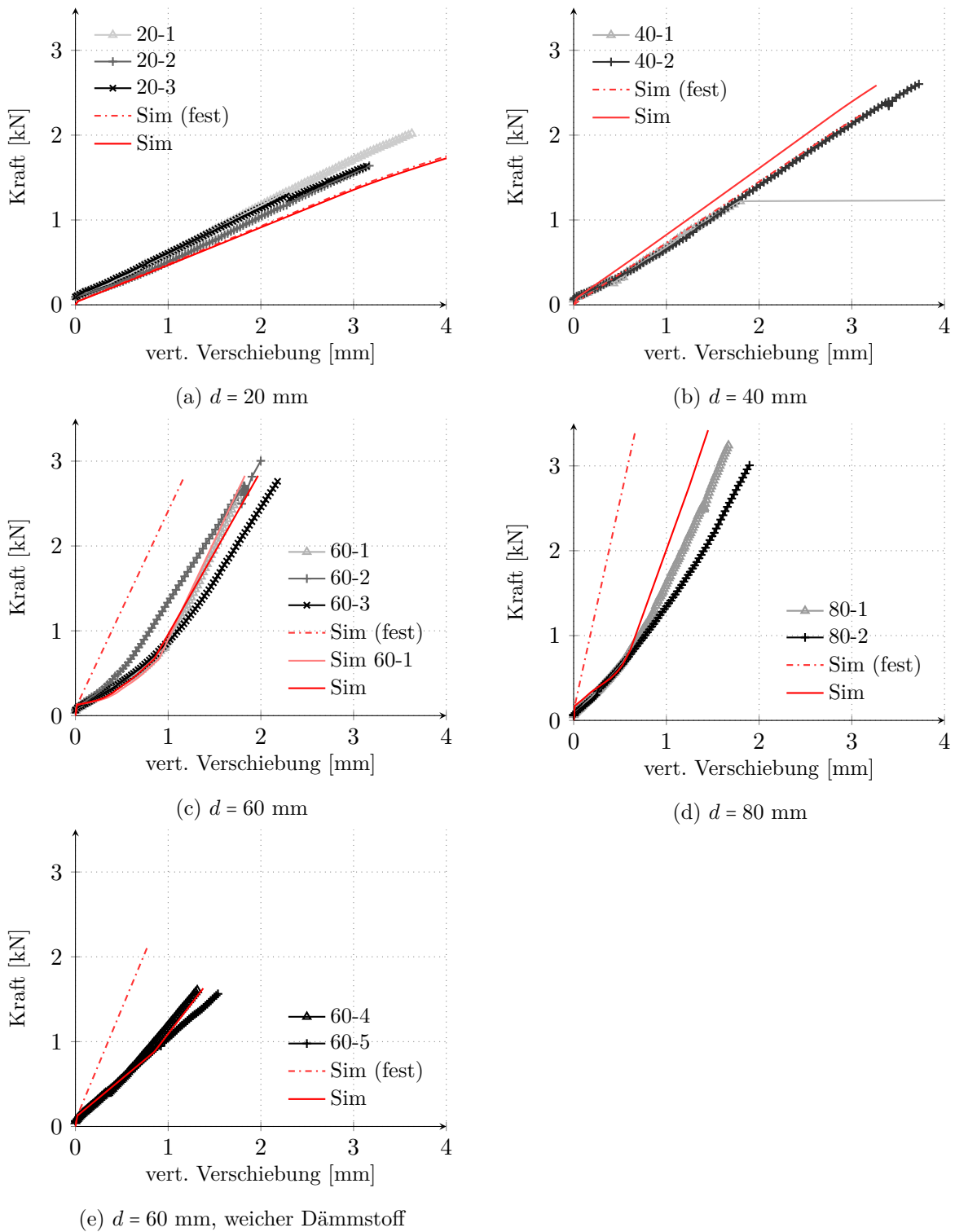


Abbildung 5.6.: Vergleich der Messdaten (schwarz) mit der linearen Simulation (Sim, rot): Kraft-Verformungs-Kurven

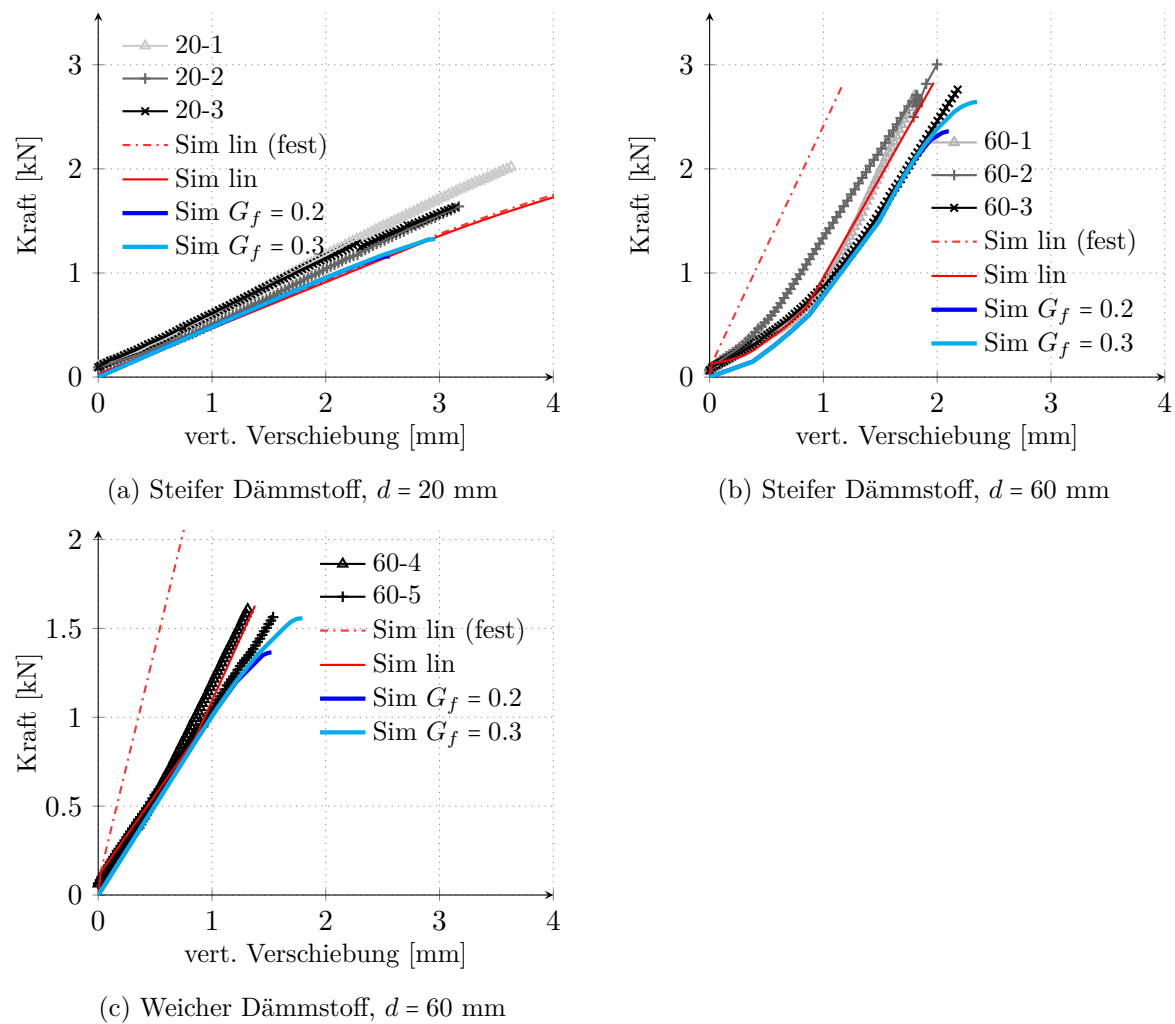


Abbildung 5.7.: Vergleich der Messdaten (schwarz) mit der linearen (rot) bzw. nichtlinearen Simulation (Sim, hellblau/blau): Kraft-Verformungs-Kurven ( $G_f$  [Nmm/mm<sup>2</sup>])

sung zum dargestellten Bruchzeitpunkt gut. Ein Vergleich der beiden nichtlinearen Rechnungen mit unterschiedlicher Bruchenergie zeigt tendenziell höhere Werte bei kleinerer Bruchenergie. Beide unterschätzen die gemessenen Werte. Für  $d = 20$  mm liegen die beiden Kurven außerhalb des Rissbereichs nahezu aufeinander, im Rissbereich ist die Abweichung umso ausgeprägter. Der Sprödbbruch der Probekörper lässt einen Vergleich der Rissbreite im Versuch mit der durch Umrechnung der plastischen Dehnung über die charakteristischen Länge ermittelten Rissbreite nicht zu (vgl. Kapitel 3.1.2).

Die Verformungsfiguren zeigen eine recht gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten. Vor allem der Verlauf der Probe 60-1 sticht aufgrund der Nachgiebigkeit des Lagers und des in dieser Darstellung deutlichen Versatzes nach oben im Vergleich zu den anderen Proben heraus. Abgesehen von den Ausreißern bei Wegaufnehmer WA3 zeigen die nachgerechneten Verläufe bei

## 5. Gebetteter Balken (1D-Spannungszustand)

Berücksichtigung der Lagernachgiebigkeit jedoch eine gute Übereinstimmung. Die nichtlinearen Verläufe zeigen eine etwas größere Durchbiegung bei  $d = 60$  mm für beide Dämmstofftypen, wie schon im Kraft-Verformungs-Diagramm gezeigt.

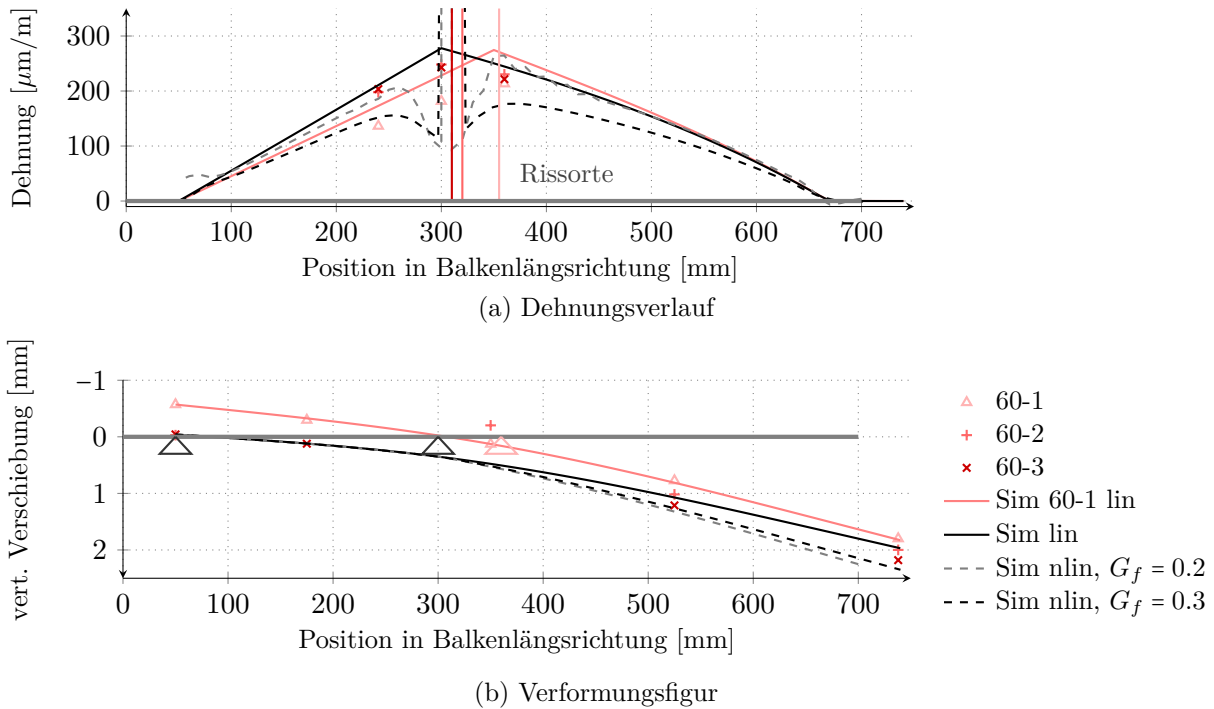


Abbildung 5.8.: Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit  $d = 60$ , TP-GP (vertikale Markierung oben: Stelle des Risses im Versuch)

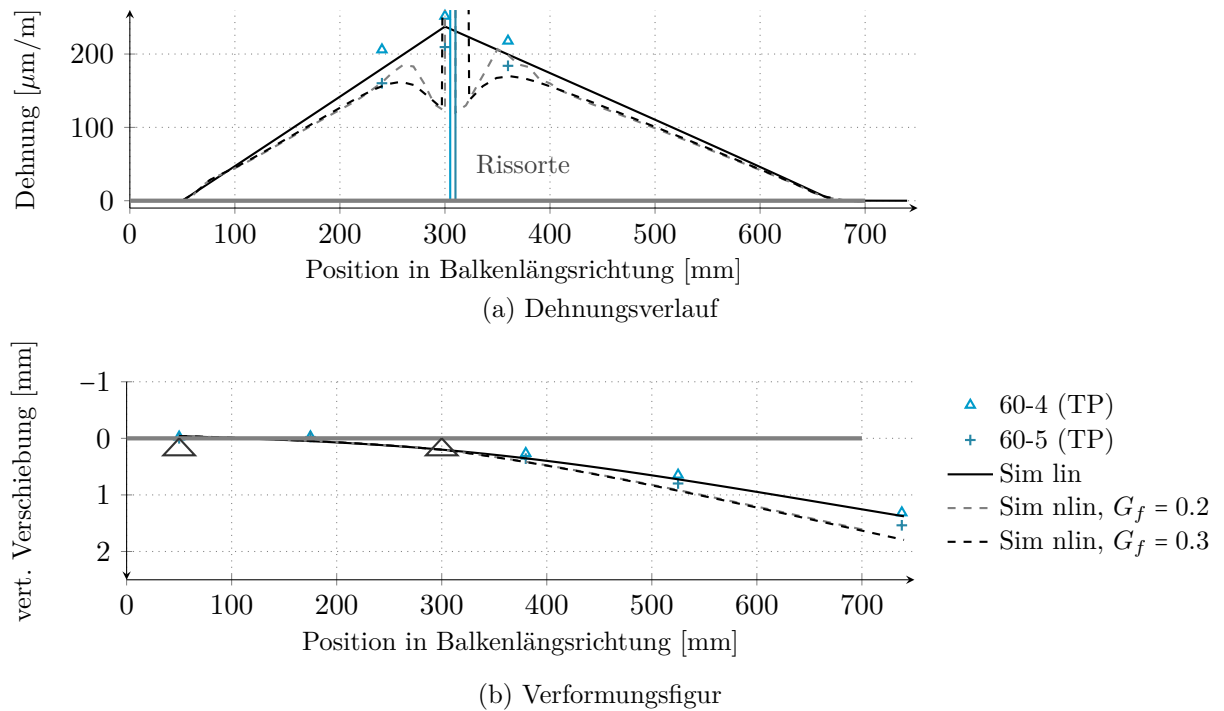


Abbildung 5.9.: Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit  $d = 60$ , TP (vertikale Markierung oben: Stelle des Risses im Versuch)

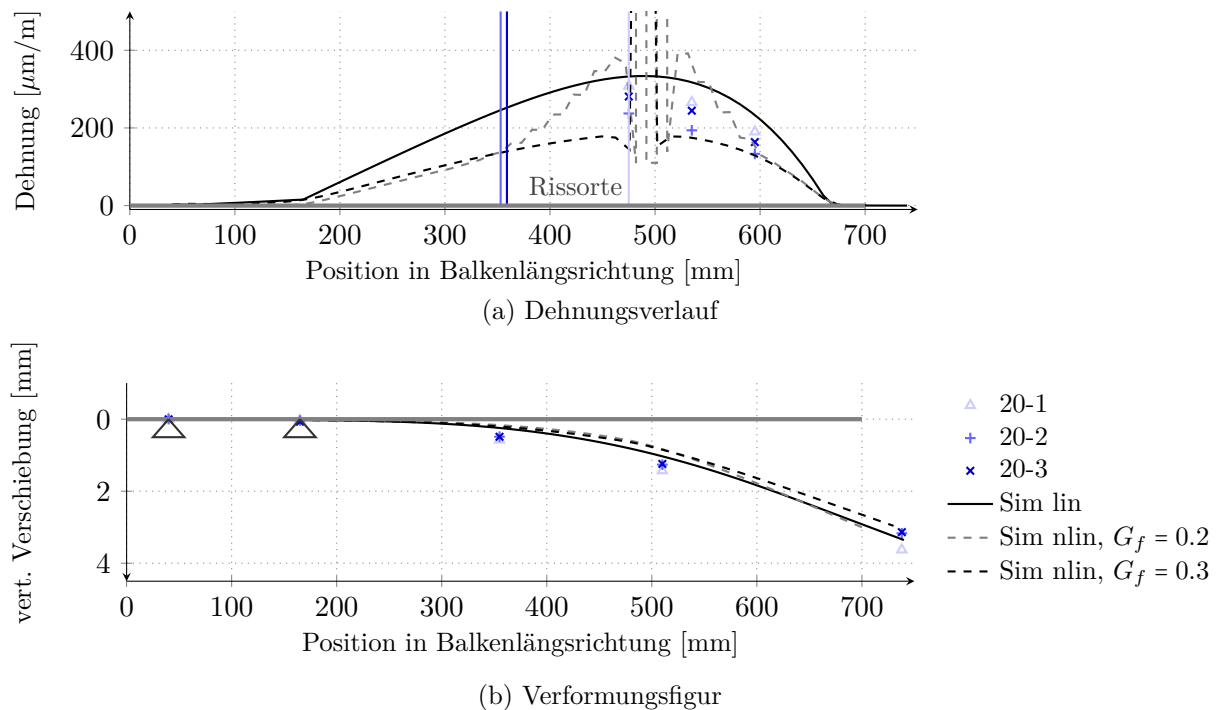


Abbildung 5.10.: Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit  $d = 20$ , TP-GP (vertikale Markierung oben: Stelle des Risses im Versuch)

### 5.3. Zusammenfassung

Aus der Auswertung der Balkenversuche und der numerischen Simulation der Ergebnisse lassen sich die aus den Festigkeitsprüfungen und Voruntersuchungen ermittelten Eingangsparameter (Festigkeiten, Bruchenergie, Elastizitätsmodul) und Modellrandbedingungen (Federsteifigkeit, Elementtyp SC8R) im Rahmen des eindimensionalen Spannungszustands und ohne Betrachtung des Nachbruchbereichs bestätigen und für die folgenden Untersuchungen der Plattenversuche übernehmen. Im Rahmen der nachfolgend beschriebenen Plattensimulationen wurde der Parameter der Bruchenergie sowie die Zugfestigkeit im hier eingegrenzten Rahmen variiert:

- Zugfestigkeit  $f_t \in [2.5, 3.5]$  N/mm<sup>2</sup>
- Bruchenergie  $G_f \in [0.2, 0.3]$  Nmm/mm<sup>2</sup>.

Die übrigen Parameter wurden aus den Balkenuntersuchungen übernommen, so auch die Federgesetze.



## 6. Gebettete Platte (3D-Spannungszustand)

Der Vergleich der Ergebnisse aus den durchgeführten Plattenversuchen mit der numerischen Simulation soll die Eignung des numerischen Modells zur Berechnung des Rissverhaltens validieren. Die Versuche umfassen lediglich zwei Platten auf zwei unterschiedlich steifen Dämmstoffen des gleichen Typs. Zusätzlich zu den Belastungsprüfungen wurden während der Erhärtungsphase Schwindverformungen gemessen, deren Einfluss auf das Bruchverhalten zu untersuchen ist. Zunächst wird im Folgenden der Systemaufbau sowie die Anordnung der Messtechnik erläutert. Die Auswertung der gemessenen Schwindverformungen und der anschließenden Belastungsversuche dient als Grundlage für die numerische Simulation der schwimmend hergestellten Platte.

### 6.1. Versuchsaufbau und -ablauf

#### 6.1.1. Aufbau

Wegaufnehmer wurden zur Schwindmessung wenige Stunden nach Herstellung des Estrichs in einem  $3 \times 3$ -Raster auf den Platten angeordnet, um die vertikale Eck- bzw. Randverformung im Vergleich zur Verformung in Plattenmitte zu erfassen, siehe Abbildung 6.1. Nach drei Wochen wurde die Schwindmessung planmäßig abgebrochen, da als Vorbereitung für die geplante Prüfung der Platten nach etwa 28 Tagen zusätzlich Dehnungsmessstreifen (DMS) auf der Plattenoberseite aufgeklebt werden sollten, und die Arbeit auf der Platte die weitere Messung verfälscht hätte. Die Messung der Dehnung sollte einen Anhaltspunkt für die zeitliche Entwicklung des Dehnungs- bzw. Spannungszustands während der Belastung der Platte bis zum Bruch liefern, und einen möglichen Effekt aus Spannungsumlagerung infolge der Bettung detektieren. Hierfür wurde auch eine innen liegende Messsensorik in Betracht gezogen. Bei der Untersuchung unbewehrter Bauteile besteht jedoch bei der Verwendung optischer Dehnungssensoren das Problem, dass die Positionstreuung der Sensoren ohne Einbau zusätzlicher Fixierhilfen nicht gewährleistet werden kann. Bei Stahl- oder Spannbeton können die Sensoren an der Bewehrung befestigt werden, dies ist bei unbewehrten Bauteilen jedoch nicht möglich, bzw. der zusätzliche Einbau anderer Materialien könnte einen bewehrenden Effekt haben und damit das Bauteilverhalten grundlegend beeinflussen.

Die Anordnung der Dehnungsmessstreifen orientiert sich an der erwarteten Rissbildung. Bei Belastung der Plattenecke bricht diese in einem gewissen Abstand zum Laststempel mit leicht

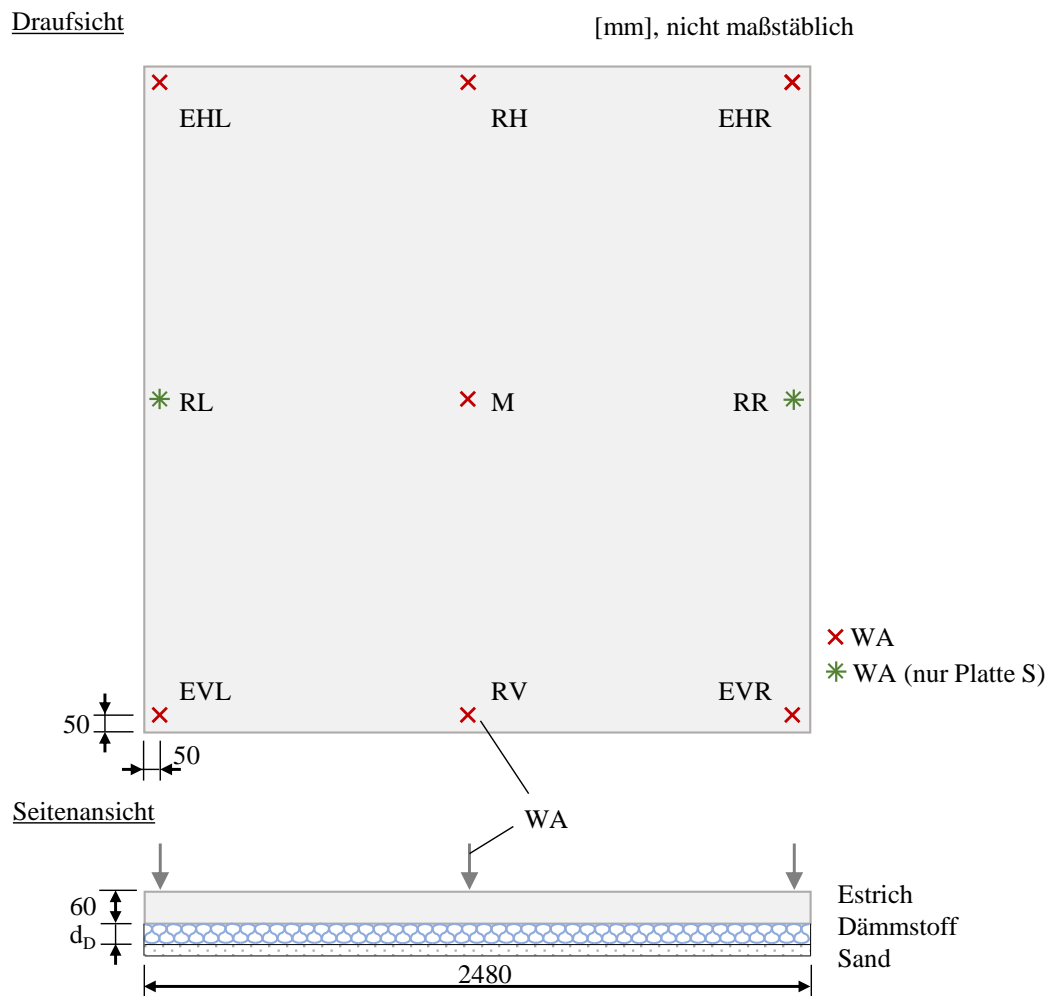


Abbildung 6.1.: Anordnung der Wegaufnehmer (WA) zur Messung der Schwindverformung (Bezeichnung: E/R/M (Ecke/Rand/Mitte), V/H (vorne/hinten), R/L (rechts/links))

gekrümmtem Rissverlauf ab, bei Laststellung in Randmitte ist die Ausbildung eines größeren Bruchradius um die Last herum zu erwarten (vgl. u.a. Manns und Zeus, 1980). Die Position dieser Einzelrissbildung ist vor allem von der Dämmstoffsteifigkeit und der Plattengeometrie und -dicke abhängig. Unter Verwendung der in den Vorversuchen am verwendeten Dämmstoff (vgl. Kapitel 3.2) ermittelten Bettungssteifigkeit wurden Vorsimulationen in *Abaqus* durchgeführt, um die Dehnungsmessstreifen im Bereich der so prognostizierten Rissbildung anzubringen. Der Einfachheit halber wurde für beide Platten an den Ecken die gleiche DMS-Anordnung gewählt: Im Abstand von 200 mm zur Ecke werden drei lineare DMS jeweils im Abstand von 60 mm angebracht, um den erwarteten Rissbereich von etwa 25 mm (steifer Dämmstoff TP-GP) bis 35 mm (weicher Dämmstoff TP) abzudecken. Im Abstand von weiteren 60 mm ist eine DMS-Rosette angeordnet, die an den erwarteten Hauptspannungsrichtungen orientiert aufgeklebt wurde. Die Anordnung der DMS kann Abbildung 6.2 entnommen werden.

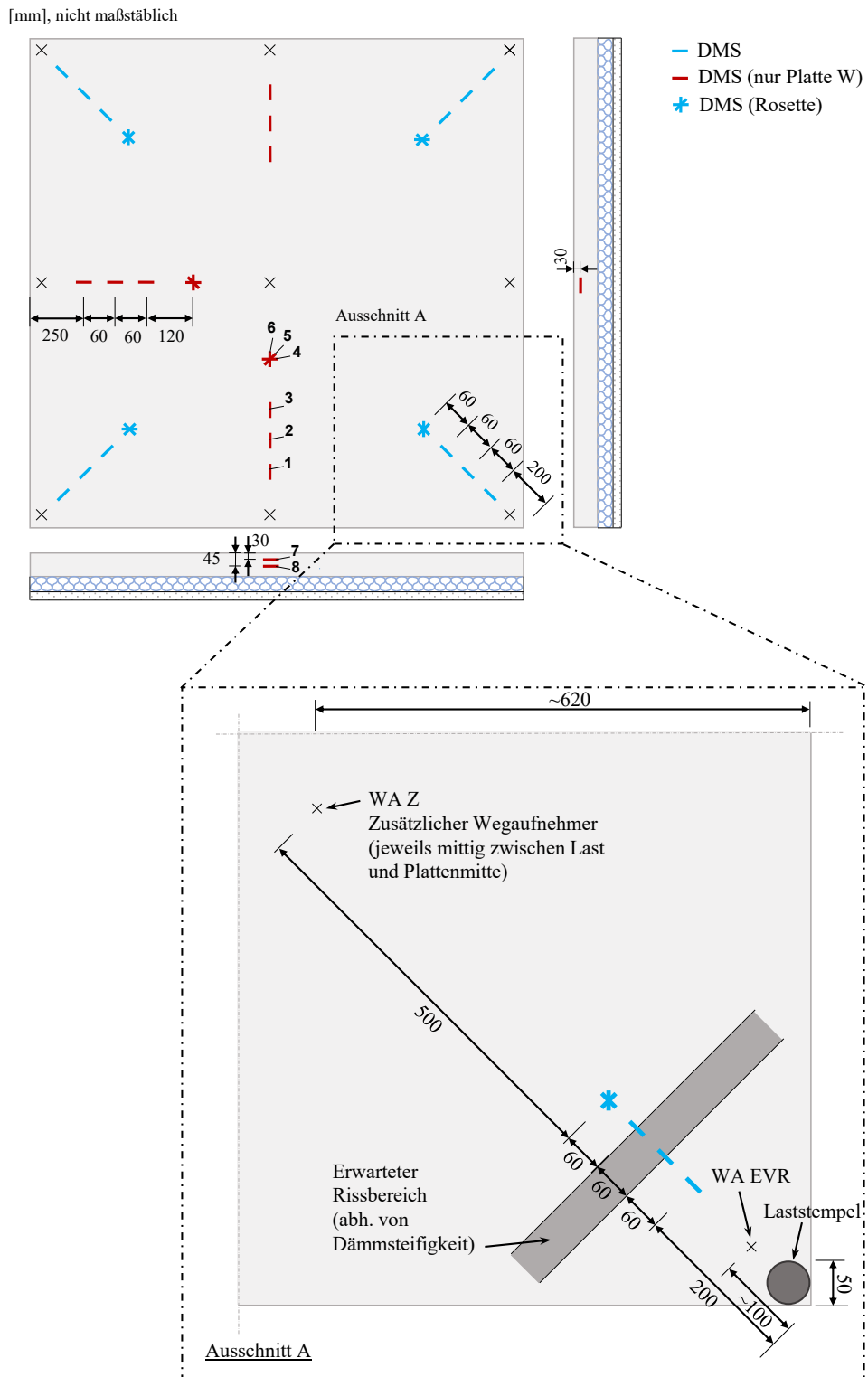


Abbildung 6.2.: Anordnung der Dehnungsmessstreifen (DMS)

Die Last wurde über einen runden Stempel mit einem Durchmesser von 50 mm aufgebracht. Die Laststeigerung erfolgte mithilfe eines Hydraulikzylinders, der zwischen einem auf die erwartete Maximallast ausgelegten Stahlbalken und der Estrichplatte über eine Handpumpe ausgefahren wurde und den Stempel so auf die Platte gedrückt hat. Unter dem Stempel wurde zusätzlich eine elastische Unterlage untergelegt, um keine lokale Schädigung aus Durchstanzbeanspruchung zu riskieren. Unterhalb des Hydraulikzylinders wurde eine Kalotte für eine bessere Kraftschlüssigkeit der Verbindung des in Abbildung 6.3 dargestellten Aufbaus angeordnet. Über eine darunter angeordnete Kraftmessdose wurde die über den Hydraulikzylinder aufgebrauchte Kraft aufgezeichnet. Da die Verformung infolge des Eigengewichts dieses Aufbaus nicht messbar war, wurden zu Beginn der Messung alle Kanäle genullt und die Kraft-Verformungs-Kurven im folgenden Kapitel nachträglich um das gemessene Gewicht des Aufbaus korrigiert.

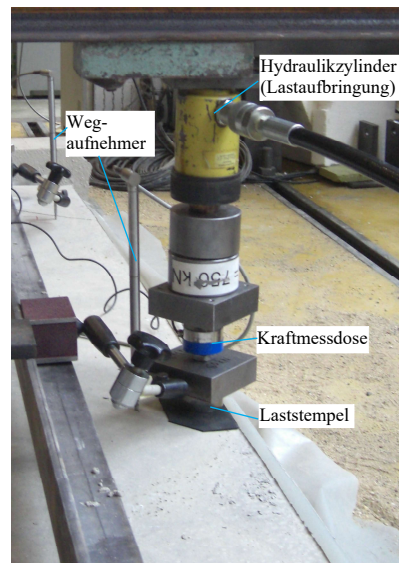
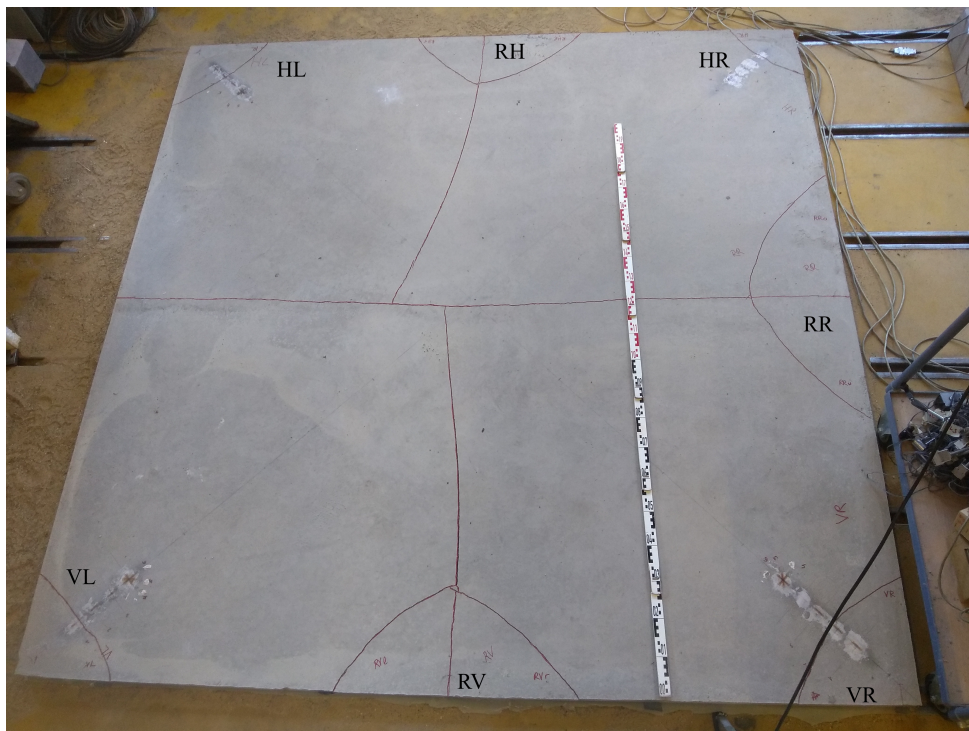


Abbildung 6.3.: Stempelaufbau Platte

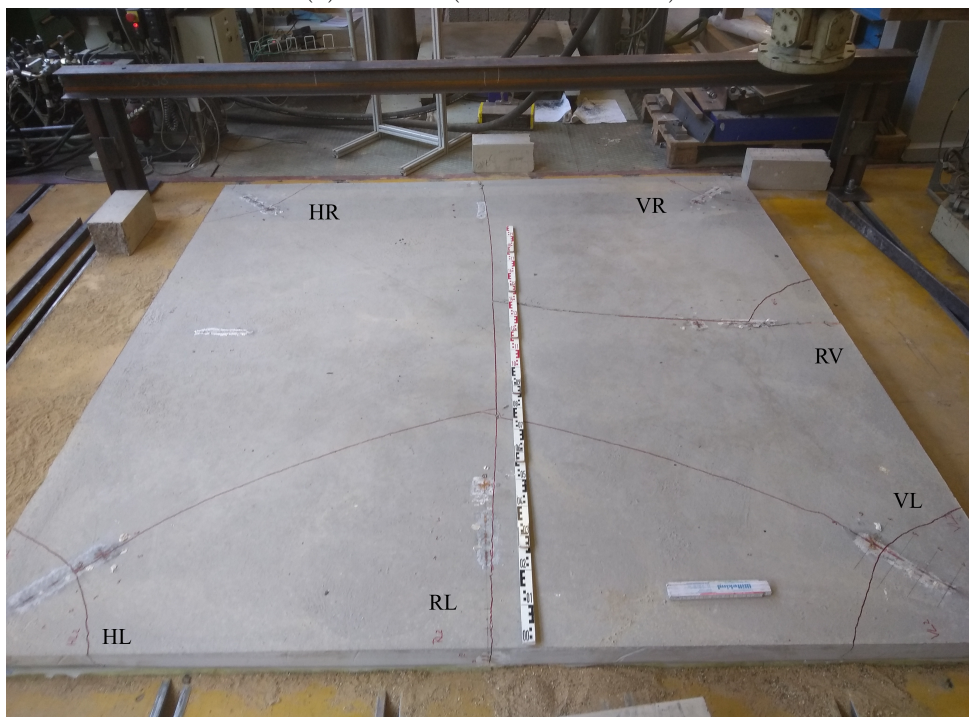
### 6.1.2. Ablauf (Gesamtrissbild)

Zentrales Ziel der Versuche ist die Untersuchung des Lastfalls Einzellast auf Plattenecke. Alternativ zum gewählten Versuchsaufbau wären Eckprüfungen an mehreren kleineren Platten möglich gewesen, allerdings besteht bei Platten mit zu geringer Abmessung das Problem, dass die Platte unter Einzellast lediglich eine Kippbewegung auf dem Dämmstoff erfährt und das tatsächliche Abbruchverhalten, welches in der Praxis zu beobachten ist, nicht ohne zusätzliche Randbedingungen (Festhaltung gegen Kippen) reproduziert werden kann. Alternativ wurde schließlich eine größere Plattenabmessung (quadratische Abmessung  $L = 2500$  mm), und damit einhergehend eine geringere Anzahl an Platten, gewählt.

Zunächst wurde Platte S (steifer Dämmstoff) geprüft. Aufgrund des aufwendigeren Umsetzens des Stahlbalkens, der dem Hydraulik-Zylinder als Gegenlager dient, wurde nach Prüfung der ersten beiden Ecken die Prüfung des dazwischen liegenden Randes vorgezogen. Dabei wurde jedoch ein zusätzlicher Riss quer durch die Platte erzeugt. Die restlichen beiden Eckprüfungen konnten somit nur noch an der auf die halbe Platte reduzierten Geometrie durchgeführt werden ( $L \times L/2$ ). Bei Prüfung der zweiten Platte wurden zuerst alle Eck-Lastfälle durchgeführt, bevor



(a) Platte S (steifer Dämmstoff)



(b) Platte W (weicher Dämmstoff)

Abbildung 6.4.: Plattenprüfung: Finales Rissbild

anschließend Lastfall W-RL (Rand links) geprüft wurde, bei dem ebenfalls eine Halbierung der Platte die Folge war. Aufgrund des großen Bruchradius infolge des weicheren Dämmstoffs war bei den noch übrigen Teilbruchstücken keine näherungsweise rechteckige Geometrie mehr vorhanden. Fotos und Abbildungen zum Aufbau, Ablauf und weitere Informationen zur Messtechnik können Anhang D.2.2 entnommen werden. Die nach Abschluss der Prüfung aufgenommenen Rissbilder der beiden Platten sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Der Versuchsablauf mit den einzelnen schematischen Bruchbildern ist im Anhang in Abbildung E.5 visualisiert.

## 6.2. Versuchsergebnisse

### 6.2.1. Schwinden

Zur Berücksichtigung der Schwindverformungen soll eine gewisse Vorbeanspruchung im numerischen Plattenmodell eingepreßt werden. Durch Vorgabe einer aufgeschüsselten Initialkonfiguration und Lagerung der Platte auf nichtlinearen Einzelfedern, wie bereits in Kapitel 3.2.1 erläutert, wird die Vorverformung der Platte infolge Schwindens berücksichtigt. Die zugehörige Verformungsfigur hätte aus den gemessenen Eckwerten der Platte und Näherung an eine parabolische Schüssel-Form ermittelt werden können. Bei dieser Vorgehensweise würde allerdings der korrespondierende Spannungszustand infolge der Schwindverformung entgegenwirkenden Eigengewichts nicht berücksichtigt. Um einen möglichen Einfluss auf die anschließende Rissbildung infolge äußerer Last zu prüfen, sollten die entstehenden Zwangsspannungen betrachtet werden. Während der Erhärtung des Estrichs wurden jedoch nur die Verformungen und keine Spannungen oder Dehnungen gemessen, um daraus eine Vorbeanspruchung ableiten zu können. Auch wäre eine großflächige Abschätzung des Spannungszustands auf Basis einzelner Messwerte mit großen Unsicherheiten behaftet.

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, den Lastfall Schwinden rein numerisch zu berücksichtigen und die resultierenden Verformungen und Spannungen als Initialzustand bei der Rissimulation anzunehmen. Auf die konkreten Randbedingungen und Ergebnisse dieser Schwindsimulationen wird in Anhang B genauer eingegangen (siehe auch Kapitel 3.2.1).

In Abbildung 6.5 sind zunächst die vertikal gemessenen Verschiebungen der Ecken, Ränder und Plattenmitte der beiden betonierten Platten dargestellt. Zu sehen ist ein zunehmend asymptotischer Verlauf der Kurven, wobei zum Zeitpunkt des Messabbruchs nur bei wenigen Kurven eine Stagnation in Form eines näherungsweise horizontalen Verlaufs sichtbar ist. Die Kurve des Wegaufnehmers in Plattenmitte der steiferen Platte S zeigt sogar eine leicht zurückgehende Verformung.

Die Aufnehmer an den Ecken bzw. Rändern weisen jeweils eine gute Übereinstimmung<sup>1</sup> auf. Die Kurven der steifer gelagerten Platte S (Abb. 6.5a) stimmen mit denen der weicheren Platte W ebenfalls gut überein (Abb. 6.5b), wobei die Kurven in (b) tendenziell leicht höhere Verformungen aufweisen. An der Plattenmitte zeigt sich eine zunehmende Abweichung von bis zu etwa 0.5 mm.

Zur Ermittlung eines numerischen Vorverformungs- bzw. Vorspannungszustands, der diesen

<sup>1</sup> mit Ausnahme des Aufnehmers EHL (=Ecke hinten links) aufgrund eines instabilen Stativs; Aufnehmer EHL wird nachfolgend vernachlässigt

Messdaten möglichst gut entspricht, stehen rechnerische Ergebnisse aus dem Programmsystem *croc* zur Verfügung, wobei hier noch kein Eigengewicht berücksichtigt ist (vgl. Kapitel 3.2.1). Ein Vergleich der Messkurven in Abbildung 6.5 mit durch Eigengewicht beaufschlagten *croc*-Simulationsergebnissen über die Zeit ist nicht ohne Weiteres möglich, da hierfür jedes Zeitschritt-Ergebnis aus *croc* in *Abaqus* importiert und mit Eigengewicht belastet werden müsste. Statt eines Vergleichs der absoluten Schwindverformung, werden die gemessenen Relativverformungen mit den Ergebnisse aus *croc* verglichen.

In Abbildung 6.6 sind die jeweils gemittelten, gemessenen vertikalen Eck (E)- und Rand (R)-Verformungen abzüglich der Verformungen in Plattenmitte (M) dargestellt. Der direkte Vergleich der Differenz-Messkurven der beiden Platten zeigt aufgrund der stärkeren Verschiebung des Aufnehmers in Plattenmitte bei Platte W eine Abweichung von etwa 0.5 mm, sowohl für die Ecke<sup>2</sup> als auch für den Rand. Zusätzlich sind hier die in *croc* ohne Eigengewicht an einer Viertelplatte (Symmetrienausnutzung, siehe Abbildung 3.14) berechneten Relativverschiebungen an Ecke und Rand relativ zur festgehaltenen Plattenmitte dargestellt. Unter der Annahme, dass das Eigengewicht bei den Messungen gleichmäßig wirkt, sollten die berechneten Daten mit den gemessenen Relativverschiebungen übereinstimmen. Die Simulationen in *croc* wurden für verschiedene Vernetzungen durchgeführt:

- Netz 1: gleichmäßig, Elementabmessung 50mm,
- Netz 2/4: gleichmäßig: Elementabmessung 25mm (mit 8- und 20-Knoten-Elementen),
- Netz 3: Verfeinerung des Netzes hin zur Ecke.

