



**BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL**

Fakultät für Elektrotechnik
Informationstechnik und Medientechnik

Ein hybrider Ansatz zur Bestimmung der Rotationsachse von Fragmenten zylindrischer Gefäße, insbesondere archäologischer Keramikgefäße

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

eingereicht durch

Dipl.-Math. Bernard Beitz

bei der



**BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL**

Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik und Medientechnik

Prüfungsausschuss

Erstprüfer Prof. Dr.-Ing. Reinhard Möller
Zweitprüfer Prof. Dr.-Ing. Dietmar Tutsch

Wuppertal, 31. Oktober 2023

Ein hybrider Ansatz zur Bestimmung der Rotationsachse
von Fragmenten zylindrischer Gefäße, insbesondere
archäologischer Keramikgefäße

Dipl.-Math. Bernard Beitz

31. Oktober 2023

Abstract

This dissertation addresses the challenge of reliably determining the axis of rotation of cylindrical objects even if only a small fragment is available and it additionally shows deformations. The manual manufacturing techniques of ancient ceramic vessels and the long deposition of the remains in the ground result in these challenging conditions being particularly common in archaeology. Tens of thousands of ancient sherds are regularly found during excavations and pose a particular challenge for proper handling and documentation – a process that can be effectively supported by automated methods.

Repeated-RANSAC (RRANSAC) is a novel method that provides a rough orientation of a sherd based on segmentation into cylindrical shapes. It is based on the RANSAC algorithm, one of the most widely used methods in machine vision. However, instead of aiming for a unique segmentation as usual, the algorithm repeatedly performs the segmentation. The error tolerance parameter, which otherwise is determined empirically in RANSAC, is varied. The result is a division of the sherd into overlapping cylinders, from which the axis of rotation can be derived.

It is shown how two methods based on different geometric properties can be combined to improve the overall result. For this purpose, a state-of-the-art method based on surface normals is combined with RRANSAC to form a hybrid method. In addition, a method for predicting whether the axis of rotation has been successfully determined is presented for the first time.

The methods were experimentally validated using archaeological pottery sherds. 154 sherds from the inventory of the Biblical Archaeological Institute Wuppertal, which were found during excavations at Tell Ziraa in Jordan, served as a foundation. By using the hybrid method, it was possible to correctly orient 32.18 % more sherds than would have been possible without the combination of the two methods. The prediction of a successful rotational axis determination was correct in 87.66 % of the cases with a sensitivity of 0.81, a specificity of 0.90, and an F-score of 0.76.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Herausforderung, die Rotationsachse von zylindrischen Objekten auch dann zuverlässig zu bestimmen, wenn nur jeweils ein kleines Fragment verfügbar ist und dieses zusätzlich Verformungen aufweist. Die manuellen Herstellungsmethoden antiker Keramikgefäße sowie die lange Lagerung der Überreste im Erdreich führen dazu, dass diese erschwerenden Bedingungen in der Archäologie besonders häufig anzutreffen sind. Zehntausende antike Scherben werden regelmäßig bei Ausgrabungen gefunden und stellen besondere Anforderungen an die fachgerechte Aufbereitung und Dokumentation – ein Prozess, den automatisierte Verfahren effektiv unterstützen können.

Mit Repeated-RANSAC (RRANSAC) wird ein neuartiges Verfahren vorgestellt, das eine Grobausrichtung einer Scherbe durch Segmentierung in zylindrische Formen ermöglicht. Es basiert auf dem RANSAC-Algorithmus, einem der am weitesten verbreiteten Verfahren im Bereich des maschinellen Sehens. Anstatt jedoch wie üblich eine eindeutige Segmentierung anzustreben, wird diese wiederholt durchgeführt. Dabei wird der bei RANSAC sonst empirisch festgelegte Parameter für die zulässige Fehlertoleranz variiert. Das Ergebnis ist eine Aufteilung der Scherbe in sich überlagernde Zylinder, aus denen die Rotationsachse abgeleitet werden kann.

Es wird gezeigt, wie zwei Verfahren, die auf unterschiedlichen geometrischen Eigenschaften basieren, kombiniert werden können, um das Gesamtergebnis zu verbessern. Dazu wird ein dem Stand der Forschung entsprechendes, auf Oberflächennormalen basierendes Verfahren mit RRANSAC zu einem Hybridverfahren kombiniert. Darüber hinaus wird erstmals eine Methode vorgestellt, mit der sich vorhersagen lässt, ob die Rotationsachse erfolgreich bestimmt werden konnte.