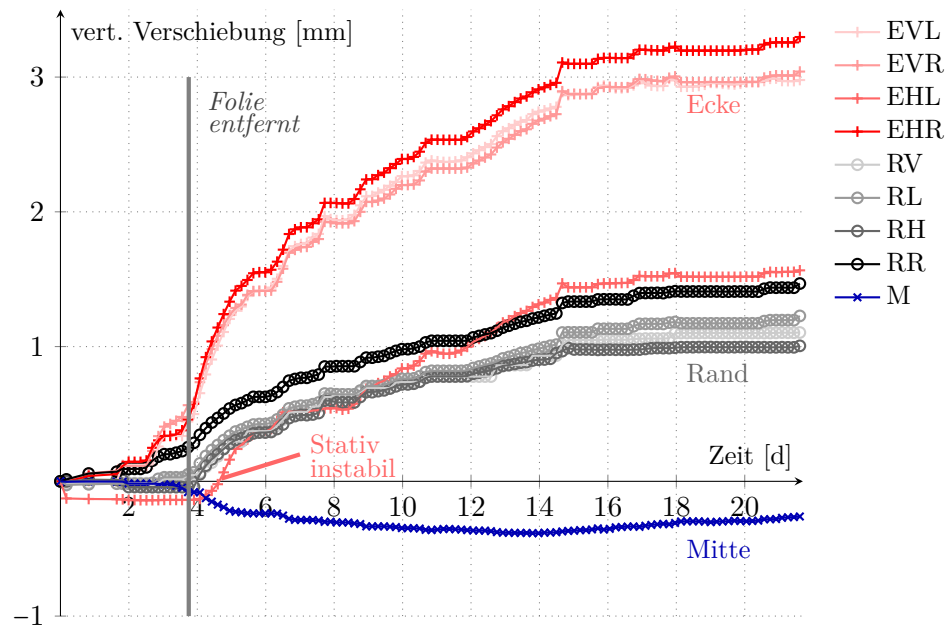
Es fällt auf, dass im Gegensatz zu den Messkurven in der Simulation vor Abnahme der Folie ein horizontaler Verlauf zu verzeichnen ist, sich bis zur modellierten Abnahme der Folie nach 4 Tagen keine Verformung im Modell ergibt. Um den Verlauf der gemessenen mit den simulierten Kurven nach 4 Tagen besser vergleichen zu können, wurden daher die berechneten Kurven um das mittlere Maß der im Versuch zum Zeitpunkt der Folienabnahme Verformung verschoben. Dies geschieht gleichermaßen für alle betrachteten Vernetzungen. Der Vergleich der verschiedenen Netze zeigt keine Konvergenz bei feinerer Vernetzung, sondern eine Streuung, die im Fall der Randverformungen bereits deutlich ist, im Fall der Eckverformung noch größer. Die Simulationsergebnisse zeigen die von den Messergebnissen nahezu erreichte Stagnation im betrachteten Zeitraum weniger, und weisen kurz nach Entfernung der Folie einen etwas flacheren Anstieg auf als die Messkurven. Die Größenordnung der maximalen Verschiebung ist mit den Werten im Versuch zumindest vergleichbar.

Der zu den beschriebenen Verformungen korrespondierende Spannungszustand während der Schwindsimulation weist die gleichen Diskrepanzen hinsichtlich einer eindeutigen Konvergenz auf wie die Verformungen. Die Hauptspannungen übersteigen aber weder Zug- noch Druckfestigkeit (vgl. Abbildung F.5), sodass infolge Schwinden nicht mit Rissbildung zu rechnen ist,

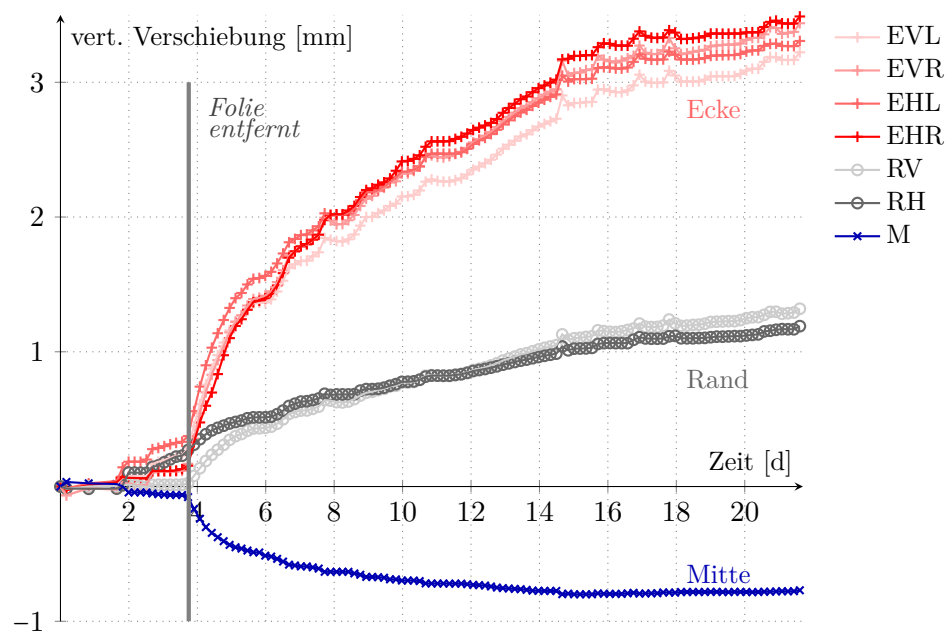
---

<sup>2</sup> die aufgrund des instabilen Stativs fehlerhafte Messung wurde bei der Mittelung nicht berücksichtigt





(a) Platte S mit steiferem Dämmstoff



(b) Platte W mit weicherem Dämmstoff

Abbildung 6.5.: Schwindmessung im Versuch (Bezeichnung der Wegaufnehmer vgl Abb. 6.1)

weshalb das geplante stufenweise Vorgehen im vorliegenden Fall möglich ist:

- (i) Implementierung der Ergebnisse der Schwindberechnung ohne Eigengewicht aus *croc* als Ausgangszustand,
- (ii) anschließendes Aufbringen des Eigengewichts und der Einzellast innerhalb *Abaqus*.

Aufgrund der guten Übereinstimmung der berechneten mit der gemessenen vertikalen Verschie-

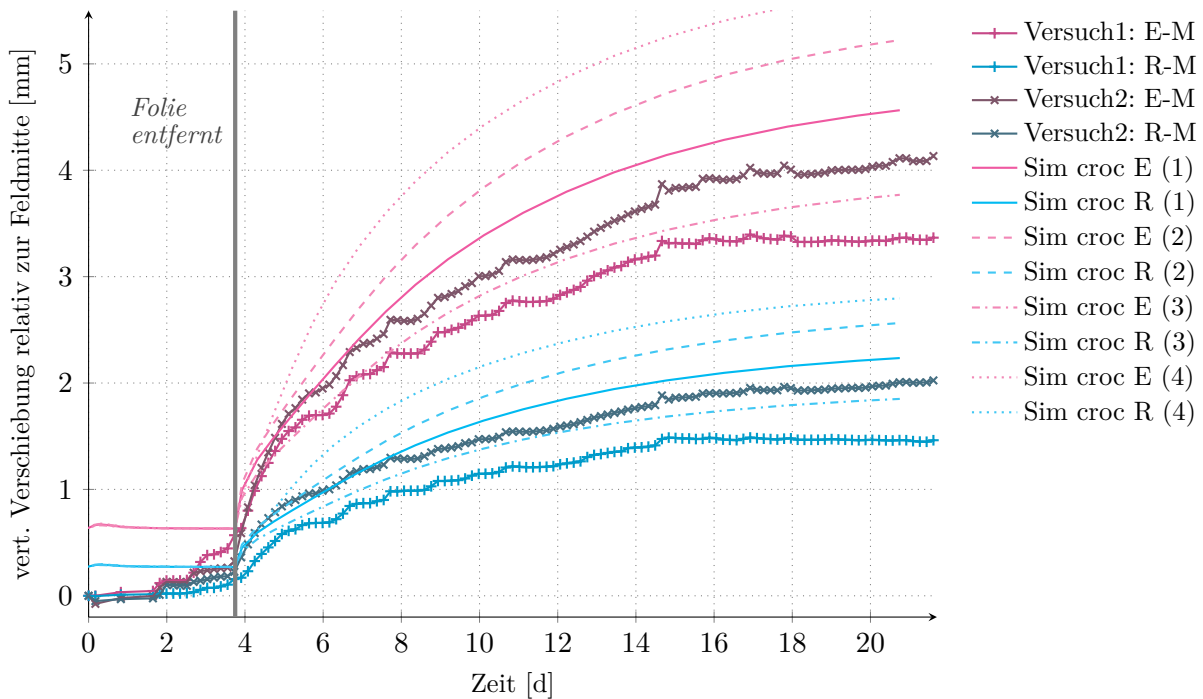


Abbildung 6.6.: Ergebnis der Schwindsimulation in croc: Vertikale Verformungen an der Ecke (E) bzw. am Rand (R) relativ zur in der Simulation fest gelagerten Plattenmitte (M) im Vergleich zur gemessenen Relativverformung zwischen Plattenmitte und Ecke (E-M) bzw. Rand (E-R) (Elementnetz: (1) – regelmäßig 50 mm, (2) – – regelmäßig 25 mm, (3) – – zur Ecke verfeinert, (4) ··· 20-knotige Elemente, regelmäßig 25 mm)

bung wird die berechnete Verformungsfigur sowie der zugehörige, in croc ermittelte Spannungszustand infolge Schwinden für einige Voruntersuchungen des Rissverhaltens an der Platte berücksichtigt. Es zeigt sich in Abbildung F.4 im Anhang, dass der Einfluss aus Zwangsspannungen, so wie sie croc liefert, auf das Verformungs- oder Rissverhalten der Platte vernachlässigbar ist. Der Einfluss der Vorverformung ist jedoch deutlich. Da es außerdem aufgrund fehlender Messungen keine Möglichkeit gab, die innerhalb croc ermittelten Spannungen und deren Implementierung in das vorhandene Modell auf Realitätsnähe bzw. Korrektheit zu überprüfen, werden in den folgenden Rechnungen nur die Vorverformungen berücksichtigt. Dabei werden entweder die aus croc gegebenen Vernetzungen übernommen oder bei abweichender Vernetzung diese entsprechend daraus interpoliert. Qualitativ ist der Verformungszustand für alle Netze ähnlich, nur die Maximalordinate am Rand bzw. an der Ecke sind stark unterschiedlich. Die vorgegebene Vorverformung wird bei den Berechnungen in *Abaqus* jedoch ohnehin auf die gemessene Eckverformung von 3.4 mm (Platte S) bzw. 4.1 mm (Platte W) skaliert.

## Fazit

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Messdaten der vertikalen Verschiebung während des Erhärtungszeitraums ein Schlüsselverhalten, d. h. ein Abheben der Ränder und Ecken bei gleichzeitigem Einsinken der Plattenmitte zeigen, wobei Platte W etwas weiter einsinkt als Platte S. Dies könnte u. a. mit dem weicheren Dämmstoff unter Platte W und einer dadurch insgesamt tieferen Einsenkung dieser Platte zusammenhängen. Die tendenziell höheren Eck- und Randverformungen dieser Platte sprechen allerdings dagegen. Inwiefern die Unterschiede zwischen den beiden Platten ggf. auch auf äußere Einflüsse oder Ungenauigkeiten während der Messung zurückzuführen sind (bzw. ob die Ungenauigkeit eher im Rand-/Eckbereich oder in Plattenmitte zu suchen ist), oder dies mit lokal unterschiedlicher Verdichtung der Platten oder anderen Ursachen zusammenhängt, kann nicht abschließend geklärt werden. Aufgrund der in beiden Fällen gleichermaßen unterliegenden Folie ist ein Einfluss unterschiedlicher Isolationswirkung nach unten während der Austrocknung auszuschließen.

Die Annahme des simulierten qualitativen 21-Tage-Verformungszustands skaliert auf die maximal gemessene Eckverformung als Grundlage für die Nachrechnung der Belastungsversuche, die erst nach 28 bzw. 36 Tagen erfolgten, ist für den Zweck einer grundlegenden Beurteilung des Schwind-Einflusses ausreichend genau. Die fehlende Konvergenz bei den Ergebnissen aus *croc* kann im Fall der Vorverformungen aufgrund des Abgleichs mit den Messdaten vernachlässigt werden. Bei Anwendung des Modells auf andere, schwind-intensivere Estrichtypen und vergleichender, quantitativer Beurteilung der Simulationsergebnisse sollten diese Annahmen jedoch noch einmal überprüft und der Dehnungszustand während der Erhärtungsphase mithilfe von DMS erfasst und abgeglichen werden. Im Folgenden wird auf die Belastung der Platte im Anschluss an die Erhärtungsphase näher eingegangen.

### 6.2.2. Belastung

Aufgrund der – mit Blick auf die erwartete Rissposition an der jeweiligen Plattenecke – großen Abmessung der Platte wird angenommen, dass die Eck-Lastfälle sich nicht gegenseitig beeinflussen. Somit können die vier Eckprüfungen als voneinander unabhängig beurteilt werden und sollten bei gleicher Geometrie vergleichbare Ergebnisse liefern. Aufgrund des bereits erläuterten ungünstigen Versuchsablaufs bei Platte S, wodurch die Platte vor Belastung der beiden Ecken vorne links (Abkürzung im folgenden entsprechend Abb. 6.1: EVL (Ecke vorne links)) und hinten links (EHL) durchgebrochen ist, sind diese beiden Ecken im weiteren Verlauf nicht einzubeziehen. Wie bereits anhand der Rissbilder in Abbildung 6.4 erläutert ist der Bruchradius unter der Randlast bei der weicheren Dämmung deutlich größer als der der steifer gelagerten Platte. Diese Tendenz eines größeren Bruchradius bei weicherer Dämmung zeigt sich weniger ausgeprägt auch bei den Eckprüfungen.

In den Tabellen E.1 und E.2 sind die Abmessungen und Bruchlasten der Eck- und Randbruchkörper der jeweiligen Platte erfasst (vgl. Abb. 6.7), Tabelle 6.1 zeigt jeweils Mittelwerte der quadratischen Platte und der halbierten Platte. Die Bruchlasten wurden gemittelt sofern mehrere Versuche gleicher Randbedingung vorlagen (vgl. letzte Spalte mit Bezeichnung der berücksichtigten Versuche). Die Bruchlast steigt durch die Halbierung der Geometrie bei steiferer Unterlage<sup>3</sup> an: an der Ecke um etwa 0.7 kN, am Rand etwa 2.1 kN. Durch die Halbierung der Platte werden die Eck- und Randbruchstücke der Platte S tendenziell etwas kleiner, die Bruchstückgrößen liegen aber unabhängig von der veränderten Geometrie nah beieinander. In Spalte „d“ der Tabelle 6.1 zeigt sich außerdem eine Schwankung bei der Plattendicke zwischen 60.5 mm und 68 mm anstelle der geplanten 60 mm. In dieser Größenordnung sollten Auswirkungen dieser Schwankungen auf die Versuchsergebnisse, z. B. auf die Höhe der Bruchlast, vernachlässigbar sein, können nicht gänzlich ausgeschlossen werden.

Tabelle 6.1.: Gemittelte Abmessungen der Bruchkörper [mm] und mittlere Bruchlasten [kN], vgl. Tabellen E.1 und E.2 im Anhang für die ungemittelten Messdaten

Platte	Lastfall	Geometrie	$L_m$	$d$	$F_{\text{Bruch,m}}$	
S	Ecke	quadratisch	242.5	60.5	6.79	S-EVR, S-EHR
W	Ecke	quadratisch	334.3	62	7.43	W, alle Ecken
S	Rand	quadratisch	315	63	13.55	S-RR
W	Rand	quadratisch	785	68	15.17	W-RL
S	Ecke	rechteckig	239	63	7.5	S-EVL, S-EHL
S	Rand	rechteckig	272.5	60.5	15.62	S-RH, S-RV

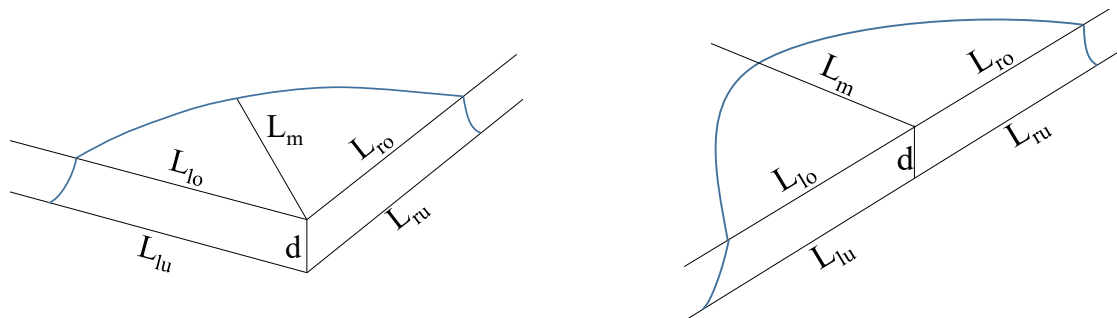


Abbildung 6.7.: Form und Abmessung der Bruchkörper (links Eck-, rechts Randprüfung), vgl. Tabelle 6.1

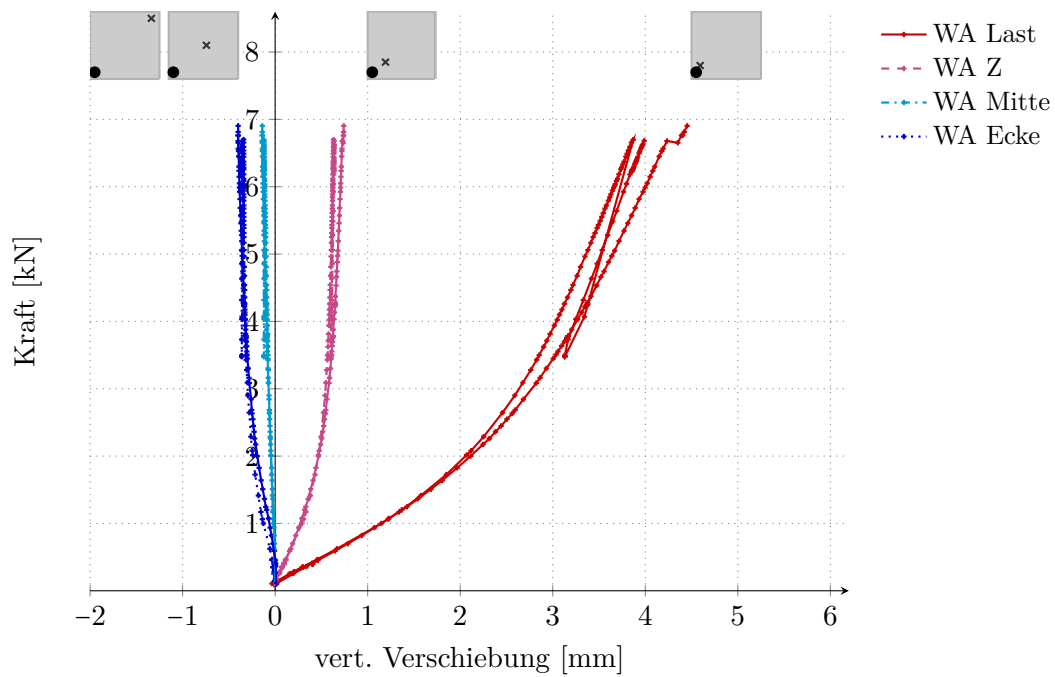
### Belastung an der Ecke

In den Abbildungen 6.8 und 6.9 sind die zu den Eck-Lastfällen zugehörigen Kraft-Verformungskurven zusammengestellt, vgl. Tabelle 6.1 (Zeilen 1 und 2). In Abbildung 6.8 sind die vertikalen Verformungen direkt an der Stelle der Lastaufbringung sowie entlang der zugehörigen Diagona-

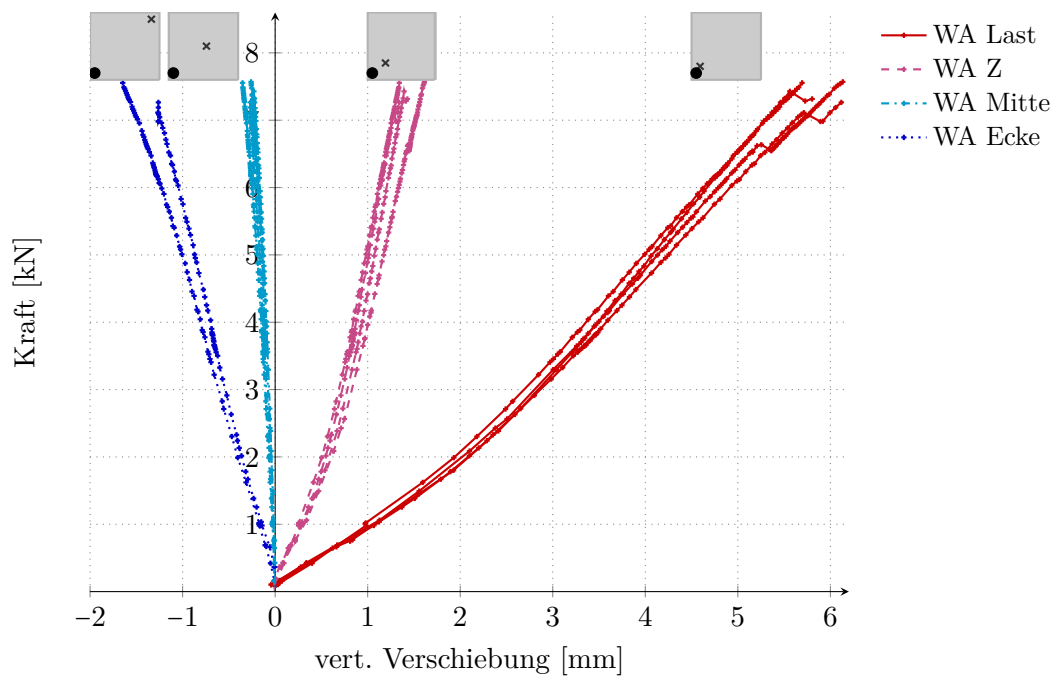
<sup>3</sup> bei weicherer Unterlage war der Versuch am Plattenrand bei durchgebrochener Platte fehlerhaft

len aufgetragen (vgl. die Bilder zur Laststellung ( $\bullet$ ) und WA-Stellung (x), die an den jeweiligen Kurven abgebildet sind). In Abbildung 6.9 sind die sich gegenüberliegenden Rand- bzw. Eckverformungen der übrigen Messstellen dargestellt. In allen Abbildungen zeigt sich eine deutliche Gruppierung gleicher Messstellen bzw. eine gute Übereinstimmung der vertikalen Verformungen für die Ecklastfälle.

Anhand der Kraft-Verformungskurven wird ersichtlich, dass sich die Platte unter der Last nicht nur biegt, sondern vor allem zu Beginn der Belastung „kippt“, da sich die jeweils gegenüberliegende Ecke nach oben bewegt. Diese Bewegung flacht im Fall des steiferen Dämmstoffs (vgl. Abb. 6.8a) mit zunehmender Kraft hin zu einem vertikal asymptotischen Kraft-Verformungsverlauf ab, die Kippbewegung stagniert. Diese Tendenz ist bei Platte W nicht zu beobachten, die zugehörige Kraft-Verformungs-Kurve weist einen nahezu linearen Verlauf auf (vgl. Abb. 6.8b). Analog zu den Messungen an den gebetteten Balken weisen auch hier die Kraft-Verformungskurven im ansteigenden Ast kaum Anzeichen für die Ankündigung eines Bruchs durch Abflachung der Kurve auf. Ein Großteil der Kurven zeigt vielmehr eine anfänglich schwächere Steigung mit späterer Versteifung bis hin zu einem plötzlichen Eintreten des Bruchs. Diese Verläufe bestätigen, dass es vor dem Bruch infolge der Sprödigkeit des Estrichs nicht zu Spannungsumlagerungen kommt. In Abbildung 6.9 ist die vertikale Verformung der Platte abseits der vom Lastangriffspunkt aus betrachteten Diagonallinie dargestellt. Die steifere Platte (Abb. 6.9a) zeigt eine deutlich bessere Übereinstimmung der verschiedenen Ecken, jedoch auch des rechten und linken „Plattenflügels“. Die farblich gruppierten Kurven (rot/ magenta/ hellbau/ dunkelblau) stimmen recht gut überein. Die Platte zeigt somit bezogen auf die Diagonale in den beiden Prüfungen eine weitgehend symmetrische Verformungsfigur. Bei der weicheren Platte (Abb. 6.9b) sind die Kurven weiter aufgefächert, hier sinkt eine Plattenseite etwas mehr ab als die andere. Dieser Effekt ist auf nicht perfekt symmetrische Randbedingungen im Versuch zurückzuführen.



(a) Platte S (steifer gelagert), Laststellung Ecke ( $n_{\text{Versuche}} = 2$ )



(b) Platte W (weicher gelagert), Laststellung Ecke ( $n_{\text{Versuche}} = 4$ )

Abbildung 6.8.: Verschiebungsmessung auf der Diagonalen bei Eckbelastung (vgl. Position auf der Platte mit  $\bullet$ =Laststellung,  $\times$ =Wegaufnahmerstelle (WA) von der Stelle der Last über Stelle Z (vgl. Abb. 6.2) und die Plattenmitte bis zur gegenüberliegenden Ecke)

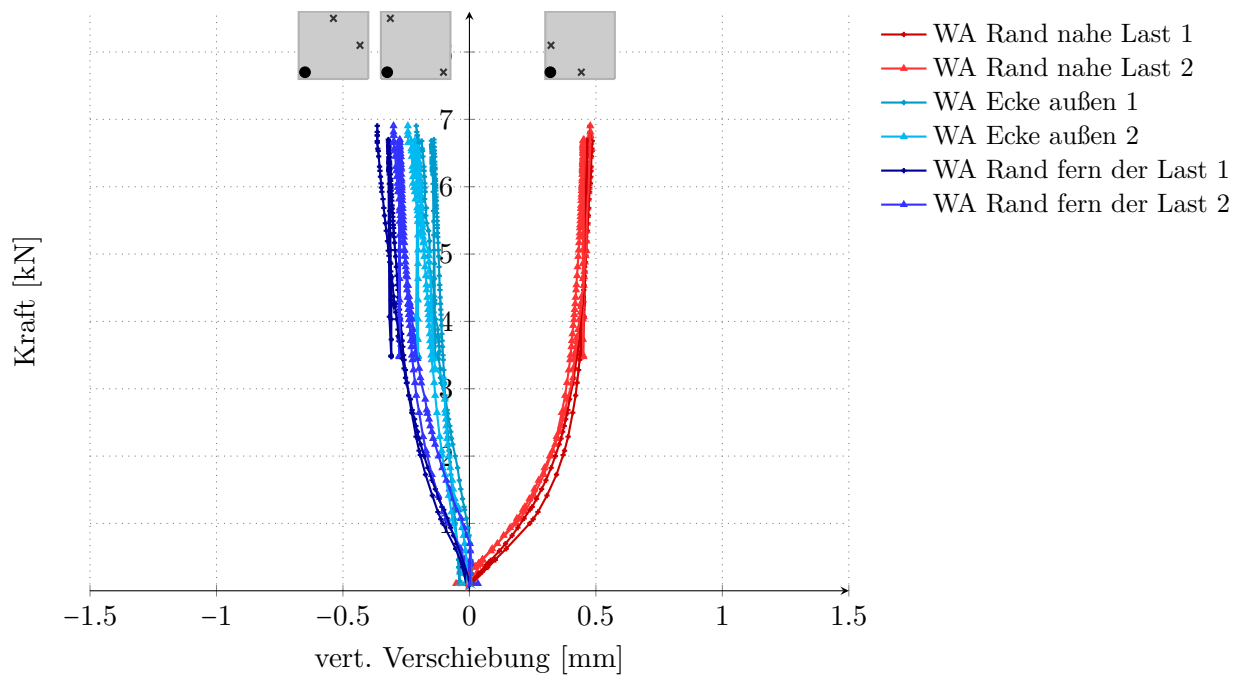
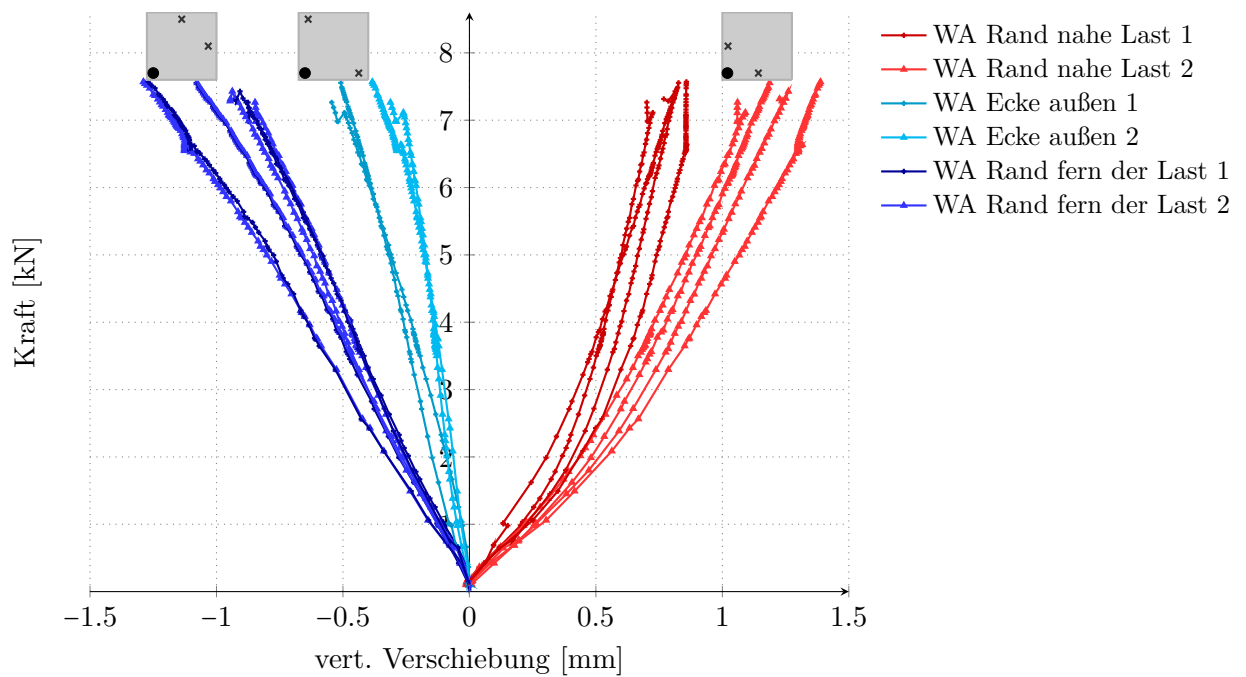
(a) Platte S (steifer gelagert), Laststellung Ecke ( $n_{\text{Versuche}} = 2$ )(b) Platte W (weicher gelagert), Laststellung Ecke ( $n_{\text{Versuche}} = 4$ )

Abbildung 6.9.: Verschiebungsmessung jenseits der Diagonalen bzw. an den Diagonalfügeln bei Eckbelastung (vgl. Position auf der Platte mit  $\bullet$ =Laststellung,  $x$ =Wegaufnehmerstelle (WA))

### Fazit

Für die Validierung des numerischen Modells werden die in Tabelle 6.1 grau unterlegten Messergebnisse herangezogen, da sich hier bei mehreren Versuchen gleicher Randbedingung eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse zeigt. Die Kraft-Verformungslinien der einzelnen Versuche zeigen eine gute Übereinstimmung. Der Bruch kündigt sich auch in den Messdaten nicht durch ein Abflachen der Kurve an, im Gegenteil zeigt sich eher eine leicht versteifende Tendenz am Lastangriffspunkt. Dies ist wahrscheinlich auf die anfängliche Überwindung der Aufschüsselung und die dadurch erst spätere Aktivierung des Dämmstoffs zurückzuführen. Der vor allem beim weicheren Dämmstoff beobachtete Effekt, dass sich unter Last ein Plattenflügel etwas mehr senkt als der andere, wird sich bei der numerischen Nachrechnung nicht einstellen. Das numerische Modell ist eindeutig symmetrisch, sodass dies eine Ursache für eventuelle, leichte Abweichungen zum Versuch darstellen kann. Für den Lastfall Einzellast am Plattenrand ist die Belastbarkeit der Messdaten fraglich. Infolge des Durchbrechens der Platte nach Prüfung des ersten Rands liegt nur jeweils ein Versuch für die beiden unterschiedlich steif gelagerten Platten vor, und aufgrund der Größe des Bruchradius' kann ein Einfluss aus vorheriger Prüfung der Ecken nicht ausgeschlossen werden. Auf die erfassten Versuchsdaten wird dennoch in Kapitel 6.3.2 unmittelbar in Zusammenhang mit einer Vergleichssimulation eingegangen, um Eck- und Randlastfall im Hinblick auf die Bemessungsrelevanz gegenüberzustellen.



## 6.3. Simulationen

### 6.3.1. System und Randbedingungen

In Abbildung 6.10 ist das numerische Modell für die Simulation der  $2500 \times 2500 \times 60$  mm bemessenden Platte dargestellt. Für die Elementabmessungen werden drei verschiedene, gleichmäßige Netze mit dem Raster

- $50 \times 50 \times 10$  Elemente (grob),
- $70 \times 70 \times 10$  Elemente (mittel),
- $100 \times 100 \times 10$  Elemente (fein).

untersucht. Für das grobe und das feine Netz konnten die Vernetzung und Schlüsselverformungen unmittelbar aus croc übernommen und skaliert werden, für das mittlere Netz wurden die Daten zur Beschreibung der Schlüsselform entsprechend über das feinere Netz interpoliert. Die Platte ist vollständig auf knotenweise mit der unteren Elementlage verbundenen Einzelfedern gelagert. Dies geschieht analog zur Modellierung des Balken-Modells mit dem Unterschied, dass im Bereich der Schlüsselung im äußeren Bereich der Platte jeweils Federn zwischengeschaltet sind (ausgenommen ist nur ein kleiner Bereich in Plattenmitte mit vernachlässigbarem Abstand zum Dämmstoff; der Mittelknoten liegt entsprechend der Vorgabe aus croc direkt auf dem Dämmstoff auf). Dieses Vorgehen wurde bereits in Kapitel 3.2.1 erläutert. Entsprechend erhalten die zwischengeschalteten Federn ein nichtlineares Kraft-Verschiebungs-Gesetz, welches bis zur Überbrückung des Abstands zwischen Platte und Dämmstoff näherungsweise eine Steifigkeit von Null aufweist und anschließend in eine im Verhältnis zum restlichen System unendlich großen Steifigkeit übergeht. Die restlichen Federn weisen ein Federgesetz entsprechend der ermittelten Dämmsteifigkeit auf. Die Maximalordinate der Schlüsselform wird abhängig von der Dämmsteifigkeit im Versuch aus der Messung übernommen (Platte W: 4.1 mm, Platte S: 3. mm). Die Last wird als Druck und im Fall des groben Netzes auf ein einzelnes Element aufgebracht, da dies etwa der belasteten Fläche im Versuch entspricht. In den beiden feineren Netzen wird die Last auf 4 Elemente verteilt, vergleiche Abbildung 6.10 rechts in rot.

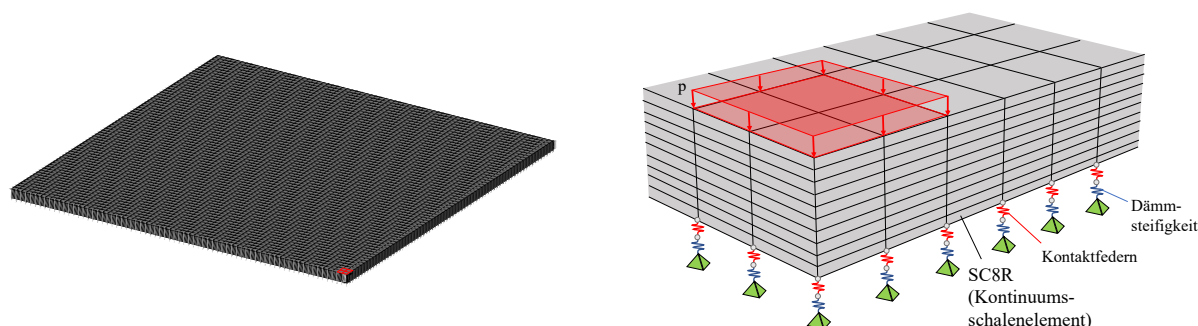


Abbildung 6.10.: Systemplot der Platte für das mittlere Netz mit  $70 \times 70 \times 10$  Elementen

### 6.3.2. Vergleich mit den Messdaten

#### Rissbilder und Kraft-Verformungslinien

Wie bereits in Kapitel 4 erläutert, wurden zur Realisierung der vorhandenen Rissbildung in den Versuchen bei der numerischen Modellierung die Elemente mit den größten Hauptspannungen gegenüber dem restlichen Modell geschwächt, um eine Konzentration des Risses auf wenige Elementreihen zu erzwingen. Der Einfluss dieses Vorgehens auf die Kraft-Verformungslinie wird nachfolgend veranschaulicht. In den Abbildungen 6.11 und 6.12 sind die resultierenden Rissbilder für die drei verschiedenen Netze in Form von auftretenden plastischen Dehnungen dargestellt (dunkle Einfärbung). Der hier dargestellte Zustand ergibt sich bei Schwächung der Elemente im Rissband durch eine um 10 % niedrigere Zugfestigkeit. Bei diesen nur leicht geschwächten Elementen in der RPZ breiten sich die plastischen Dehnungen in einen größeren Bereich aus und beschränken sich nicht auf das initial identifizierte Rissband. Dabei entwickelten sich in der Regel in zwei Elementreihen die mit einigem Abstand größten plastischen Dehnungen, wobei eine der beiden Reihen in der Regel dominanter ist. Um eine Vergleichbarkeit mit der Einzelrissbildung in den Versuchen herzustellen, wurde eine ausschließlich auf das Rissband beschränkte Lokalisierung durch eine deutliche Steigerung der Zugfestigkeit außerhalb des designierten Rissbands induziert. Die zu dieser Modellierung zugehörigen Rissbilder sind in Anhang F.3.2 dargestellt. Jeweils in rot dargestellt sind die in den Versuchen festgestellten, gemittelten Risspositionen. Für das mittlere Netz zeigte sich für die genannte dominantere Reihe eine sehr gute Übereinstimmung mit der weicher gelagerten Platte W (Abb. 6.11 bzw. F.7), für das größte Netz mit der steifer gelagerten Platte S (Abb. 6.12 bzw. F.8). Die Tendenz, dass sich für den weicheren im Gegensatz zum steiferen Dämmstoff ein etwas größerer Bruchradius ausbildet, ist kaum auszumachen, die Risslinien liegen grundsätzlich sehr nah beieinander. Die Abweichung hängt mit der Identifizierung des Rissbands aus der Rechnung im ungeschwächten Zustand zusammen und nicht mit der anschließenden Lokalisierung durch Schwächung.

Die mit geschwächtem Rissband und mittlerer Vernetzung bestimmten Kraft-Verformungslinien (rot) sind mit den auf der Plattendiagonale gemessenen Kurven (schwarz) in Abbildung 6.13 dargestellt. In blau sind die Ergebnisse auf Basis einer erzwungenen Begrenzung der plastischen Dehnungen auf die RPZ visualisiert. Es wird deutlich, dass der Unterschied zwischen den beiden Modellierungen vernachlässigbar ist. Die Ausbreitung der plastischen Dehnungen in einem größeren Bereich als der RPZ bzw. die Verteilung auf zwei unzusammenhängende Elementreihen hat auf das simulierte Systemtragverhalten keinen entscheidenden Einfluss. Vergleicht man diese Versuchsergebnisse mit dem Versuch ergibt sich für die steifer gelagerte Platte S eine etwas höhere Bruchlast als im Versuch von etwa 7.4 kN (Versuch: 6.79 kN). Die Simulation der Platte W liefert einen etwas geringeren Wert von etwa 7.2 kN und liegt damit unter dem Versuchswert (Versuch: 7.43 kN). In der Simulation liefert somit die steifere Lagerung die höhere Bruchlast, im Versuch ist es umgekehrt. Die maximale Verformung unter der Last ist bei der steiferen Lagerung gut getroffen, bei der weicheren Lagerung wird sie unterschätzt. An den anderen Messpunkten

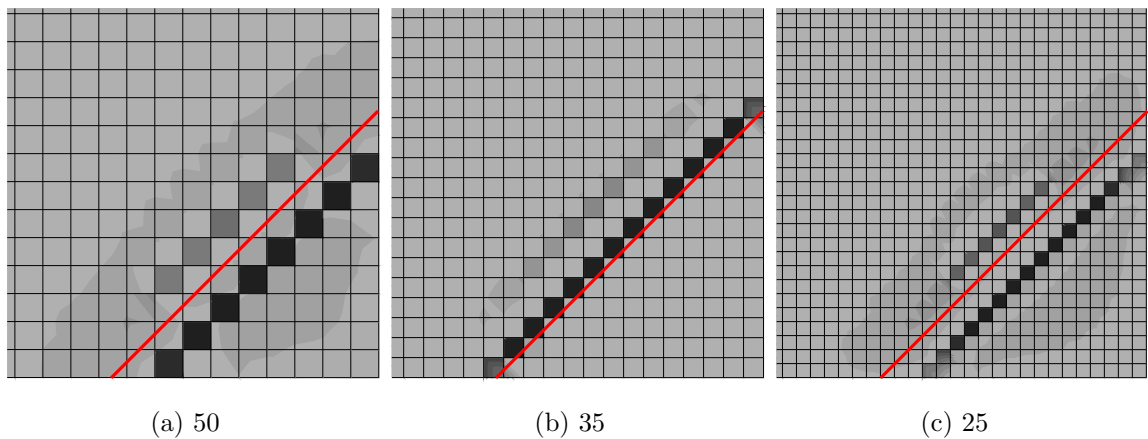


Abbildung 6.11.: Entwicklung der plastischen Dehnungen (Graustufen) für Platte W im Vergleich zur in rot dargestellten Rissposition im Versuch (Breite des dargestellten Plattenausschnitts 0.625 m)

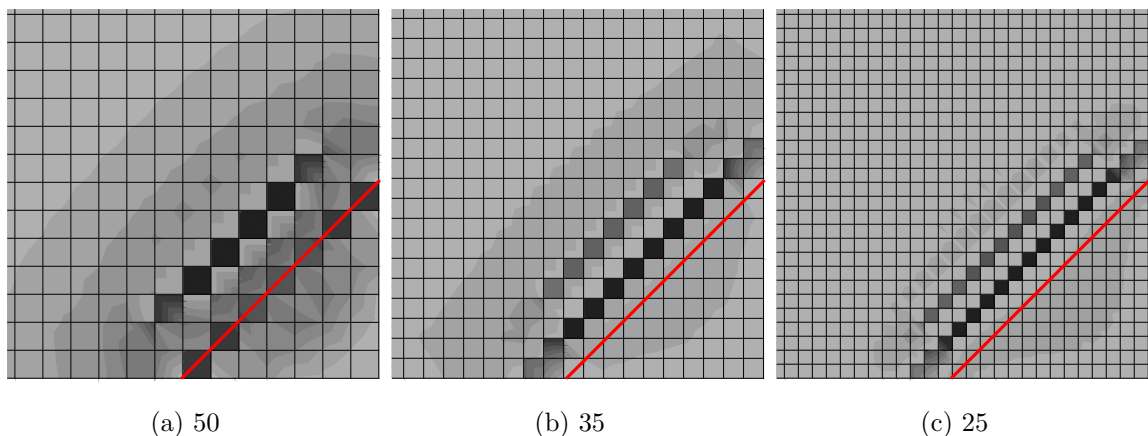


Abbildung 6.12.: Entwicklung der plastischen Dehnungen (Graustufen) für Platte S im Vergleich zur in rot dargestellten Rissposition im Versuch (Breite des dargestellten Plattenausschnitts 0.625 m)

entlang der Diagonale wird die berechnete im Vergleich zur gemessenen Verformung für beide Dämmstoffvarianten jeweils unterschätzt. Der Kurvenverlauf unter der Last (jeweils linke Kurve) ist für die weiche Lagerung fast identisch zu der im Versuch, bei steifer Lagerung zeigt sich ab einer Einsenkung von etwa 1.5 mm ein etwas zu steifer Verlauf. Zieht man zur Beurteilung Abbildung 6.14 heran, bei der die Kraft-Verformungslinien unter der Last, und zusätzlich das Ergebnis einer Berechnung ohne Vorverformung (gestrichelt: linear elastisch, durchgezogen: nichtlinear, jeweils rot) dargestellt sind, ist erkennbar, dass der flachere und dann versteifende Verlauf der Rückbildung der Vorverformung bzw. Aufschüsselung zuzuschreiben ist. Was sich in den Versuchs- und Simulationsdaten gleichermaßen zeigt: Ein „Kippeffekt“ ist tendenziell eher bei weicherer Lagerung erkennbar. Die Tendenz, dass bei weicherem Dämmstoff die Messpunkte in Plattenmitte und an der unbelasteten Ecke (Kurven rechts) stärker voneinander abweichen, die Ecke also etwas mehr abhebt als die Plattenmitte, zeigt sich auch in der Simulation, wenn

auch bei deutlich kleineren Absolutwerten und mit zunehmend asymptotischen Verlauf im Gegensatz zum Versuch. Die beiden rechten Kurven der steiferen Lagerung liegen dagegen näher beieinander, in der Simulation sind die Kurven fast deckungsgleich.

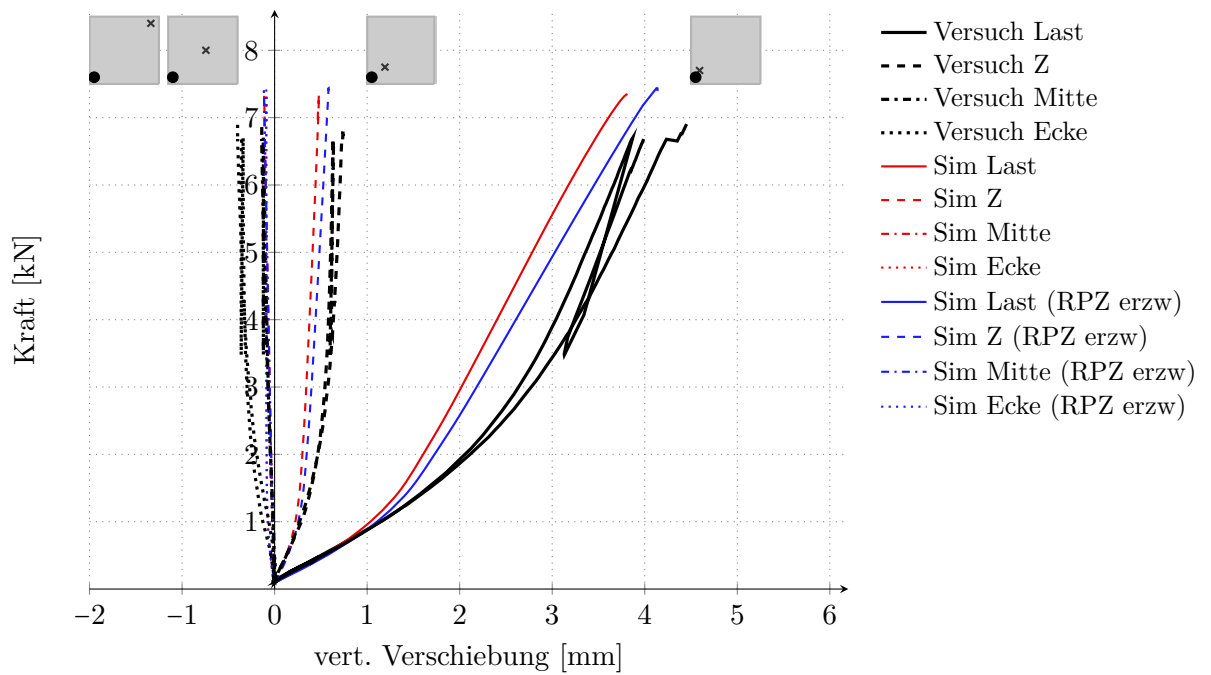
Neben den bereits angesprochenen vergleichenden Rechnungen ohne Aufschüsselung sind in Abbildung 6.14 außerdem die Kraft-Verformungslinien am Lastangriffspunkt bei unterschiedlicher Vernetzung dargestellt: Für beide Lagerungen ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Verläufe, mit leichten Abweichungen bei der Bruchlast bzw. der maximalen Verformung. Es kann von Konvergenz gegen eine eindeutige Lösung gesprochen werden, sodass für die weiteren Rechnungen im Folgekapitel das mittlere Netz als ausreichend gilt.

Schließlich wird in Abbildung 6.15 gezeigt, welchen Einfluss die Schwächung der Elemente im Rissband gegenüber einer ungeschwächten Simulation hat: In schwarz dargestellt ergibt sich eine etwas größere Last und Verformung, und im Gegensatz zu den geschwächten Simulationen, die bis zum Bruch nahezu mit der Kurve einer elastischen Berechnung übereinstimmen, zeigt sich im ungeschwächten Verlauf weiter vor dem Bruch ein deutlich entfestigendes Verhalten. Außerdem wird anhand dieses ungeschwächten Systems der Einfluss verschiedener anderer Parameter aufgezeigt:

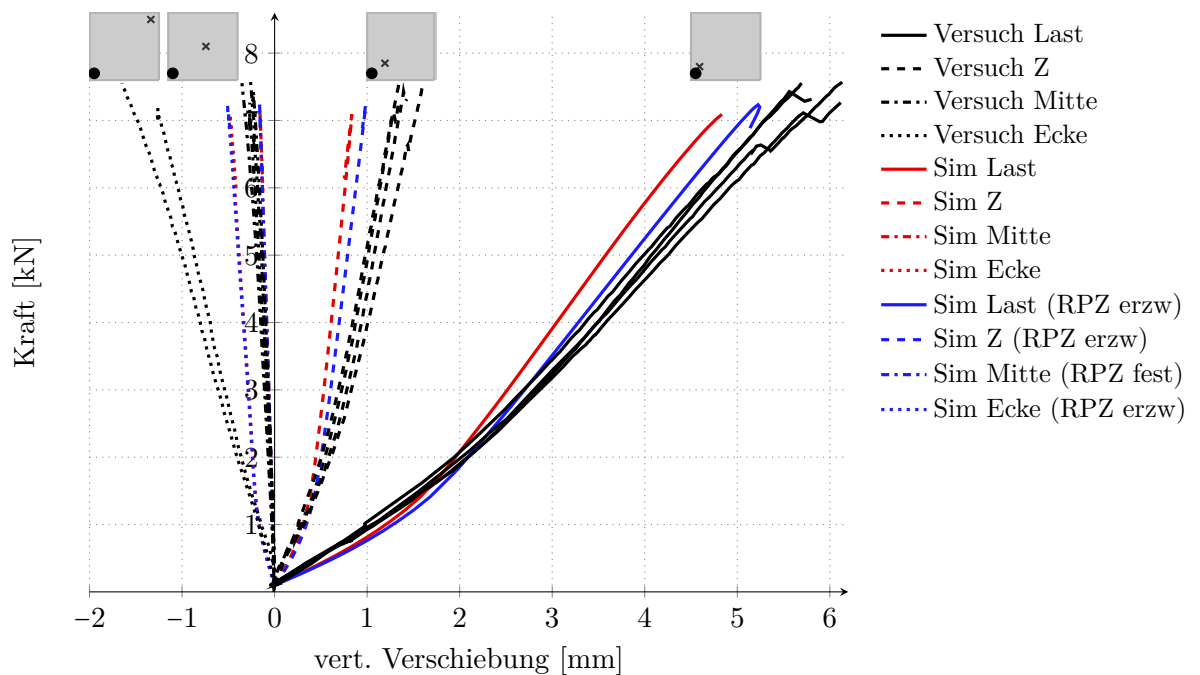
- Elementtyp: Die Kurve mit Elementtyp C3D8, der bei den Voruntersuchungen zum Biegezugversuch ein Einschnürungsverhalten gezeigt hat und u.a. deshalb durch das kontinuumsbasierte Element ersetzt wurde, zeigt einen qualitativ ähnlichen Verlauf, jedoch mit deutlich größerer Last und Verformung zum Bruchzeitpunkt.
- Bruchenergie: Bei dreifach höherer Bruchenergie steigen Bruchlast und maximale Verformung wie erwartet deutlich an. Die Bruchenergie hat demnach nicht nur auf den Nachbruchbereich, sondern bereits auf die Bruchlast einen deutlich Einfluss

### Dehnungs- und Verformungsverläufe

Die in Abbildung 6.16 und Abbildung 6.17 abgebildeten relativen Verschiebungs- bzw. Dehnungsverläufe zeigen für verschiedene Netze eine gute Übereinstimmung miteinander und mit den Messdaten. Dargestellt sind die relativen Verformungen infolge der Belastung (Verschiebungsversatz für den Lastschritt Einzellast) zum Zeitpunkt des Bruchs. Der Verlauf entspricht somit nicht der tatsächlichen Lage der Platte. Der Dehnungszustand entspricht dem zum Zeitpunkt des Bruchs. Im Vergleich zu den an den jeweiligen Messpunkten der Wegaufnehmer bzw. Dehnungsmessstreifen gemessenen, punktweise dargestellten Werten zeigen die Dehnungen in der Berechnung etwas niedrigere Werte. Vertikal dargestellt ist die Rissposition im Versuch, die recht gut mit der Position der Dehnungssingularität übereinstimmt, die die Rissbildung im Dehnungsverlauf kennzeichnet. Die Verformungen werden im Vergleich zu den Messdaten etwas unterschätzt, zeigen aber wie bereits in den Kraft-Verformungslinien festgestellt eine gute Übereinstimmung.

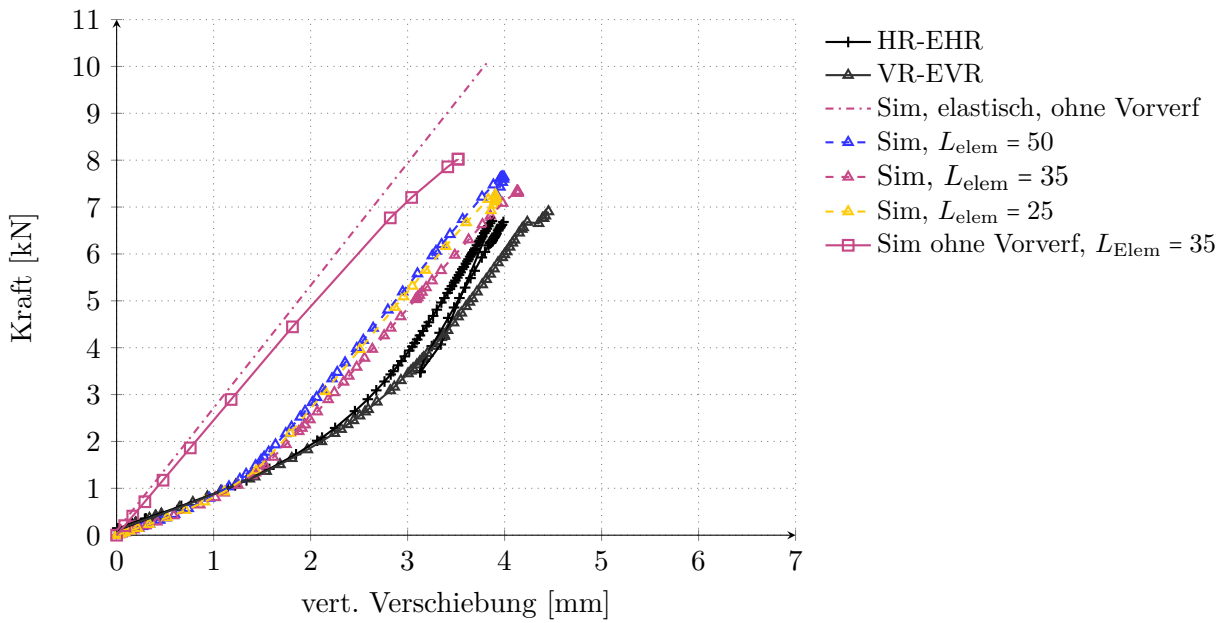


(a) Platte S

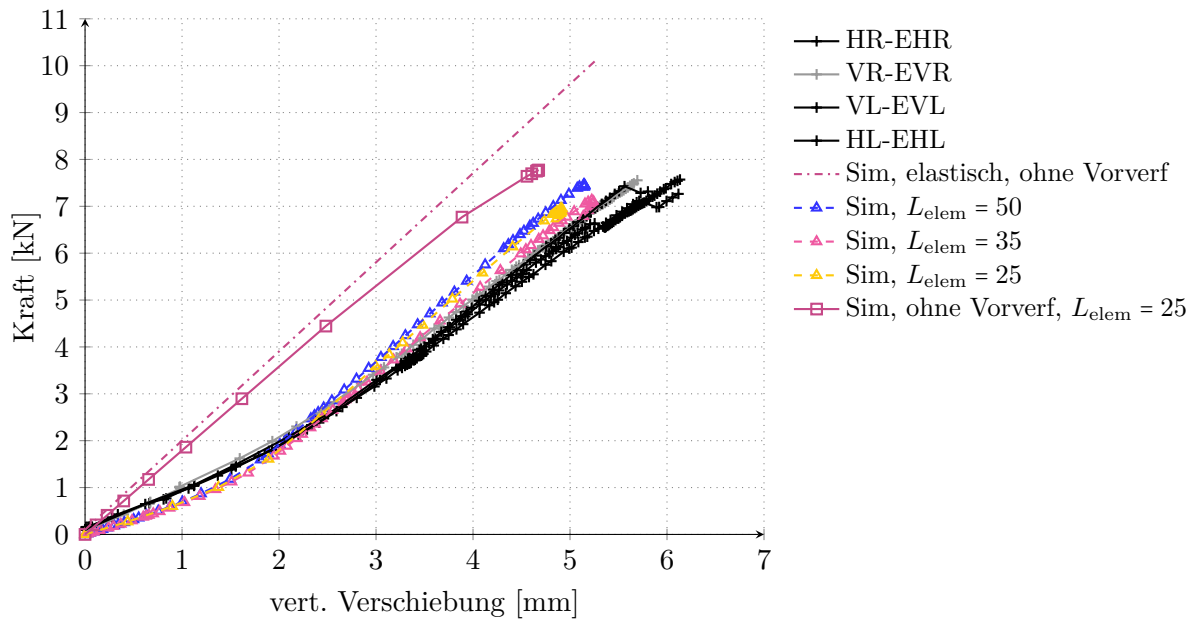


(b) Platte W

Abbildung 6.13.: Kraft-Verformungslinien bei Eckbelastung: Vergleich der Messwerte (schwarz) mit den Simulationen bei geschwächter (Sim, rot) bzw. erzwungener (Sim (RPZ erzw), blau) Rissprozesszone, dargestellt entlang der Plattendiagonale (vgl. Position auf der Platte mit  $\bullet$ =Laststellung,  $x$ =Wegaufnehmerstelle (WA))



(a) Platte S (steifer gelagert)



(b) Platte W (weicher gelagert)

Abbildung 6.14.: Kraft-Verformungslinien am Lastangriffspunkt bei Eckbelastung: Einfluss unterschiedlicher Vernetzung (Elementlänge  $L_{elem}$ ) und der Vorverformung (Auswertung der Verschiebung an der Lasteinleitungsstelle)

### Fazit Lastfall Ecke

Grundsätzlich zeigen die Bruchlasten in der Simulation eine gute Übereinstimmung mit denen der Versuche. Dass in der Simulation der steifere Dämmstoff die höhere Bruchlast liefert, was sich

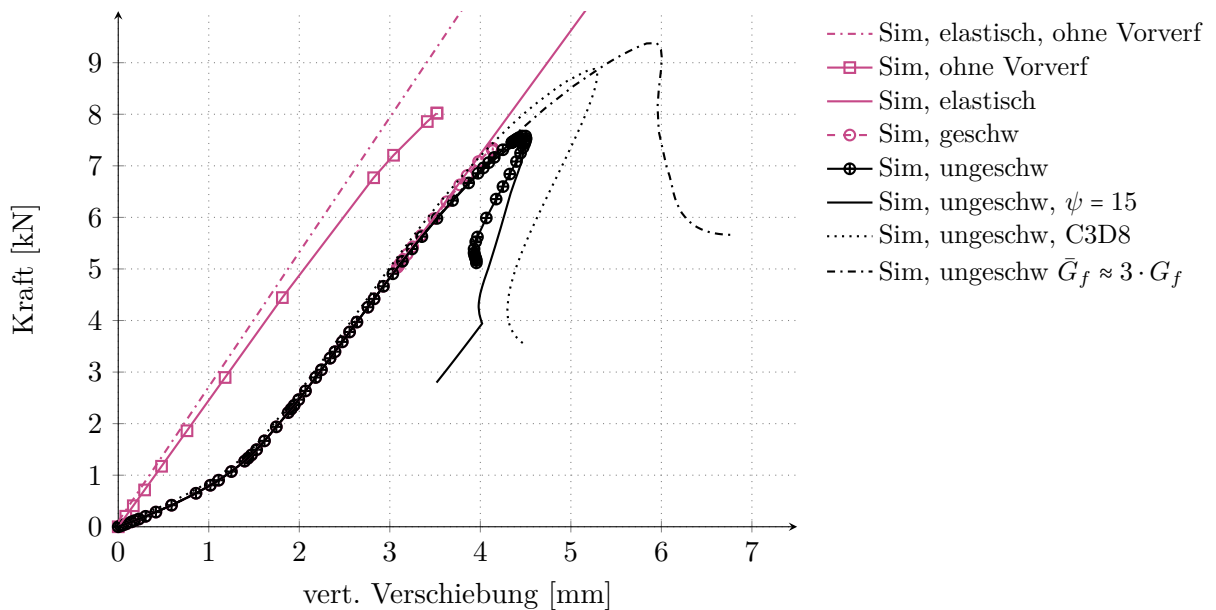


Abbildung 6.15.: Kraft-Verformungslineien am Lastangriffspunkt bei Eckbelastung (steifere Lagerung): Einfluss verschiedener Randbedingungen: Einfluss Dilatanz ( $\psi = 15$  anstelle 38), Elementtyp (C3D8 anstelle SC8R), Entfestigungsgesetz

im Versuch andersherum ergibt, stellt eine leichte Abweichung dar. Da die Bruchlasten grundsätzlich sehr nah beieinander liegen, kann dies in Ungenauigkeiten der Versuchsdurchführung begründet sein, zum Beispiel in einer ungleichmäßigen Plattendicke in den Versuchen. Auch der Verlauf der Kraft-Verformungslineien ist für numerische und experimentelle Daten vergleichbar. Die Abweichung zwischen Versuch und Messung im Verlauf für Platte S ist am ehesten darauf zurückzuführen, dass der Abstand zwischen Dämmstoff und Platte größer war als die Messung der Schwindverformung gezeigt hat. Dies kann auch mit der Wechselwirkung zwischen Einsenkung in Plattenmitte abhängig von der Dämmsteifigkeit im Vergleich zum Abheben an den Rändern zusammenhängen. Die Abweichung der Verläufe bei den übrigen Messpunkten (Abbildung 6.13) scheint ebenfalls auf eine etwas zu frühe Versteifung im Zuge des Ablegens der Platte auf dem Dämmstoff zurückzuführen zu sein. Die Diskrepanz zwischen der Einzelrissbildung im Versuch und einer stärker ausgebreiteten Zone plastischer Dehnungen im Modell hat auf das Gesamttragverhalten mit Blick auf die ermittelte Bruchlast bzw. die Kraft-Verformungskurven keinen nennenswerten Einfluss. Da im Ecklastfall keine Spannungumlagerungen auftreten können und auch der Nachbruchbereich für die Frage des Schwindeinflusses eine untergeordnete Rolle spielt, ist es hier ein adäquates Mittel, die Entwicklung der plastischen Dehnungen stärker zu begrenzen. Bei dieser Modellierung ergeben sich nahezu die gleichen Verläufe. Beim Randlastfall, auf den im folgenden eingegangen wird, stellt sich dies anders dar.

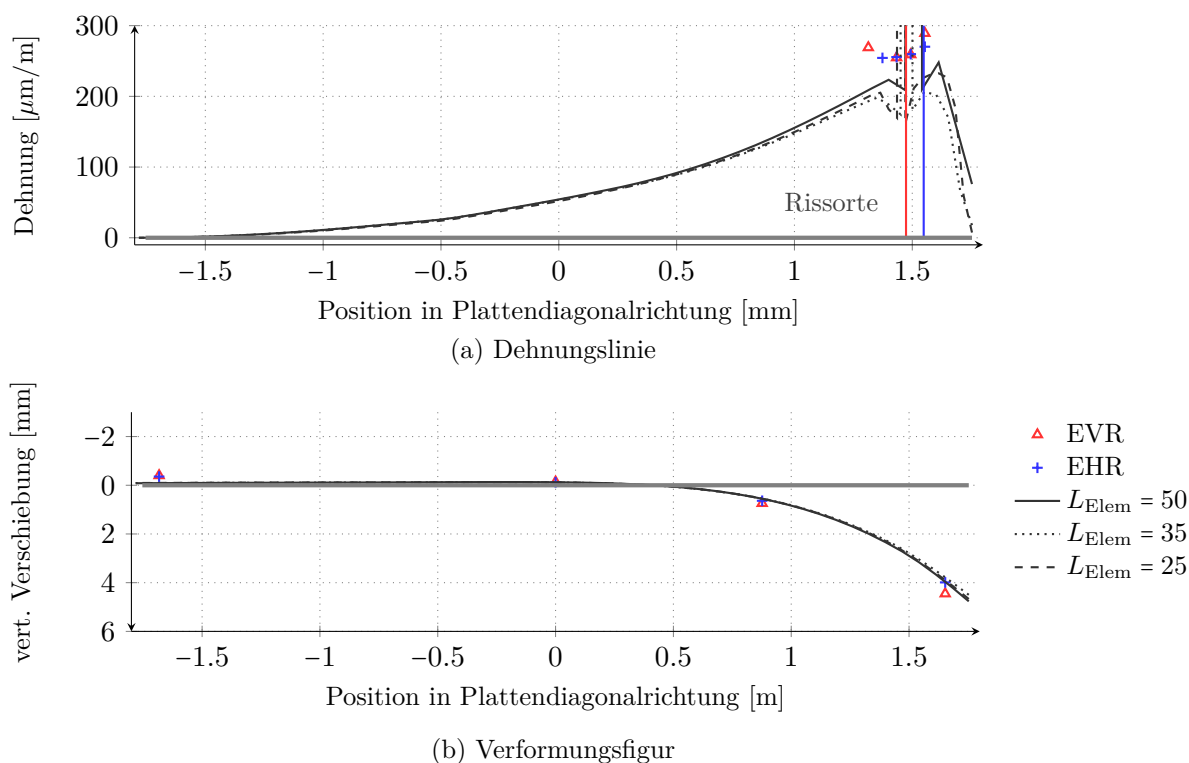


Abbildung 6.16.: Vergleich der punktell gemessenen Versuchsergebnisse mit der Dehnungslinie und Verformungsfigur der Simulation entlang der Diagonalen für Platte S

### Belastung am Rand

Trotz der bereits angeführten Bedenken hinsichtlich der Belastbarkeit der Versuchsdaten für den Randlastfall soll hier auf die Ergebnisse der Messdaten im Vergleich zu einer ersten Tastsimulation eingegangen werden. Der Randlastfall wird aufgrund der höheren Biegespannungen von Manns und Zeus (1980) als maßgebend für die Bemessung eingestuft, sodass eine Einordnung gegenüber den bisherigen Ergebnissen des Ecklastfalls vor diesem Hintergrund erfolgt.

In Abbildung 6.18 sind die Kraft-Verformungskurven entlang der Mittellinie der Platte auf Höhe der Lasteinleitung dargestellt. Die Bruchlast im Versuch ist für die weicher gelagerte Platte W mit etwa 15 kN etwas höher als die der steifer gelagerten Platte S mit 13.5 kN. Die berechneten Bruchlasten der Simulation sind hingegen auf einem ähnlichen Niveau: 19.3 kN für Platte S und 19.7 kN für Platte W, und damit deutlich über den im Versuch ermittelten Lasten. Die Steigung der Kraft-Verformungs-Kurven zeigt dennoch bei niedrigem Lastniveau eine gute Übereinstimmung, weicht aber vor allem bei weicher Lagerung mit zunehmender Last deutlicher von den Versuchsergebnissen ab. Platte W zeigt vor allem am Rand im Versuch ein aufweichendes Verhalten als in der Simulation. In Abbildung 6.19 (und Abbildung F.9 als Draufsicht, siehe Anhang) zeigt sich in Form des plastischen Dehnungszustands ein ähnliches Rissverhalten wie im Versuch. Statt eines einzelnen Risses an der Plattenoberseite wie im Falle



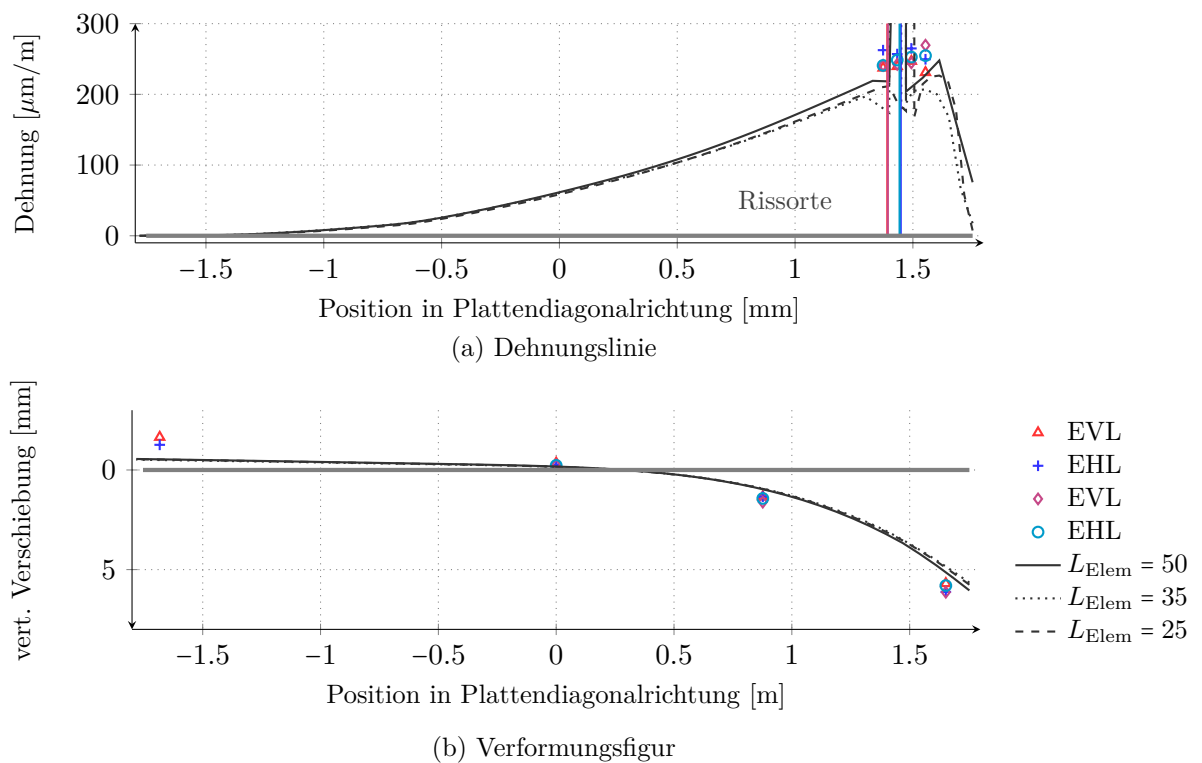


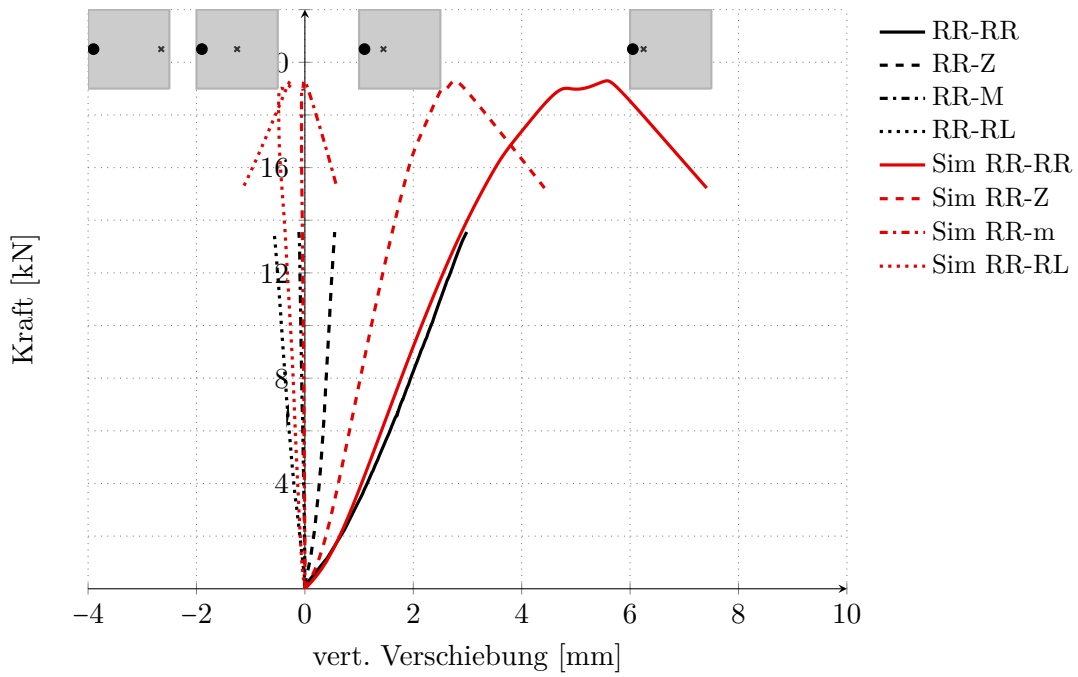
Abbildung 6.17.: Vergleich der punktell gemessenen Versuchsergebnisse mit der Dehnungslinie und Verformungsfigur der Simulation entlang der Diagonalen für Platte W

der Eckbelastung stellt sich eine Kombination aus Schädigung an der Plattenunterseite direkt an der Lasteinleitung, und eine großflächige Rissbildung an der Plattenoberseite mit einem zum Plattenrand parallel verlaufenden Maximum in einem gewissen Abstand zur Lasteinleitung ein. Die radiale, im Versuch beobachtete Ausprägung des Risses an der Oberseite deutet sich in der Simulation nur in Form einer Konzentration höherer plastischer Dehnungen an. Der Radius bzw. der Abstand dieser Dehnungskonzentration vom Plattenrand ist im Vergleich zur Simulation (S und W: etwa 535 mm) im Versuch für Platte S (315 mm) kleiner und für Platte W (785 mm) größer.

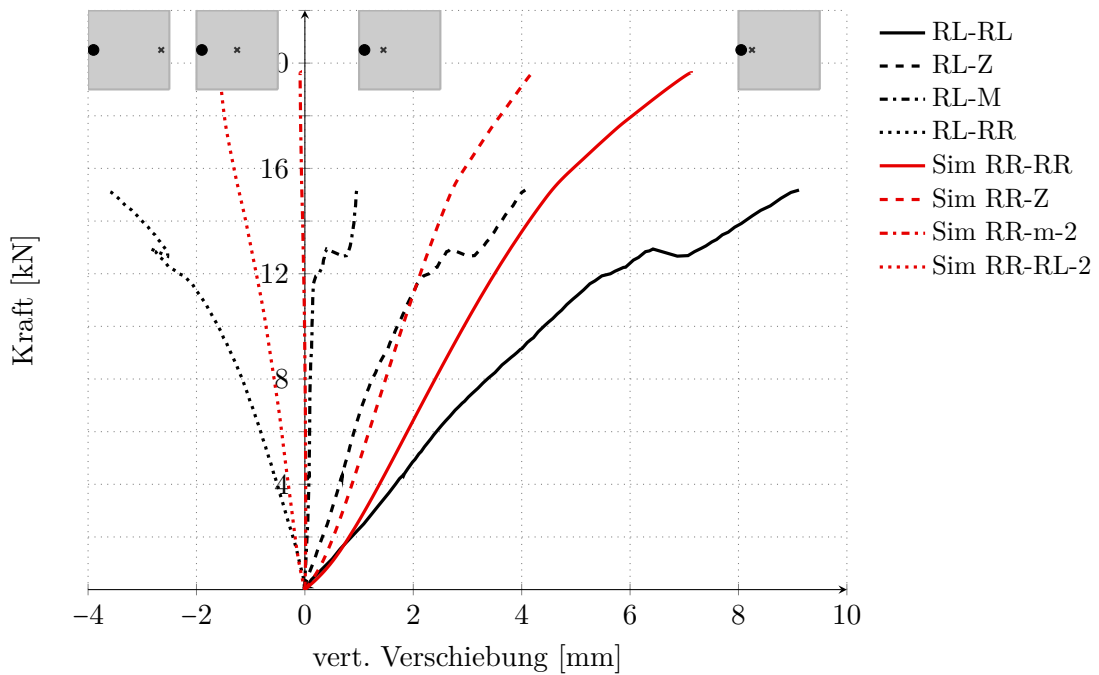
Grundsätzlich können diese Abweichungen in beiden Fällen verschiedene Ursachen haben, unter anderem ist ohne nähere Untersuchung folgendes festzustellen:

- Der Einfluss aus dem Versuchsablauf bzw. der zuvor geprüften benachbarten Eck-Prüfungen wurde in der Simulation nicht berücksichtigt. Die Daten-Grundlage wird als zu schwach angesehen, um eine Validierung des Rand-Lastfalls zu erzielen, daher wurde auf eine Nachsimulation des vollständigen Versuchsablaufs zur Berücksichtigung einer eventuellen Vorschädigung verzichtet. Stattdessen wurde wie bei den übrigen Simulationen zum Eck-Lastfall als Vorbeanspruchung der Platte lediglich die Vorverformung infolge Schwinden eingepreßt.

6. Gebettete Platte (3D-Spannungszustand)



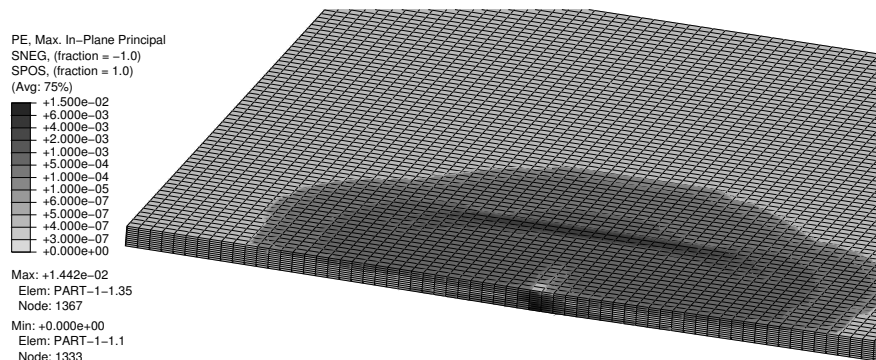
(a) Platte S (steifer gelagert), Laststellung Rand ( $n_{\text{Versuche}} = 1$ )



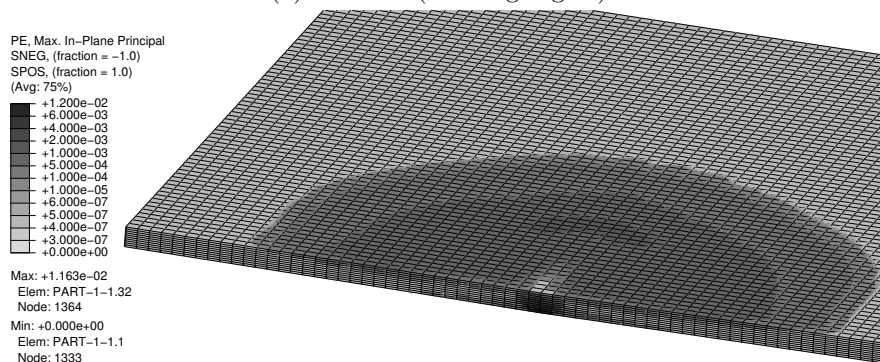
(b) Platte W (weicher gelagert), Laststellung Rand ( $n_{\text{Versuche}} = 1$ ) [lok. Maximum auf kurze Lastreduzierung im Versuchsablauf zurückzuführen]

Abbildung 6.18.: Kraft-Verformungslinien bei Randbelastung: Vergleich der Messwerte (schwarz) mit den Simulationen (rot) entlang der Mittellinie (vgl. Position auf der Platte mit  $\bullet$ =Laststellung,  $\times$ =Wegaufnahmerstelle (WA))

- In der Berechnung wurde kein Schwächungskonzept (entsprechend Kapitel 4) berücksichtigt. Wie in Abbildung 6.19 zu sehen ist, liefern die Simulationen ein ähnliches Rissverhalten wie es auch in den Versuchen zu beobachten war, jedoch stellt sich hier nicht eindeutig ein einzelner Riss bzw. eine eindeutige linienförmige Rissprozesszone wie im Ecklastfall ein. Inwiefern das Schwächungskonzept hier sinnvoll anwendbar ist, ist grundsätzlich durch weitere Rechnungen bzw. Abgleich mit weiteren Versuchsdaten zu überprüfen.



(a) Platte S (steifer gelagert)



(b) Platte W (weicher gelagert)

Abbildung 6.19.: Entwicklung der plastischen Dehnungen bei Randbelastung an der Ober- und Unterseite der Platte, jeweils ausgewertet bei Erreichen der Bruchlast

Ein Vergleich der gemessenen Rissbreite an der Plattenkante (vgl. Aufnehmer 7 und 8 in Abbildung 6.2) mit den vorliegenden Simulationsergebnissen ist nicht zielführend. Für einen quantitativen Vergleich der Rissbreite ist es erforderlich, die Rissprozesszone zu identifizieren und ein entsprechendes Regularisierungskonzept bei der Simulation anzuwenden (vgl. Kapitel 4). Die Identifizierung der Rissbänder (hier entsteht eines an der Unterseite der Platte entlang der Plattenmittellinie, und eines an der Oberfläche) stellt sich für den Randlastfall nicht so eindeutig dar wie für den Ecklastfall, sodass in den vorliegenden Berechnungen keine Einteilung in Rissprozesszonen oder eine Schwächung des Materials in diesem Bereich Anwendung gefunden hat. Außerdem ist zu klären, wie mit den unterschiedlichen Rissprozesszonen an Ober- und Unterseite umzugehen ist. Weitergehende Untersuchungen für ein angemessenes Konzept übersteigen den Umfang der vorliegenden Arbeit.

Insgesamt können die Werte aus den Randsimulationen auch aus diesem Grund nur Indizien für eine Beurteilung des Bemessungskonzepts liefern. Zum einen ist eine Validierung der Ergebnisse durch den Vergleich mit einer einzelnen Messung nicht belastbar, zum anderen treten bei diesem Vergleich Abweichungen auf. Die Abweichungen betreffen nicht nur quantitativ den Kraft-Verformungsverlauf bzw. die zugehörige Verformung und Versagenslast, sondern auch qualitativ zeigen sich in einem deutlich größeren Bereich der Platte plastische Dehnungen, die auch im Bereich des Maximums unter der Versagenslast nicht exakt mit dem im Versuch ermittelten Rissverlauf übereinstimmen. Zusätzlich wurde lediglich eine einzelne Simulation durchgeführt, ohne eine Konvergenzkontrolle für den Randlastfall durchzuführen. All dies sind Unsicherheiten, die in den Simulationswerten des Randlastfalls noch enthalten sind. Eine recht gute Übereinstimmung der Versuchswerte mit den simulierten Verformungswerten vor allem im niedrigeren Lastbereich, bei dem noch keine Plastizität auftritt, lassen dennoch eine eingeschränkte vergleichende Untersuchung der beiden betrachteten Lastfälle im Hinblick auf das vorhandene Bemessungskonzept zu. Hierauf wird in Kapitel 7 noch eingegangen.

## 6.4. Zusammenfassung

Das Rissverhalten eines schwimmend gelagerten Estrichs bis zum Bruch lässt sich mit dem entwickelten Modell sehr gut abbilden. Die Versuchsergebnisse sind aufgrund einiger Ungenauigkeiten z. B. im Hinblick auf die absolute Einsenkung der Platte nach Einbringen des Estrichs nicht exakt mit den Simulationen in Einklang zu bringen, allerdings zeigt sich dennoch eine sehr gute Übereinstimmung, sowohl im zeitlichen Verlauf, als auch in den Werten der maximalen Verschiebung bzw. der Bruchlast. Eine Untersuchung verschiedener Netze zeigt ein stabiles Konvergenzverhalten. Ein Variieren verschiedener Modellparameter stellt das Modell im experimentell validierten Bereich auf eine gute Grundlage. Lediglich die Entwicklung der plastischen Dehnungen zeigt Diskrepanzen hinsichtlich der Einzelrissbildung im Versuch auf und grundsätzlich konnte der Nachbruchbereich experimentell nicht erfasst und daher auch numerisch nicht validiert werden. Beide Einschränkungen können für den primär zur Untersuchung des Schwindeinflusses betrachteten Ecklastfall unter den erläuterten Bedingungen vernachlässigt bzw. umgangen werden. Um einige Anwendungsmöglichkeiten des Modells aufzuzeigen und schließlich die Frage nach dem Ausmaß des Schwind- und Dämmstoffeinflusses zu beantworten, soll im folgenden Kapitel eine Parameterstudie und ein Rückbezug zum Bemessungskonzept auf Basis von Manns und Zeus (1980) erfolgen.



## 7. Anwendung des Modells

Nachdem das Modell für die vorhandenen Versuchsdaten für den Ecklastfall eine gute Übereinstimmung liefert, soll das so validierte Modell bei der Beantwortung der eingangs gestellten Frage nach dem Einfluss der Wechselwirkung zwischen Dämmstoffsteifigkeit und Schlüsselung auf die Rissbildung bzw. Tragfähigkeit helfen. Dazu werden im Rahmen einer Parameterstudie die Parameter der Vorverformung, Dämmstoffsteifigkeit und Dicke des Estrichs numerisch variiert und das Bruch- bzw. Verformungsverhalten untersucht. Diese Extrapolation gegenüber dem validierten Parameterbereich ist mit einer gewissen Unsicherheit verbunden, sodass die ermittelten Verformungs- und Spannungswerte quantitativ nicht belastbar sind. Eine Aussage dazu, ob überhaupt ein Einfluss der untersuchten Parameter festzustellen ist, ist dennoch möglich. Im Anschluss wird das Modell außerdem verwendet, um die Informationen aus der Numerik in Zusammenhang zum Bemessungskonzept zu setzen und ggf. vorhandene Defizite und Verbesserungsmöglichkeiten zu diskutieren.

### 7.1. Parameterstudie

Dicke / Vorverformung	2 mm				4 mm				8 mm					
20 mm					ww	w	s	ss						
60 mm	ww	w	s	ss	ww	w	s	ss	ww	w	s	ss		
80 mm					ww	w	s	ss						
	ww	-	$c_{KS} = 1$			w	-	$c_{KS} = 8$			s	-	$c_{KS} = 100$	
		s	-	$c_{KS} = 13$			ss	-						

Tabelle 7.1.: Matrix der variierten Parameter

Mithilfe des entwickelten numerischen Modells können verschiedene Einflüsse auf die maximale Bruchkraft untersucht werden. Im Folgenden wird zunächst die bisherige Plattengeometrie beibehalten und der Einfluss der Plattendicke sowie Schlüsselintensität bei einer weiteren Bandbreite von Dämmstoffsteifigkeiten untersucht. In Tabelle 7.1 ist die Untersuchungsmatrix dargestellt, wobei die Einträge in der Tabelle jeweils für die angegebene Dämmstoffsteifigkeit bzw. Bettungszahl stehen:

- ww:  $c_{KS} = 1 \text{ MN/m}^3$ ,
- w:  $c_{KS} = 8 \text{ MN/m}^3$  (TP),

- s:  $c_{KS} = 13 \text{ MN/m}^3$  (TP-GP),
- ss:  $c_{KS} = 100 \text{ MN/m}^3$ .

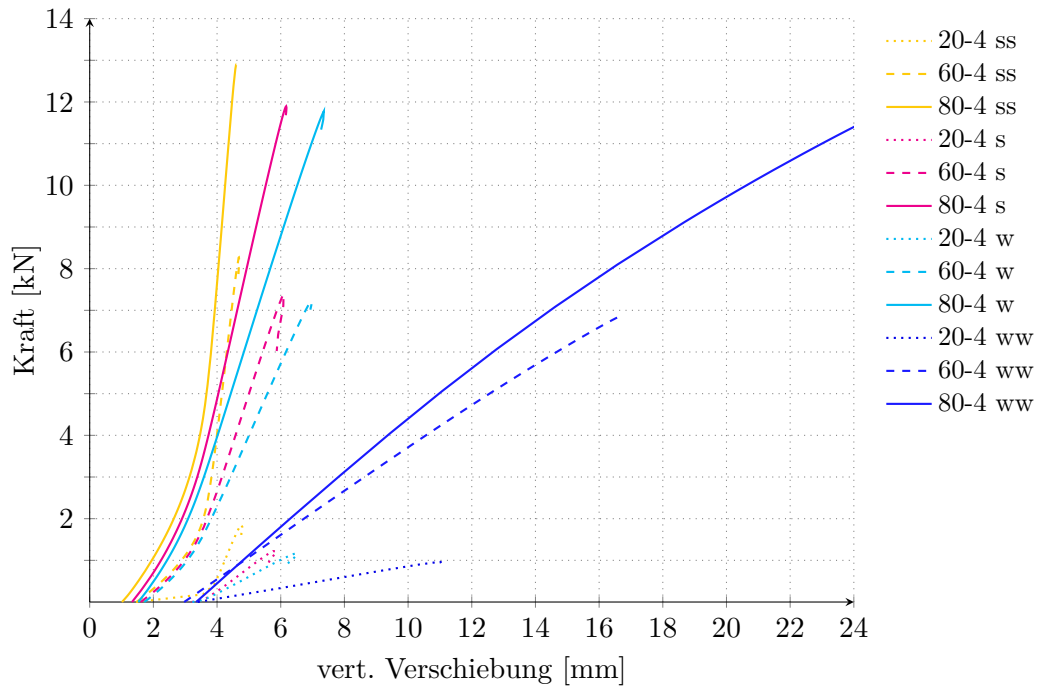
Zusätzlich zu den beiden in den Versuchen betrachteten Dämmsteifigkeiten kommen demnach noch eine sehr weiche und sehr steife Bettungszahl hinzu, um eine ähnliche Bandbreite abzudecken wie es schon bei Manns und Zeus (1980) oder auch in jüngeren Richtlinien zur Abschätzung der Tragfähigkeit in Form von Nomogrammen üblich ist (DENAK-Merkblatt 8-2, 2021). Für diese Simulationen wird wie bisher die Zugfestigkeit zu  $f_t = 3 \text{ N/mm}^2$  und die Bruchenergie zu  $G_f = 0.2 \text{ Nmm/mm}^2$  festgelegt. Für die Berechnungen wird das mittlere Netz ( $70 \times 70 \times 12$ ) verwendet, da dieses bei geringerer Rechenzeit aufgrund der sehr guten Übereinstimmung mit dem feineren Netz im vorangegangenen Kapitel ausreichend ist.