Die Verfahren wurden anhand von archäologischen Keramikscherben experimentell validiert. Als Grundlage dienten 154 Scherben aus den Beständen des Biblisch-Archäologischen Instituts Wuppertal, die bei Ausgrabungen am Tell Ziraa in Jordanien aufgefunden worden sind. Durch die Verwendung des Hybridverfahrens konnten 32,18 % mehr Scherben korrekt ausgerichtet werden als dies ohne die Kombination der Verfahren möglich gewesen wäre. Die Vorhersage einer erfolgreichen Bestimmung der Rotationsachse war bei einer Sensitivität von 0,81, einer Spezifität von 0,90 und einem F-Maß von 0,76 in 87,66 % der Fälle korrekt.

Danksagung

Der erfolgreiche Abschluss meiner Promotion war nur durch die Unterstützung eines großen Personenkreises möglich. An erster Stelle ist hier mein Doktorvater, Professor Möller, zu nennen. Ohne seine richtungsweisenden und weitsichtigen Ratschläge und seine unermüdliche Bereitschaft, meine Forschungen zu betreuen, wäre diese Dissertation nicht gelungen. Ihm verdanke ich auch die Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Automatisierungstechnik/Informatik (LfA), welche mir die Gelegenheit zur Promotion geboten hat. Seitens der Archäologie gilt mein Dank vor allem Professor Vieweger, der meine Promotion jederzeit und in jeder erdenklichen Weise unterstützt hat. Meine Aufenthalte in Nahost, die durch ihn ermöglicht wurden, haben mich auch menschlich wachsen lassen und ich habe sie stets als ein besonderes Privileg empfunden. Besonderer Dank gebührt auch Professor Tutsch, dem Zweitgutachter dieser Dissertation und Inhaber des Lehrstuhls Automatisierungstechnik/Informatik. Obwohl er nicht mein Doktorvater war, konnte ich mich stets mit jeglichen Anliegen an ihn wenden. Nachdem ich für zwei Jahre keine Anstellung am Lehrstuhl gehabt hatte und die Promotion daher pausieren musste, wurde ich auf seine Initiative hin wieder am LfA angestellt. Dies hat mir den Abschluss der Promotion ermöglicht.

Das freundliche und produktive Miteinander am LfA hat sehr zu einem angenehmen Arbeitsalltag in stressigen Zeiten beigetragen. Hervorzuheben sind Robert Roth, Christoph Brandau und Niclas Grabowski, mit denen ich während meiner Promotion in wöchentlichen Treffen intensiv fachliche, organisatorische und auch emotionale Themen besprechen konnte. Robert war bis zum Schluss ein wichtiger Sparringpartner, der durch intensive Diskussionen und Feedbackrunden zur hohen fachlichen Qualität dieser Doktorarbeit beigetragen hat.

Die Arbeit ist lediglich ein Teilbereich des Lebens und eine Promotion erstreckt sich auf alle Lebensbereiche. Im Frühling 2018 lernte ich Naomi kennen. Ohne sie wäre es mir nicht möglich gewesen, die Promotion erfolgreich abzuschließen. Auch im Privaten war viel Geduld notwendig und ihre anhaltende Unterstützung ermöglichte es mir, mich in stressigen Zeiten auf die Promotion zu konzentrieren. Ich danke meinen Eltern dafür, dass sie mir das Studium ermöglicht haben und mir bei meinen klugen und weniger klugen Entscheidungen zur Seite standen und damit den Grundstein für meinen beruflichen und persönlichen Werdegang gelegt haben.

Abschließend möchte ich mich bei allen weiteren Personen bedanken, die auf verschiedenste Weise dazu beigetragen haben, dass diese Doktorarbeit verwirklicht werden konnte. Ihre Beiträge haben meinen Weg geebnet und meine Arbeit bereichert.

Vielen Dank an alle!