Bei der im Folgenden vorgestellten Parameterstudie gibt es zusätzliche numerische Herausforderungen infolge der Kontaktmodellierung (s. Kapitel 4) und der hierfür definierten Federsteifigkeit der zwischengeschalteten Federn. Bei der Verwendung des Bogenlängenverfahrens kann die Schrittweite nicht präzise gesteuert werden, sodass der Algorithmus bei einer ungünstigen Schrittweite unter Umständen in einem zu großen Schritt über den Übergang von sehr kleiner zu sehr großer Steifigkeit hinweg zu iterieren versucht. Dies führt zu numerischen Instabilitäten bzw. dazu, dass kein Gleichgewicht gefunden wird und die Berechnung abbricht. Dieses Problem tritt bei sehr hoher Dämmsteifigkeit auf. Eine genaue Ursache zu identifizieren bzw. eine Regel zur Definition der Kontakt-Federsteifigkeit zu definieren ist pauschal schwierig, da dieses Verhalten einem ungünstigen Verhältnis zwischen Dämm-, Kontakt- und Estrichsteifigkeit zugeschrieben wird. Bei einer größeren Estrichdicke tritt diese numerische Instabilität auch bei mittlerer Dämmsteifigkeit auf. Auch die Vernetzung hat einen Effekt, möglicherweise ebenso wie die Geometrie (Plattenausdehnung, -form), wobei dies hier nicht näher untersucht wurde. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das Auftreten dieser Instabilität von den konkreten Steifigkeits- und Netzeigenschaften des Modells abhängt. Eine leichte Vergrößerung der Anfangssteifigkeit nahe Null hat einen stabilisierenden Effekt. Ein geschicktes Vorgehen zur Definition der Kontaktsteifigkeit ist es daher, für die höchste Dämmsteifigkeit bzw. Dicke eine stabile Anfangssteifigkeit zu finden, die ausreichend nah an Null liegt, um ein realitätsnahes Ablegen der Platte zu ermöglichen. Für weitere, weniger steife Parameter mit geringerer Systemsteifigkeit sollten diese ebenfalls stabil sein.

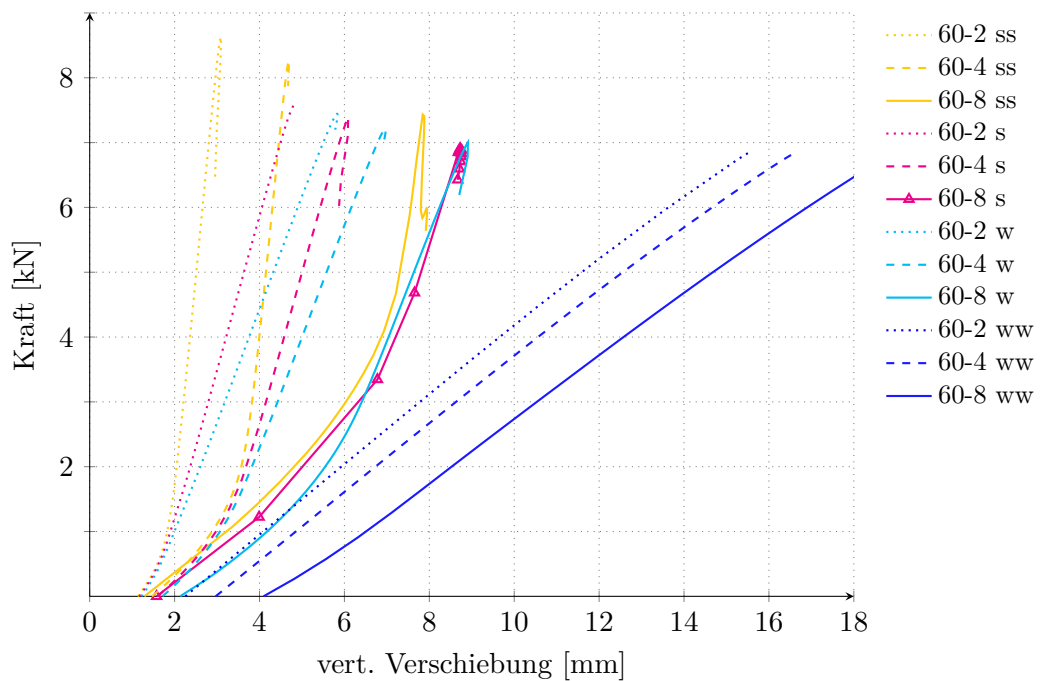
Zusätzlich überschreiten die Verformungen bei der sehr weichen Dämmung mit einer Bettungszahl von  $1 \text{ MN/m}^3$  deutlich die Dicke eines realen Dämmstoffs (hier 2 bzw. 3 cm Dicke). Die Federlänge muss hier entsprechend vergrößert werden, um eine – zumindest theoretische – Bruchkraft zu ermitteln. In der Realität wäre eine Begrenzung der Verformung durch eine begrenzte Federlänge hingegen sinnvoll, da dies der realen Geometrie entspricht, bei der die Dämmstoffdicke die Verformung der Platte begrenzt. In dieser aus Mangel an Versuchsdaten zunächst akademischen Untersuchung wird das vernachlässigt.



## Einfluss auf die Bruchlast



(a) Einfluss Dicke



(b) Einfluss Vorverformung

Abbildung 7.1.: Kraft-Verformungslinien im Rahmen der durchgeführten Parameterstudie (etwas vergrößert in Abb. F.12 im Anhang dargestellt)

In Abbildung 7.1 sind die Kraft-Verformungs-Kurven dargestellt, in Tabelle 7.2 die zugehörigen Bruchkräfte. An den Kraft-Verformungslinien lässt sich ein Gruppieren bzw. „Anschmiegen“ im Anfangsbereich bei den Kurven gleicher Dicke bzw. gleicher Vorverformung erkennen, wobei die Kurven mit sehr weicher Unterlage infolge einer größeren Verformung etwas versetzt zu den übrigen Steifigkeiten verlaufen. Nach diesem Anfangsbereich laufen die Kurven zunehmend auseinander. Die Kurven weisen mit steiferer Unterlage einen entsprechend versteifenden Verlauf auf.

Dicke	Vorverformung											
	2 mm				4 mm				8 mm			
$c_{KS}$	ww	w	s	ss	ww	w	s	ss	ww	w	s	ss
20 mm					0.96	1.22	1.16	1.85				
60 mm	6.86	7.44	7.60	8.63	6.84	7.22	7.39	8.27	6.86	7.00	6.91	7.43
80 mm					11.66	11.78	11.90	12.90				

Tabelle 7.2.: Ergebnis der Parameterstudie: Bruchlast

In den Abbildungen 7.2 und 7.3 sind die Werte der Tabelle 7.2 mit der zugehörigen vertikalen Verschiebung über der Dicke bzw. Vorverformung aufgetragen. Es lassen sich folgende Beobachtungen festhalten:

- Der Einfluss der Plattendicke auf die **Bruchlast** ist weitgehend unabhängig von der Dämmsteifigkeit deutlich erkennbar: Je größer die Dicke, desto deutlich höher wird die Bruchlast. (Abb. 7.2a).
- Der Einfluss der Vorverformung auf die **Bruchlast** ist im Vergleich zum Einfluss der Dicke deutlich geringer. Bei höherer Dämmsteifigkeit ist dies am ehesten erkennbar, dann gilt: Je kleiner die Vorverformung ist, desto höher wird die Bruchlast. Bei geringer Dämmsteifigkeit ist der Einfluss aus Vorverformung kaum sichtbar. Bei steiferer Unterlage wirkt sich die Vorverformung stärker aus, da bei einer weichen Unterlage die Schüsselung durch Eindrücken in den Dämmstoff kompensiert werden kann (Abb. 7.2b).
- Die Wirkung der Plattendicke auf die **Verformung** ist bei kleinerer Dämmsteifigkeit ausgeprägter: Je größer die Dicke, desto höher die Verformung. Mit höherer Dämmsteifigkeit sinkt dieser Einfluss, bis er bei  $KS=100$  gar nicht sichtbar ist (Abb. 7.3a nahezu horizontaler Verlauf). Je steifer das System, desto desto geringer wird die relative Verformung infolge Last.
- Der Einfluss der Vorverformung auf die **Endverformung** ist ausgeprägter: Je größer die anfängliche Vorverformung, desto höher die Verformung. Es besteht ein linearer Verlauf bei Auftragen der Werte über der Vorverformung (dies zeigt sich ebenso bei der Bruchlast, Abb. 7.2b): Die unterschiedlich hohen Werte der Anfangsverwölbung zeigen sich unmittelbar im Abstand zwischen den jeweiligen Endverformungen (Abb. 7.3b)
- Unabhängig von der Vorverformung und der Dicke gilt: Je größer die Dämmsteifigkeit, desto geringer die Verformung und desto höher die Bruchlast.

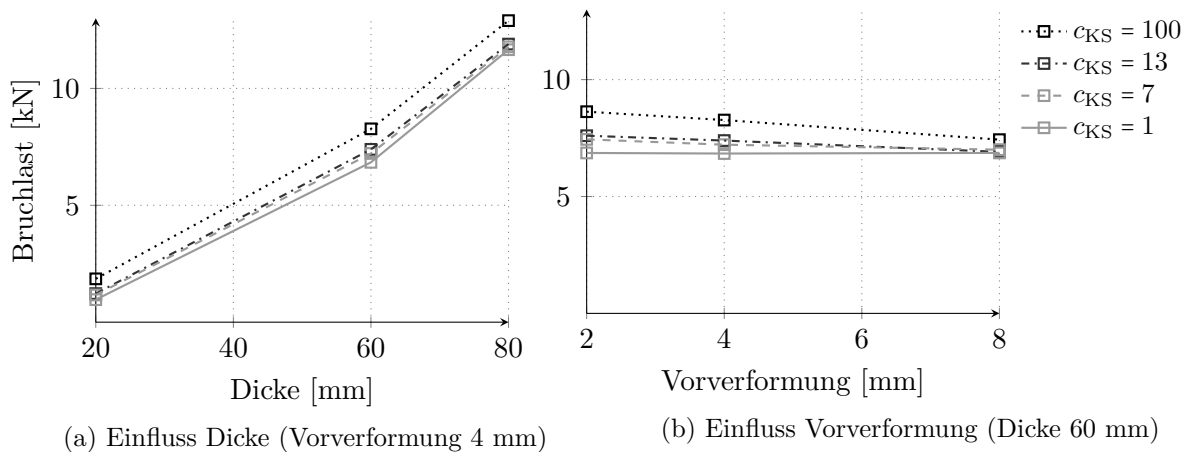


Abbildung 7.2.: Parameterstudie: Einfluss auf Bruchkraft

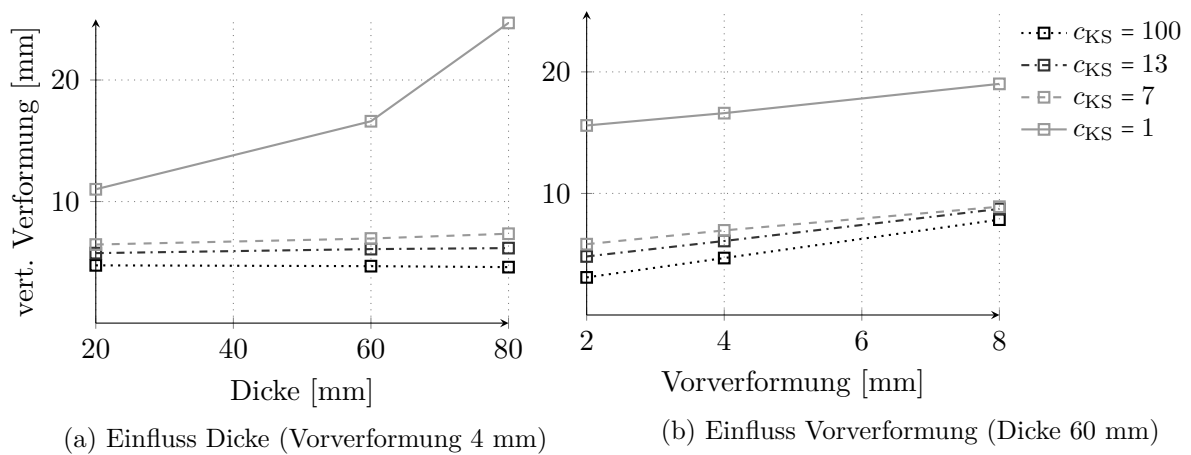


Abbildung 7.3.: Parameterstudie: Einfluss auf Verformung

### Rissbilder

In den Abbildungen 7.4 und 7.5 sind die simulierten Rissbilder der beiden Parameterstudien für das Variieren der Dicke und der Vorverformung dargestellt. Dabei wird die jeweilige Dämmsteifigkeit von oben (SS) nach unten (WW) weicher. Als Referenz sind auch hier die in den Versuchen gemessenen Risslinien mit abgebildet (in rot; gestrichelt: Platte S, durchgezogen: Platte W. Es zeigt sich

- Je weicher der Dämmstoff, desto größer der Bruchradius.
- Je dicker die Platte, desto größer der Bruchradius.
- Bei steifem Dämmstoff zeigt sich bei größerer Vorverformung auch ein größerer Bruchradius. Dieser Effekt nimmt mit abnehmender Dämmsteifigkeit ebenfalls ab.
- Zwischen einer Vorverformung von 2 im Vergleich zu 4 mm zeigt sich im Bruchbild kein Unterschied.

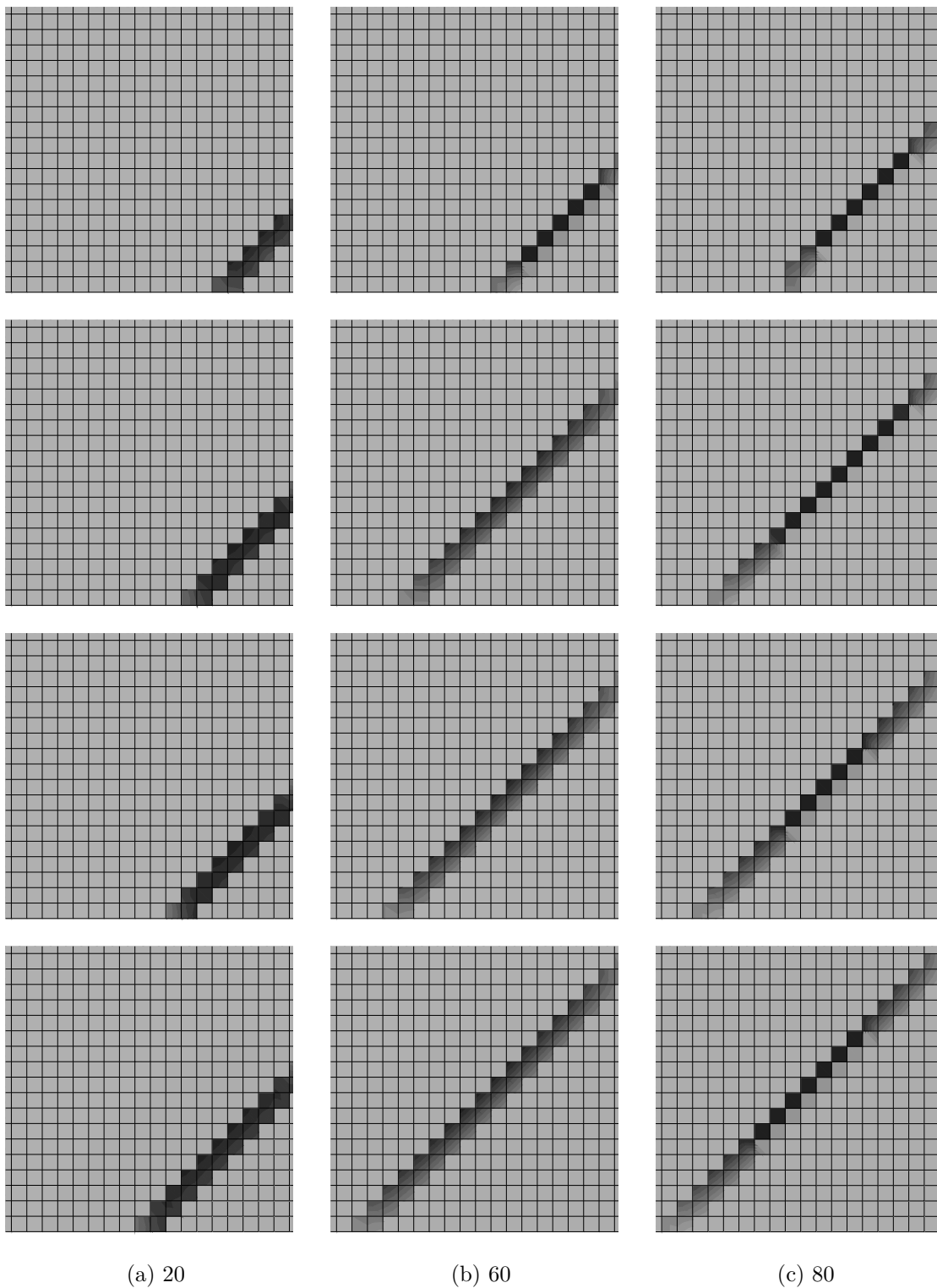


Abbildung 7.4.: Rissbilder der Parameterstudie – Variieren der Plattendicke (Ausschnitt eines Sechzehntels der Platte, von oben steifer nach unten weicher Dämmstoff)

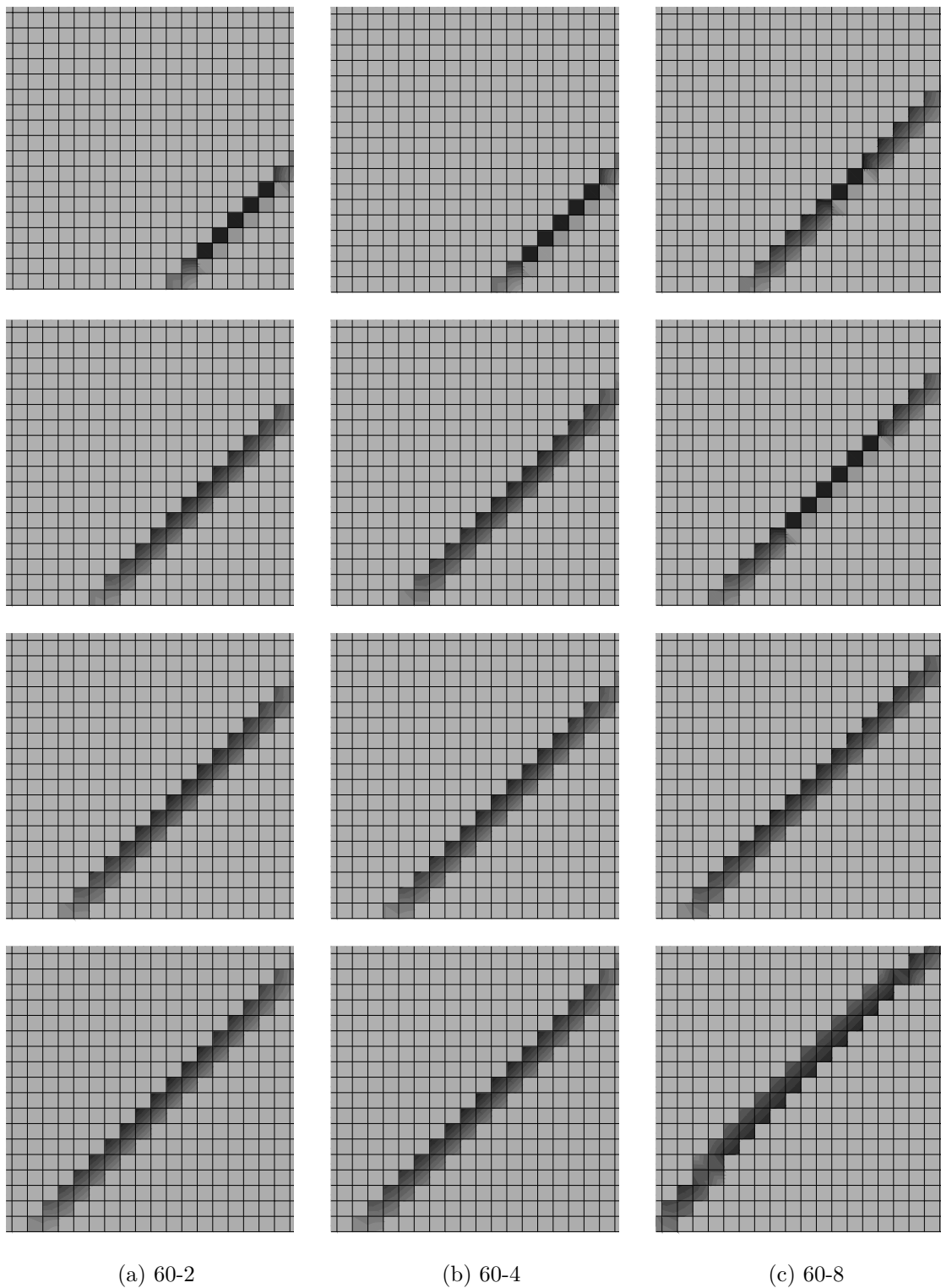


Abbildung 7.5.: Rissbilder der Parameterstudie – Variieren der Vorverformung (Ausschnitt eines Sechzehntels der Platte, von oben steifer nach unten weicher Dämmstoff)

Betrachtet man jeweils die beiden mittleren Reihen, die den Dämmsteifigkeiten aus den Versuchen entsprechen, ließe sich daraus ableiten, dass die Abweichungen zwischen den Rissradien im Versuch von denen in der Simulation von Ungenauigkeiten bei der Herstellung einer gleichmäßigen 60 mm Dicke stammen und zusätzlich die Vorverformung messtechnisch nicht exakt erfasst wurde: Bei punktuell geringerer Dicke und geringerem Abstand zwischen Platte und Dämmstoff im Versuch (z.B. infolge stärkerem Einsenkens durch Eigengewicht) zeigt sich in der Studie ein weiter innen liegender Riss, wie auch im Versuch gemessen. Auch hier handelt es sich nur um Indizien, die durch weitere experimentelle Untersuchung überprüft werden müssten, vor allem da neben den hier betrachteten Parametern noch weitere Einflussgrößen wie Geometrie, Eigen- spannungen oder experimentelle Schwankungen eine Rolle spielen können. Die entsprechenden Abbildungen der nur leicht geschwächten Berechnungen im Vergleich zur hier begrenzten RPZ zeigen prinzipiell die gleiche Tendenz (vgl. Abb. F.10 und F.11 im Anhang).

### Verformungsfiguren

In den Abbildungen 7.6 und 7.7 sind jeweils für unterschiedliche Dicke und Vorverformung die Verformungsfiguren infolge der beiden Lastfälle dargestellt: jeweils oben die Verschiebungsfigur infolge Eigengewicht und darunter die Verschiebungsfigur infolge der Einzellast. An der Verformungsfigur infolge Eigengewicht wird noch einmal deutlich, dass im Zuge des Einprägens der Vorverformung mit nachträglichem Aufbringen des Eigengewichts eine leichte Abweichung zwischen der relativ gemessenen Ordinate der angehobenen Ecke (3.36 mm für Steifigkeit S (TP-GP), 4.12 mm für Steifigkeit W (TP)) und der wirksamen Ordinate in der Simulation (etwas geringer im Bereich 2.5 mm) vorhanden ist. Auch die gemessene Ordinate kann dem Abstand zwischen Dämmstoff und Estrich an der betrachteten Stelle nicht exakt entsprechen, da die Einsenkung infolge Eigengewicht hier nicht erfasst ist (vgl. Kapitel 3.2.1).

Die Kurven sind jeweils über der Diagonalen aufgetragen, die Einzellast wirkt rechts. Es zeigt sich Folgendes für den Einfluss der Dicke (s. Abb. 7.6):

- Bei Betrachtung der Verformungsfigur infolge Eigengewicht fällt auf, dass abgesehen von den Kurven mit 20er Dicke (gepunktet) alle Linien nah beieinander liegen bzw. parallel verlaufen (Abb. 7.6a). Die Dicke zeigt hier einen geringen Einfluss. Dieser bzw. die Einsenkung steigt leicht mit abnehmender Dämmsteifigkeit (blau stark eingesunken, gelb am geringsten). Die Verformungsfiguren der 20er-Platten verlaufen deutlich flacher (die Krümmung infolge Aufschüsseln außen wird stärker zurückgebildet, während bei den steiferen Platten das Eigengewicht primär ein Absenken der gekrümmten weiterhin aufgeschüsselten Platte bewirkt).
- Auch die Linien infolge Einzellast (Abb. 7.6b) liegen größtenteils nah beieinander, mit Ausnahme derer mit kleiner Bettungszahl (gelb). Für die übrigen Linien gilt, dass die Verformung links, d.h. an der nicht belasteten Ecke, bei steiferer Platte größer ist: Die

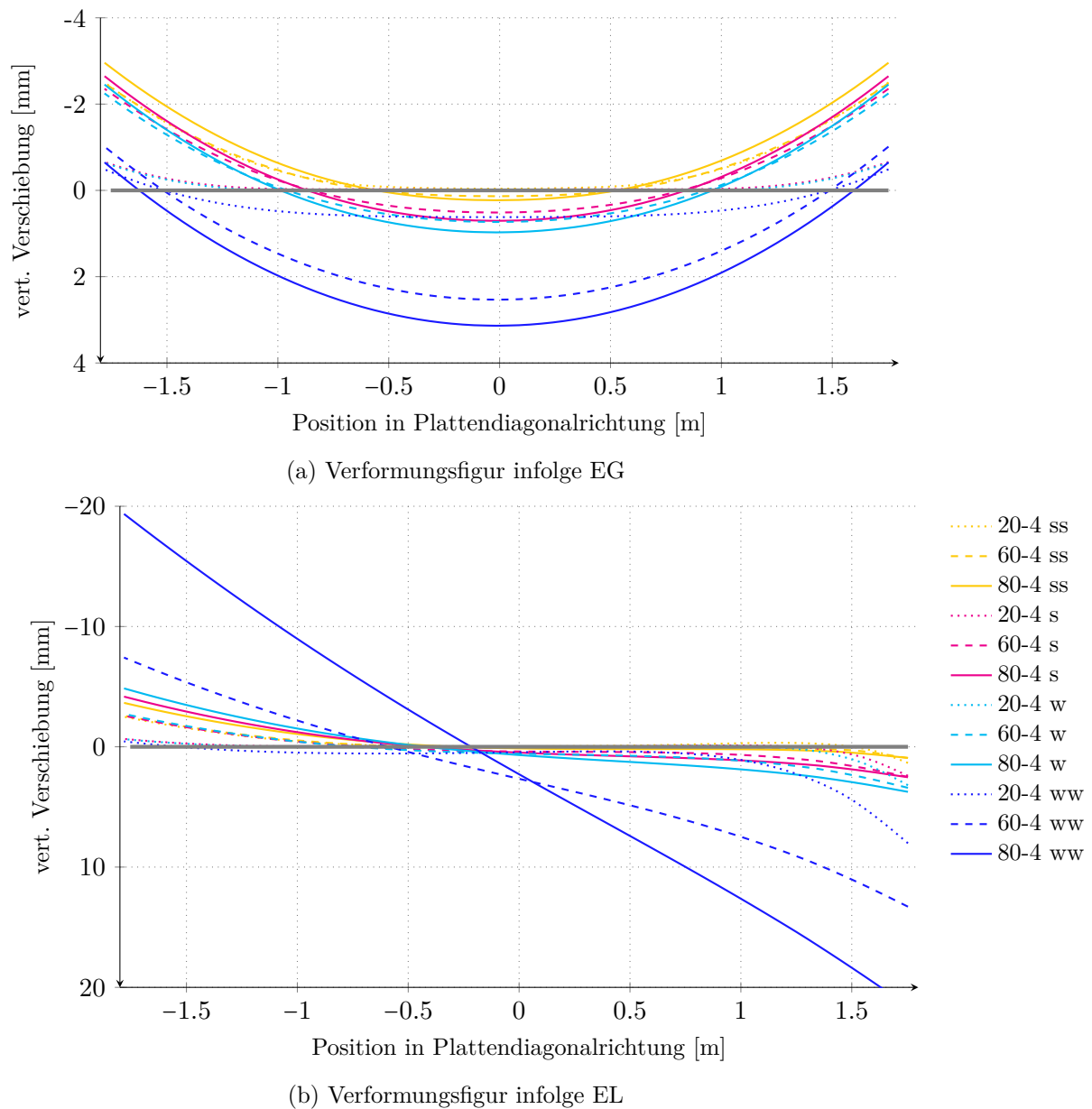


Abbildung 7.6.: Parameterstudie: Einfluss der Dicke – Verformungsfigur entlang der Diagonale infolge EG und einer der hier rechts angeordneten Einzellast auf Plattenecke

steifere Platte ist eher kippanfällig.

Für den Einfluss der Vorverformung ergibt sich (s. Abb. 7.7):

- Bei Betrachtung der Verformungsfigur infolge Eigengewicht verlaufen die Linien gleicher Vorverformung parallel zueinander, wobei gilt: Je größer die Vorverformung, desto gekrümmter sind die Verläufe, da das Eigengewicht allein nicht ausreicht, um die weiter aufgeschüsselten Ecken auf den Dämmstoff zurückzubringen. Je höher die Dämmsteifigkeit, desto niedriger die Einsenkung (Abb. 7.7a). Die Kurven mit weicher Dämmsteifigkeit

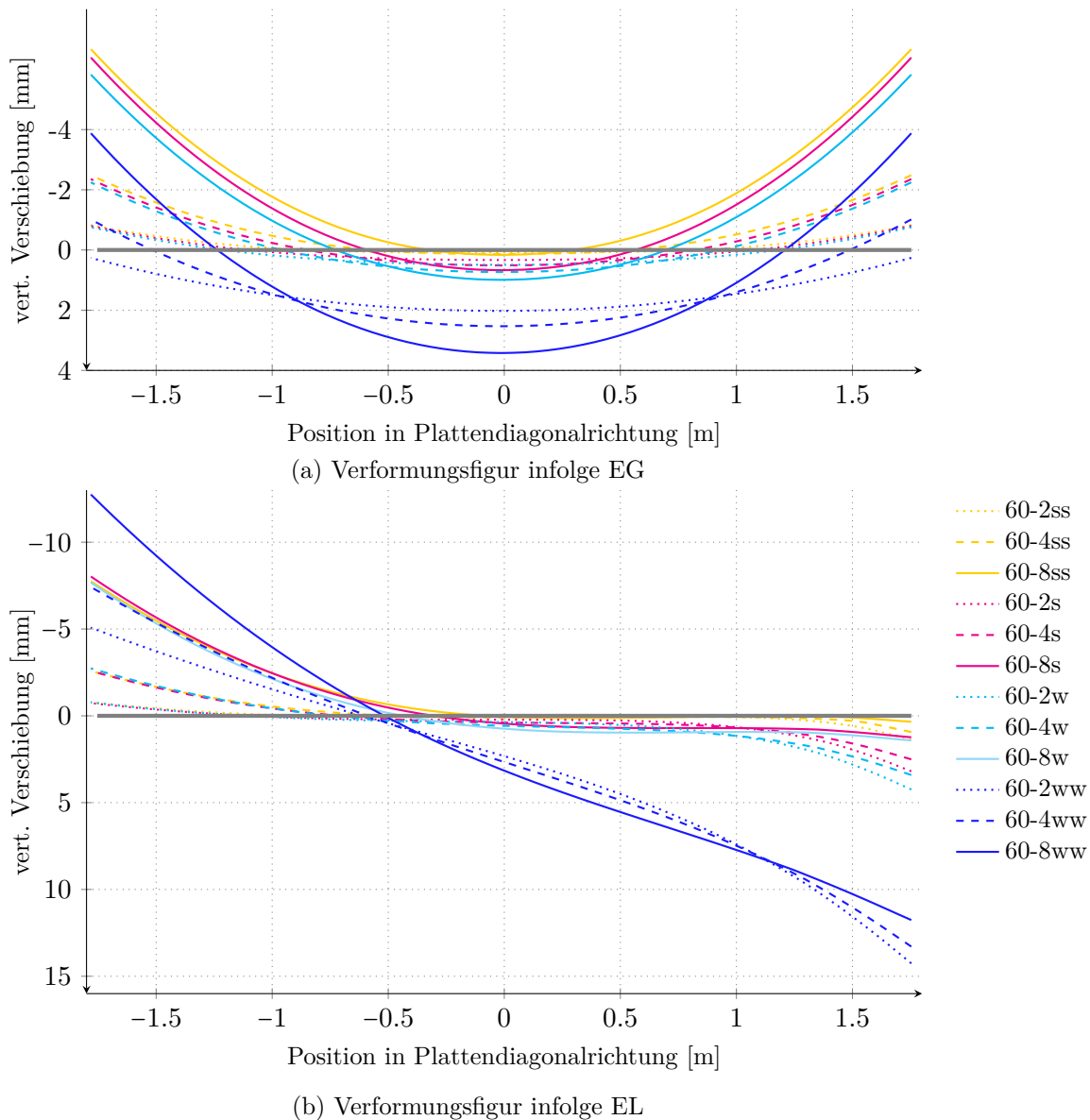


Abbildung 7.7.: Parameterstudie: Einfluss der Vorverformung – Verformungsfigur entlang der Diagonale infolge EG und einer der hier rechts angeordneten Einzellast (EL) auf Plattenecke

weichen infolge einer größeren Einsenkung von ihrer Lage her von den übrigen Kurven gleicher Vorverformung ab.

- Ein Kippeffekt ist kaum vorhanden, dieser ist nur bei weichem Dämmstoff ausgeprägt. Bei den restlichen Varianten wirkt der Kippeffekt auf der linken Seite der Platte zwar auch größer (Abb. 7.7b), das entspricht aber nur der noch in der Platte vorhandenen Schüsselung, die das Eigengewicht nicht reduziert hat. Die 60 mm Platte ist ausreichend steif, um diese Verformung auch unter Last zu halten. Links ist eine deutliche Gruppierung je nach Vorverformung zu sehen (gepunktete, gestrichelte, durchgezogene Linien liegen



jeweils aufeinander, mit Ausnahme der blauen Kurven infolge des weicheren Dämmstoffs).

- In Abb. 7.7b sieht man rechts unter der Last ebenfalls eine Gruppierung, hier jedoch nach Dämmsteifigkeit: Je weicher der Dämmstoff, desto stärker die Verformung. Bei geringer Aufschüsselung (gepunktet) sind die Kurven infolge der Last stärker in eine Richtung gekrümmt, bei größerer Aufschüsselung bildet sich infolge der Überlagerung der Aufschüsselung mit den Folgen einer einseitigen Belastung eine leichte S-Form aus.

Zusammenfassend lässt sich noch einmal hervorheben, dass auch bei deutlich weicheren bzw. steiferen Dämmungswerten der Einfluss auf die Maximallast infolge Vorverformung nicht sehr ausgeprägt ist. Für steife Dämmstoffe ist die Wirkung etwas ausgeprägter, bei knapp 9 kN (2 mm Vorverformung) zu etwa 7.5 kN (8 mm, vgl. Abb. 7.2), jedoch sind weiche Dämmsteifigkeiten im Bereich von  $K_S=1 \text{ MN/m}^3$  für Trittschalldämmungen weniger üblich. Einen etwas stärkeren Einfluss hat die Vorverformung auf die Verschiebung, dies ist jedoch vor allem auf eine widerstandsfreie Rückverformung der Aufschüsselung zurückzuführen.

Ein deutlich stärkerer Einfluss auf die Bruchlast aufgrund der Estrichdicke war zu erwarten. Dies wird durch die Studie bestätigt. Inwiefern das Modell hier quantitative Werte liefert und wie es bei anderen Estrichzusammensetzungen reagiert, ist weiter zu untersuchen. Auf die maximale Verformung unter der Last hat eine geänderte Dicke jedoch kaum Auswirkungen. Die Estrichdicke beeinflusst hier mehr die Ausprägung des Kippverhaltens je nach Plattensteifigkeit (und Geometrie).

Für den Einfluss der Vorverformung lässt sich festhalten, dass sich infolge dieser Schüsselung eine leicht S-förmige Verschiebungsfigur entlang der Diagonalen ausbildet. Dies ist bei dünneren Platten noch stärker ausgeprägt (Abb. 7.6b, gepunktet). Ein weiteres Abheben unbelasteter Ränder infolge Kippen ist nicht zwingend gegeben (bei ausreichend steifer Unterlage und Platte), aber man erhält durch die Vorverformung eine ungleichmäßige Verformungsfigur im Vergleich zu einer Platte ohne Vorverformung, die das Bruchverhalten unter Last insgesamt beeinflussen könnte. Inwiefern dies auch dem realen Verhalten entspricht oder das Modell durch weitere Versuche an dünneren bzw. dickeren Platten mit unterschiedlichem Schwindverhalten noch nachvalidiert werden muss oder dieses schon gut abbildet, bedarf weiterer Untersuchung.

## 7.2. Mögliche Schlussfolgerungen für die Bemessung

### Vergleich mit Manns und Zeus (1980)

Um einen ersten Bezug zum Bemessungskonzept für Estriche auf Dämmschichten herzustellen, wurden die von Manns und Zeus (1980) verwendeten Bemessungsformeln nach Westergaard herangezogen, vgl. Formeln (2.4) bis (2.6) sowie (A.2) bis (A.4). Die für den auch von Manns und Zeus (1980) betrachteten Fall einer 30 mm bzw. 60 mm dicken Platte mit einem Belastungsradius von 25 mm (E-Modul abweichend  $25000\text{N/mm}^2$ ) und einer Last von 1 kN ermittelten maximalen Spannungen und Verformungen jeweils für den Rand- und Ecklastfall sind in Abbildung 7.8 als Kurven logarithmisch über der Dämmsteifigkeit aufgetragen. Schwindeinflüsse bleiben in den Berechnungsformeln unberücksichtigt. Die Formeln setzen lineares Werkstoffverhalten voraus, sodass ein Simulationsvergleich nur für diesen Fall erwartet werden kann. Bei der hier betrachteten Last von 1 kN ist von linearem Tragverhalten auszugehen.

In den Diagrammen sind die Ergebnisse numerischer Berechnungen ohne Berücksichtigung einer Aufschüsselung für eine Dicke von 30 mm ( $\circ$ ) und 60 mm ( $\square$ ) für den Ecklastfall (rot) eingetragen. Es zeigt sich, dass die Simulationen für die 30 mm Platte eine unbefriedigende Abweichung von der Westergaard'schen Verformung liefern. Der Wert bei kleinerer Bettungszahl von  $0.35\text{ MN/m}^3$  weicht im oberen Diagramm für die Verformung für die dünnere Platte mit 30 mm am deutlichsten ab, recht gut getroffen ist bei größerer Bettungszahl der Wert für die 60 mm Platte. Die 60 mm Platte liefert in der Simulation etwas bzw. deutlich niedrigere Werte als die Formeln. Eine umgekehrte Abweichung nach oben zeigt sich dagegen bei einem Vergleich der Spannungen im unteren Diagramm. Die 30 mm-Spannungen hingegen liegen unterhalb der formelbasierten Rechnung.

Für die Spannungsbetrachtung werden zusätzlich die Berechnungen, die die Schüsselung mit berücksichtigen, sowohl für den Eck- als auch für den Randlastfall bei 60 mm Plattendicke mit abgebildet. Eine Darstellung der Verformungen wäre in diesem Zusammenhang irreführend aufgrund des Ablaufs der Rechnung (Reihenfolge Aufschüsselung als Vorverformung und nachträgliches Einsinken infolge Eigengewicht, vergleiche Kapitel 3.2). Die Spannungen liegen für den Ecklastfall in einem ähnlichen Bereich wie die der Simulation ohne Aufschüsseln. Für den Randlastfall wurde keine Berechnung ohne Aufschüsseln aufgestellt. Bei Vergleich der formelbasierten Spannungswerte unter Vernachlässigung des Schüsseln gegenüber den Werten der schüsselungsbasierten Simulation zeigt sich für beide Lastfälle eine vergleichbare Unterschätzung durch die Formeln. Außerdem fällt auf, dass der Randlastfall in der Simulation kleinere Werte liefert als der Ecklastfall, was bei den Westergaard'schen Formeln umgekehrt ist, weswegen sich letztlich auch der Randlastfall bei Manns und Zeus (1980) als maßgebend durchgesetzt hat.

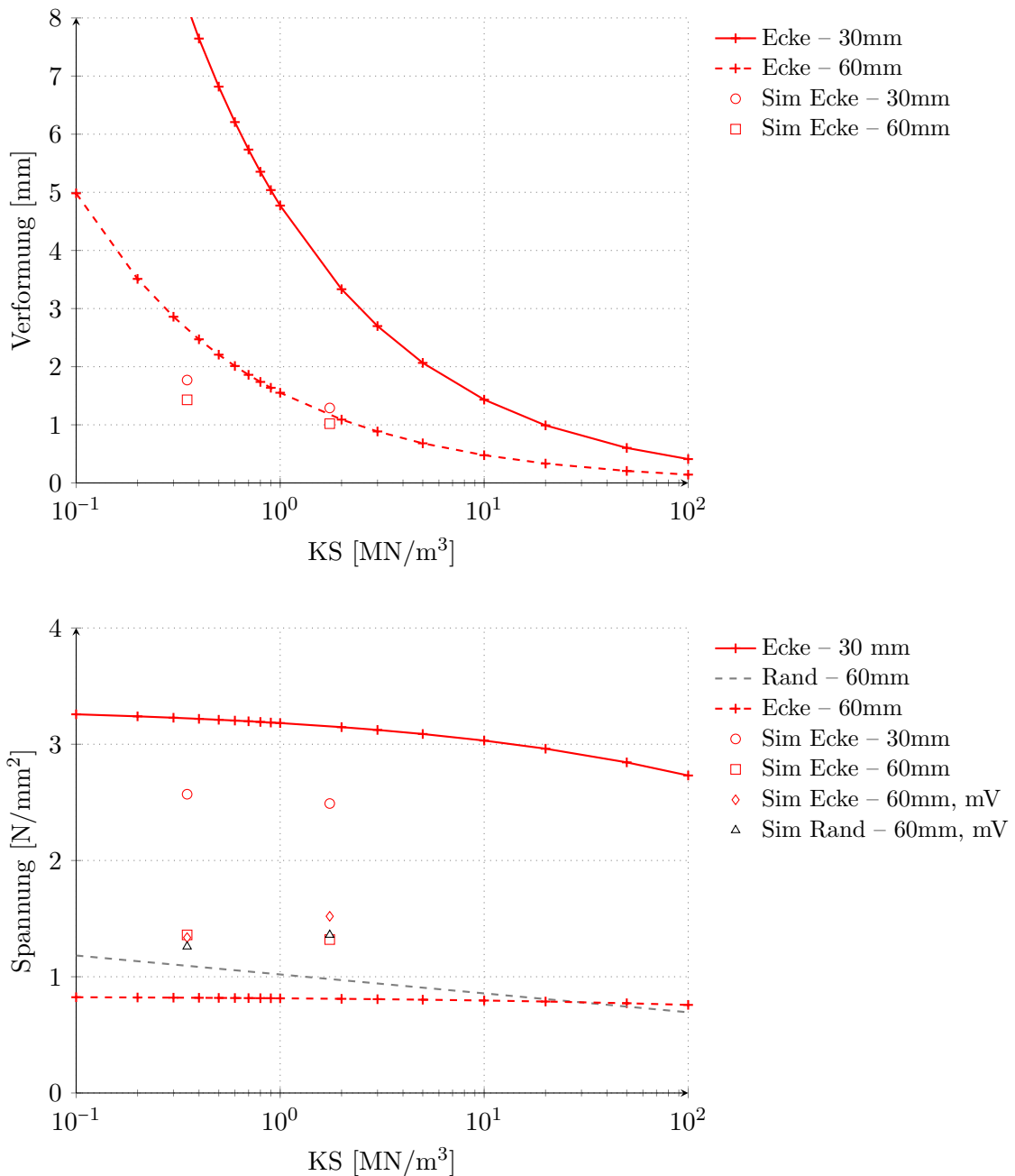


Abbildung 7.8.: Vergleich der Berechnungsformeln (Auswertung als Geraden dargestellt, vgl. Gleichungen (2.4) bis (2.6)) nach Westergaard bzw. Manns und Zeus (1980) mit dem Berechnungsmodell,  $a = 25 \text{ mm}$ ,  $E = 25000 \text{ N/mm}^2$ ,  $F = 1 \text{ kN}$  (Simulation (Sim), mit KS nach Tabelle 3.2, z.T. mit Vorverformung (mV))

Dass die Wirkung der Aufschüsselung in der Simulation auf die maximale Spannung vernachlässigbar ist, stützt auf den ersten Blick die Beobachtung aus der Versuchsauswertung, bei der die Eck-Bruchlasten nah beieinander lagen. Allerdings bezieht sich die Darstellung ausschließlich auf

ein Belastungsniveau von 1 kN, bei einer höheren Last könnte sich dies auch anders darstellen. Hier würde der Einfluss aus Nichtlinearität jedoch auch größer, bei dem ein Vergleich mit den Formeln nicht sinnvoll wäre. Außerdem stimmen bei geringerem Lastniveau die Stellen der maximalen Spannung zwischen initial aufgeschüsselter und aufliegender Platte nicht überein. Der Spannungszustand in der Platte gleicht sich erst bei höherem Lastniveau bzw. rückgebildeter Aufschüsselung infolge Belastung an.

Insgesamt zeigt sich eine unbefriedigende Abweichung bei den Verformungen mit den Werten der Westergaard-Formeln, und eine qualitativ und quantitativ schlechte Übereinstimmung bei den Spannungswerten für beide Plattendicken. Der hier betrachtete Vergleich bezieht sich ausschließlich auf das Lastniveau von 1 kN Einzellast, welches von Manns und Zeus (1980) als für den damaligen Wohnungsbau angemessen eingeordnet wurde. Das Beanspruchungsniveau für Estrich ist jedoch mit der Zeit gestiegen, sodass im Folgenden auch höhere Lastniveaus und insbesondere das Verhältnis zwischen Rand- und Eckbeanspruchung hinsichtlich der Bedeutung für die Bemessung genauer untersucht werden soll.