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnisse	vii
Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xiii
Symbolverzeichnis	xiii
Einleitung	1
KAPITEL 1	
Technische Grundlagen	5
1.1 Geometrie	5
1.2 Digitalisierung und 3D-Scanning	12
1.3 RANSAC	13
KAPITEL 2	
Archäologische Grundlagen	21
2.1 Einführung	21
2.2 Entstehung antiker Keramikware	21
2.3 Aufbereitung, Analyse und Interpretation von Keramikfunden	23
2.4 Regionen und Merkmale von Scherben	26
KAPITEL 3	
Existierende Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse	35
3.1 Einführung	35
3.2 Normalen-Verfahren	36
3.3 Kreisschnitte	38
KAPITEL 4	
Repeated-RANSAC-Verfahren	41
4.1 Einführung	41
4.2 Vorverarbeitung	46
4.3 Wiederholtes RANSAC	47
4.4 Aufbereitung	48
4.5 Einfluss der Parameterwahl	51
4.6 Zusammenfassung	54
KAPITEL 5	
Hybridverfahren	55
5.1 Einführung	55

5.2	Mathematische Beschreibung	60
5.3	Bewertung der ermittelten Ausrichtung	64
5.4	Zusammenfassung	74
KAPITEL 6		
	Experimentelle Validierung	75
6.1	Einführung	75
6.2	Methodik	76
6.3	Analyse des Datenbestandes	77
6.4	Berechnung der Abweichung vom korrekten Ergebnis	80
6.5	Ergebnisse	84
6.6	Diskussion	85
6.7	Zusammenfassung	88
	Fazit und Ausblick	89
	Literaturverzeichnis	95

Abbildungsverzeichnis

1	Scherben antiker Keramikware. Bei archäologischen Ausgrabungen werden regelmäßig zehntausende Scherben gefunden, die zu rotations-symmetrischen Keramikgefäßen gehörten. (Bildquelle: BAI-Wuppertal)	2
2	3D-Modell einer Scherbe aus verschiedenen Perspektiven. Solche digitalen Modelle bilden die Ausgangsbasis für diese Arbeit.	3
1.1	Das in dieser Arbeit zugrunde gelegte Koordinatensystem. Die z-Achse wird stets in Rot eingezeichnet.	6
1.2	Darstellung eines Punktes p mithilfe von Zylinderkoordinaten. Dabei gibt ρ die Entfernung vom Ursprung der Projektion auf die xy-Ebene an, z die Distanz von p zu dieser Projektion und ϕ den Winkel zwischen dem Punkt p und der Polarachse.	10
1.3	Mithilfe von RANSAC lassen sich auch in stark verrauschten Daten Strukturen identifizieren. Inlier sind orange, Ausreißer sind blau. In Rot ist das Modell mit den meisten unterstützenden Punkten eingezeichnet.	13
1.4	Der Einfluss der gewählten Fehlertoleranz ε auf das Ergebnis. (a) Wird ε zu groß gewählt, dann werden so viele Ausreißer fälschlich als Inlier identifiziert, dass ein Modell akzeptiert wird, das stark vom korrekten Ergebnis abweicht. (b) Wird ε hingegen zu klein gewählt, dann werden Inlier nicht mehr erkannt, wodurch das korrekte Ergebnis weniger unterstützende Punkte aufweist als ein Modell, welches aus Ausreißern gebildet wird.	15
2.1	Zeichnungen von Keramikscherben nach archäologischen Standards (nach [Vie19, S. 375]).	25
2.2	Die beiden Klassen Sa1.9 und Sa1.10 unterscheiden sich nur geringfügig voneinander (nach [Ken12, Tafel 14]). Siehe [Ken12, S. 108] für eine Diskussion der Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Klassen.	26
2.3	Eine Scherbe mit ausgeprägter, rauer Bruchkante. Der Rand ist durch einen schrägen Bruch mit flacher Kante unterbrochen.	28
2.4	Das Innere, Äußere und eine Bruchkante sind definitionsgemäß stets bei einer Scherbe vorhanden. Der obere Rand wird im Kontext dieser Arbeit als vorhanden vorausgesetzt.	30
2.5	Dekoration oder ein Henkel können zusätzlich zu den obligatorischen Merkmalen auftreten.	30
2.6	(a) Als Profilschnitt werden die Schnittpunkte der Scherbe mit einer zur z-Achse parallel verlaufenden Ebene bezeichnet. (b) Das Seitenprofil bezeichnet die Überlagerung aller Profilschnitte.	31