### **Gegenüberstellung der Lastfälle bei höherem Lastniveau und Vergleich mit Westergaard**

In Abbildung 7.9 und Tabelle 7.3 sind die Werte der maximalen Hauptspannung grafisch und tabellarisch aufgeführt. In der Tabelle finden sich zusätzlich Hinweise auf die Stelle der maximalen Spannung im System. In den rot dargestellten Simulationswerten zeigt sich bei Erreichen der Zugfestigkeit jeweils ein Knick, der auf das Einsetzen nichtlinearer Einflüsse zurückzuführen ist. Der Steigungsanstieg im Verlauf der gestrichelten, roten Verläufe (Randlastfall) zwischen 3 und 4 kN ist in den Verläufen der rot gepunkteten Ecklastfall-Linien nicht zu beobachten. Grund hierfür ist der Wechsel des Auswertungsorts beim Randlastfall von der Maximalspannung an der Plattenoberseite zur -unterseite direkt unterhalb der Last. Im Vergleich zu den Spannungswerten, die sich auf den Formeln nach Westergaard ergeben, liegen die Spannungen aus der Simulation bei 1 kN Last etwa um das 1.3- bzw. 1.5-fache höher. Der Einfluss der beiden unterschiedlichen Dämmstoffe ist in allen Kurven weitgehend vernachlässigbar. Im Bereich 2 bis 3 kN übersteigen die Spannungswerte der Westergaard-Formeln die der Simulation und übersteigen aufgrund des linearen Anstiegs spätestens bei Erreichen des plastischen Dehnungsniveaus (vgl. Tabelle 7.3, ab 4 bis 5 kN Einwirkung) die Werte aus den Simulationen deutlich. Zwischen 3 und 5 kN (2 und 4 kN beim Ecklastfall) zeigen die Kurven zumindest einen ähnlichen Anstieg, und für den Ecklastfall auch eine recht gute Übereinstimmung.

Wie bereits im vorangegangenen Kapitel erläutert, wurde bei den hier dargestellten Werten keine Begrenzung der Rissprozesszone durch Schwächung bestimmter Elementreihen zugrunde gelegt. Die Ergebnisse sind dadurch und durch fehlende Validierung mit einer belastbaren Versuchsdatenlage eingeschränkt quantitativ auswertbar. Dennoch zeigt sich bereits im elastischen

Tabelle 7.3.: Simulationsauswertung der maximalen Hauptspannung unter verschiedenen Einzellastniveaus unter Angabe des Werts und der Stelle innerhalb der Platte (grau unterlegt: Auftreten plastischer Dehnungen)

max. Hauptspannung $N/mm^2$	Platte W (weicher gelagert)				Platte S (steifer gelagert)			
	Rand		Ecke		Rand		Ecke	
	Last [kN]	$\sigma_{max}$	Ort	$\sigma_{max}$	Ort	$\sigma_{max}$	Ort	$\sigma_{max}$
1	1.26	Plattenmitte, Oberseite	1.41	nahe Plattenmitte, Oberseite	1.36	Plattenmitte, Oberseite	1.55	nahe Plattenmitte, Oberseite
2	1.44	"	1.88	leicht exzentrisch hin zum Lastangriff, Oberseite	1.44	"	1.95	leicht exzentrisch hin zum Lastangriff, Oberseite
3	1.56	leicht exzentrisch hin zum Lastangriff, Oberseite	2.42	näher hin zum Lastangriff, Oberseite	1.55	leicht exzentrisch hin zum Lastangriff, Oberseite	2.34	näher hin zum Lastangriff, Oberseite
4	2.37	Lastangriff, Unterseite	2.96	Entfernung vom Lastangriff, Oberseite	2.11	Lastangriff, Unterseite	2.98	"
5	2.99	"	3.0	"	2.99	"	3.0	Entfernung vom Lastangriff, Oberseite
6	2.95	"	3.0	"	2.95	"	3.0	"
7.15 (Bruchlast Ecke)	3.0	im Feld, Oberseite	3.0	"	3.0	im Feld, Oberseite	3.0	"

Bereich, der von dem fehlenden Regularisierungskonzept unbeeinflusst ist und in dem auch die Spannungs-Dehnungsverläufe zwischen Versuch und Simulationen recht gut übereinstimmen, eine Diskrepanz zwischen der von Manns und Zeus (1980) angenommenen bzw. in den Westergaard'schen Formeln enthaltenen Tendenz, dass der Randlastfall ein höheres Spannungsniveau aufweist als der Ecklastfall.

Vergleicht man hingegen die gemessenen Dehnungsverläufe für den Eck- (Abb. E.7 und E.8) bzw. Randlastfall (Abb. E.9) miteinander, wird deutlich, dass die in den DMS zum Teil erfasste Bruchdehnung im Ecklastfall mit etwa  $250 \mu m/m$  im Randlastfall im Bereich der geklebten DMS auf der Plattenoberseite nicht annähernd erfasst wurde. Hier beträgt die maximal gemessene Dehnung lediglich etwa  $150 \mu m/m$ . Bei Betrachtung der DMS an der Plattenkante in Abbildung E.10 und Vergleich der Kraftniveaus entsteht schon bei einer Last von etwas über 4 kN im Randlastfall ein erster Riss an der Plattenunterseite, erkennbar am plötzlichen Anstieg der gemessenen Dehnungswerte weit jenseits der genannten Eck-Bruchdehnung von  $250 \mu m/m$ . Das Lastniveau bei Eintreten des Risses stimmt mit den in den Simulationsergebnissen beschriebenen Wechsel des Orts der Maximalspannung an die Plattenunterseite und dem Auftreten plastischer Dehnungen im Lastbereich zwischen 4 und 5 kN überein. Dies stützt zum einen die Simulationsergebnisse zusätzlich, weicht jedoch die obige Tendenz auf, dass der Eck-Lastfall zur Bewertung der Beanspruchbarkeit des Estrichs herangezogen werden sollte. Die Entstehung des Risses an der Plattenunterseite setzt somit vor Auftreten des Bruchs im Ecklastfall ein. Der Riss führt jedoch nicht instantan zum Versagen wie im Ecklastfall, dieses tritt deutlich später auf.

Abschließend lässt sich zusammenfassen, dass die Simulationsergebnisse auch für den Randlastfall im Hinblick auf die Rissentstehung an der Plattenunterseite qualitativ gut mit den gemessenen Daten der DMS übereinstimmen, insbesondere das Lastniveau betreffend, unter der der dortige Riss einsetzt. Dies zeigt, dass trotz der Unsicherheiten, mit denen die Randlastsimulationen belegt sind, und abgesehen von der erreichten Bruchlast mindestens qualitative Aussagen aus den Simulationsergebnissen ableitbar sind:

- Das Spannungsniveau der Simulationsergebnisse des Ecklastfalls übersteigt die des Randlastfalls.
- Das Bruchlastniveau des Ecklastfalls liegt unter dem des Randlastfalls.
- Der Riss an der Plattenunterseite im Falle einer Randbelastung setzt vor dem Bruch im Ecklastfall ein, führt jedoch nicht unmittelbar zum Versagen. Im Randlastfall sind Spannungsumlagerungen möglich, sodass der Bruch erst später auftritt.

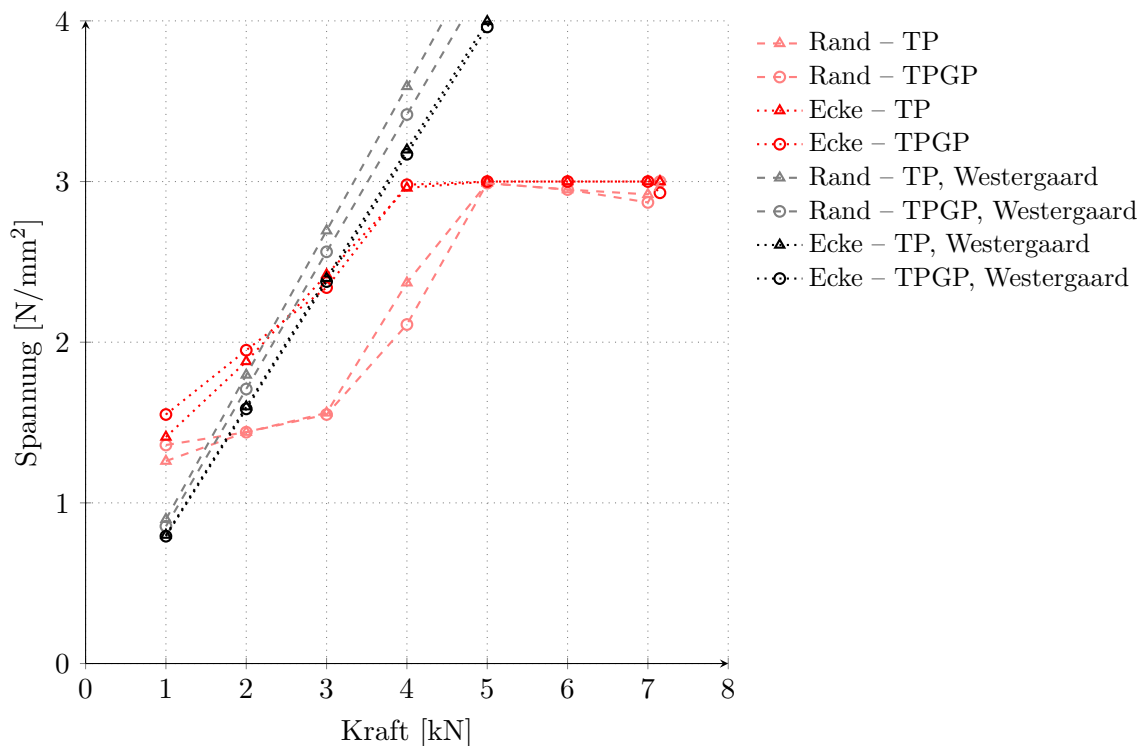


Abbildung 7.9.: Entwicklung der plastischen Dehnungen bei Randbelastung an der Ober- und Unterseite der Platte, jeweils ausgewertet bei Erreichen der Bruchlast

Hieraus lässt sich ableiten, dass eine Belastung der Ecke zur Ermittlung der maßgebenden Bruchlast sinnvoller ist als die Belastung des Randes. Im Hinblick auf ein Bemessungskonzept ist jedoch entscheidend, ob eine Rissfreiheit an Ober- und Unterseite gewährleistet sein muss. In diesem Fall wäre wie im aktuellen Bemessungskonzept zugrundegelegt der Randlastfall als maßgebend vorzuziehen. Der Einfluss des Schüsselns wurde in der vorliegenden Arbeit nur für den Ecklastfall (zumindest unter den validierten Randbedingungen) zufriedenstellend als vernachlässigbar

beurteilt. Auch die betrachteten Dämmstoffe spielen für das Bruchlastniveau in den betrachteten Bereichen der Dämmsteifigkeit zwischen 8 und 13 MN/m<sup>3</sup> eine untergeordnete Rolle. Bei wesentlich steiferem Dämmstoff nimmt der Einfluss etwas zu.

### Vergleich mit DENAK-Merkblatt

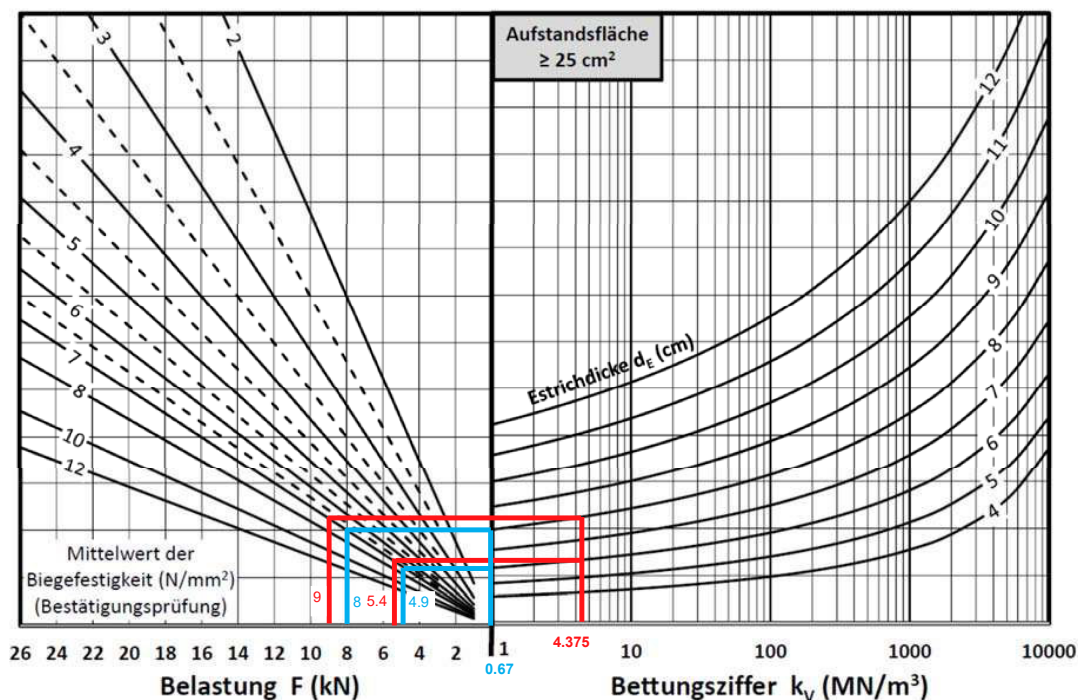


Abbildung 7.10.: Nomogramm aus dem DENAK-Merkblatt für eine Last-Aufstandsfläche  $\geq 25 \text{ cm}^2$  (DENAK-Merkblatt 8-2, 2021)

Bei Betrachtung der in Kapitel 2.1.3 erwähnten Bemessungs-Nomogramme für Bodenkonstruktionen der DENAK zeigt sich in Abbildung 7.10 bzw. Tabelle 7.4 eine Abweichung der Simulationsergebnisse von der aus dem Nomogramm ablesbaren maximal zulässigen Last. Das Nomogramm basiert allerdings auf dem von Manns und Zeus (1980) als maßgebend identifizierten Randlastfall, und können daher nicht wirklich konsistent mit den Ergebnissen des numerischen Modells verglichen werden. Dies wäre für den Randlastfall bei ausreichender Datengrundlage eher möglich. Die in Tabelle 7.4 dargestellten Werte berücksichtigen bei der Biegezugfestigkeit den im Merkblatt angegebenen Sicherheitskorrekturfaktor nicht. Die maximale Last wird für die in den Festigkeitsprüfungen ermittelte Biegezugfestigkeit von  $\sigma_{BZ} = 6.8 \approx 7 \text{ N/mm}^2$  charakteristisch abgelesen.

Wird das Versuchsergebnis von im Mittel 7.15 kN (Ecke) bzw. 14.25 kN (Rand) bei mittelsteifer Unterlage (10 MN/m<sup>3</sup>) und 60 mm dicker Platte herangezogen, stimmt dieser Wert mit der Simulation wie bereits im vorangegangenen Kapitel dargestellt beim Ecklastfall recht gut, für den Randlastfall nicht überein (Zeilen 1 und 2, und Spalte  $\approx$  4 mm Vorverformung der Tabelle 7.4). Im Vergleich dazu ergibt sich aus der DENAK-Richtlinie ein kleinerer Wert von 5 kN. Insbesondere für den vergleichbaren Randlastfall ist die Abweichung sehr deutlich, der DENAK-Wert entspricht etwa einem Drittel der Versuchsbruchlast. Grundsätzlich liegen die DENAK-Werte bei noch hinzukommender Berücksichtigung des Sicherheitsfaktors unabhängig von Schwindinflüssen für eine 60 mm Platte sehr deutlich auf der sicheren Seite, wenn die Annahme des Randlastfalls als maßgebend angemessen ist. Für die 80 mm Platte wurde keine Simulation des Randlastfalls durchgeführt, aber das Verhältnis der Ecksimulationen zu den DENAK-Werten ist für beide Plattendicken vergleichbar, sodass sich der Unterschied zur Randsimulation ähnlich ergeben dürfte.

Tabelle 7.4.: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Werten aus dem DENAK-Merkblatt zur Bemessung von Bodenkonstruktionen

[kN]	KS=0.67 MN/m <sup>3</sup>			KS=4.375 MN/m <sup>3</sup>		
Schüsseln [mm]	2	4	8	2	4	8
60mm (SIM Ecke)	7.44	7.22 (V: 7.43)	6.00	7.60	7.39 (V: 6.79)	6.96
60mm (SIM Rand)	19.63 (V: 15.17)			19.30 (V: 13.55)		
60mm (DENAK)	4.9			5.4		
80mm (SIM Ecke)		11.78			11.90	
80mm (DENAK)	8			9		

Die auf den ersten Blick großen Diskrepanzen zwischen den Westergaard'schen Formeln und den Simulationsergebnissen sollten nicht überbewertet werden. Für eine grundlegende Bewertung sind weitere Untersuchungen, vor allem belastbare Simulationen für den Randlastfall, und eine Sicherheitsbetrachtung mit Blick auf das für die Anwendung entscheidende Versagens- bzw. Gebrauchstauglichkeitskriterium notwendig.



## 8. Zusammenfassung und Anschlusspunkte

### 8.1. Zusammenfassung

Eine Untersuchung des Schwind- und Dämmsteifigkeitseinflusses auf den maßgebenden Versagenmechanismus schwimmenden Estrichs und daraus abzuleitende Rückschlüsse auf das gültige Bemessungskonzept der DIN 18560-2:2022 standen im Fokus dieser Arbeit. Dazu wurde ein Modell zur Versagensmodellierung schwimmenden Estrichs unter punktförmiger Belastung an der Plattenecke erstellt, welches eine – bei verschmierten Rissmodellen häufig eingeschränkte – Netzunabhängigkeit der Ergebnisse gewährleistet und eine für den Kontakt zwischen Dämmung und Estrich leicht reproduzierbare Variante in Form von Einzelfedern verwendet. Mithilfe der durchgeführten Balken- und Plattenversuche konnte das Modell schrittweise gut für den betrachteten Parameterbereich validiert werden. Für eine erste Beurteilung der genannten Einflüsse auf das Bemessungskonzept liefert dies eine gute Grundlage.

#### **Theoretische Basis**

Die Basis für die vorliegenden Untersuchungen stellen Estrich-ähnliche Betonmodelle dar, die zur Abbildung des Rissverhaltens von Stahl- und Stahlfaserbeton bereits als geeignet gelten. Ausgewählt wurden dabei verschmierte Rissmodelle, die auf bruchmechanischen Prinzipien und der Plastizitätstheorie beruhen. Angewendet auf in der Regel unbewehrt eingebauten Zementestrich spielt bei der Modellierung der Diskontinuität im Dehnungszustand zum einen die Gewährleistung der Netzunabhängigkeit eine Rolle, zum anderen können bei entfestigendem Materialverhalten dieser Art grundsätzlich Materialinstabilitäten auftreten. Dies stellt für die Lösungsfindung innerhalb der Finite-Elemente-Methode eine Herausforderung dar. Neben der Materialnichtlinearität war bei Berücksichtigung des Aufschüsseln bzw. Ablegens der Plattenränder unter Belastung der Kontakt zwischen Estrich und Dämmstoff zu modellieren.

#### **Gewährleistung der Netzunabhängigkeit und Dämmstoffmodellierung**

Somit wurden zunächst die Modellgrundlagen geschaffen: Zum einen wurden Untersuchungen zur Netzunabhängigkeit und zur Modellierung des Rissprozesses, insbesondere des Nachbruchbereichs, durchgeführt, zum anderen lieferten Versuche am in den späteren Plattenversuchen verwendeten Dämmstoff eine Grundlage zur Modellierung der Dämmsteifigkeit.

Aufgrund fehlender Bewehrung besteht eine erhöhte Relevanz der Frage nach der Netzunabhängigkeit. Zur Sicherstellung netzunabhängiger Ergebnisse bei der Simulation der Biegebeanspruchung werden in der Literatur verschiedene Möglichkeiten betrachtet, wobei die Einführung der charakteristischen Länge als Korrekturparameter vor allem in kommerzieller Software die aktuell üblichste standardmäßig implementierte Option darstellt. Daher wurden zwei in kommerzieller Software implementierte Modelle, das Concrete Damaged Plasticity-Modell in *Abaqus* und das Menetrey-Willam-Modell in ANSYS – als für Rissmodellierung übliche Software-Vertreter – und deren Umgang mit der Netzabhängigkeit verglichen und dem energiebasiert hergeleiteten Ansatz nach Gödde (2013) gegenübergestellt. Dabei wird der Sonderfall eines reinen Zugversuchs untersucht, da dieser eine analytische Lösung besitzt und eine eindeutige Definition der charakteristischen Länge liefert. Als Ergebnis dieses Vergleichs ergibt sich zum einen ein besseres Verständnis des hier zur Regularisierung verwendeten Parameters der charakteristischen Länge, aber auch eine bessere Beurteilung der Anwendungsgrenzen der betrachteten Softwarelösungen. Hier konnten bei Betrachtung eines einfachen Zugversuchs bereits Diskrepanzen zwischen analytischer Lösung und Ergebnissen in der Software herausgestellt werden. Die in *Abaqus* nicht transparent offen gelegte Definition dieses Parameters verhinderte eine abschließende Evaluation der Ursache für diese Diskrepanz. Durch den Vergleich der beiden Software-Ansätze kann jedoch zumindest eine gezielte Vermutung hinsichtlich der in *Abaqus* zugrunde gelegten Definition der charakteristischen Länge geliefert werden. Diese kann für weitere Anwendungen dieses Modells, vor allem im Hinblick auf tiefere Untersuchungen der Auswirkung dieser Definition, genutzt werden.

Um die Steifigkeit des verwendeten Dämmstoffs möglichst realistisch zu erfassen, wurden Versuche an Dämmstoffproben durchgeführt. Diese orientierten sich hinsichtlich des maximalen Belastungsbereichs an den normativen Vorgaben zur Bestimmung der Zusammendrückbarkeit eines Dämmstoffs, welche für die normative Estrichbemessung eine Rolle spielt. Neben der Prüfung der beiden unterschiedlich steifen Faserdämmstofftypen im gelieferten Zustand wurden auch Prüfungen an Proben durchgeführt, die nach der Prüfung der Estrichplatte aus dem dort verwendeten Dämmstoff entnommen wurden. Die experimentellen Untersuchungen des Dämmstoffs zeigten einen Unterschied zwischen der unbelasteten Prüfung des Faserdämmstoffs im Vergleich zur Prüfung nach Belastung durch den darauf liegenden Estrich: Der steifere Dämmstoff verliert offenbar durch die Belastung an Steifigkeit, der weichere der beiden Dämmstoffe zeigt nach Belastung eine etwa doppelt so hohe Steifigkeit. Wie diese Veränderung im Detail zu erklären und inwiefern diese Diskrepanz auch bei anderen Dämmstofftypen vorhanden ist, bedarf weiterer experimenteller Untersuchung. Es ist möglich, dass die strukturelle Beschaffenheit eines Faserdämmstoffs für diesen Effekt anfälliger ist als andere für Trittschalldämmprodukte übliche Werkstoffe wie z.B. Polystyrol (EPS). Festhalten lässt sich jedoch, dass zur numerischen Abbildung der Steifigkeit nicht allein der Wert der Zusammendrückbarkeit ausreichend ist, der zwar zur Einordnung der Steifigkeit gegenüber anderen Produkten dient, aber das physikalische

Verhalten im Sinne einer Federsteifigkeit nicht erfasst.

Die Modellierung des Dämmstoffs erfolgte ebenso wie die Kontaktmodellierung über nichtlineare Einzelfedern: Die Dämmstoffversuche lieferten ein stückweise lineares Kraft-Weg-Gesetz zur Beschreibung der Steifigkeit, wobei sich der resultierende Verformungsbereich in der Regel auf den linearen Anfangsbereich beschränkt. Die Kontaktfedern erhielten ebenfalls ein stückweise lineares Gesetz, welches vom anfänglichen Abstand des Estrichs vom Dämmstoff infolge der Vorverformung aus Schwinden abhing. Der Erhärtungs- bzw. Schwindprozess selbst wurde nicht direkt simuliert, sondern die resultierende charakteristische Schüsselform vereinfacht abgeschätzt und als Vorverformung berücksichtigt. Die in vergleichbarer Software reproduzierbare und transparent kontrollierbare Kontaktmodellierung über Einzelfedern, die zwischen die Dämmstofffedern und die Estrichelemente zwischengeschaltet wurden, bildet das Ablegen der Platte auf dem Dämmstoff gut und effizient ab.

### Validierung des Modells

Mithilfe des so entwickelten Modells lassen sich nun Werkstoffprüfungen sowie typische Laststellungen auf schwimmenden Estrichbalken und -platten simulieren. Anhand verformungsgesteuert geprüfter Estrichbalken im Dreipunktbiegezugversuch konnte die Eignung des in *Abaqus* enthaltenen CDP-Materialmodells zur Berechnung des Nachbruchbereichs bestätigt werden. Die Übereinstimmung der Kraft-Verformungs-Kurven zwischen Experiment und Simulation ist sehr gut. Bei den übrigen Versuchen an auf Dämmstoff gebetteten Balken und Platten wurde der Nachbruchbereich nicht erfasst und daher im Hinblick auf das Materialmodell nicht beurteilt. Bis zum Erreichen der Bruchlast zeigte sich eine gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Simulation. Der Materialparameter der Bruchenergie  $G_f$  ergibt sich dabei zu  $0.2 \text{ Nmm/mm}^2$  und ist damit eher hoch im Vergleich zu typischen Werten für Beton oder Stahlfaserbeton (üblicherweise bis  $0.12 \text{ Nmm/mm}^2$ ). Ob eine dies eine grundsätzliche Tendenz bei schwindarmen Zementfließestrichen hoher Festigkeit (Biegezugfestigkeitsklasse F7) ist, lässt sich auf Basis einer einzelnen Stichprobe nicht beurteilen.

Die Validierung beschränkt sich auf die konkret betrachteten Parameter, da die beeinflussenden Variablen wie Dicke ( $d = 60 \text{ mm}$ ), Geometrie (quadratische Platte), Rezeptur (eine Art von Fließestrich, F7), Belastungsart (Einzellast Ecke) sowie Art (Faserdämmstoff) und Steifigkeit der Unterlage (zwei verschiedene Zusammendrückbarkeiten bzw. Bettungszahlen) nicht bzw. nur in begrenztem Umfang variiert wurden. Insbesondere für den Randlastfall ist die Datenlage zur abschließenden Validierung nur begrenzt verwendbar. Insbesondere zeigte sich bei der Beurteilung des Rissbilds für die Simulation beider Lastfälle, dass sich eine im Versuch beobachtete eindeutige Einzelrissbildung auch bei Schwächung der Elemente im Rissband nicht unmittelbar numerisch einstellt. Solange der Nachbruchbereich keine höhere Relevanz hat und bei der

betrachteten Laststellung keine Spannungsumlagerung zu erwarten ist, ist das Modell in der vorliegenden Form ausreichend. Andernfalls sind weitergehende Untersuchungen und ggf. ein Überdenken des Regularisierungskonzepts oder sogar der Modellgrundlage notwendig.

### **Beurteilung des Schwindeinflusses**

Das so validierte Modell konnte schließlich zur Beurteilung des Schwindeinflusses herangezogen werden. Die Untersuchung erfolgte anhand einer Parameterstudie durch Variieren der Estrichdicke, Dämmsteifigkeit und Vorverformungsintensität. Die Parametervariation beschränkt sich darauf, jeweils nur eine Größe (Dicke oder Vorverformung) zu variieren, um die Unsicherheit in den auf Extrapolation des experimentell validierten Parameterbereichs basierenden Ergebnissen zu minimieren. Diese Extrapolation stellt dennoch eine Unsicherheit bei der grundlegenden Beurteilung des Schwindeinflusses auf schwimmenden Estrich im Allgemeinen dar. Im validierten Bereich einer 60 mm Platte zeigte sich jedoch bereits, dass der Einfluss aus Schwinden auf die Bruchlast vernachlässigbar ist und auch die Parameterstudie weist keinerlei Indizien dafür auf, dass andere Randbedingungen einen größeren Einfluss der Aufschüsselung auf die Tragfähigkeit offenbaren werden.

Abweichungen der quantitativen Verformungs- und Bruchlastgrößen sind ohne einen Abgleich mit weiteren Versuchen nicht auszuschließen, qualitativ sind die Ergebnisse der Parameterstudie jedoch als realistisch einzustufen. Die Ergebnisse für die extremalen Dämmsteifigkeiten mit Bettungszahlen von 1 und 100 MN/m<sup>3</sup> können lediglich als Tendenz der tatsächlichen Verformung bzw. Bruchlast verstanden werden. Allein die Verformung weicht bei sehr weichem Dämmstoff von realistischen Werten deutlich ab.

Bestrebungen, das Rissverhalten hochfester Fließestriche durch schichtweises Einbringen und dadurch reduzierter Schwindeinflüsse zu verbessern, sind auf Basis der vorliegenden Ergebnisse nicht zielführend. Festhalten lässt sich, dass je steifer der Dämmstoff ist, desto eher ein Einfluss der Vorverformung auf die Bruchlast erkennbar ist. Die Dämmsteifigkeit selbst hat wenig Einfluss auf die Bruchlast, auch unabhängig von der Dicke des Estrichs. Die Estrichdicke hingegen bestätigt sich als maßgeblich für die Bruchlast.

### **Beurteilung des Bemessungskonzepts**

Im Anschluss konnte das genormte Bemessungskonzept auf Basis der Ergebnisse beurteilt werden. Die Hypothese, dass der Einfluss aus Schwinden bzw. Schüsseln in Wechselwirkung mit der Dämmsteifigkeit einen entscheidenden Einfluss auf das Bruchlastniveau schwimmenden Estrichs hat, konnten die dargestellten Untersuchungen nicht nachweisen. Zumindest für die im Versuch betrachtete Dicke von  $d = 60$  mm zeigt sich unabhängig von der Berücksichtigung einer schüsselförmigen Vorverformung ein ähnliches Bruchlastniveau in den Simulationen. Daher erscheint

eine Anpassung des Bemessungskonzepts hinsichtlich des Schwindeinflusses zunächst nicht zwingend erforderlich.

Da das Bemessungskonzept auf Manns und Zeus (1980) zurückgeht, beziehen sich auch Bemessungsrichtlinien wie die der DENAK auf den Randlastfall, der von Manns und Zeus (1980) als maßgebend identifiziert wurde. Dabei wurde jedoch ein für den damaligen Wohnungsbau angemessenes Lastniveau vorausgesetzt, welches durch heutige Lastniveaus vor allem im Industriebau deutlich überschritten wird. Die Bruchlasten wie auch das Spannungsniveau des Ecklastfalls übersteigen die des Randlastfalls bei Lastniveaus jenseits der von Manns und Zeus (1980) angesetzten 1 kN-Einzellast deutlich. Auch widersprechen die Simulationsergebnisse insofern den Formeln nach Westergaard, bei denen ebenfalls der Randlastfall grundsätzlich höhere Werte liefert. Dadurch lässt sich der als maßgebend identifizierte Lastfall „Einzellast am Plattenrand“ gegenüber der Belastung an der Ecke aufgrund des kritischeren Spannungszustands, der keine Umlagerungen zulässt, und der geringeren Versagenslast zumindest infrage stellen.

Anzumerken ist hier, dass die Ergebnisse der Tastsimulationen, die für den Randlastfall durchgeführt wurden, aufgrund geringer Versuchsdatengrundlage und Diskrepanzen zwischen Simulation und Versuch im Bereich des Rissorts und der in der Simulation vernachlässigten Vorschädigung durch die vorgelagerten Eckprüfungen nur bedingt belastbar sind. Dass aber bereits im elastischen Bereich eine Abweichung zu den Annahmen von Manns und Zeus (1980) bzw. den Westergaard'schen Formeln vorliegt und der Ecklastfall ein höheres Spannungsniveau aufweist als der Randlastfall, ist unabhängig von den genannten Unsicherheiten bemerkenswert.

Das Versagen unter Eckbelastung, welches in der Praxis üblicherweise zur Begutachtung der Estrichtragfähigkeit herangezogen wird, setzt jedoch später ein als die Erstrissbildung an der Plattenunterseite bei Randbelastung, auch wenn diese nicht unmittelbar Versagen-induzierend ist. Es ist also nicht eindeutig, welcher Lastfall maßgebend ist. Diese Beobachtungen motivieren eine anforderungsbedingt genauere Gegenüberstellung und ggf. Festlegung eines maßgebenden, und damit einheitlich zu betrachtenden Lastfalls für die Praxis.

Diese Ergebnisse zeigen auf, dass der Einfluss aus Schwinden auf das Versagen und damit Schäden an schwimmendem Estrich weniger entscheidend ist als bisher angenommen, und sich daraus kein Bedarf zur Anpassung des Bemessungskonzepts ableitet. Dagegen unterstreicht die Auswertung, dass die Diskrepanz zwischen dem für die Bemessung als maßgebend erachteten Randlastfall und dem in der Praxis üblicherweise betrachteten Ecklastfall zur Traglastermittlung einer genaueren Gegenüberstellung bedarf. Dabei lässt sich das hier entwickelte Modell als numerisches Werkzeug heranziehen. Aus dem Vergleich der Lastfälle ließen sich unter Umständen bindende Handlungsempfehlungen für ein verbessertes Sicherheitskonzept ableiten.

## 8.2. Ausblick

### Reduzierung notwendiger experimenteller Untersuchungen

Bei Beanspruchungen jenseits der normativ erfassten Standardanwendung und Lastniveaus ist es in der Praxis üblich, die Tragfähigkeit des geplanten Estrichs über experimentelle Untersuchungen an großformatigen Platten zu ermitteln. Dies ist zeit- und kostenintensiv. Bei weiterer Validierung des numerischen Modells für weitere Dicken und andere Dämmstofftypen ließe sich eine solche Untersuchung unter Umständen durch eine numerische Rechnung ersetzen. Möglicherweise ist es in diesem Zusammenhang im Zuge weiterer Untersuchungen verschiedener Geometrien auch denkbar, ein kostengünstigeres Versuchskonzept zur Ermittlung der Tragfähigkeit zu entwickeln, welches die gleichen Kenndaten liefert wie die aktuell großformatigen Plattenversuche. Daneben ließen sich schließlich komplexere Geometrien, erhöhte Lastniveaus oder besondere Laststellungen, die einer besseren Datengrundlage hinsichtlich für Risse kritischer Situationen bedürfen, für die Planung unterstützend simulieren.

### Weitergehende Anwendung des Modells

Zur Verbesserung des spröden Materialverhaltens und der geringen Zugfestigkeit werden in der Baupraxis neben der Anordnung stabförmiger Stahlzulagen immer häufiger zusätzlich oder als Ergänzung kurze, räumlich verteilte Stahlfasern eingesetzt. Vor allem im Industriefußbodenbau ist die Verwendung von Stahlfaserbeton üblich. Im Hinblick auf die Verbesserung der Tragfähigkeit bzw. des Rissverhaltens ist auch für schwimmenden Estrich eine Faserbewehrung denkbar. Numerische Untersuchungen im Hinblick auf Faserorientierung und -verteilung lassen sich mit dem entwickelten Modell durchführen, wie ebenfalls u.a. Gödde (2013) zeigt. Bei faserverstärktem Estrich steigt jedoch die Bedeutung des Nachbruchbereichs, sodass vor allem hier eine weitere Validierung des Modells notwendig ist. Erste Untersuchungen zum Nachbruchbereich an verformungsgesteuerten Biegezugversuchen sind in dieser Arbeit bereits erfolgt, ein nächster Schritt könnte sein, diesen Nachbruchbereich auch für faserverstärkte Balken zu untersuchen und zu validieren. Den Nachbruchbereich für gebettete Balken oder Platten experimentell zu erfassen und daran das Modell weiter zu validieren hat sich in der vorliegenden Arbeit bereits als nicht trivial gezeigt. Bei einer weniger spröde reagierenden Estrichrezeptur und einer verbesserten, verformungsgesteuerten Lastaufbringung ist es unter Umständen dennoch möglich, den Nachbruchbereich zu erfassen. Die Untersuchungen zum Ecklastfall haben außerdem gezeigt, dass kaum Potential für Spannungsumlagerungen existiert. Um den Nachbruchbereich zu erfassen und zunächst das Modell zu validieren, ist eine andere Laststellung am Rand möglicherweise besser geeignet. Hier kann außerdem, wie in den vorliegenden Versuchen gezeigt, zusätzlich an der Kante die Rissöffnungsweite des Risses an der Plattenunterseite seitlich über DMS erfasst und bei Entwicklung eines angemessenen Regularisierungskonzepts für den Randlastfall validiert werden.

### **Netzabhängigkeit bei unbewehrtem Verbundwerkstoffen**

Abschließend sei außerdem noch einmal auf die Bedeutung der Netzabhängigkeit bei verschmierten Rissmodellen hingewiesen. Insbesondere bei unbewehrten Verbundwerkstoffen wie Beton oder Estrich ist ein Regularisierungskonzept zur Reduzierung des Einflusses notwendig. In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass auch kommerzielle Materialmodelle in dieser Hinsicht Schwachstellen aufweisen, bzw. zum Teil nicht einmal transparent offen legen, auf welcher Grundlage die implementierte charakteristische Länge basiert. Das erschwert eine Anwendung der Modelle bzw. eine Beurteilung des Einflusses der Netzabhängigkeit sehr. Für Stahlbeton ist der Einfluss aus dieser Unsicherheit meist noch ausreichend gering, fehlt die Bewehrung jedoch oder handelt es sich um Stahlfaserbewehrung, ist der Einfluss nicht zu vernachlässigen. Die Definition nach Göttsche (2013) liefert im Gegensatz dazu gute Ergebnisse hinsichtlich der Netzunabhängigkeit und ist zumindest bei einfachen Bauteil- bzw. Rissgeometrien leicht zu berücksichtigen. Daneben gibt es weitere Ansätze zur grundlegenden Umgehung der Netzunabhängigkeit (vgl. Kapitel 2.2.4), sodass diese möglicherweise die aufgezeigten Einschränkungen des Modells beseitigen können, wenn diese Methoden (wie z.B. gradienten-erweiterte Modelle) zukünftig standardmäßig in kommerzieller Software zugänglicher wären.





# Literatur

- Altenbach, H. (2018). *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 4. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57504-8>.
- Ambroise, J., J.F. Geogin, J. Péra und J.M. Reynouard (2002). "Curling of cement-based screeds". In: *Concrete Science and Engineering*. Bd. 4. 14, S. 114–120.
- ANSYS Inc., 2021 (2021). *Documentation Mechanical APDL 2020 R2*. URL: [https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/prod\\_page.html?pn=Mechanical%20APDL&prodver=20.2&lang=en](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/prod_page.html?pn=Mechanical%20APDL&prodver=20.2&lang=en).
- Aurnhammer, K. G. (2008). *Schäden an Estrichen*. 3., überarb. u. erw. Aufl. Stuttgart: Fraunhofer IRB Verlag.
- Brokbals, S. (2021). "Systematische Untersuchung des Parameters „Charakteristische Länge“ innerhalb des nichtlinearen Materialmodells „Menetrey-Willam“ (Ansys)". Masterarbeit. Bergische Universität Wuppertal.
- Brüinig, M. und A. Michalski (2020). "Numerical analysis of damage and failure behavior of concrete". In: *International journal of damage mechanics* 29.4, S. 570–590.
- CADFEM (16.04.2021). *Supportanfrage 404654*. [E-Mail].
- Cervenka, V., J. Cervenka und L. Kadlec (2018). "Model uncertainties in numerical simulations of reinforced concrete structures". In: *Structural Concrete* 19.6, S. 2004–2016.
- Červenka, J., V. Červenka und S. Laserna (2018). "On crack band model in finite element analysis of concrete fracture in engineering practice". In: *Engineering Fracture Mechanics* 197, S. 27–47.
- Cotsovos, D.M. und M.D. Kotsovos (2011). "Constitutive modelling of concrete behaviour: need for reappraisal". In: *Computational Methods in Earthquake Engineering*. Springer, S. 147–175.
- Cotsovos, D.M., Ch.A. Zeris und A.A. Abbas (2009). "Finite element modelling of structural concrete". In: *2nd International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*.
- Crisfield, M.A. (1981). "A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through"". In: *Computers & Structures* 13.1, S. 55–62. ISSN: 0045-7949. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794981901085>.
- Dassault Systèmes, 2021 (1995-2021). *Abaqus Theory Manual*.

- de Borst, R. (1987). "Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids". In: *Computers and Structures* 25.2, S. 211–224.
- de Borst, R., M.A. Crisfield, J.J.C. Remmers und C.V. Verhoosel (2012). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Bd. 2. ed. Chichester, West Sussex: Wiley.
- de Borst, R. und C.V. Verhoosel (2016). "Gradient damage vs phase-field approaches for fracture: Similarities and differences". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 312. Phase Field Approaches to Fracture, S. 78–94. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.05.015>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516303796>.
- DENAK-Merkblatt 8-1 (2021). *Bemessung von Bodenkonstruktionen – Teil 1: Allgemeine Anforderungen*. Merkblatt 8-1. Deutsche Naturstein Akademie e.V.
- DENAK-Merkblatt 8-2 (2021). *Bemessung von Bodenkonstruktionen – Teil 2: Lastverteilungsschichten*. Merkblatt 8-2. Deutsche Naturstein Akademie e.V.
- DIN 18560-1:2021. *Estriche im Bauwesen – Teil 2: Estriche und Herzestriche auf Dämmschichten (schwimmende Estriche)*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN 18560-2:1981. *Estriche im Bauwesen; Estriche auf Dämmschichten (schwimmende Estriche)*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN 18560-2:2022. *Estriche im Bauwesen – Teil 2: Estriche und Herzestriche auf Dämmschichten (schwimmende Estriche)*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN 4108-10:2021. *Wärmeschutz und Energie-Einsparung in Gebäuden – Teil 10: Anwendungsbezogene Anforderungen an Wärmedämmstoffe*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN 4109-4:1962. *Schallschutz im Hochbau – Schwimmende Estriche auf Massivdecken – Richtlinien für die Ausführung*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 12390-3:2019 (2019). *Prüfung von Festbeton - Teil 3: Druckfestigkeit von Probekörpern*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 12431:2013 (2013). *Wärmedämmstoffe für das Bauwesen – Bestimmung der Dicke von Dämmstoffen unter schwimmendem Estrich*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 13162:2015 (2015). *Wärmedämmstoffe für Gebäude – Werkmäßig hergestellte Produkte aus Mineralwolle (MW) – Spezifikation*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 13163:2017. *Wärmedämmstoffe für Gebäude – Werkmäßig hergestellte Produkte aus expandiertem Polystyrol (EPS) – Spezifikation; Deutsche Fassung EN 13163:2012+A2:2016*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 13813:2003. *Estrichmörtel, Estrichmassen und Estriche – Estrichmörtel und Estrichmassen – Eigenschaften und Anforderungen; Deutsche Fassung EN 13813:2002*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.