2.7	Ein Zentriwinkel ϕ wird aufgespannt durch den Mittelpunkt O eines Kreises als Anfangspunkt und zwei auf diesem Kreis liegende Punkte p_1 und p_2	32
2.8	Der Zentriwinkel einer Scherbe ist der größte Zentriwinkel, welcher mithilfe von zur z -Achse orthogonalen Ebenenschnitten erreicht werden kann. In Blau sind Schnitte solcher Ebenen mit der z -Achse markiert und in Orange ist der Ebenenschnitt mit dem größten Zentriwinkel dargestellt.	33
3.1	Die Normalen eines Teilobjektes eines rotationssymmetrischen Objektes schneiden sich auf der Rotationsachse.	37
3.2	Zu einem auf dem Inneren/Äußeren liegenden Eckpunkt n_1 existiert ein in Gegenrichtung der zugehörigen Normalen liegender Eckpunkt \bar{n}_1 mit parallel verlaufender Normale. Für einen Eckpunkt n_2 , welcher nicht auf dem Inneren/Äußeren liegt, gilt dies nicht.	38
3.3	Schnitte mit Ebenen, welche orthogonal zur z -Achse verlaufen, sind kreisförmig.	39
4.1	(a) Viele alltägliche Objekte lassen sich in klar abgegrenzte, geometrische Formen (rot) einteilen. (b) Keramikscherben sind hingegen weitgehend amorph (Bildquelle: BAI-Wuppertal).	42
4.2	Keramikscherben sind stückweise zylinderförmig.	43
4.3	Zylindrische Formen überschneiden sich bei Scherben. Die Zylindermittelpunkte schneiden dabei die Rotationsachse.	43
4.4	Übersicht über die im Verfahren stattfindenden Schritte. Nach einer Vorverarbeitung werden mithilfe von wiederholten Aufrufen von RANSAC Zylindermittelpunkte generiert, aus welchen dann die Rotationsachse abgeleitet wird.	45
4.5	Ausgehend vom unbereinigten 3D-Modell werden zuerst Eckpunkte und Flächen entfernt, sodass eine 2D-Mannigfaltigkeit entsteht. Danach werden die Normalen korrigiert und zuletzt wird das Modell geglättet.	46
4.6	Aus dem bereinigten 3D-Objekt werden durch wiederholtes Ausführen von RANSAC Zylindermittelpunkte generiert.	47
4.7	Im Zuge der Aufbereitung wird aus den Zylindermittelpunkten die Rotationsachse generiert.	48
4.8	Scherben können derart geformt sein, dass ihr Profilverlauf jenseits der Rotationsachse zylindrische Formen impliziert	49
5.1	(a) Zylindrische Formen sind eine nichtlokale Eigenschaft von Scherben. (b) Die Richtungen der Normalen eines Objektes sind eine lokale Eigenschaft.	56
5.2	Beim Normalen-Verfahren wird aus den Normalen direkt die Rotationsachse abgeleitet. Bei RRANSAC hingegen werden zuerst Zylinder generiert, aus dessen Mittelpunkte dann die Rotationsachse abgeleitet wird.	56

5.3	Übersicht über die im Hybridverfahren stattfindenden Schritte. Mit zwei verschiedenen Verfahren wird zuerst eine Grobausrichtung ermittelt. Diese wird dann mithilfe eines lokalen Verfahrens verfeinert. Die Ergebnisse werden verglichen und das Schlechtere wird verworfen. Zuletzt wird das Bessere mit zufällig generierten Ergebnissen verglichen. Wenn die zufälligen Ergebnisse besser abschneiden, dann wird ein Fehlschlag gemeldet, ansonsten wird die ermittelte Feinausrichtung zurückgegeben.	59
5.4	Die ersten Schritte im Hybrid Verfahren, ergänzt um die mathematische Beschreibung der Ausgabe nach jedem Schritt.	61
5.5	Nachdem beide globalen Verfahren mit den lokalen Verfahren optimiert worden sind, werden diese verglichen. Die beste Feinausrichtung $M_* \in \{M_P M_R, M_P M_N\}$ wird an den Folgeschritt weiter gereicht.	62
5.6	Nachdem die beste Feinausrichtung M_* gegen Zufallsergebnisse getestet wurde, wird entweder diese oder ein Fehlschlag, repräsentiert durch die leere Menge, ausgegeben.	64
5.7	(a) Die Rotationsachse ist falsch berechnet worden. Das zugehörige Seitenprofil hat keine der Rotationssymmetrie folgenden Ausprägung. (b) Wurde die Rotationsachse korrekt identifiziert, so ist auch die Verteilung der Punkte des Seitenprofils minimal.	65
5.8	Je weiter sich die Scherbe von ihrer korrekten Ausrichtung entfernt, desto größer wird die Fläche des Seitenprofils.	67
5.9	Eine Rotation um 180° um die x- oder y-Achse spiegelt das zugehörige Profil. Die Abstände der Punkte zueinander bleiben erhalten.	70
6.1	(a) und (b) zeigen als Boxplot und Histogramm eine grafische Übersicht über Breite und Höhe der verwendeten Scherben in Zentimetern. (c) und (d) zeigen in Grad dieselbe Übersicht für den Zentriwinkel.	78
6.2	Eine Auswahl der bei den Experimenten verwendeten Scherben. Jeweils abgebildet ist das Innere und das Äußere.	79
6.3	(a) zwischen Breite und Höhe besteht ein starker linearer Zusammenhang. (b) zwischen der Fläche und dem Zentriwinkel besteht nur ein sehr kleiner linearer Zusammenhang.	80
6.4	In dunkelgrau ist eine korrekt ausgerichtete Scherbe zu sehen. In hellgrau ist dieselbe Scherbe nach der Normierung der Ausrichtung dargestellt. Die Scherbe wurde dazu um die z-Achse rotiert und entlang der z-Achse verschoben, sodass der unterste Eckpunkte auf der von der x- und y-Achse aufgespannten Ebene liegt.	82
6.5	Übersicht über die Schritte, die durchgeführt werden, um die Abweichung vom korrekten Ergebnis zu berechnen.	84
6.7	Anzahl der Scherben in Abhängigkeit der maximalen Abweichung von der Ground Truth in der Distanzmetrik $d(S, GT)$	87

Tabellenverzeichnis

1.1	Anzahl der Möglichkeiten, bei N gegebenen Datenpunkten ein Modell aus n Parametern zu bilden.	17
1.2	Mindestgröße der Differenz $t - n$, um bei einer Wahrscheinlichkeit von y eine rechnerische Sicherheit von δ zu erhalten, dass die gefundene Konsensmenge auf einem korrekten Modell basiert.	18
2.1	Phasen der Keramikherstellung, nach [OHH13, S. 122]	22
2.2	Auszug der Bestimmung der Merkmale von in Jordanien aufgefundenen Scherben [Ken12, S. VI, XI, XII].	23
2.3	Tabellarische Übersicht des Auftretens verschiedener Regionen bei Gefäßen bzw. Scherben.	29
6.1	Übersicht über die bei RRANSAC verwendeten Parameterwerte. Die Parameter b und h bezeichnen dabei die Breite bzw. Höhe des 3D-Modells.	77
6.2	Tabellarische Übersicht über Breite, Höhe und Zentriwinkel der Scherben.	77
6.3	Ergebnisse der verschiedenen Verfahren. Das Normalen-Verfahren hat 18,18 %, RRANSAC 14,29 % und das Hybridverfahren 24,03 % der Scherben korrekt ausgerichtet.	85
6.4	Anzahl der Scherben, welche bei den jeweiligen Verfahren korrekt bzw. falsch ausgerichtet worden sind.	85
6.5	Konfusionsmatrix der Klassifizierung durch das Hybridverfahren.	87
6.6	Gütekriterien der Klassifizierung durch das Hybridverfahren.	87