- DIN EN 13892-2:2003. *Prüfverfahren für Estrichmörtel und Estrichmassen – Teil 2: Bestimmung der Biegezug und Druckfestigkeit; Deutsche Fassung EN 13892-2:2002*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 13892-9:2018. *Prüfverfahren für Estrichmörtel und Estrichmassen - Teil 9: Dimensionsstabilität; Deutsche Fassung EN 13892-9:2018*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 14651:2007. *Prüfverfahren für Beton mit metallischen Fasern – Bestimmung der Biegezugfestigkeit (Proportionalitätsgrenze, residuelle Biegezugfestigkeit); Deutsche Fassung EN 14651:2005+A1:2007*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 196-1:2016 (2016). *Prüfverfahren für Zement – Teil 1: Bestimmung der Festigkeit; Deutsche Fassung EN 196-1:2016*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN 1992-1-1:2011 (2011). *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- DIN EN ISO 29770:2022 (2022). *Wärmedämmstoffe im Bauwesen – Bestimmung der Dicke von Dämmstoffen unter schwimmendem Estrich*. Norm. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag.
- Dollase, A. (2019). “Mikrowellenverfahren zur Untersuchung des Erhärtungs- und Trocknungsverhaltens von zementgebundenen Baustoffen”. Diss. Bergische Universität Wuppertal: Fakultät für Architektur und Bauingenieurwesen.
- Feenstra, P.H. und R. de Borst (1995). “Constitutive Model for Reinforced Concrete”. In: *Journal of Engineering Mechanics* 121.5, S. 587–595. ISSN: 0733-9399. URL: <http://resolver.tudelft.nl/uuid:1524fa58-c77c-4f9c-8a78-c4ac66b519fa>.
- Foos, S. (2005). “Unbewehrte Betonfahrplatten unter witterungsbedingten Beanspruchungen”. Diss. Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH): Fakultät Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften.
- Gebauer, R., M. Bianchi-Janetti, F. Ochs, W. Feist und M. Kirchmair (2017). “Messtechnische Untersuchung der Trocknung und des mikrobiellen Wachstums nach irregulären Feuchtezuständen in Estrichdämmschichten”. In: *Bauphysik* 39.1.
- Georgin, J.F., J. Ambroise, J. Péra und J.M. Reynouard (2008). “Development of self-leveling screed based on calcium sulfoaluminate cement: Modelling of curling due to drying”. In: *Cement and Concrete Composites*. Bd. 30. 9. Elsevier, S. 769–778.
- Gödde, L. (2013). *Numerische Simulation und Bemessung von Flächentragwerken aus Stahlfaserbeton sowie stahlfaserverstärktem Stahl- und Spannbeton*. Ruhr-Universität Bochum.
- Hatzigeorgiou, G., D. Beskos, D. Theodorakopoulos und M. Sfakianakis (2001). “A simple concrete damage model for dynamic FEM applications”. In: *International Journal of Computational Engineering Science* 2.02, S. 267–286.
- Hillerborg, A., M. Modéer und P.-E. Petersson (1976). “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”. In: *Cement and*

- Concrete Research* 6.6, S. 773–781. ISSN: 0008-8846. DOI: [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884676900077>.
- Hofstetter, G. (2006). “Konstitutive Modellierung von Beton”. In: *Beton-Kalender, 95. Turmbauwerke, Industriebauten 1, Beton im Hochbau, Silos und Behälter*. Berlin, München, Düsseldorf: Ernst & Sohn, S. 319–361.
- Institut für Baustoffprüfung und Fußbodenforschung (2019). *Prüfung des Trag- und Verformungsverhaltens eines Schnellestrichs unter Verwendung von ARDEX A 60 und Regupol Sound 47 Trittschalldämmung bei Belastung mit statischen Einzellasten*. unveröffentlichter Prüfbericht. Troisdorf.
- Jaafri, R., S. Hamza, E. Roziere, S.Y. Alam, V. Wisniewski und A. Loukili (2019). “Experimental and numerical analysis of curling behavior of natural hydraulic lime – cement based mortars”. In: *Cement and Concrete Research* 117, S. 1–15.
- Jun, D. (2002). “Adaptive Strategien für nichtlineare Finite-Element-Simulationen von Schalen-tragwerken”. Diss. Ruhr-Universität Bochum: Sonderforschungsbereich 398.
- Kessler-Kramer, C. (2002). “Zugtragverhalten von Beton unter Ermüdungsbeanspruchung”. Diss. Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH): Institut für Massivbau und Baustofftechnologie.
- Koschnick, F. (2004). “Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung”. Diss. Technische Universität München: Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen.
- Kuna, M. (2010). *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen: Finite Elemente in der Bruchmechanik*. Bd. 2., verb. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Künzel, H.M. (1994). “Verfahren zur ein- und zweidimensionalen Berechnung des gekoppelten Wärme- und Feuchtetransports in Bauteilen mit einfachen Kennwerten”. Diss. Universität Stuttgart: Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen.
- Langer, F. (2017). “Schäden an Zementestrichen – die häufigsten Fehler bei Planung und Ausführung”. In: *Fachtagung Estriche*. Informationszentrum Beton.
- Lee, J. und G.L. Fenves (1998). “Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures”. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124.8, S. 892–900. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892). eprint: <https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281998%29124%3A8%28892%29>. URL: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281998%29124%3A8%28892%29>.
- Lohmeyer, G. und K. Ebeling (1988). *Betonböden im Industriebau: Hallen-und Freiflächen*. Beton-Verlag Köln, Düsseldorf.
- Lorenz, K.O. und M. Schmidt (1996). “Wölbung von Zementestrichen auf Dämmschicht”. In: *Werkstoffwissenschaften und Bauinstandsetzen. Berichtsband zum Vierten Internationalen Kolloquium*. Esslingen. ISBN: 978-3-931681-11-1.
- Lubliner, J., J. Oliver, S. Oller und E. Oñate (1989). “A plastic-damage model for concrete”. In: *International Journal of Solids and Structures* 25.3, S. 299–326. ISSN: 0020-7683. DOI:

- [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768389900504>.
- Manns, W. und K. Zeus (1980). *Zum Tragverhalten von Estrichen auf dicken Dämmschichten: Forschungsauftrag BI 5 80 01 78 23*. IRB.
- Müller, E. (2017). “Untersuchungen an unbeheizten Zementestrichen mit Zusatzmitteln bei Belegung mit Belägen (Kautschuk und Parkett), Nr. M 10/15-B”. Prüfbericht.
- Müller, E. und W. Limp (2015). “Technische Schäden an schwimmenden Estrichen und Industrieestrichen”. In: 4.
- Nietner, L. (2009). “Mathematische Formulierung von Werkstoffmodellen für die Berechnung von hydratationsbedingten Zwangsspannungen in massigen Betonbauteilen”. Diss. Universität Leipzig.
- (Feb. 2019). *croc lib reference manual*. URL: [https://www.researchgate.net/publication/334884729\\_croc\\_lib\\_reference\\_manual](https://www.researchgate.net/publication/334884729_croc_lib_reference_manual).
- Nietner, L., D. Schlicke und N. Viet Tue (2011). “Berücksichtigung von Viskoelastizität bei der Beurteilung von Zwangbeanspruchungen erhärtender Massenbetonbauteile”. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 106.3, S. 169–177.
- Oliver, J. (1989). “A consistent characteristic length for smeared cracking models”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28.2, S. 461–474.
- Pfister, T.R. (2008). “Ein Ermüdungsschädigungsmodell für Zuverlässigkeitsanalysen von Stahlbetontragwerken”. doctoralthesis. Ruhr-Universität Bochum, Universitätsbibliothek.
- Ramm, E. (1981). “Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points”. In: *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Hrsg. von W. Wunderlich, E. Stein und K.-J. Bathe. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 63–89.
- Röhling, S. (2009). *Zwangsspannungen infolge Hydratationswärme*. 2., erw. Auflage. Düsseldorf: Bau+Technik GmbH, S. 211–212.
- Roschkowski, M. (2021). “Charakterisierung der Materialeigenschaften von Estrichmörteln zur Verwendung in nicht-linearen Modellen”. Bachelorarbeit. Bergische Universität Wuppertal.
- Rots, J. G. (1988). “Computational modeling of concrete fracture”. Diss.
- Rüd S. and Müller, H., H. Fleischer und Ch. Stephan (2023). “Development of a Verification Procedure of Partial Loading on Existing Solid Hydraulic Structures - Probabilistic Assessment for 3D Material Variations”. In: *Proceedings of PIANC Smart Rivers 2022*. Singapore: Springer Nature Singapore, S. 372–383. ISBN: 978-981-19-6138-0. DOI: 10.1007/978-981-19-6138-0\_33.
- Rust, W. (2011). *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen: Kontakt, Geometrie, Material*. 2., überarb. u. erw. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8148-9>.
- Schäfer W. und Beck, M. (Juli 2015). *Zementestrich*. Merkblatt B 19. InformationsZentrum Beton GmbH.

- Schießl, P. und K.-H. Wiegrink (2005). “Verformungsverhalten und Rissbildungen bei Calciumsulfat-Estrichen”. In: *Aachener Bausachverständigentage 2004*. Springer, S. 62–86.
- Schlicke, D. und N. Viet Tue (2013). “Consideration of Viscoelasticity in Time Step FEM-Based Restraint Analyses of Hardening Concrete”. In: *Journal of Modern Physics* 4.10B, S. 9–14. DOI: <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2013.410A2002>.
- (2016a). “Mindestbewehrung zur Begrenzung der Rissbreite unter Berücksichtigung des tatsächlichen Bauteilverhaltens, Teil 1: Verformungsbasiertes Bemessungsmodell und Anwendung für Bodenplatten”. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 111.3, S. 120–131. DOI: 10.1002/best.201500019.
- (2016b). “Mindestbewehrung zur Begrenzung der Rissbreite unter Berücksichtigung des tatsächlichen Bauteilverhaltens, Teil 2: Anwendung für Wände auf Fundamenten und Abgrenzung zum Risskraftnachweis nach EC2”. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 111.4, S. 210–220. DOI: 10.1002/best.201500072.
- Schneider, T. und G. Pleyers (2003). “Verformung von schwimmenden Zementestrichen”. In: Schnell, W. (1983). “Auswirkung dicker Dämmstoffschichten auf die mechanischen Eigenschaften von Estrichen: Forschungsauftrag BI5-800178-24”. Forschungsbericht. Stuttgart.
- (1987). “Randverformungen bei schwimmenden Estrichen/Heizestrichen – Einflüsse und Folgerungen”. In: *boden-wand-decke*. Bd. 10. IBF.
- (1990). “Estrichnenndicken bei Estrichen auf Dämmschichten im Hochbau ohne nennenswerte Fahrbeanspruchung”. In: *boden-wand-decke*. Bd. 36. IBF, S. 201–216.
- (1994). “Das Trocknungsverhalten von Estrichen – Beurteilung und Schlussfolgerungen für die Praxis”. In: *Aachener Bausachverständigentage*. Wiesbaden: Rainer Oswald AIBau, Bauverlag GmbH.
- Schütze, W. (1973). *Estrichmängel, 2. Industrie-Fußböden: Entstehen, Vermeiden, Beseitigen*. Wiesbaden u.a.: Bauverl.
- (1974). *Der schwimmende Estrich: Zement-, Asphalt-, Anhydrit-, Gips- und Magnesitestrüche*. 4., überarb. Aufl. Wiesbaden u.a.: Bauverl.
- Simo, J.C. und T.J.R. Hughes (2000). *Computational Inelasticity*. Bd. Corr. 2. print. New York: Springer [u.a.]
- Stenzel, G. (2006). “Industriefußböden”. In: *Beton-Kalender, 95. Turmbauwerke, Industriebauten 2, Beton im Hochbau, Silos und Behälter*. Berlin, München, Düsseldorf: Ernst & Sohn, S. 263–288.
- Thabet, A. und D. Haldane (2001). “Three-dimensional numerical simulation of the behaviour of standard concrete test specimens when subjected to impact loading”. In: *Computers & Structures* 79.1, S. 21–31.
- Thomé, B. (2005). “Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlfaserbetonkonstruktionen”. Diss. Technische Universität München: Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen.

- 
- Timm, H., T. Allmendinger und N. Strehle (2019). *Estriche, Parkett und Bodenbeläge: Arbeits-hilfen für die Planung, Ausführung und Beurteilung*. 6. Wiesbaden: Springer. ISBN: 978-3-658-25847-4.
- Vogt, N. (2018). “Flachgründungen”. In: *Grundbau-Taschenbuch*. John Wiley & Sons, Ltd. Kap. 3.1, S. 1–78. ISBN: 9783433607350.
- Westergaard, H. M. (1926). “Stresses in concrete pavements computed by theoretical analysis”. In: *Public roads*. Bd. 7. Washington, DC: Federal Highway Administration, S. 25–35.
- Wiegrink, K.-H. (2002). “Modellierung des Austrocknungsverhaltens von Calciumsulfat-Fließestrichen und der resultierenden Spannungen und Verformungen”. In.
- Wriggers, P. (2001). *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin Heidelberg: Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56865-7>.
- Zahlten, W. (2011). *Höhere Mechanik 2 – Nichtlineare Methoden (Vorlesungsskript)*. Bergische Universität Wuppertal.





# Anhang



# A. Theoretische Grundlagen: Werkstoff Estrich

## Biegezugfestigkeitsprüfung nach DIN EN 13892-2:2003

Bei der Festigkeitsprüfung werden drei Prüfkörper mit den Maßen  $40 \times 40 \times 160$  mm hergestellt und unmittelbar nach 28 Tagen im Lagerungsklima geprüft. Die Stützweite im Drei-Punkt-Biegezugversuch beträgt 100 mm. DIN EN 13813:2003 legt die Festigkeitsklasse in Abhängigkeit des Ergebnisses der Festigkeitsprüfung fest. Bestätigungsprüfungen werden in Sonderfällen durchgeführt, wenn z.B. erhebliche Zweifel an der Güte des Estrichs bestehen. In diesem Fall werden aus hergestellten Platten der Dicke  $d$  und der Länge  $8d$  drei bis fünf Prüfstreifen der Länge  $6d$  und der Breite  $b = 60$  mm herausgeschnitten. Diese sind im Normalklima zu lagern und nach Erreichen der Massenkonstanz im Drei-Punkt-Biegezugversuch mit einer Stützweite von  $l = 5d$  zu prüfen. In beiden Fällen ergibt sich die Biegezugfestigkeit aus der ermittelten Bruchkraft der mittig als Streifenlast angreifenden Last  $F$  zu

$$\beta_{\text{BZ}} = \frac{1.5 \cdot F \cdot l}{b \cdot d^2} \quad (\text{A.1})$$

## Formeln nach Westergaard

Manns und Zeus (1980) geben neben den Westergaard-Formeln zur Bestimmung der Biegespannungen außerdem Formeln nach Westergaard zur Bestimmung der Einsenkung eines schwimmenden Estrichs an:

Einzellast in Plattenmitte

$$y_{\text{m}} = \frac{Q}{8 \cdot KS \cdot l^2} \cdot 1000 \quad [\text{mm}] \quad (\text{A.2})$$

Einzellast am Plattenrand

$$y_{\text{R}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1 + 0.4\mu) \cdot \frac{Q}{KS \cdot l^2} \cdot 1000 \quad [\text{mm}] \quad (\text{A.3})$$

Einzellast in Plattenecke

$$y_{\text{E}} = \left( 1.1 - 0.88 \cdot \frac{a}{\sqrt{2} \cdot l} \right) \cdot \frac{Q}{KS \cdot l^2} \cdot 1000 \quad [\text{mm}] \quad (\text{A.4})$$

mit

$Q$  = Last in MN

$h$  = Dicke des Estrichs in m

$E$  = Elastizitätsmodul des Estrichs = 20000 N/mm<sup>2</sup>

$\mu$  = Querdehnzahl = 0.2

$a$  = Belastungskreishalbmesser in m

$b = \sqrt{1.6 \cdot a^2 + h^2} - 0.675 \cdot h$  für  $a < 1.724 \cdot h$  in m

$b = a$  für  $a > 1.724 \cdot h$  in m

KS = Bettungszahl MN/m<sup>3</sup> =  $\frac{1.75}{d_L - d_B}$

$l$  = elastische Länge =  $\sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot KS}}$  in m.

### Ungleiches Schwinden (DENAK)

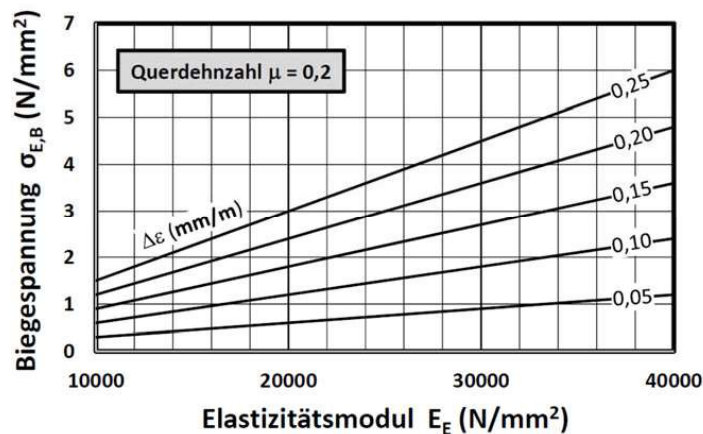


Abbildung A.1.: Nomogramm aus dem DENAK-Merkblatt zur Abschätzung der Biegespannung aus ungleichem Schwinden (DENAK-Merkblatt 8-1, 2021)

## B. Schwindsimulationen in croc: Randbedingungen

Bei dem Berechnungsprogramm croc handelt es sich um ein FE-Programm zur Berechnung gekoppelter thermischer, hygrischer und mechanischer Probleme, vgl. croc-Handbuch (2019). Das Programm wurde von Nietner (2009) ursprünglich vor allem zur Untersuchung von Zwangsbeanspruchungen erhärtender Massenbetonbauteile entwickelt. In der vorliegenden Arbeit dient das Programm der Simulation des Hydratationsprozesses der hier untersuchten Estrichplatten. Zur Berechnung des Wärme- und Feuchtetransports bei der Betrachtung des Hydratationsprozesses wurden Modelle basierend auf Nietner (2009) und Künzel (1994) verwendet. Eingangsparameter sind u.a. die Betonrezeptur, Witterungseinflüsse und wärme- und feuchtetechnische Eigenschaften des betrachteten Baustoffs. Mechanisch geht vor allem die zeitliche Entwicklung des E-Moduls ein (vgl. Nietner, Schlicke und Viet Tue, 2011).

Die möglichen Dehnungseinflüsse während der Hydratation zeigen sich in der folgenden Dehnungsbilanz (vgl. Röhling, 2009):

$$\varepsilon^T + \varepsilon^{cds} + \varepsilon^{cas} = \varepsilon^{\text{unbeh}} + \varepsilon^{\text{beh}} + \varepsilon^{\psi} + \varepsilon^{\text{Riss}}$$

Dabei ist

$\varepsilon^T$	Dehnung infolge Temperaturänderung
$\varepsilon^{cds}$	Dehnung infolge Trocknungsschwinden
$\varepsilon^{cas}$	Dehnung infolge autogenem Schwinden
$\varepsilon^{\text{unbeh}}$	aufgrund der Nachgiebigkeit der Konstruktion als freie Verformung messbarer Dehnungsanteil
$\varepsilon^{\text{beh}}$	behinderter elastischer Dehnungsanteil
$\varepsilon^{\psi}$	Dehnungsanteil aus viskoplastischer Formänderung (Kriechen und Relaxation)
$\varepsilon^{\text{Riss}}$	Rissbildung

Letztendlich liefert das Programm für jeden Zeitschritt ein in das finite Element eingepprägtes lastunabhängiges Dehnungsinkrement, welches sich aus dem aktuellen Temperaturinkrement und den bis zu diesem Zeitpunkt aufsummierten viskoelastischen Dehnungsinkrementen der vorangegangenen Zwangszustände zusammensetzt. U.a. Nietner, Schlicke und Viet Tue (2011) formulieren die zugehörigen Differentialgleichungen, diskutieren getroffene Annahmen zur Lösung

dieser, und welche Einschränkungen mit diesen einhergehen. Zu den theoretischen Hintergründen der Implementierung innerhalb von croc liefert das zugehörige croc-Handbuch (2019) genauere Informationen, wobei sich das Programm und damit auch das Handbuch zum Zeitpunkt der Entstehung der vorliegenden Arbeit noch in der Entwicklung befindet.

Zur Berechnung der Vorverformungen und Zwangsspannungen infolge Hydratation wurden für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Estrichplatten folgende Annahmen zur Vorgabe im Berechnungsprogramm croc (vgl. croc-Handbuch (2019)<sup>1</sup>) getroffen:

#### Rezeptur<sup>1</sup>

Zementgehalt:	370 kg/m <sup>3</sup> (CEM I)
Wassergehalt:	259 kg/m <sup>3</sup>
Rohdichte (>28d):	2100 kg/m <sup>3</sup>

#### Wärmetechnische Eigenschaften

Wärmedehnzahl:	$9.2 \cdot 10^{-6}$ 1/K
Wärmeleitfähigkeit:	7.5 kJ/(mhK)
spez. Wärmekapazität	1000 J/(kg·K)

#### Mechanische Eigenschaften

E-Modul (>28d):	17000 N/mm <sup>2</sup>
Druckfestigkeit (>28d):	25 N/mm <sup>2</sup>
Zugfestigkeit (>28d):	2.5 N/mm <sup>2</sup>
Querdehnzahl:	0.2

#### Feuchtetechnische Eigenschaften<sup>2</sup>

Feuchtedehnzahl:	$1.5 \cdot 10^{-6}$ 1/(kgm <sup>3</sup> )
------------------	---

---

<sup>1</sup> noch nicht veröffentlicht, Kontaktaufnahme zum Autor möglich

<sup>1</sup> Seitens des Estrich-Herstellers gab es zur Zusammensetzung lediglich die Information, dass es sich um ein ternäres Bindemittelsystem auf Basis eines Calcium-Aluminat-Zements (Hauptanteil), Anhydrits und CEM I-Zements handelt (E-Mail-Auskunft).

<sup>2</sup> Seitens des Estrich-Herstellers wird der Schwund angegeben mit 0.14mm/m nach 42d (E-Mail-Auskunft).

## Entwicklungskurven

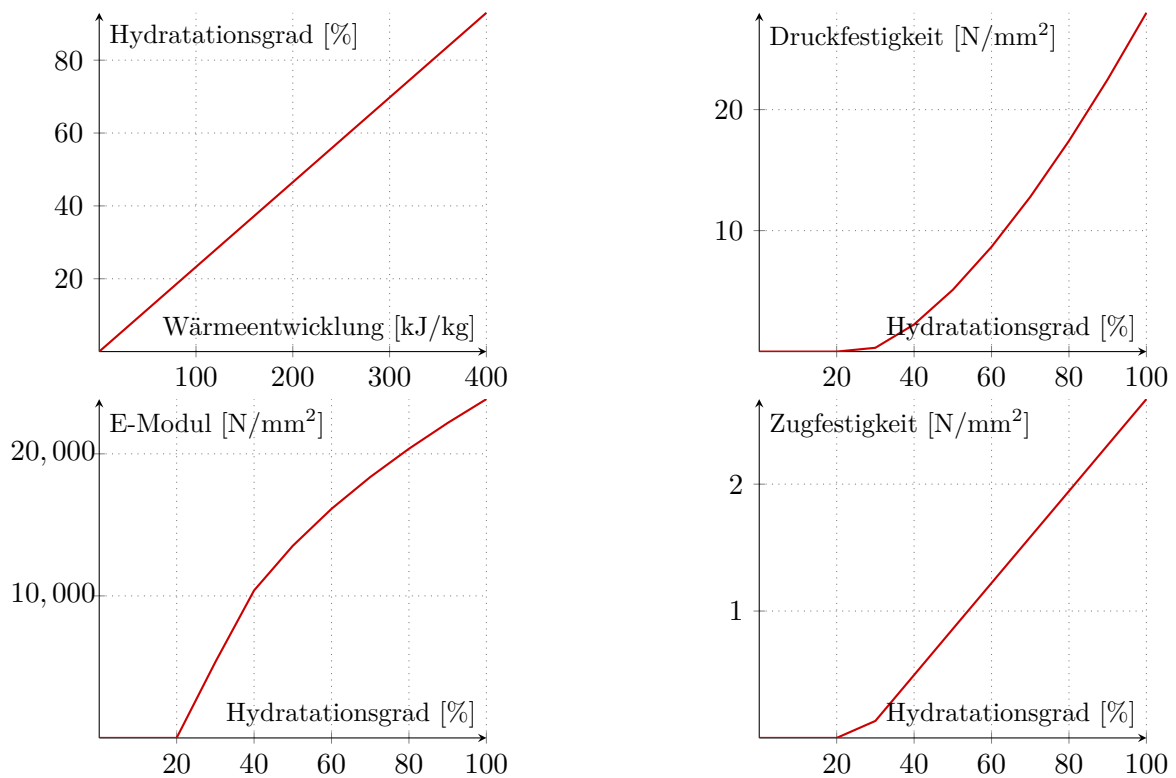


Abbildung B.1.: Mechanische Vorgaben (Angaben aus Kontakt mit Programmentwickler bzw. Ersteller der Schwindsimulationen)

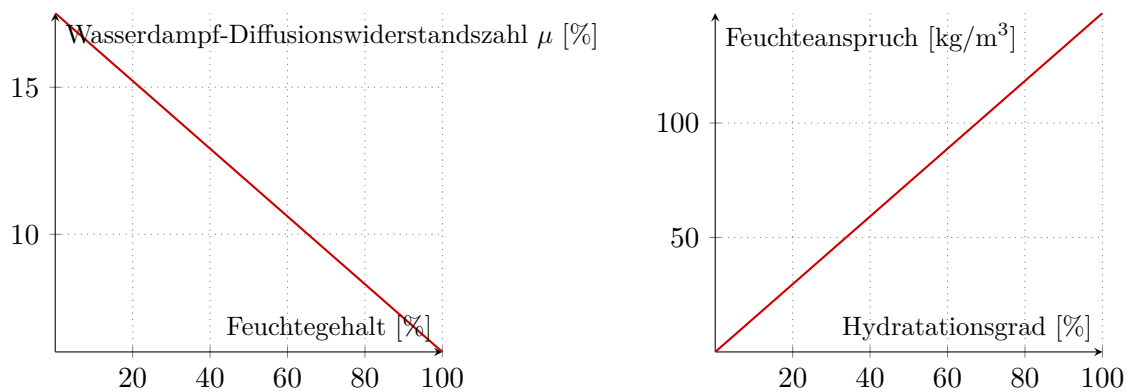


Abbildung B.2.: Feuchtetechnische Vorgaben (Angaben aus Kontakt mit Ersteller des Programms bzw. der Schwindsimulationen)

## Weitere Randbedingungen

Wie bereits in Kapitel 3.2.1 erläutert, wird nur ein Viertel der Platte modelliert, um den Rechenaufwand möglichst gering zu halten. Die Viertelplatte wird zusätzlich zu den Symmetrie-

Randbedingungen in Plattenmitte (Kreuzungspunkt der Symmetrieachsen) vertikal gehalten. Aufgrund der isolierenden Folie zwischen Estrich und Unterbau spielt der Unterbau für den simulierten Wärme- und Feuchtetransport keine Rolle und wird nicht modelliert. Der Lastfall Eigengewicht wird daher auch erst nach Import in Abaqus und unter Bettungsrandbedingungen betrachtet.

Die Austrocknung nach unten wird behindert aufgrund der unterliegenden Folie. Zusätzlich zur Folie zwischen Dämmstoff und Estrich wurde der Estrich nach Betonage mit einer Folie abgedeckt, die nach vier Tagen wieder abgenommen wurde. Die Lufttemperatur wurde konstant zu 20°C, die relative Luftfeuchte zu 60 % angenommen.



## C. Festigkeitsprüfungen

### Verformungsgesteuerter Drei-Punkt-Biegezugversuch (Kapitel 3.1.2)



Abbildung C.1.: Aufbau eines verformungsgesteuerten Biegezugversuchs

Aus den Festigkeitsprüfungen wurden folgende Werte bestimmt:

- Zugfestigkeit:  $f_{t,gew} = \frac{f_{fl}}{2} = 2.0 \text{ N/mm}^2 \neq f_{t,mess} = 1.26 \text{ N/mm}^2$ ,
- Druckfestigkeit:  $f_c = 27.1 \text{ N/mm}^2$ ,
- Biegezugfestigkeit:  $f_{fl} = 6.0 \text{ N/mm}^2$ .

### Festigkeitsprüfungen im Vorfeld der Balken- und Plattenversuche (vgl. Kapitel 4 ff.)

In Abbildung C.2 ist das Ergebnis eines Biegezugversuchs dargestellt. An der Unterseite des Probekörpers wurde ein Dehnungsmessstreifen (DMS) zentrisch aufgeklebt. Der prismatische Probekörper mit den Querschnittsabmessungen  $b \times h = 60 \times 57 \text{ mm}$  wurde mit einer Stützweite von 290 mm im Dreipunktbiegezugversuch bis zum Bruch belastet. Die maximale Last beträgt 1.72 kN, dies entspricht bei Annahme linear elastischen Tragverhaltens einer Spannung von  $4.5 \text{ N/mm}^2$  (Biegezugfestigkeit) bei einer gemessenen Bruchdehnung von  $195 \mu\text{m/m}$ . Daraus ergibt sich ein E-Modul von etwa  $23000 \text{ N/mm}^2$ . Die Prüfung wurde am 11.03.22, und damit 21

Tage nach Betonage (14.02.22) durchgeführt. Eine weitere Prüfung wurde mit leicht exzentrisch neben der Lasteinleitung aufgeklebtem DMS an der Balken-Oberseite durchgeführt. Hier ergibt sich eine Bruchdehnung von  $173 \mu\text{m}/\text{m}$  und eine rechnerische Biegezugfestigkeit von  $4.6 \text{ N}/\text{mm}^2$ . Daraus ergibt sich ein E-Modul von etwa  $23700 \text{ N}/\text{mm}^2$ .

Aus den nachfolgenden Tabellen können die Ergebnisse der übrigen Festigkeitsprüfungen (Druck- und Biegezugfestigkeit) entnommen werden. Die Biegezugfestigkeiten liegen leicht unterhalb der oben ermittelten Werte. Die Ursache könnte in einer möglicherweise unterschiedlichen Lagerung begründet liegen, kann aber nicht sicher identifiziert werden. Wie aus Tabellen C.3 und C.4 hervorgeht, erreicht die Biegezugfestigkeit bei weiterer Erhärtung bzw. Lagerung im Normklima bis zur Massenkonstanz einen Wert von bis zu knapp  $7 \text{ N}/\text{mm}^2$ . Es ist davon auszugehen, dass nicht nur die Festigkeit, sondern auch der E-Modul zum Zeitpunkt der gebetteten Platten (15.3./23.03.22 28/36 Tage) und Balkenprüfungen (28./29.04./02.05., etwa 72 Tage) noch angestiegen ist.

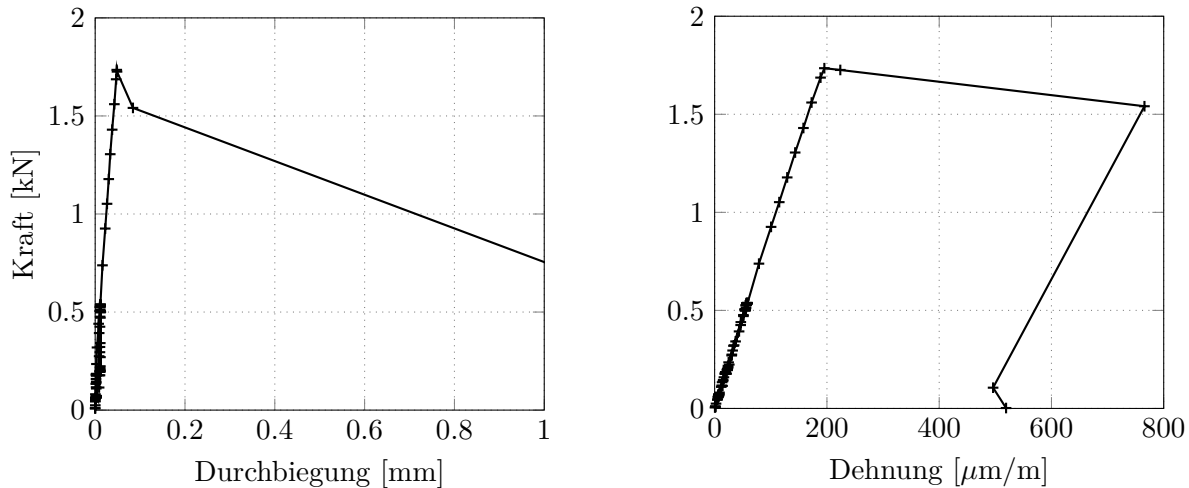


Abbildung C.2.: Biegezugversuch mit zentrisch an Unterseite aufgeklebtem DMS, Datum: 11.03.2022 (Tag 25 nach Betonage)

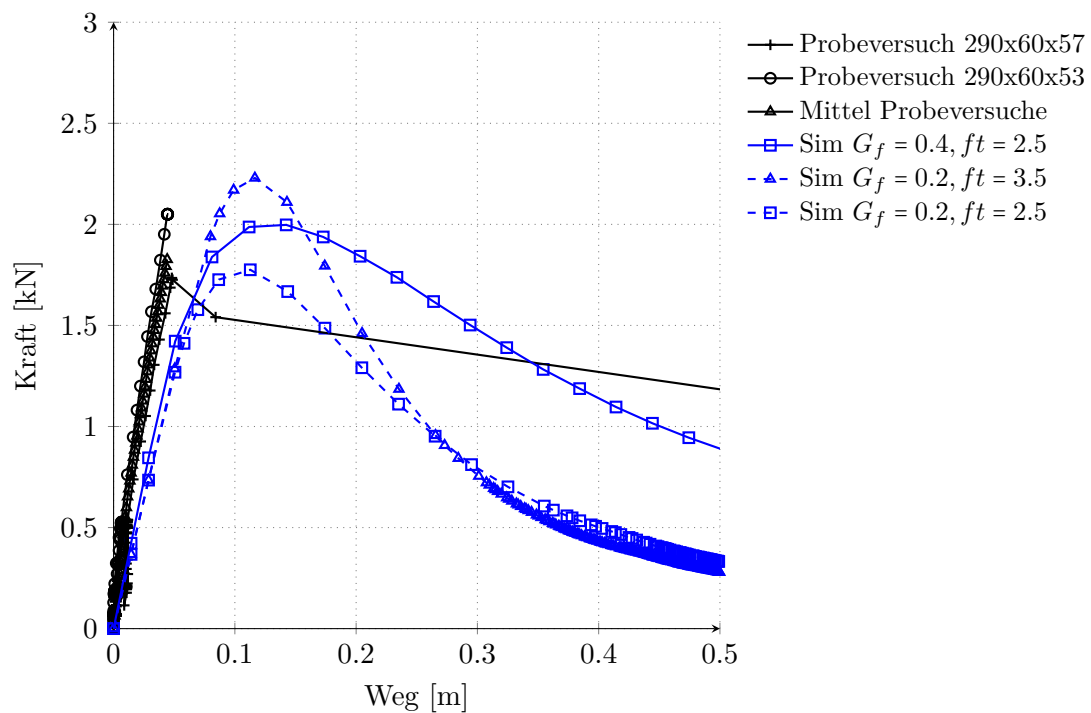


Abbildung C.3.: Nachrechnung der Biegezugprüfung: Einfluss der Zugfestigkeit und Bruchenergie

Tag der Herstellung: 14.02.2022  
 Tag der Prüfung: 01.03.2022  
 Prüfmaschine: 400 kN  
 Norm: DIN EN 196-1  
 Vorbereitung zur Prüfung:  
 Stützweite: 100 mm  
 Bemerkungen: Biegezugfestigkeit: 50N/s, Druckfestigkeit: 2400 N/s

Tabelle C.1.: Festigkeiten nach 14 Tagen

Proben- bezeichnung	b [mm]	d [mm]	L [mm]	Gewicht naturf. [g]	Fmax [kN]	Biegezug- festigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]	Druck- festigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]	
4	41.2	39.9	160.3	585.7	1.629	3.7		
					40.390			24.55
					40.540			24.64
5	41.2	39.9	160.2	584.1	1.654	3.8		
					40.380			24.58
					39.740			24.19
6	41.0	39.9	160.2	577.9	1.635	3.8		
					38.400			23.45
					39.040			23.84

### C. Festigkeitsprüfungen

---

Tag der Herstellung: 14.02.2022  
 Tag der Prüfung: 14.03.2022  
 Prüfmaschine: 400 kN  
 Norm: DIN EN 196-1  
 Vorbereitung zur Prüfung:  
 Stützweite 100 mm  
 Bemerkungen: Biegezugfestigkeit: 50N/s, Druckfestigkeit: 2400 N/s,  
 Prüfung nach niedriger, zyklischer Belastung  
 (E-Modul nach DIN EN 13412-2006)

Tabelle C.2.: Festigkeiten nach 28 Tagen

Proben- bezeichnung	b [mm]	d [mm]	L [mm]	Gewicht naturf. [g]	F <sub>max</sub> [kN]	Biegezug- festigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]	Druck- festigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]
7	42.2	39.9	160.0	601.5	1.753	3.9	
					44.710		26.55
					43.090		25.59
8	41.0	39.9	160.2	574.9	1.594	3.7	
					44.240		27.04
					40.170		24.56
9	41.4	40.0	160.0	582.9	1.529	3.5	
					43.580		26.32
					44.520		26.88

Tag der Herstellung: 14.02.2022  
 Tag der Prüfung: 13.04.2022  
 Prüfmaschine: 400 kN  
 Norm: DIN EN 196-1  
 Vorbereitung zur Prüfung: Wasserlagerung bis 23.3. & 21 Tage Normklima  
 Stützweite: 100 mm  
 Bemerkungen: Biegezugfestigkeit: 50N/s, Druckfestigkeit: 2400 N/s

Tabelle C.3.: Festigkeiten nach Wasserlagerung und 21 Tage Normklima

Proben- bezeichnung	b [mm]	d [mm]	L [mm]	Gewicht [g]	Fmax [kN]	Biegezug- festigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]	Druck- festigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]
1	41.9	40.0	160.1	567.7	2.918	6.5	
					64.000		38.22
					65.280		38.98
2	41.8	39.9	160.2	566.0	2.807	6.3	
					65.300		39.19
					64.640		38.79
3	41.8	39.9	160.0	569.9	3.020	6.8	
					65.020		38.99
					64.170		38.48

## C. Festigkeitsprüfungen

---

Tag der Herstellung: 14.02.2022  
 Tag der Prüfung: 27.04.2022  
 Prüfmaschine: 100 kN  
 Norm: DIN 18560-2  
 Vorbereitung zur Prüfung: Lagerung in Normklima bis Massenkonstanz  
 Stützweite: 280 mm  
 Bemerkungen: 43 N/s

Tabelle C.4.: Biegezugfestigkeiten nach Massenkonstanz

Proben- bezeichnung	b [mm]	d [mm]	L [mm]	Fmax [kN]	Biegezug- festigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]
1	59.8	53.6	330	2.714	6.6
2	59.6	55.5	332	2.757	6.3
3	60.2	53.7	330	2.665	6.5
4	60.2	53.5	330	2.645	6.5
5	60.0	52.0	330	2.398	6.2
6	60.1	52.3	330	2.751	7.0
7	60.3	53.3	330	2.518	6.2

Tabelle C.5.: Gewichtsmessung bis zur Massenkonstanz

Proben- bezeichnung	Gewicht [g] ohne Gips	Gewicht [g] mit Gips	Gewicht [g] Normklima	Gewicht [g] Normklima	Gewicht [g] Normklima	Gewicht [g] Normklima	Gewicht [g] Normklima	Gewicht [g] Normklima	Gewicht [g] Normklima (ohne Gips)
	10.03.2022	10.03.2022	14.03.2022	18.03.2022	25.03.2022	31.03.2022	01.04.2022	27.04.2022	29.04.2022
1	2287	2322.4	2298.5	2294.1	2288.7	2285.7	2285.5	2279	
2	2346.5	2379.5	2362.2	2356.6	2351.3	2348.3	2348.1	2341.5	
3	2293.1	2354.2	2331.2	2324.4	2319.2	2316.4	2316.1	2309.9	
4	2271.2	2340.8	2313.3	2307	2301.7	2299.2	2298.9	2292.9	
5	2214.6	2271.9	2249.4	2244.5	2239.6	2237.5	2237.1	2231.4	
6	2243.3	2282.4	2262	2257	2252	2249.8	2249.6	2243.8	
7	2272.1	2340.9	2320.3	2315.5	2310.5	2308.3	2307.9	2302.3	2239.8

# D. Versuche: Randbedingungen und Fotos

## D.1. Dämmstoffversuche

### Laststufen

In den folgenden Tabellen sind die aufgebrauchten Lastschritte zur Bestimmung der lastabhängigen Steifigkeit der verwendeten Dämmstoffe in Abhängigkeit ihrer Größe und Form aufgeführt. Die in grün eingefärbten Zellen entsprechen den nach Norm DIN EN 12431:2013 geforderten Laststufen. Die rot hinterlegten Zellen zeigen an, bei welchen Laststufen die Spannung maschinell nicht eingestellt werden konnte.

Tabelle D.1.: Laststufen quadratischer Probekörper

Abmessung [cm]	20		10		30	
Fläche [m <sup>2</sup> ]	0.04		0.01		0.09	
Spannungs- stufen	Kraft [kN]	Spannung [kN/m <sup>2</sup> ]	Kraft [kN]	Spannung [kN/m <sup>2</sup> ]	Kraft [kN]	Spannung [kN/m <sup>2</sup> ]
0.25					0.1	1.11111111
2	0.1	2.5			0.18	2
5	0.2	5	0.08	8	0.45	5
10	0.4	10	0.1	10	0.9	10
15	0.6	15	0.15	15	1.35	15
20	0.8	20	0.2	20	1.8	20
25	1	25	0.25	25	2.25	25
30	1.2	30	0.3	30	2.7	30
35	1.4	35	0.35	35	3.15	35
40	1.6	40	0.4	40	3.6	40
45	1.8	45	0.45	45	4.05	45
50	2	50	0.5	50	4.5	50
60	2.4	60	0.6	60	5.4	60
25	1	25	0.25	25	2.25	25
5	0.2	5	0.1	10	0.45	5

**Table D.1 continued from previous page**

Abmessung [cm]	20		10		30	
2	0.1	2.5	0.08	8	0.18	2
					0.1	1.11111111

Tabelle D.2.: Laststufen runder Probekörper

Abmessung [cm]	10		30	
Fläche [m <sup>2</sup> ]	0.007853982		0.070685835	
Spannungs- stufen	Kraft [kN]	Spannung [kN/m <sup>2</sup> ]	Kraft [kN]	Spannung [kN/m <sup>2</sup> ]
0.25			0.1	1.41471061
2			0.14	1.98059485
5			0.35	4.95148712
10	0.1	12.7323954	0.7	9.90297424
15	0.12	15.2788745	1.05	14.8544614
20	0.16	20.3718327	1.4	19.8059485
25	0.2	25.4647909	1.75	24.7574356
30	0.24	30.5577491	2.1	29.7089227
35	0.27	34.3774677	2.45	34.6604098
40	0.31	39.4704259	2.8	39.6118969
45	0.35	44.5633841	3.15	44.5633841
50	0.39	49.6563422	3.5	49.5148712
60	0.47	59.8422586	4.2	59.4178454
25	0.2	25.4647909	1.75	24.7574356
5	0.1	12.7323954	0.35	4.95148712
2			0.14	1.98059485
			0.1	1.41471061



## D.2. Estrichversuche

### D.2.1. Herstellung Probekörper

Hergestellte Prüflinge:	Zwei Platten in der Dicke 60mm (248 x 248mm Abmessung), sowie eine zusätzliche Platte (50 x 50mm) zur Entnahme von Bestätigungsproben 13 Balken in den Dicken 20, 40, 60, 80 mm (L=70mm, b=150mm) 9 Prismen in der Dicke 40 mm (L=100mm, b=42mm)
Material:	Estrich: SAKRET ZementFließEstrich ZFE fast Dämmstoff: Knauf Insulation Trittschall-Dämmplatte TP-GP, $d_D = 20$ mm Knauf Insulation Trittschall-Dämmplatte TP, $d_D = 30$ mm
Prüfziel:	Bestätigungsprüfungen an Estrichen in Anlehnung an DIN 18560-2:2022 Prüfung der Druck- und Biegezugfestigkeit (DIN EN 196-1:2016, 2016) Platten/Balken auf Dämmstoff: Ermittlung der Bruchlast unter Einzellast, nach Möglichkeit inkl. Nachbruchbereich

Alle Proben wurden am 14.02.2022 in der Versuchshalle des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau der BU Wuppertal unter Anleitung eines Mitarbeiters der Firma SAKRET hergestellt. Die Platten wurden jeweils auf einer auf Sandbett gelagerten Dämmstoffschicht betoniert:

Platte S: Dämmstoffplatte TP-GP

Platte W: Dämmstoffplatte TP

Die Hallentemperatur zum Zeitpunkt der Betonage betrug 20.7 °C, bei 32.3 % rel. Luftfeuchte. Das Ausbreitmaß wurde zu 41.2 cm, der Luftporengehalt zu 5% bestimmt.



Abbildung D.1.: Bestimmung Ausbreitmaß und LP-Gehalt

### D.2.2. Messtechnik Platten und Balken

Direkt nach der Betonage wurden Wegaufnehmer auf den Platten angebracht, um das Schüsselverhalten infolge Hydratation bzw. Schwinden in den ersten drei Wochen zu erfassen. Eine Übersicht über die Anordnung der Wegaufnehmer befindet sich in Kapitel 6.1.1. Dabei handelt

es sich um induktive Wegaufnehmer mit Nennmessbereichen zwischen 10 und 50 mm, die auch bei der anschließenden Plattenprüfung verwendet werden.

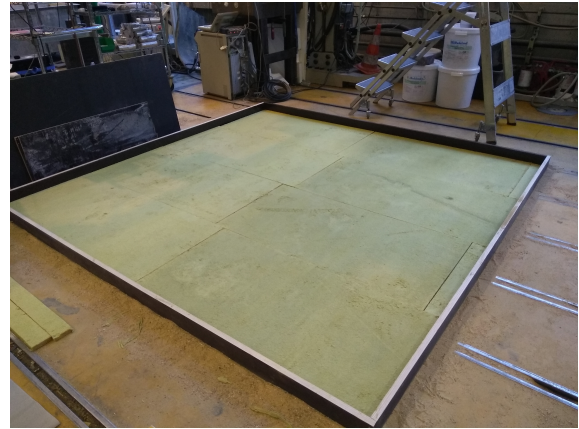
Nach drei Wochen wurden Dehnungsmessstreifen (DMS: Typ 1-LY41-20/120 der Firma HBM) auf den Platten und Balken angebracht, um während der Prüfung die Dehnung an der Plattenoberseite zu messen. Eine Übersicht über die Anordnung der Wegaufnehmer und DMS während der Prüfung befindet sich ebenfalls in den jeweiligen Abschnitten 5.1.1 und 6.1.1.