Symbolverzeichnis

$3DO$	Menge aller 3D-Objekte
C	Kostenfunktion bei RANSAC
$d(V, p_i)$	Euklidische Distanz eines durch RANSAC geschätztes Modell zu einem Punkt p_i
$d(\vec{n}_i, a)$	Euklidische Distanz einer Normalen \vec{n}_i zur Rotationsachse a
$d(\vec{v}, \vec{w})$	Euklidische Distanz zwischen zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w}
$d(\vec{n}, a)$	Euklidische Distanz zwischen einem Vektor \vec{n} und einem Punkt a
$d(S, GT)$	Distanzmetrik zur Bestimmung der Abweichung von der Ground Truth
$\hat{d}(S, GT)$	Unskalierte Distanzmetrik zur Bestimmung der Abweichung von der Ground Truth
ε	Maximal erlaubte Distanz eines Punktes vom zu schätzenden Modell bei RANSAC
ε_{max}	Obere Intervallgrenze bei RRANSAC
ε_{min}	Untere Intervallgrenze bei RRANSAC
$F_K(x)$	Kumulative Verteilungsfunktion
G	Definitionsbereich einer zu minimierenden Funktion $p(S, x)$
\mathbb{I}	Identitätsmatrix
$k(S, M)$	Minimierungsfunktion beim Kreisschnitte-Verfahren
$\ \vec{v}\ $	Länge des Vektors \vec{v}
l	Gerade im 3D-Raum
M	Allgemeine 4×4 Transformationsmatrix
M_N	Ergebnismatrix des Normalen-Verfahrens
M_P	Ergebnismatrix des Kreisschnitte-Verfahrens
M_R	Ergebnismatrix von RRANSAC
M_*	Beste Feinausrichtung im Hybridverfahren
μ	Mittelwert einer statistischen Verteilung
\mathbb{N}	Körper der natürlichen Zahlen
V	Durch RANSAC zu schätzendes Modell
$NN(p_k)$	Nächster Nachbar zu einem Punkt p_k
$NND(p_k)$	Euklidische Distanz des nächsten Nachbarn zu einem Punkt p_k
\vec{n}	Normalenvektor mit Länge 1
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2, l)$	Linksseitig bei l abgeschnittene Normalverteilung
\mathcal{O}	Laufzeitkomplexität eines Algorithmus

$\omega(S)$	Seitenprofil einer Scherbe
\hat{p}	Durch zufällige Transformationen erreichte Zielwert
ϕ	Winkel im Bogenmaß
$P(K \leq x)$	Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable K einen Wert kleiner gleich x annimmt
$P_K(p_*)$	Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Zufallsvariable K_i kleiner als die besten Feinausrichtung p_* ist
$P_K(x)$	Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Stichprobe kleiner als x ist
$p(S, x)$	Zu minimierende Funktion
p_N	Durch die Feinausrichtung $M_P M_N$ erreichte Zielwert
p_R	Durch die Feinausrichtung $M_P M_R$ erreichte Zielwert
p_*	Durch die beste Feinausrichtung M_* erreichte Zielwert
p	Punkt im 3D-Raum
\vec{p}	Durch den Punkt p definierter Vektor
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Körper der positiven reellen Zahlen
ρ	Euklidische Distanz zur z -Achse bei Zylinderkoordinaten
R_ϕ^r	Rotation der Länge ϕ um die Achse r
SD	Standardabweichung
$SE(3)$	Menge aller rigiden Transformationen
σ	Standardabweichung einer statistischen Verteilung
S	3D-Modell eines Objektes
θ	Winkel im Bogenmaß
T_t^x	Translation der Länge t in Richtung der x -Achse
T_t^y	Translation der Länge t in Richtung der y -Achse
T_t^z	Translation der Länge t in Richtung der z -Achse
\vec{v}	Vektor, ggf. in homogenen Koordinaten

Einleitung

Objekte, welche sich beliebig um eine Achse rotieren lassen, ohne dass sich ihre zugrundeliegende Gestalt verändert, sind allgegenwärtig. Beispiele solcher rotations-symmetrischer Objekte sind Tassen, runde Teller oder Schalen. Ihre Symmetrie ist durch die jeweilige Rotationsachse definiert, die eine entscheidende Rolle bei der Charakterisierung solcher Objekte spielt. Für vollständige Objekte lässt sich diese Achse relativ unkompliziert bestimmen. Bei Fragmenten, d. h. partiell erhaltenen, verfügbaren oder sichtbaren Objekten, gestaltet sich eine zuverlässige Bestimmung jedoch komplexer. Besonders anspruchsvoll wird die Situation, wenn das Objekt zusätzliche Deformationen aufweist - eine Herausforderung, die im Mittelpunkt dieser Arbeit steht. Diese schwierigen Rahmenbedingungen sind in der Archäologie der Regelfall. Die altertümlichen Herstellungsmethoden in Verbindung mit der über Jahrtausende erfolgten Zersetzung erschweren die Rekonstruktion der Drehachse, insbesondere bei kleinen Scherben, erheblich.