Abbildung D.2.: Aufbau Balkenversuch (Probe 60-2)



(a) Dämmstoff TP



(b) Dämmstoff TP-GP

Abbildung D.3.: Schalung mit eingebauter Dämmung

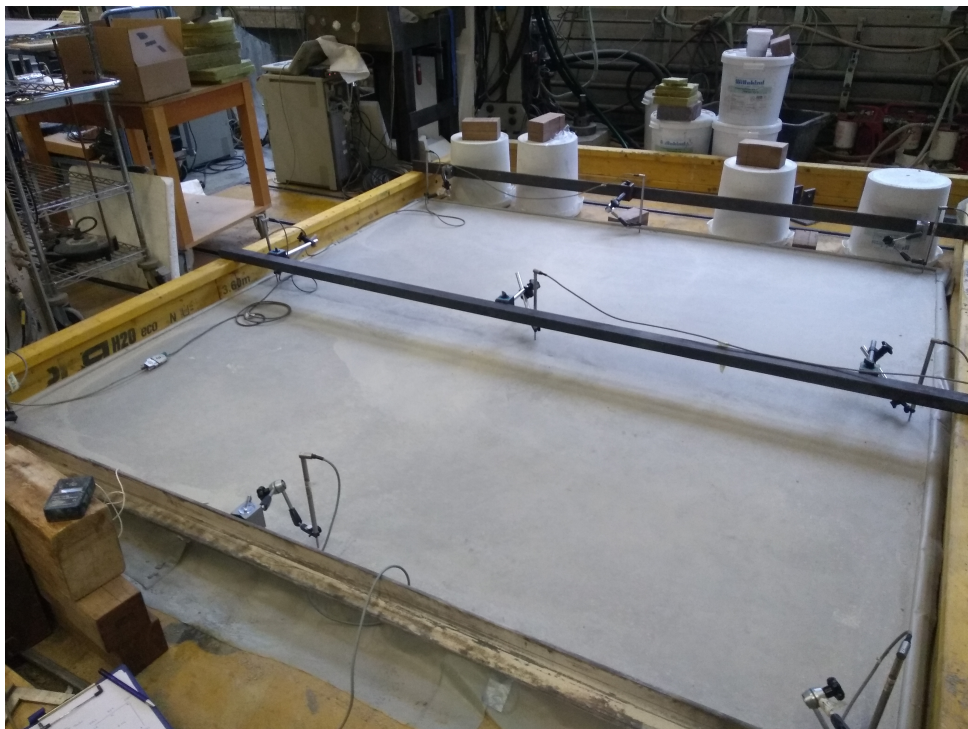


Abbildung D.4.: Aufbau WA Platte S

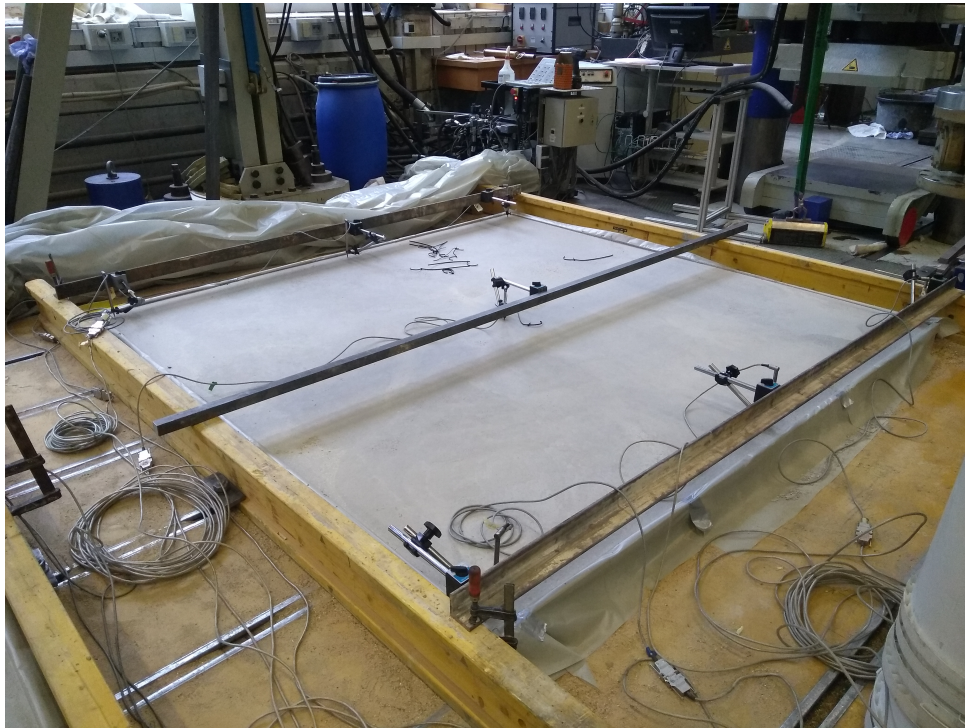


Abbildung D.5.: Aufbau WA Platte W

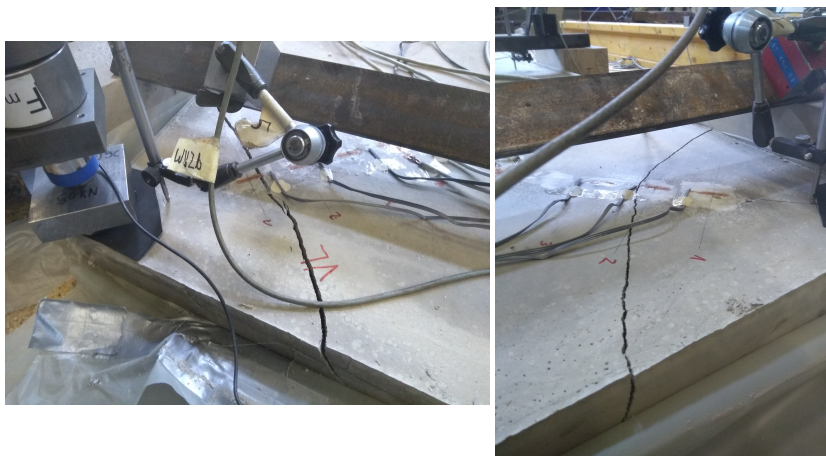
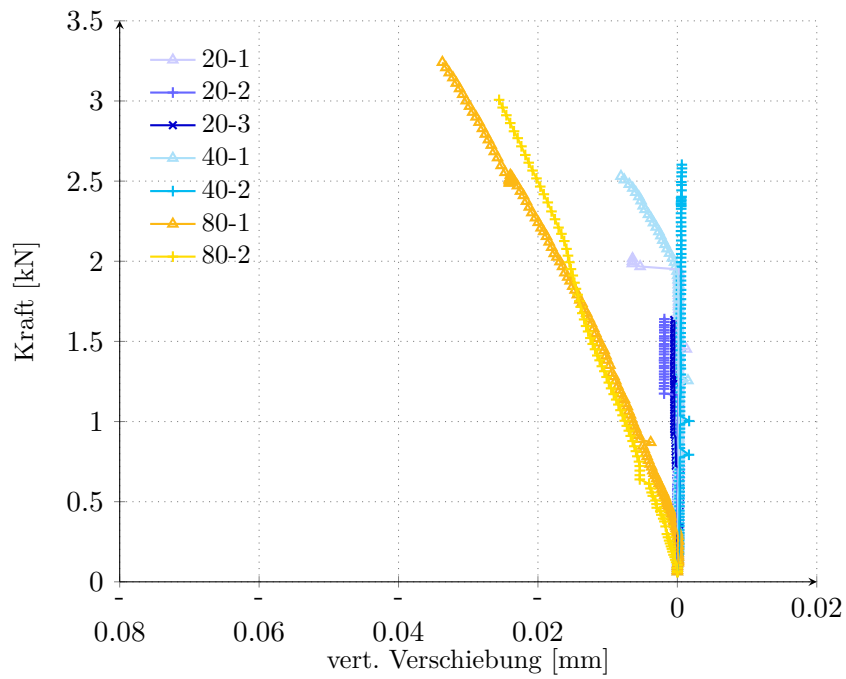


Abbildung D.6.: Risskrümmung Plattenkante

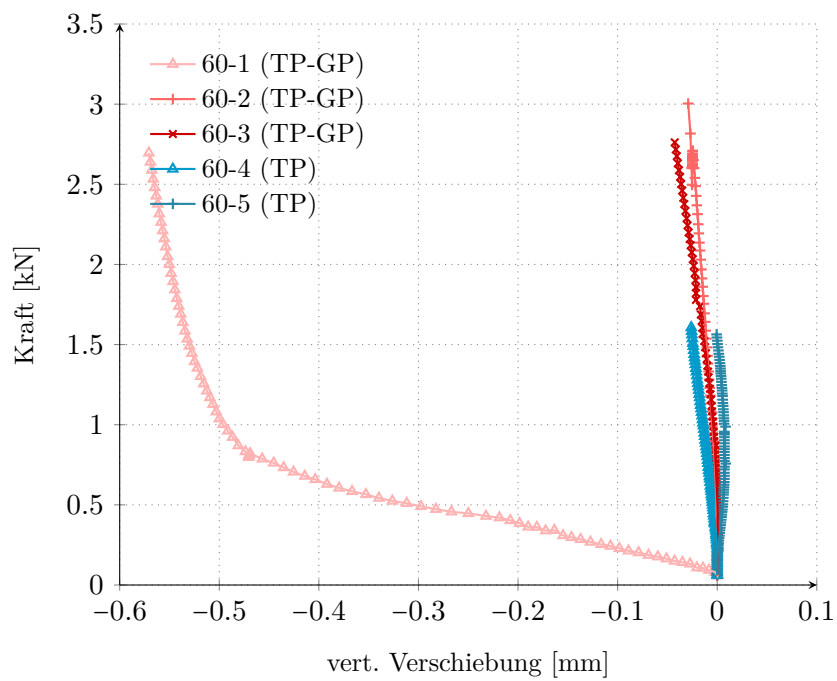
## **E. Versuche: Weitere Messdaten**

### **E.1. Balken**

Nachfolgend sind die Aufnehmer WA1 bis WA4 der Balkenversuche abgebildet. Es ist vor allem für WA1 und WA2, bei denen aufgrund der angestrebten, festen Lagerung wenig bis keine Verformung gemessen werden sollte, erkennbar, dass die Lagerung nachgiebiger war.

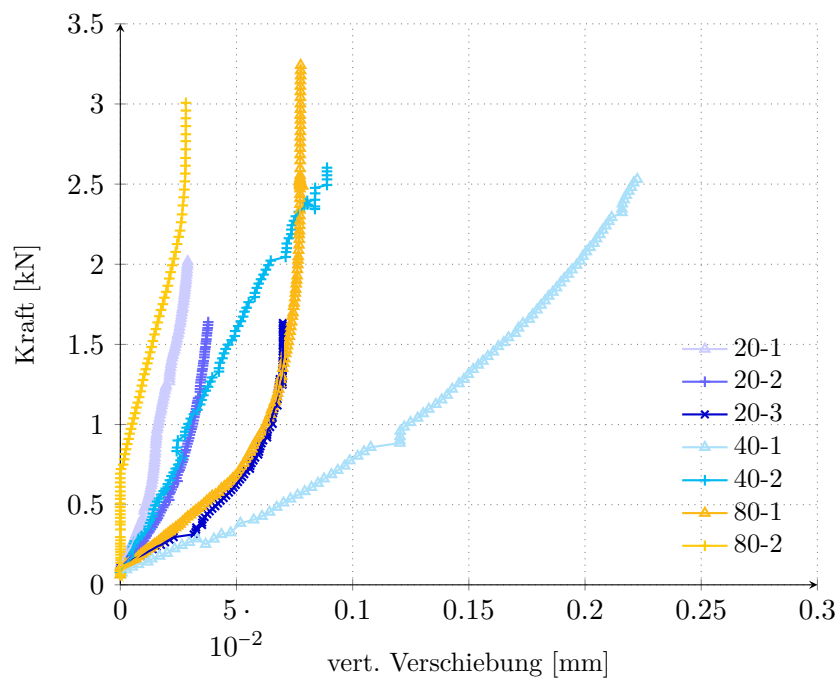


(a) Balken: unterschiedliche Dicke

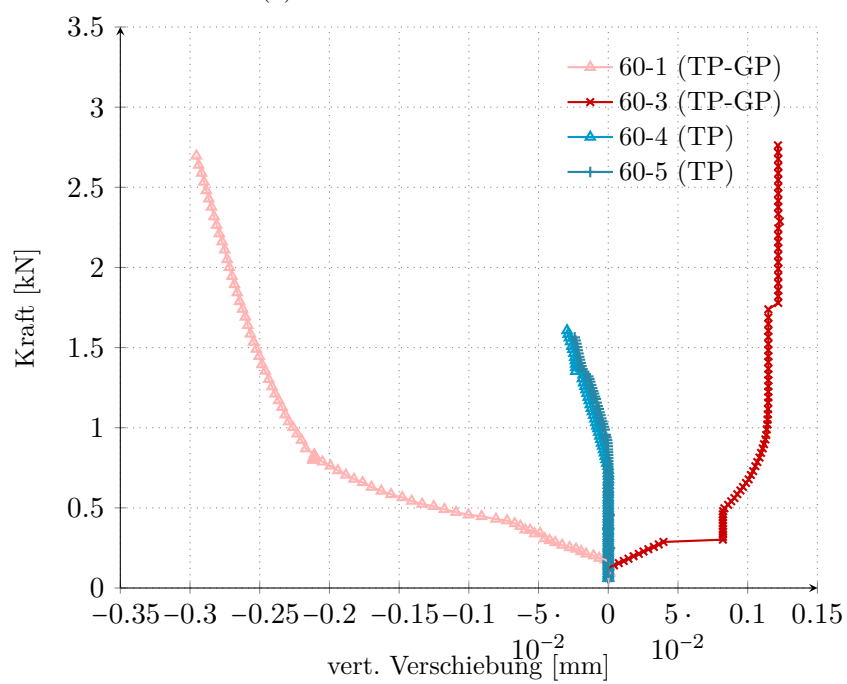


(b) Balken: unterschiedlicher Dämmstoff

Abbildung E.1.: Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA1

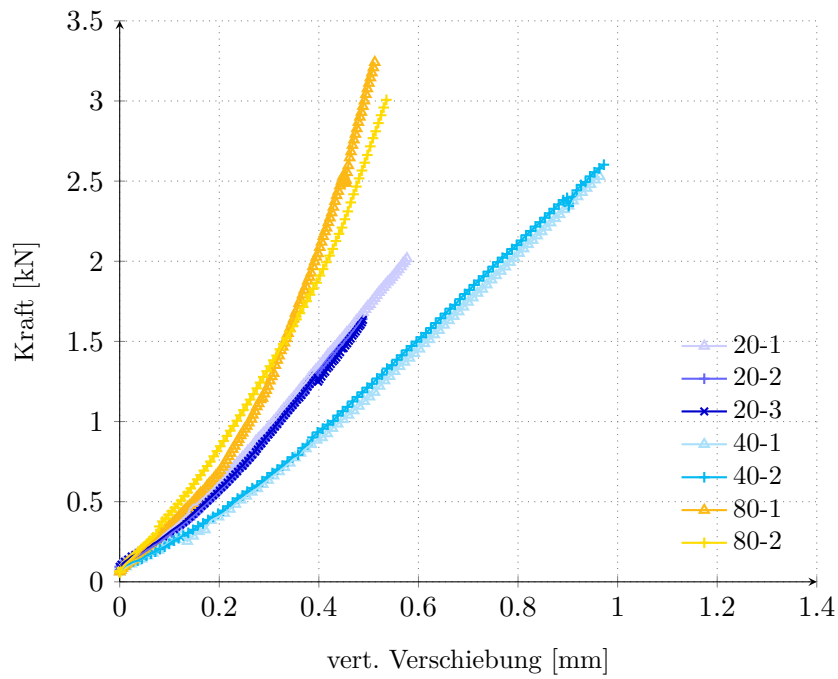


(a) Balken: unterschiedliche Dicke

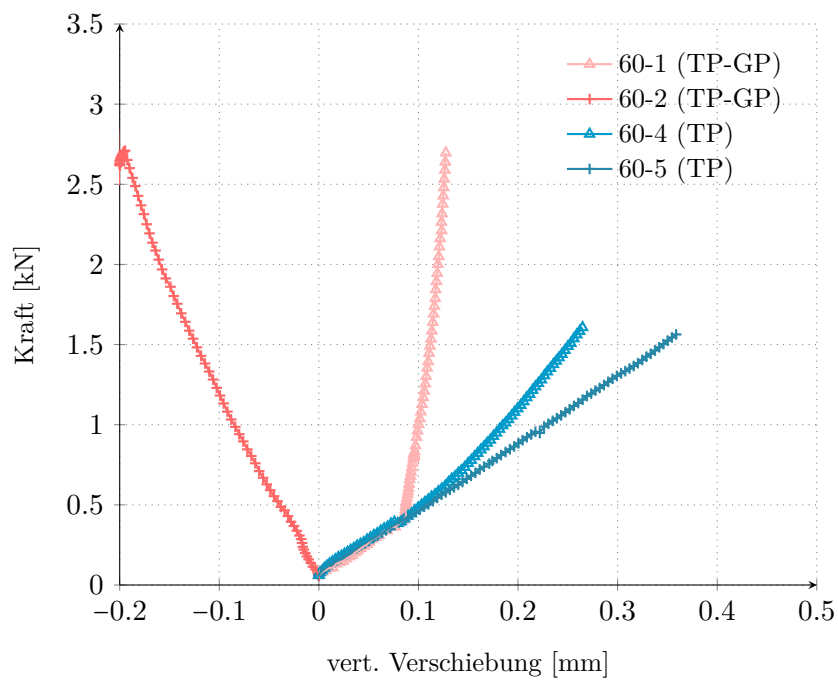


(b) Balken: unterschiedlicher Dämmstoff

Abbildung E.2.: Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA2



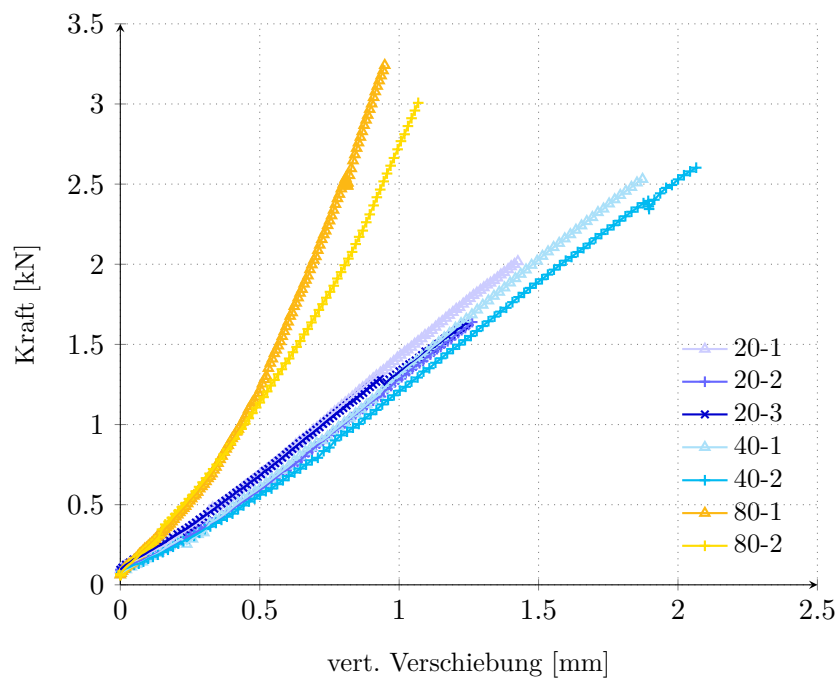
(a) Balken: unterschiedliche Dicke



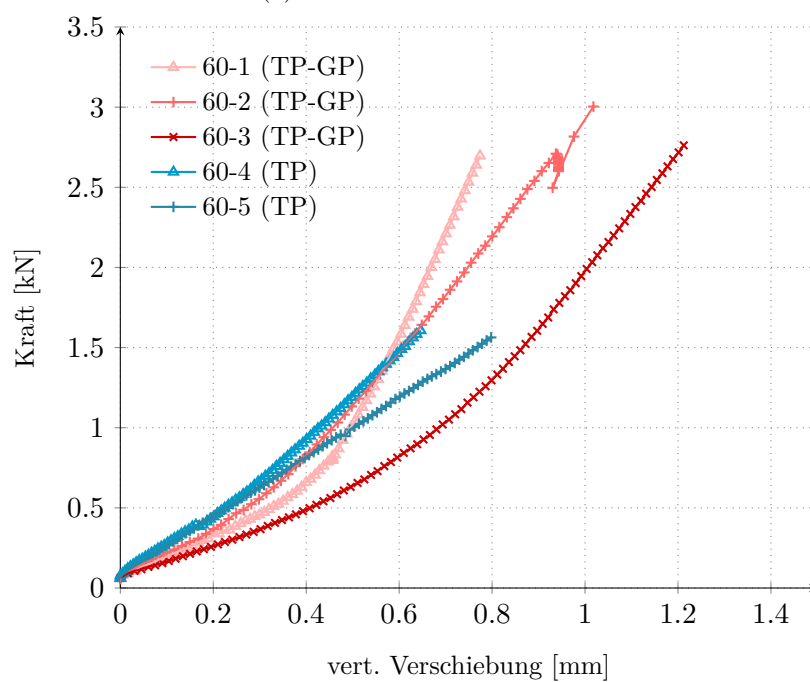
(b) Balken: unterschiedlicher Dämmstoff

Abbildung E.3.: Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA3





(a) Balken: unterschiedliche Dicke



(b) Balken: unterschiedlicher Dämmstoff

Abbildung E.4.: Ergebnisse der Balkenversuche: Kraft-Verformungs-Kurven WA4



## E.2. Platte

### E.2.1. Versuchsablauf

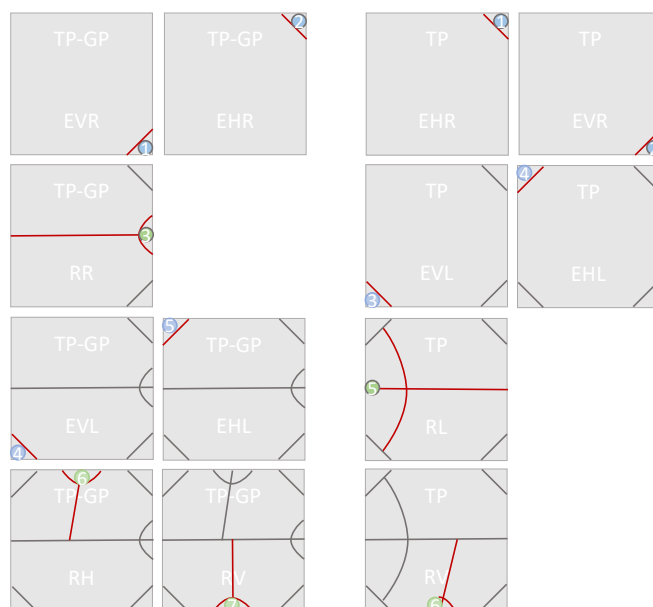


Abbildung E.5.: Ablauf der Plattenversuche: Reihenfolge der Prüfung

Tabelle E.1.: Abmessungen der Bruchkörper für LF Ecke, vgl. Abb. 6.7

	$L_m$	$L_{lu}$	$L_{ru}$	$L_{lo}$	$L_{ro}$	$d$
S-EVR	280	340	370	315	330	60
S-EHR	205	282	283	250	245	61
S-EVL	213	303	313	280	283	63
S-EHL	265	360	360	330	335	63
W-EHR	362	435	425	410	400	65
W-EVR	305	330	385	315	360	62
W-EVL	360	440	405	425	385	65
W-EHL	310	380	360	360	340	56

Tabelle E.2.: Abmessungen der Bruchkörper für LF Rand, vgl. Abb. 6.7

	$L_m$	$L_{lu}$	$L_{ru}$	$L_{lo}$	$L_{ro}$	$d$
S-RR	315	490	560	440	500	63
S-RH	265	430	300	393	274	63
S-RV	280	333	387	315	355	58
W-RL	785					68
W-RV	310		387		355	60

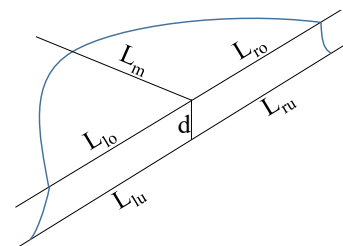
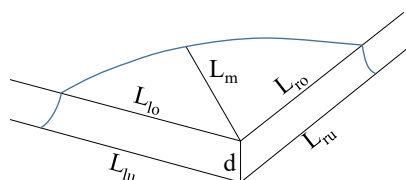


Abbildung E.6.: Form und Abmessung der Bruchkörper (links Eck-, rechts Randprüfung)

### E.2.2. Dehnungsverläufe

In Abbildung E.7 oben sind die Messwerte der linearen DMS für die beiden Eck-Lastfälle an Platte S ( $a=b$ ) dargestellt, wobei die Position der Rosette HR nicht 6, sondern 12 cm gegenüber den linearen DMS versetzt ist (versehentlich falsche Markierung beim Anbringen). In der gleichen Abbildung unten sind die Messwerte aus der DMS-Rosette bzw. die daraus von CAT-MAN automatisch berechneten Hauptspannungen abgebildet. Daraus lässt sich ablesen, dass die Ausrichtung der Rosetten sehr gut mit den Hauptspannungsrichtungen übereingestimmt hat. In diesen Verläufen lässt sich außerdem eine mit den Kraft-Verformungs-Kurven vergleichbare Versteifung erahnen.

Die in Abbildung E.8 dargestellten Kraft-Dehnungsverläufe unter Ecklast an Platte W sind vergleichbar mit denen der Platte S. Auch die Kraft-Dehnungsverläufe der beiden übrigen Ecken der Platte S zeigen ähnliche Verläufe, allerdings mit etwas niedrigerer maximaler Dehnung im Vergleich zu Abbildung E.7 (etwa 225 statt 250  $\mu\text{m}/\text{m}$ ). In Tabelle E.3 ist der Ort der Rissbildung in Bezug auf die DMS aufgeführt.

Tabelle E.3.: Platte: Ort der Rissbildung (DMS)

Platte	Lastfall	Rissort in Bezug auf DMS
S	EVR	zw. DMS 2 und 3 (nahe 2)
S	EHR	DMS 1
S	EVL	DMS 1
S	EHL	DMS 2
W	EVR	zw. DMS 2 und 3 (nahe 3)
W	EHR	zw. DMS 3 und 6 (nahe 6)
W	EVL	zw. DMS 3 und 6 (nahe 6)
W	EHL	DMS 3
S	RR	keine DMS vorhanden
W	RL	weit jenseits von Rosette

Die in Abbildung E.9 dargestellten Kraft-Dehnungsverläufe bei Prüfung der weicheren Platte für den Lastfall Randlast links (RL) zeigen einen deutlich anderen Verlauf als die bei Eckbelastung: Etwa bis zum Erreichen der Hälfte der Maximalkraft steigt die Dehnung immer stärker an, bis sie plötzlich deutlich abfällt und danach schwächer wieder ansteigt bis zum Bruch. Dieser Verlauf ist auch in Abbildung E.10 zu erkennen. Die Dehnungs-Zeitverläufe wurden hier ergänzt um die linearen DMS, die an der linken (RL) bzw. rechten (RR, zur Laststellung gegenüberliegenden) Kante angeordnet waren, um den Rissfortschritt ausgehend von der Plattenunterseite zu erfassen. In der unteren Darstellung sind nur noch die Dehnungsverläufe der drei DMS an den Kanten dargestellt, allerdings nicht in  $\mu\text{m}/\text{m}$ , sondern %. Aus den Kurven kann die Ursache für das lokale Maximum in den oberflächlichen DMS nicht eindeutig abgelesen werden. Es ist zu vermuten, dass es zu diesem Dehnungs- bzw. Spannungsabfall infolge des Rissfortschritts an der Unterseite

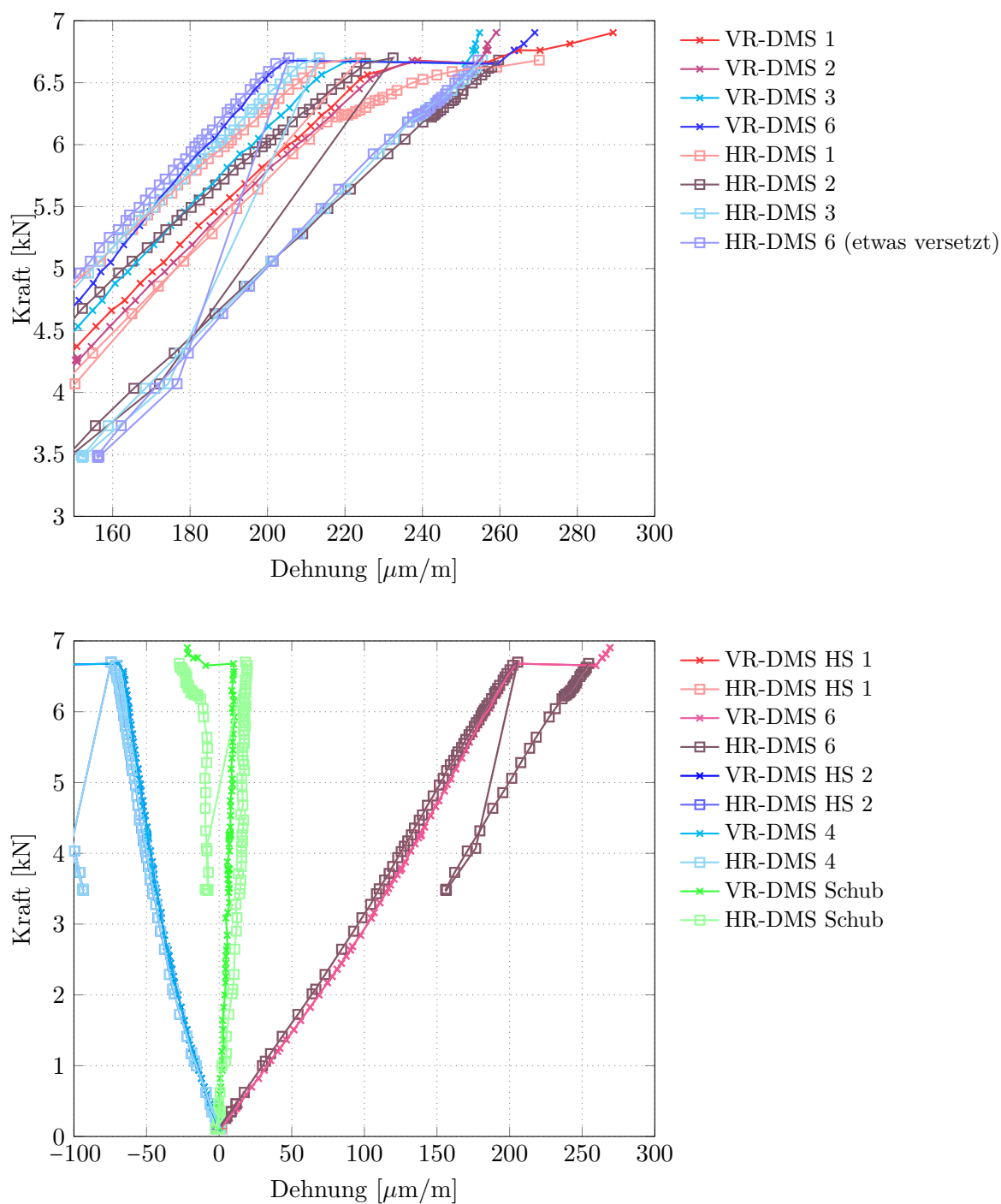


Abbildung E.7.: Dehnungsmessung bei Eckbelastung Platte S (steifer) –  $a=b$  (Anm.: Bei Anzeichen für Risse wurde Druck auf Hydraulikzylinder einmal nachgelassen, um Nachbruchbereich evtl zu erfassen; daher rührt Abfall in Verlauf kurz vor dem Bruch)

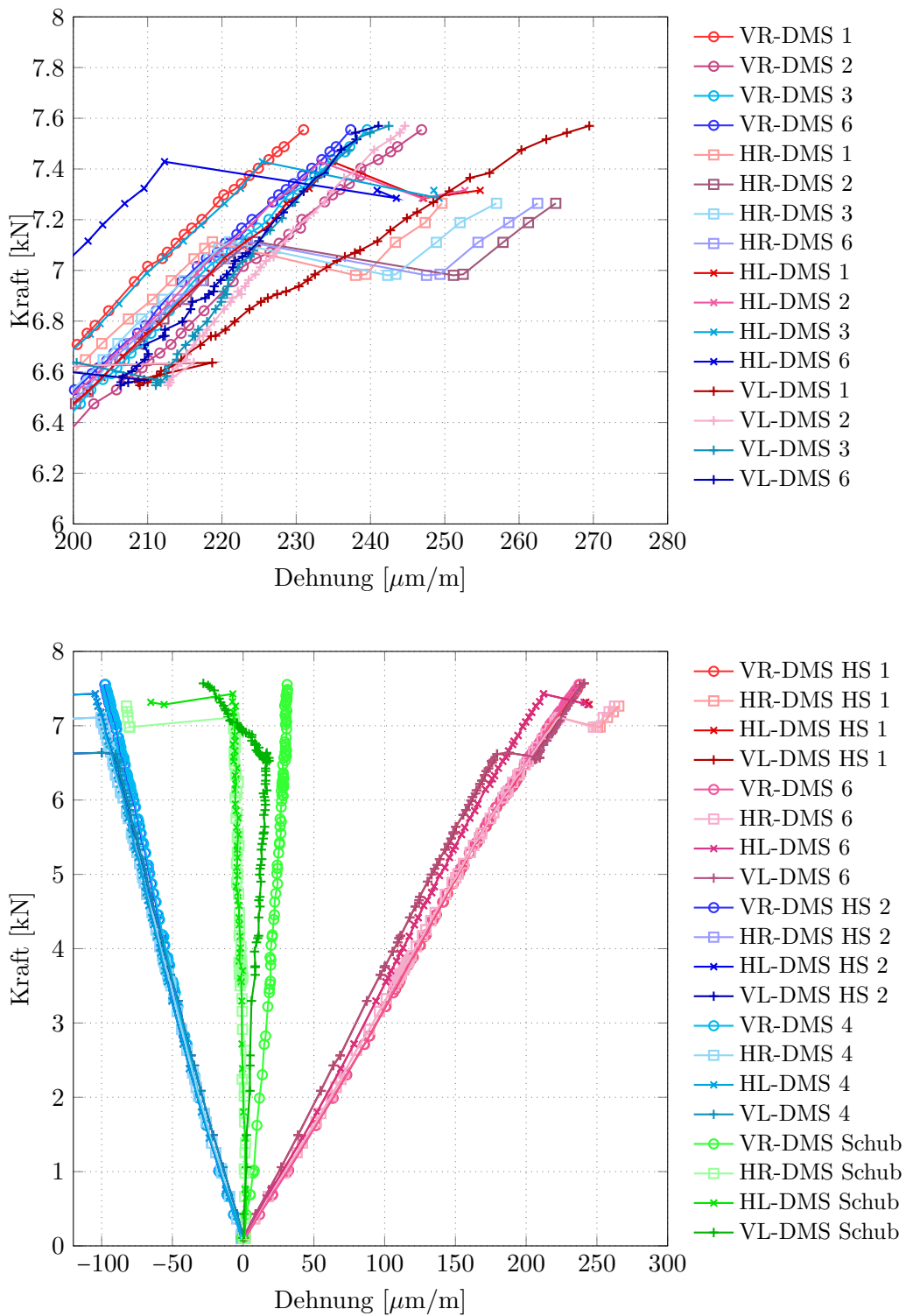


Abbildung E.8.: Dehnungsmessung bei Eckbelastung Platte W (weicher)

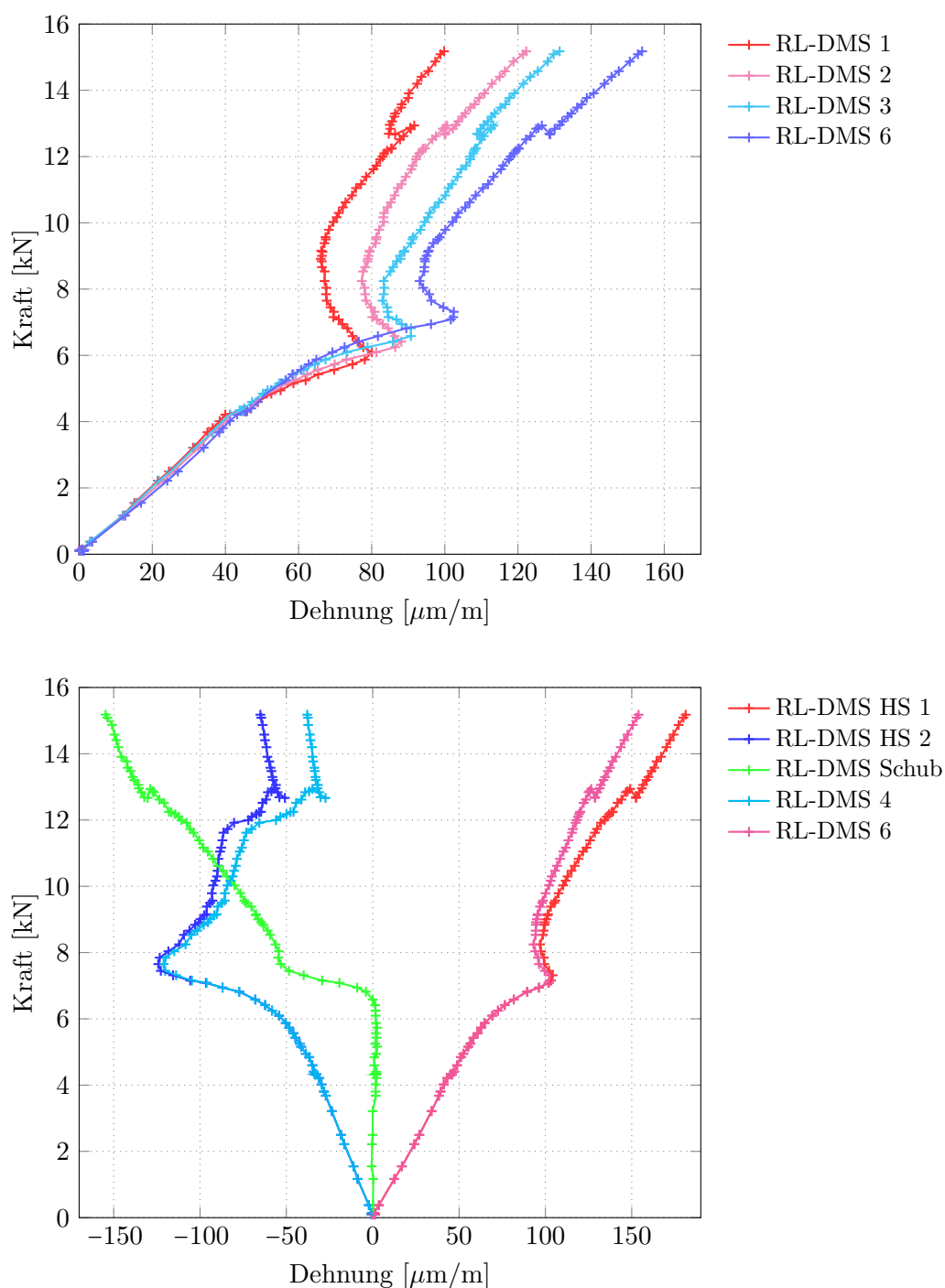


Abbildung E.9.: Dehnungsmessung bei Randbelastung Platte W (weicher): Rand links

der Platte kommt, da das lokale Maximum in den linearen DMS (oben) zeitlich etwas versetzt auftritt. In der unteren Graphik ist erkennbar, dass der untere DMS an Kante RL zuerst bricht, gefolgt von einem plötzlichen Bruch des DMS an der gegenüberliegenden Kante, der bis dahin eine Druckdehnung gemessen hat, wonach schließlich auch der DMS 7 kaputt geht. Kurz danach zeigen auch die linearen DMS an der Oberseite den Bruch der Platte an.

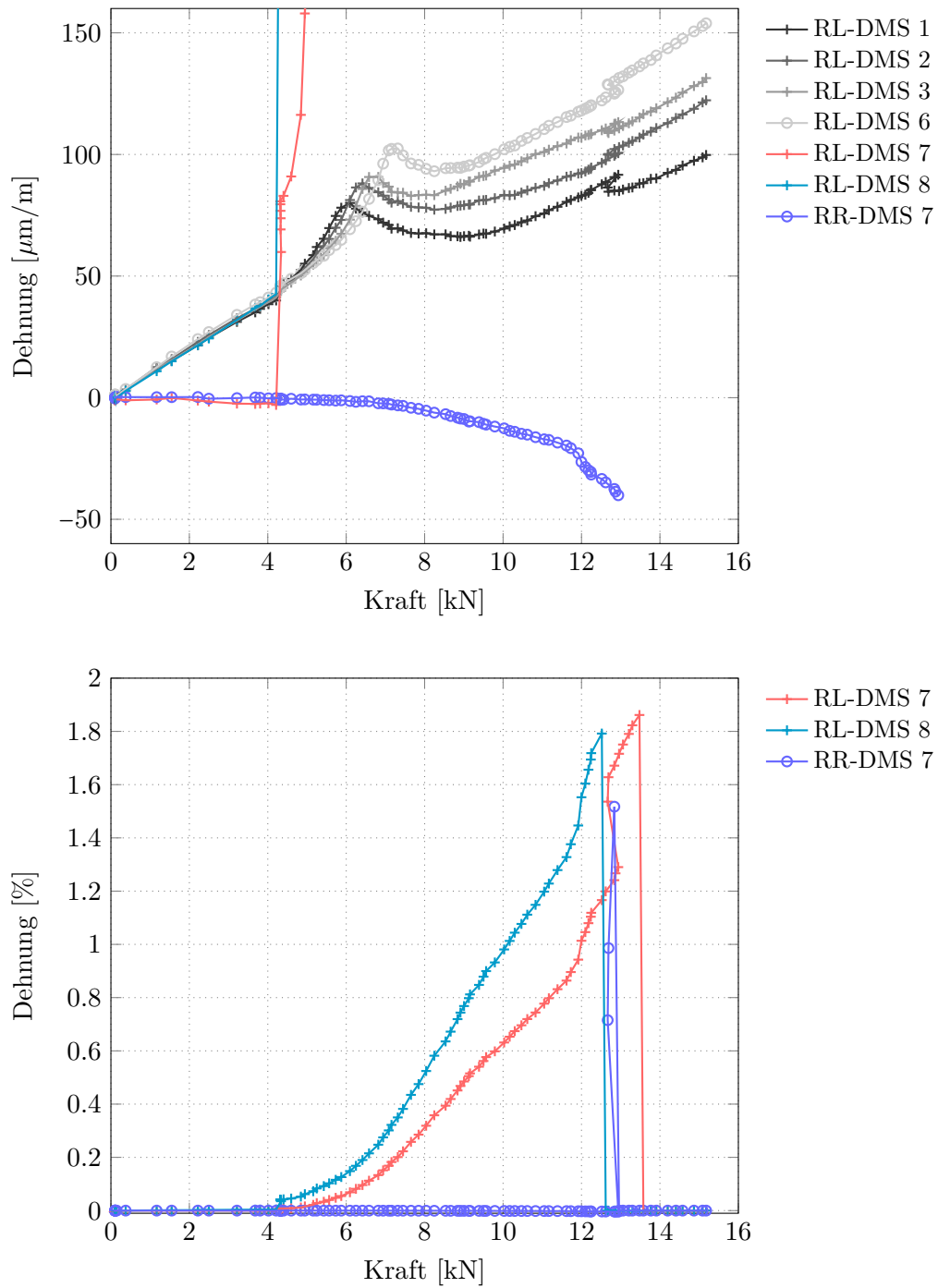


Abbildung E.10.: Dehnungsmessung über die Dicke bei Randbelastung Platte W (weicher): Belastung Rand links



## F. Simulationen: Weitere Daten

### F.1. Biegezugversuch

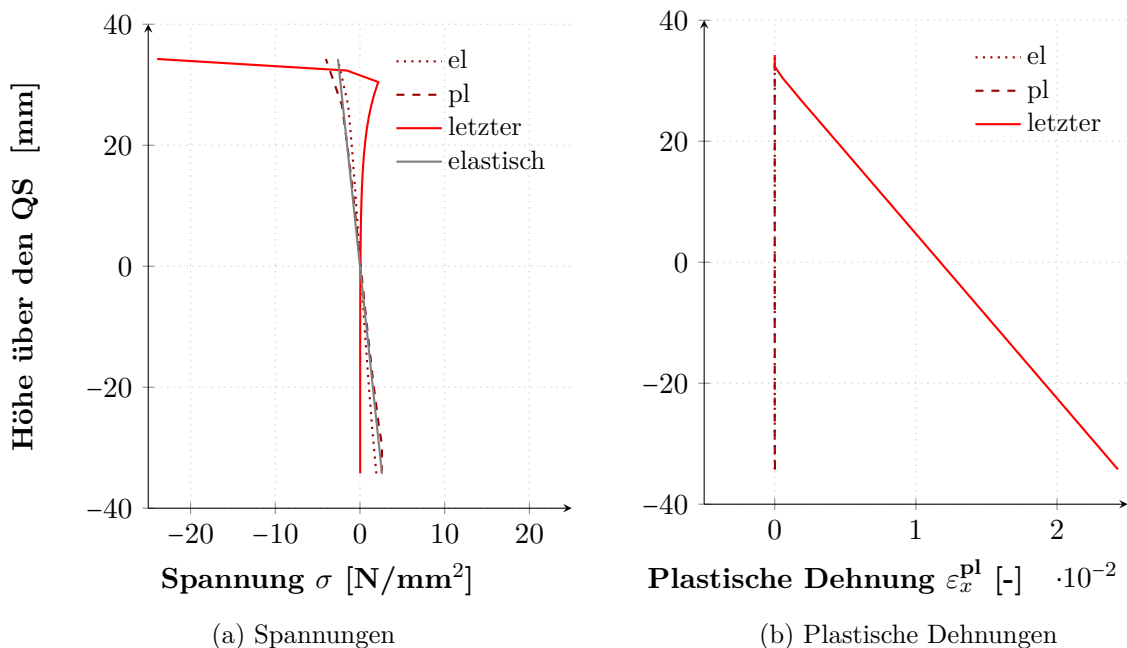


Abbildung F.1.: Spannungen und plastische Dehnungen über den Querschnitt am Lastangriffspunkt

In der Legende bezeichnet „el“ den letzten elastischen Schritt und „pl“ den ersten, darauf folgenden Schritt mit plastischen Dehnungen. In Abbildung F.1b sind diese jedoch nicht erkennbar, da sie im Vergleich zu den plastischen Dehnungen am Ende der Berechnung (etwa bei Durchbiegung  $u = 0.64$  mm, vergleiche Abb. 3.13) zu klein sind.