Bei Grabungen wird eine Vielfalt archäologisch relevanter Funde zusammen getragen. Keramikware nimmt hierbei eine Sonderstellung ein, da diese über Jahrtausende hinweg auf allen Kontinenten allgegenwärtig gewesen ist und dadurch die mit Abstand häufigste Fundart darstellt [OHH13, S. 3]. Das Auffinden von zehntausenden rotations-symmetrischen Keramikfunden im Laufe einer Grabungskampagne sind dabei keine Ausnahme, sondern die Regel [OHH13, S. 45]. Abbildung 1 zeigt eine kleine Auswahl solcher Keramikfunde. Einerseits ermöglicht dies eine Herangehensweise, welche bei reinen Einzelfunden nicht möglich ist: Die Analyse von Keramikscherben nicht nur als Einzelfunde, sondern als eine Sammlung, aus deren Zusammensetzung sich Erkenntnisse über Handel und Lebensstandard der Menschen ableiten lassen [OHH13, S. 203ff.]. Ein Zusammenführen von Scherben zum ursprünglichen Objekt steht dabei nur selten im Fokus. Häufig werden nur einzelne Scherben je Objekt ausgegraben [Mar06, S. 94],



Abbildung 1: Scherben antiker Keramikware. Bei archäologischen Ausgrabungen werden regelmäßig zehntausende Scherben gefunden, die zu rotationssymmetrischen Keramikgefäßen gehörten. (Bildquelle: BAI-Wuppertal)

aber vor allem lassen sich schon aus den Scherben an sich die relevanten Informationen ableiten [OHH13, S. 25.]. Andererseits macht die schiere Menge gefundener Scherben eine spezielle Handhabung überhaupt erst notwendig, denn die große Anzahl an Scherben können nicht auf dieselbe Weise archäologisch aufbereitet werden wie andere Fundarten [OHH13, S. 45].

Zeichnungen von Scherbenprofilen sind die etablierte Methode, um wissenschaftliche Erkenntnisse über diese Fundart zu dokumentieren und kommunizieren. Für die rotationssymmetrischen Scherben ist dabei die Bestimmung der Rotationsachse des ursprünglichen Gefäßes der zentrale Schritt zur Erstellung dieser Zeichnungen [OHH13, S. 93]. Bis heute besteht der Status quo darin, dass professionelle Zeichner diese manuell für einzelne exemplarische Scherben erstellen. Ansätze zur Automatisierung des archäologischen Prozesses konnten sich bisher nicht in der Breite durchsetzen. Der Hauptgrund ist das Fehlen zuverlässiger Algorithmen, welche dieselbe Zuverlässigkeit bieten wie archäologisch ausgebildete Personen mit mehrjähriger Erfahrung.

Das Potenzial einer automatisierten Aufbereitung geht über Fragen von Kosten oder Effizienz hinaus. Eine effiziente digitale Aufbereitung der Keramikfunde würde völlig neue Herangehensweisen ermöglichen, welche bei dem aktuellen manuellen Prozess undenkbar sind. So ist die Inkompatibilität der Klassifizierungen für Keramikfunde ein großes Problem [OHH13, S. 84]. Diese werden im Rahmen einer einzelnen Grabung

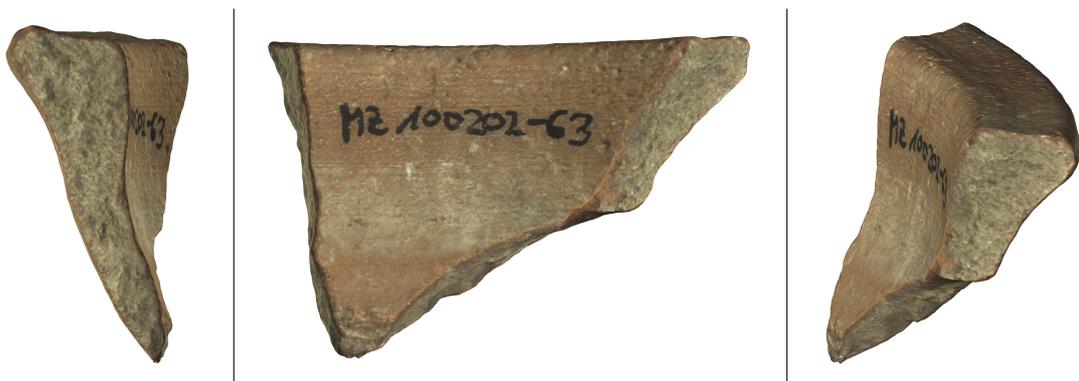


Abbildung 2: 3D-Modell einer Scherbe aus verschiedenen Perspektiven. Solche digitalen Modelle bilden die Ausgangsbasis für diese Arbeit.