In Abbildung F.1a verläuft die Spannung im Elastischen linear über den Querschnitt, wobei eine leichte Störung an der Querschnittsoberseite infolge der knotenweise eingepprägten Verformung erkennbar ist. Der Spannungsverlauf knickt im nächsten Schritt (Kurve „pl“) an der Querschnittsunterseite ab, da hier das elastische Niveau erreicht ist. Der letzte Berechnungsschritt zeigt, wie die Spannung ab einer bestimmten Rissöffnungsweite bzw. ab einem bestimmten Niveau der plastischen Dehnung exponentiell auf näherungsweise Null abfällt, wobei im Druckbereich das Spannungsniveau deutlich höher ist und daher der Verlauf an der Querschnittsoberseite steil ansteigt.

## F.2. Balken

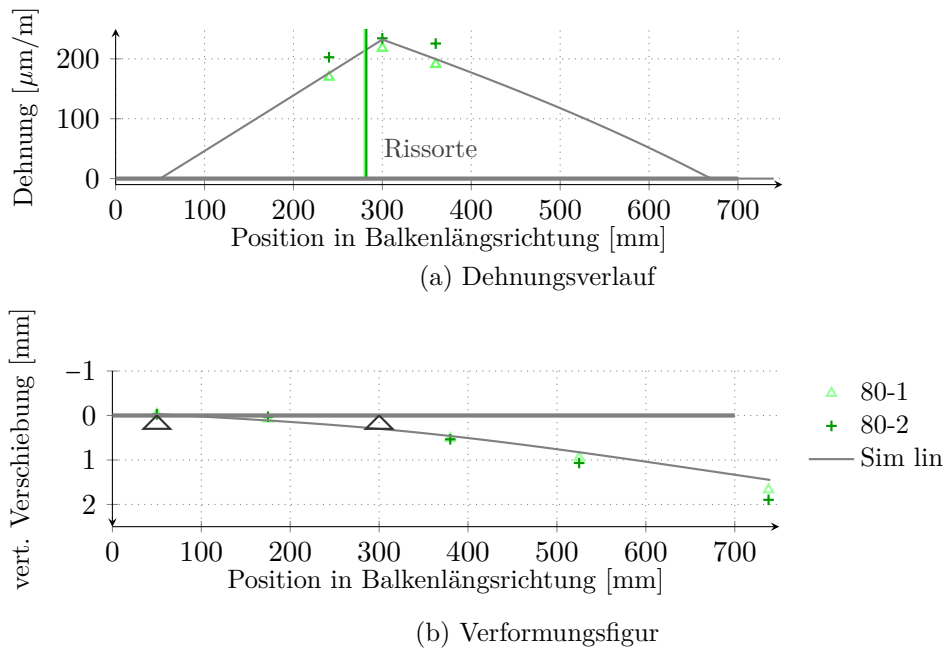


Abbildung F.2.: Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit  $d = 80$ , TP-GP (vertikale Markierung oben: Stelle des Risses im Versuch)

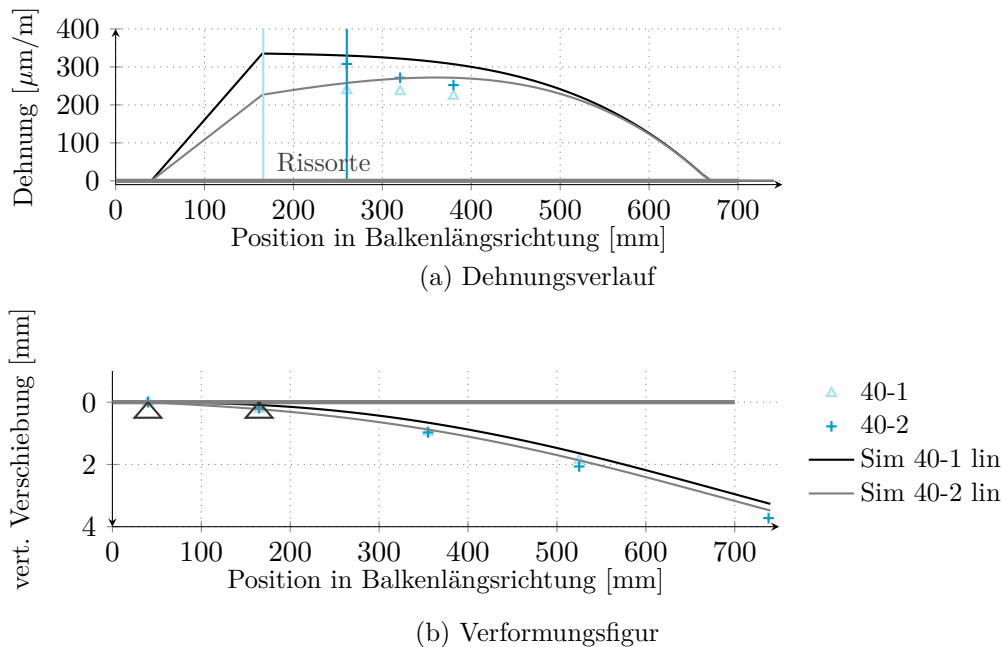
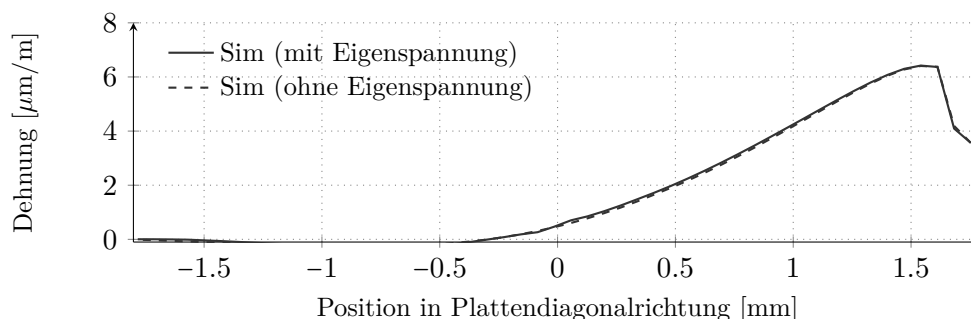


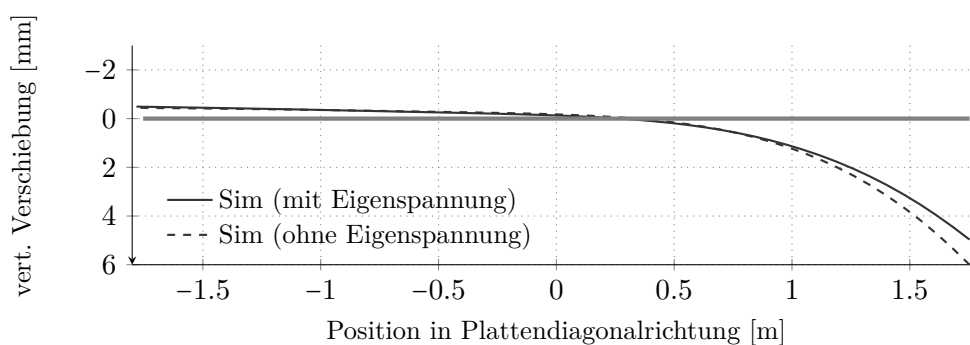
Abbildung F.3.: Dehnungs- und Verformungsverlauf der Balken mit  $d = 40$ , TP-GP (vertikale Markierung oben: Stelle des Risses im Versuch)

## F.3. Platte

### F.3.1. Eigenspannungen aus Schwinden



(a) Dehnungsverlauf



(b) Verformungsfigur

Abbildung F.4.: Vergleich Dehnungsverlauf und Verformungsfigur: mit und ohne Eigenspannungen aus Schwinden

Die in Abbildung F.5 dargestellten Hauptspannungen zeigen nach Abnahme der Folie einen steilen Anstieg und danach eine deutliche Entspannung. Auch hier zeigt sich eine deutliche Abweichung im Bereich nach Abnahme der Folie, vor allem bei den maximalen Hauptspannungen I und II. Diese Kurven der horizontal wirkenden Hauptspannungen weichen außerdem unerwartet mit fortschreitender Zeit leicht voneinander ab, während sie anfangs noch aufeinander liegen. Eine inhaltliche Bewertung der Verläufe ist nicht sinnvoll, da es sich hierbei um maximale bzw. minimale Werte des Spannungszustands der gesamten Platte handelt. Die Verläufe liefern so nur eine pauschale Abschätzung des Vernetzungseinflusses und der maximal bzw. minimal während des simulierten Schwindprozesses auftretenden Werte. Das Maximum wurde hier unabhängig vom Ort in der Platte abgebildet. Abbildung F.5 zeigt den ungefähren Ort der maximalen Spannung an der Oberkante der Platte, sowie die Verläufe der Hauptspannung  $\sigma_I$  über die Plattendicke, welche repräsentativ für alle betrachteten Vernetzungen sind.

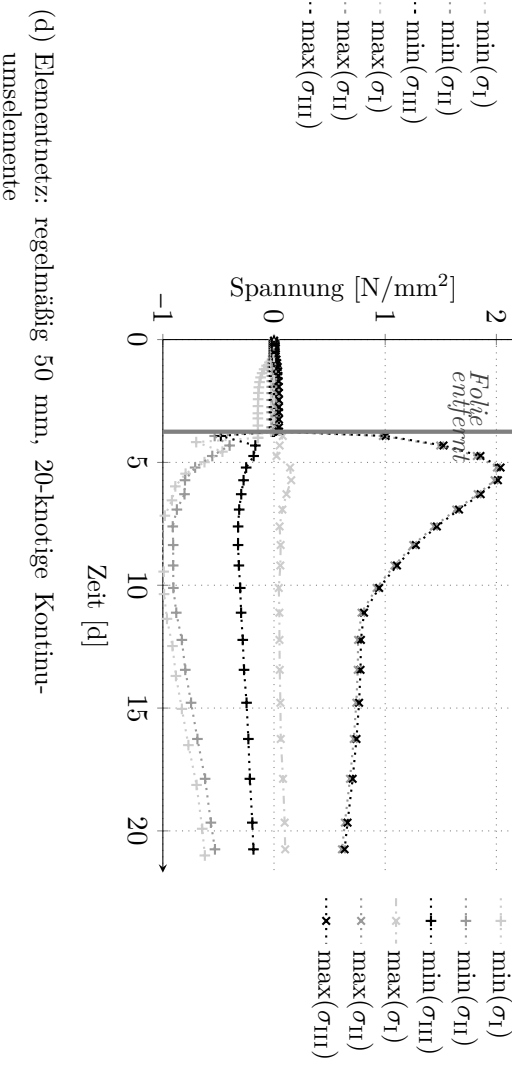
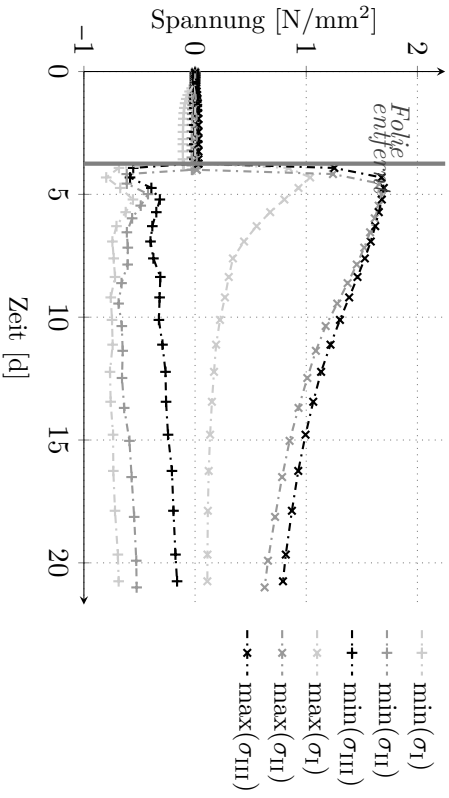
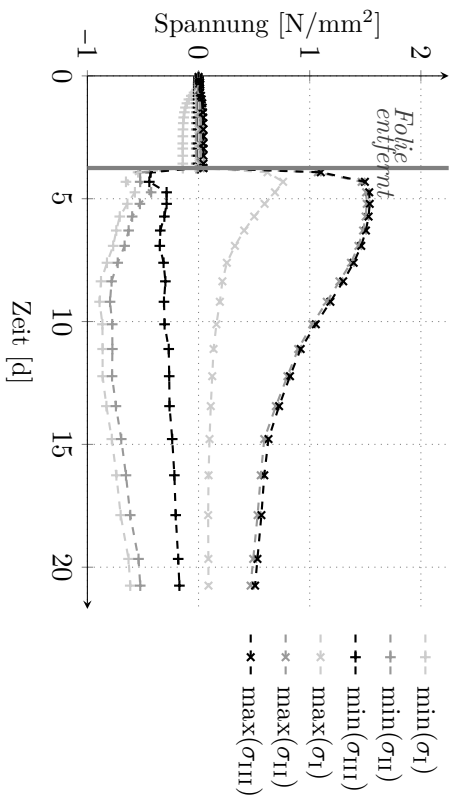
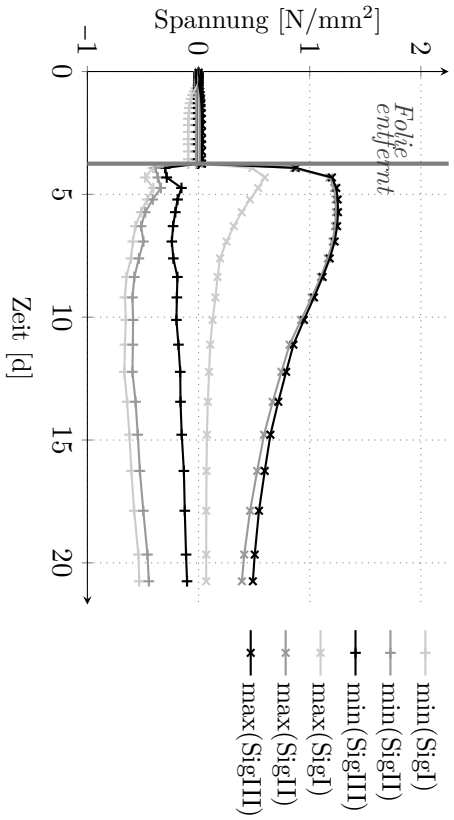
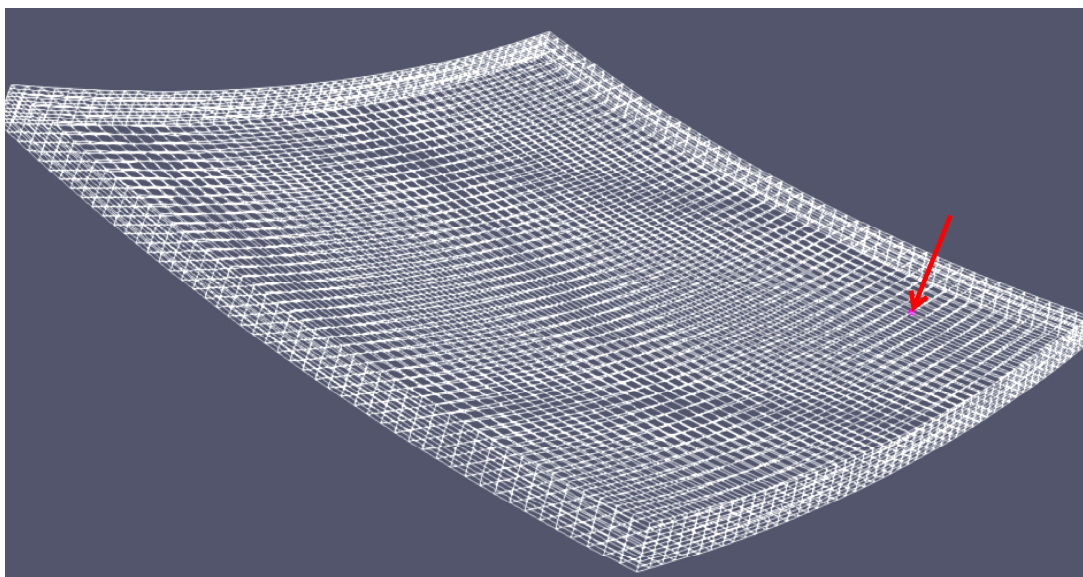
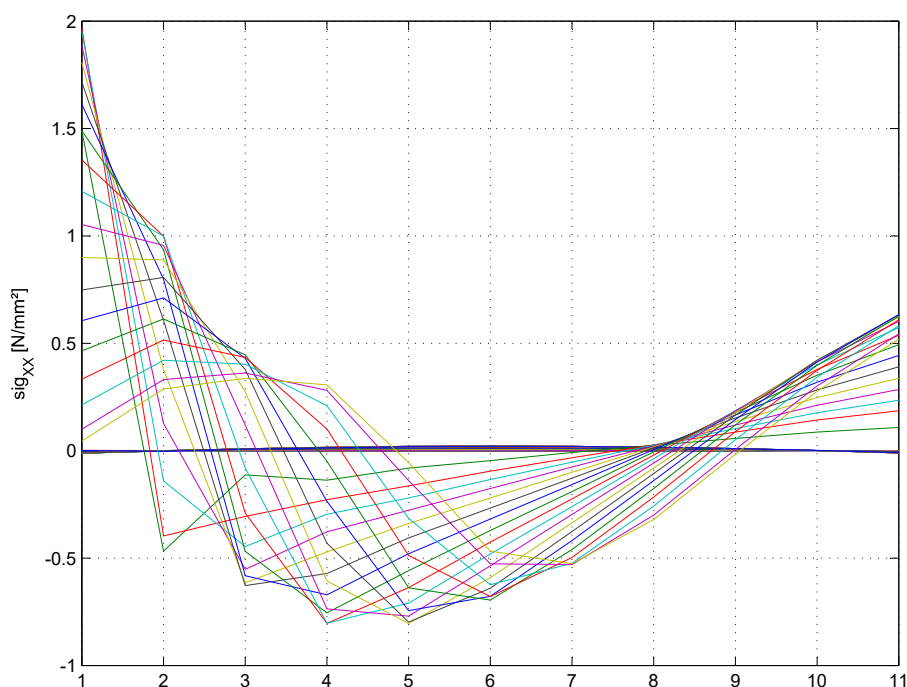


Abbildung F.5.: Ergebnis der Schwingsimulation in croc: Eigenspannungen in Form von extremalen Hauptspannungen  $\sigma_I$  bis  $\sigma_{III}$ , ausgewertet über den gesamten Berechnungszeitraum und die gesamte Platte (Extremalstellen örtlich nicht einheitlich)



(a) Darstellung des Orts der maximalen Hauptspannung in der Viertelplatte, wobei die exakte Stelle in diesem Bereich leicht variiert zum Zeitpunkt der maximal auftretenden Spannung nach Abb. F.5



(b) Darstellung des Verlaufs der maximalen Hauptspannung über die Plattendicke für jeden Zeitschritt: Die maximale Hauptspannung entsteht zum in Abb. F.5 angegebenen Zeitpunkt an der Plattenoberkante. In Richtung der unteren Plattenhälfte wechselt die Spannung das Vorzeichen. Bei niedrigerem Spannungsniveau verändert sich auch der Verlauf über den Querschnitt leicht, wobei ein typischer Eigenspannungsverlauf erkennbar ist.

Abbildung F.6.: Darstellung des Orts in der Viertelplatte (croc) bzw. des Verlaufs der maximalen Hauptspannung über die Plattendicke für jeden Zeitschritt

### F.3.2. Rissbilder

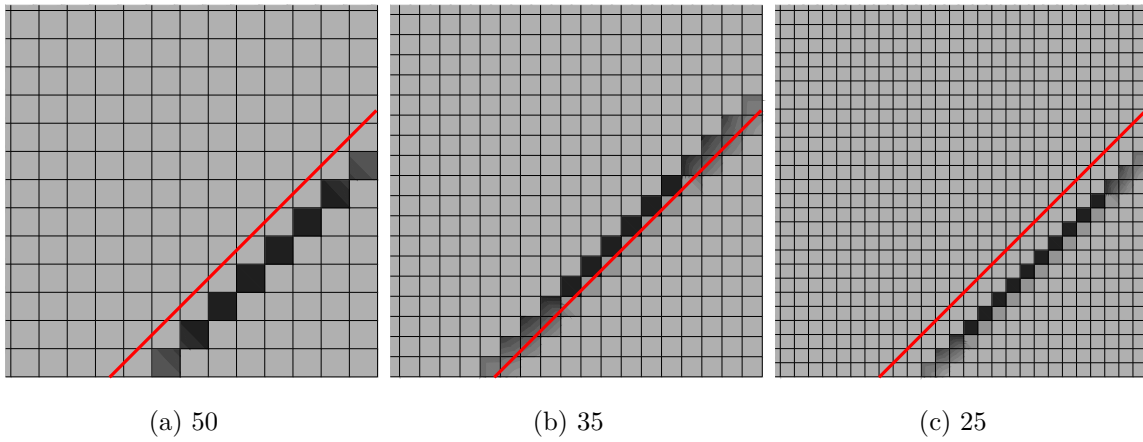


Abbildung F.7.: Entwicklung der plastischen Dehnungen bei erzwungen begrenzter RPZ für Platte W im Vergleich zur in rot dargestellten Rissposition im Versuch (Breite des dargestellten Plattenausschnitts 0.625 m)

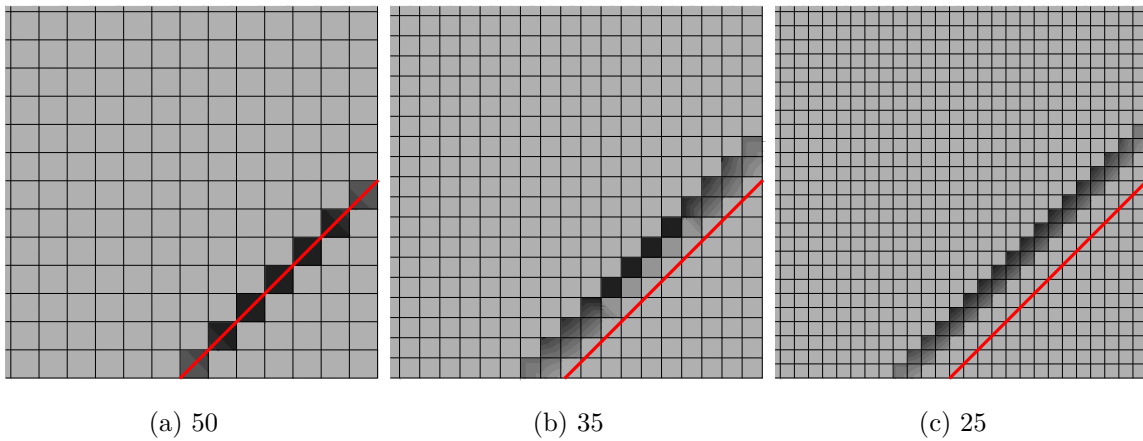
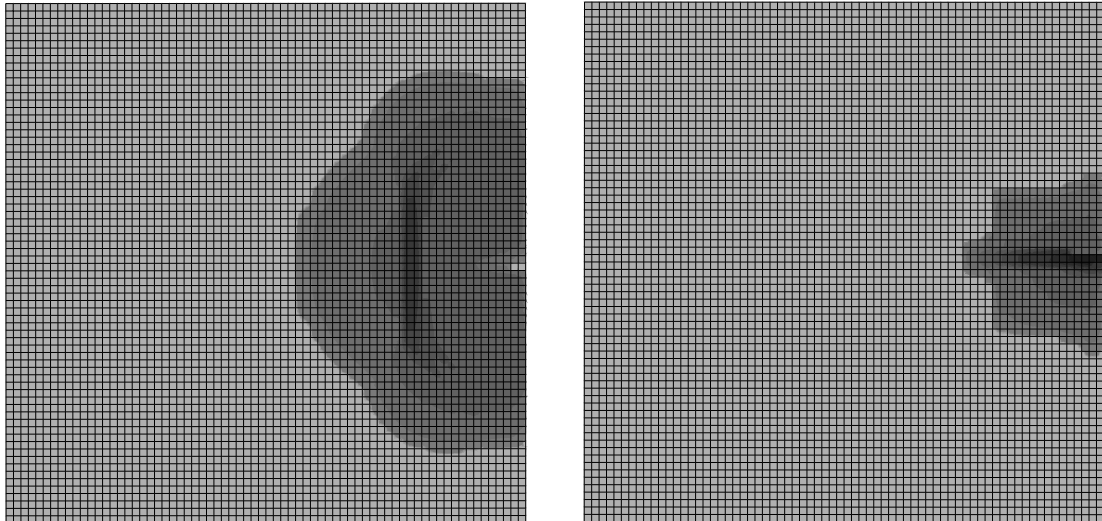
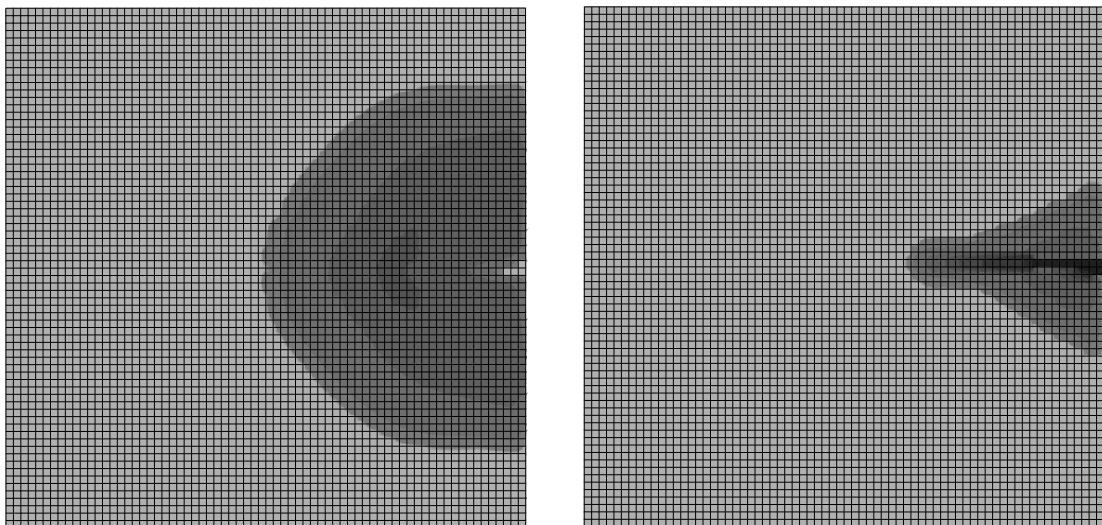


Abbildung F.8.: Entwicklung der plastischen Dehnungen bei erzwungen begrenzter RPZ für Platte S im Vergleich zur in rot dargestellten Rissposition im Versuch (Breite des dargestellten Plattenausschnitts 0.625 m)



(a) Platte S (steifer gelagert)



(b) Platte W (weicher gelagert)

Abbildung F.9.: Entwicklung der plastischen Dehnungen bei Randbelastung: Draufsicht Ober- (links) und Unterseite (rechts), jeweils ausgewertet bei Erreichen der Bruchlast

### F.3.3. Parameterstudie: Rissbilder

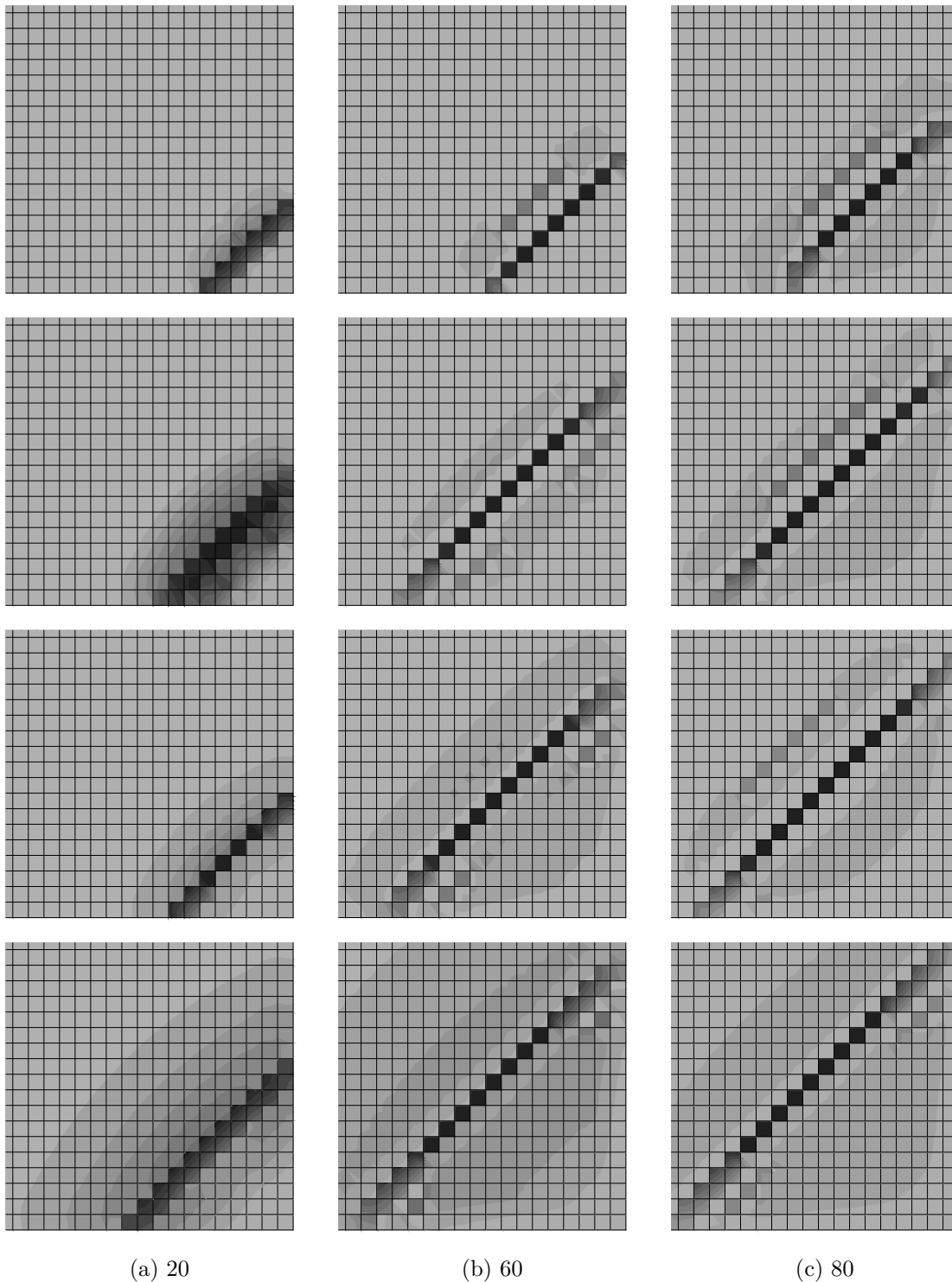
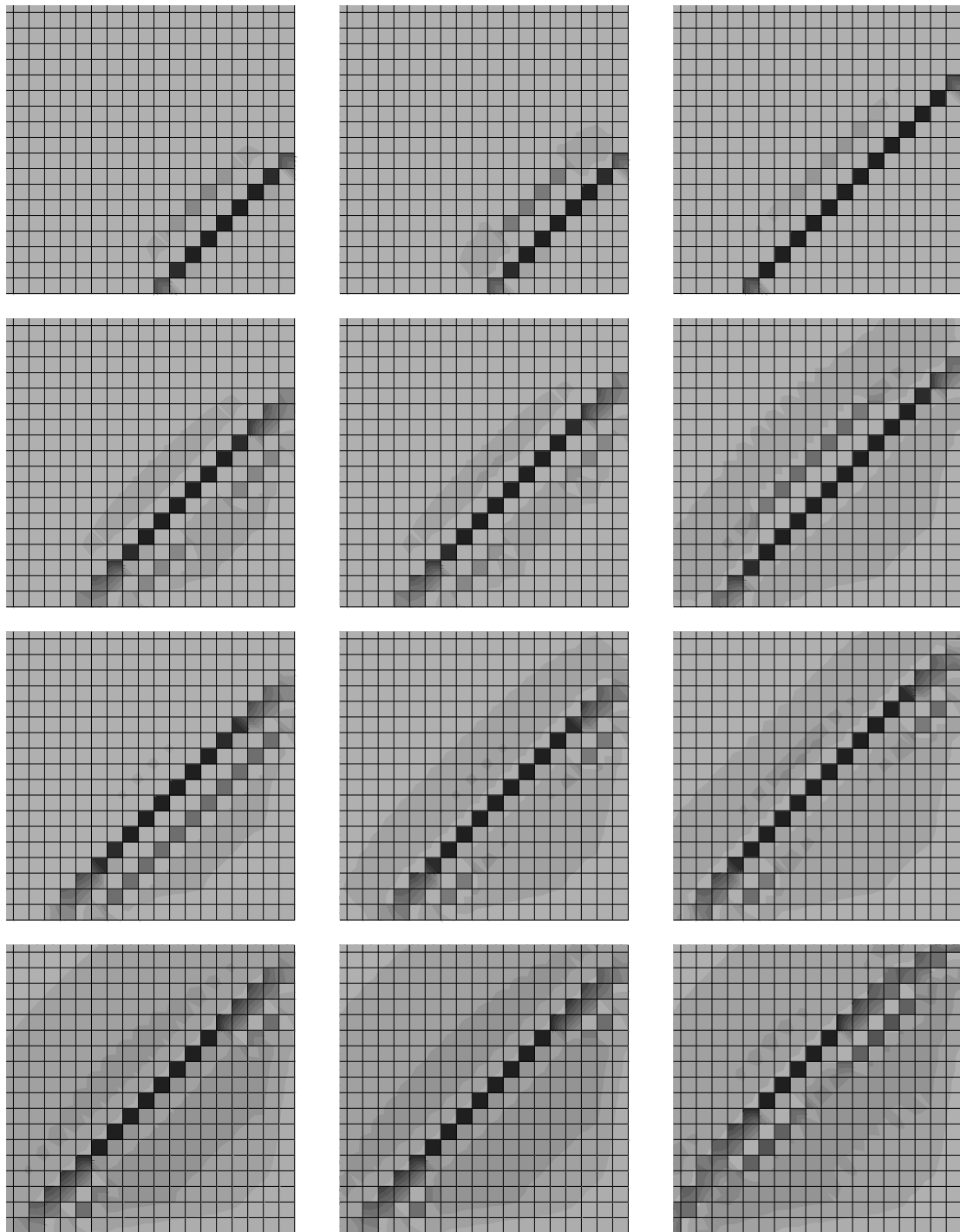


Abbildung F.10.: Rissbilder der Parameterstudie – Variieren der Plattendicke (Ausschnitt eines Sechzehntels der Platte, von oben steifer nach unten weicher Dämmstoff)





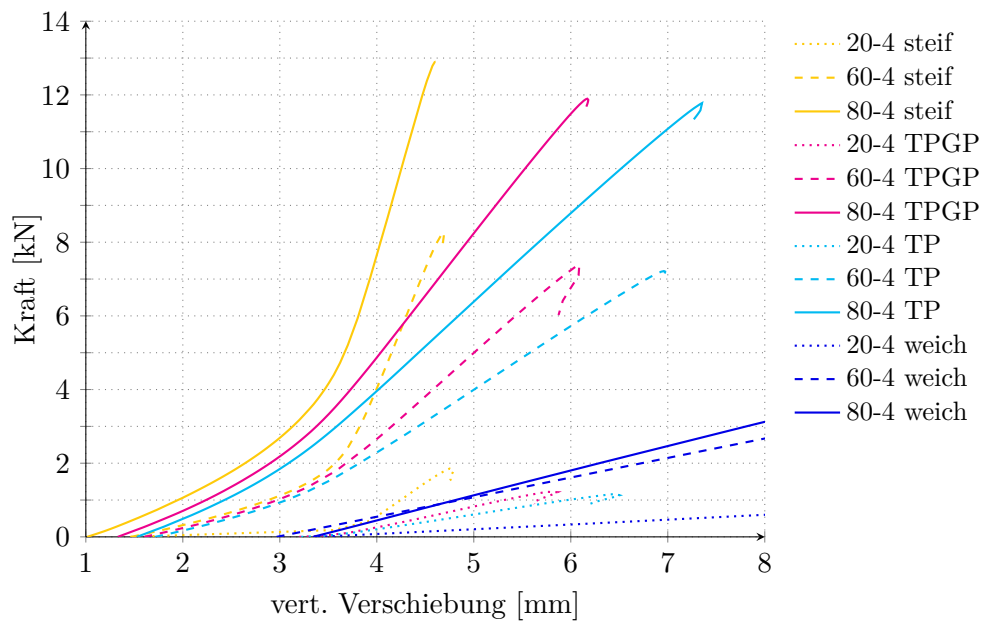
(a) 60-2

(b) 60-4

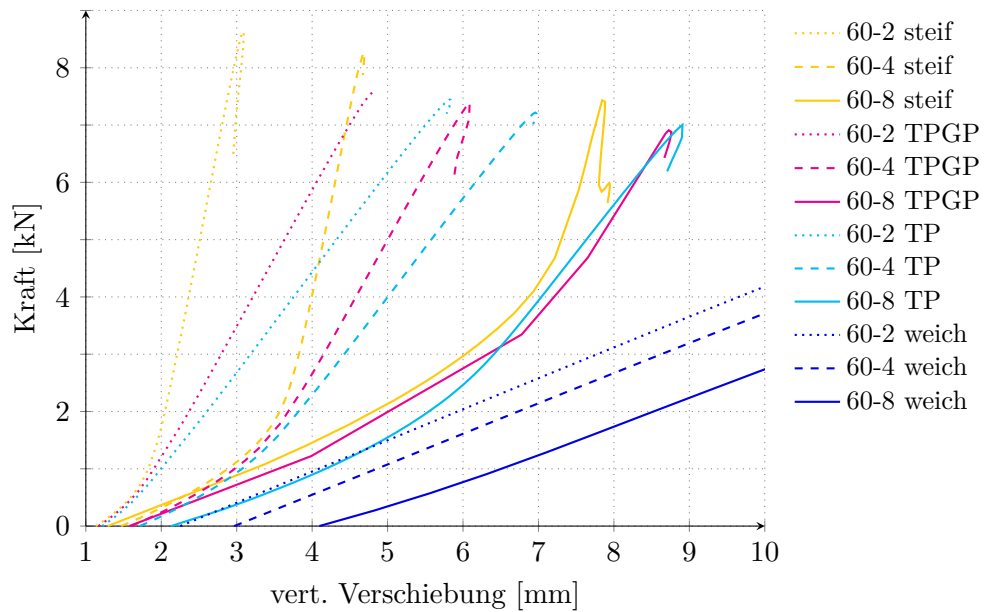
(c) 60-8

Abbildung F.11.: Rissbilder der Parameterstudie – Variieren der Vorverformung (Ausschnitt eines Sechzehntels der Platte, von oben steifer nach unten weicher Dämmstoff)

### F.3.4. Parameterstudie: Kraft-Verformungs-Linien



(a) Variierte Dicke



(b) Variierte Vorverformung

Abbildung F.12.: Kraft-Verformungslinien im Rahmen der durchgeführten Parameterstudie (leicht vergrößerte Darstellung)

Hinweis: Der Lebenslauf ist aus Datenschutzgründen in der elektronischen Fassung nicht enthalten.

# **Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau**

## **Bergische Universität Wuppertal**

---

- Heft 1      Andres, M.: Zum Stabilitätsnachweis von Schalentragsystemen aus Hochleistungsbeton, 2004; ISBN 978-3-940795-00-7
- Heft 2      Wörmann, R.: Zur Erfassung hygrothermischer Einflüsse auf das nichtlineare Trag- und Schädigungsverhalten von Stahlbetonflächentragwerken, 2004; ISBN 978-3-940795-01-4
- Heft 3      Piel, W.: Zur Erhöhung der Durchstanztragfähigkeit von Flachdecken mit Stahlverbundsystemen, 2004; ISBN 978-3-940795-02-1
- Heft 4      Mahran, E.: Finite-Infinite-Elemente-Modellierung zur Simulation der Boden-Bauwerk-Flüssigkeit-Interaktion unter dynamischer Anregung, 2004; ISBN 978-3-940795-03-8
- Heft 5      Eusani, R.: Zur numerischen Zeitbereichssimulation der Aeroelastischen Instabilität bei Seilbrücken, 2005; ISBN 978-3-940795-04-5
- Heft 6      Stracke, J.: Flachdecken aus Konstruktions - Leichtbeton, 2005; ISBN 978-3-940795-05-2
- Heft 7      Hanswille, G., Porsch, M., Üstündağ, C.: Versuchsbericht SFB 398 -Projekt C8 -Teil 1, 2007; ISBN 978-3-940795-06-9
- Heft 8      Schäfer, M.: Zum Tragverhalten von Flachdecken mit integrierten hohlkastenförmigen Stahlprofilen, 2007; ISBN 978-3-940795-07-6
- Heft 9      Üstündağ, C.: Beitrag zur Bemessung von Verbundträgern unter ermüdungswirksamen Beanspruchungen, 2007; ISBN 978-3-940795-08-3
- Heft 10     Hanswille, G., Porsch, M.: Versuchsbericht über die Durchführung von 36 Push-Out-Versuchen; ISBN 978-3-940795-09-0
- Heft 11     Hanswille, G., Porsch, M.: Metallurgische Untersuchungen an Schweißnahtverbindungen, 2008; ISBN 978-3-940795-10-6
- Heft 12     Jamali, N.: On the Numerical Simulation of Friction-Isolated Structures, 2008; ISBN 978-3-940795-11-3
- Heft 13     Lippes, M.: Zur Bemessung von Hohlprofil – Verbundstützen aus hochfesten Stählen und Betonen, 2008; ISBN 978-3-940795-12-0
- Heft 14     Mihajlov, V.: Numerical Model for Spatial Steel and Composite Frame-Structures Exposed to Fire and Elevated Temperatures, 2009; ISBN 978-3-940795-13-7
- Heft 15     Neuhaus, C.: Zur Identifikation selbsterregter aeroelastischer Kräfte im Zeitbereich, 2010; ISBN 978-3-940795-14-4
- Heft 16     Stopp, K.: Trag- und Verformungsverhalten großflächig gegründeter Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung der Boden-Bauwerk-Interaktion, 2010; ISBN 978-3-940795-15-1

# **Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau**

## **Bergische Universität Wuppertal**

---

- Heft 17 Porsch, M.: Modellierung von Schädigungsmechanismen zur Beurteilung der Lebensdauer von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, 2010; ISBN 978-3-940795-16-8
- Heft 18 Mannsfeld, T.: Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken unter Berücksichtigung der temperaturbedingten Nichtlinearitäten im Brandfall, 2011; ISBN 978-3-940795-17-5
- Heft 19 Geliën, M.: Ein Beitrag zur Bemessung von Stahlbetonstützen im Brandfall, 2011; ISBN 978-3-940795-18-2
- Heft 20 Festschrift Gerhard Hanswille, 2011; ISBN 978-3-940795-19-9
- Heft 21 Bergmann, M.: Zur Bemessung von Hohlprofilverbundstützen im Brandfall; ISBN 978-3-940795-20-5
- Heft 22 Peter, C.: Tragverhalten von Verkehrstunneln im Brandfall mit einer Innenschale aus PP-Faserbeton, ISBN 978-3-940795-21-2
- Heft 23 Chanou, M.: Zum Tragverhalten von Hohlprofil-Verbundstützen mit Mehrkernquerschnitten, ISBN 978-3-940795-22-9
- Heft 24 Menkenhagen, P.: Beitrag zum Tragverhalten des Lasteinleitungsbereichs von Hohlprofil-Verbundstützen unter Berücksichtigung der Verformungseigenschaften von Schubringen, 2019; ISBN 978-3-940795-23-6
- Heft 25 Zwolinski, S.: Ermittlung der Grünzugfestigkeit erdfeuchter Zementleimgemische als Grundlage für die Optimierung der Produktion von sofort entschalteten Betonwaren, 2018; ISBN 978-3-940795-24-3
- Heft 26 Dollase, A.: Mikrowellenverfahren zur Untersuchung des Erhärtungs- und Trocknungsverhaltens von zementgebundenen Baustoffen, 2019; ISBN 978-3-940795-25-0
- Heft 27 Loh, L.: Zum Torsionstragverhalten vorgespannter Segmenttürme – Ein Nachweismodell für überdrückte und klaffende Segmentfugen mit Kreisringquerschnitt, 2023; ISBN 978-3-940795-26-7
- Heft 28 Blau, N., Untersuchung zur Ermüdungssicherheit von Querrahmenanschlüssen bei Verbundbrücken, 2024; ISBN 978-3-940795-27-4
- Heft 29 Schönfeld, L.: Einfluss von Imperfektionen auf die numerische Traglastbestimmung unausgesteifter Beulfelder, 2024; ISBN 978-3-940795-28-1
- Heft 30 Kischkewitz, F.: Ein Beitrag zur wirtschaftlichen Bemessung von Balkenbrücken in Verbundbauweise, 2024; ISBN 978-3-940795-29-8
- Heft 31 Ardelmann, N.: Ein Beitrag zum Tragverhalten von Sandwichelementen unter Punktlasten, 2025; ISBN 978-3-940795-30-4
- Heft 32 Schwenzer, K.: Ein Beitrag zur numerischen Untersuchung der Rissbildung zementgebundener Estrichplatten auf Dämmschichten, 2025; ISBN 978-3-940795-31-1