oder auch Grabungskampagne jeweils individuell und aufbauend auf den manuell gesichteten Funden sowie anhand der gegebenen oder entwickelten Forschungsfragen erstellt und sind daher im Allgemeinen nicht vollständig miteinander vergleichbar. Bei einer routinemäßigen Digitalisierung der Funde könnten Forscher jedoch problemlos neu auftkommende Forschungsfragen auch mit Funden aus vergangenen Grabungen abgleichen. Hierbei handelt es sich um ein Henne-Ei-Problem: Ohne Automatisierung und effiziente Digitalisierung können derartige Synergieeffekte nicht eintreten. Ohne den wissenschaftlichen Mehrwert, den diese Synergieeffekte liefern, ist der Anreiz die Voraussetzungen zu schaffen jedoch zu klein, um einen derartigen Paradigmenwechsel hervorzubringen. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel einer zu einem 3D-Modell digitalisierten Scherbe. Die Digitalisierung archäologischer Funde ist die Basis für eine Automatisierung und bildet den Ausgangspunkt dieser Arbeit.

Algorithmen zur zuverlässigen Bestimmung der Rotationsachse sind daher auch in Hinblick auf eine weiter gefasste Perspektive entscheidend, um Anreize zu einer fortschreitenden Automatisierung und Digitalisierung zu schaffen, welche letztendlich gänzlich neue Möglichkeiten eröffnen kann. In der vorliegenden Arbeit wird daher dargestellt, wie die Zuverlässigkeit der Bestimmung der Rotationsachse verbessert werden kann. In **Kapitel 1** und **Kapitel 2** werden die technischen und archäologischen Grundlagen vorgestellt, welche zum weiteren Verständnis essenziell sind. **Kapitel 3** gibt einen Überblick über bestehende Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse. In **Kapitel 4** wird ein Verfahren vorgestellt, welches auf bisher ungenutzten geometrischen Eigenschaften von Keramikscherben basiert. Auf diesem aufbauend wird in **Kapitel 5** ein Verfahren vorgestellt, bei welchem zwei verschiedenartige Ansätze miteinander

kombiniert werden, um häufiger eine korrekte Bestimmung der Rotationsachse zu bestimmen, als dies mit nur einem einzelnen Verfahren möglich wäre. Es wird außerdem gezeigt, wie eine Vorhersage getroffen werden kann, ob die Bestimmung der Rotationsachse gelungen ist. Dies kann einen Arbeitsablauf ermöglichen, bei dem nur noch die Scherben manuell gesichtet und aufbereitet werden müssen, bei denen die automatisierte Bestimmung der Rotationsachse gescheitert ist. In **Kapitel 6** werden die neu vorgestellten Verfahren und Methoden anhand von archäologischen Funden validiert. Die Arbeit schließt mit einem **Fazit und Ausblick**, in dem die Ergebnisse sowie die Stärken und Schwächen der Verfahren im Kontext der archäologischen Praxis diskutiert werden, um ein Gesamtfazit der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen zu ziehen.

KAPITEL 1

Technische Grundlagen

1.1 Geometrie

Im Folgenden werden relevante Begriffe der euklidischen Geometrie erläutert. Diese orientieren sich an [DP11] und [Kot19]. Dort finden sich ausführliche Darstellungen zur Vertiefung.

Der kartesische dreidimensionale Raum (kurz: 3D-Raum) wird durch drei Achsen definiert. Die z-Achse wird aufgrund ihrer Sonderrolle in dieser Arbeit stets in Rot eingezeichnet. Abbildung 1.1 zeigt das im Folgenden zugrunde gelegte Koordinatensystem.

Ein Punkt p im 3D-Raum wird als 3-Tupel

$$p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

dargestellt. Ein Vektor \vec{v} im 3D-Raum wird in den folgenden Ausführungen als Spaltenvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

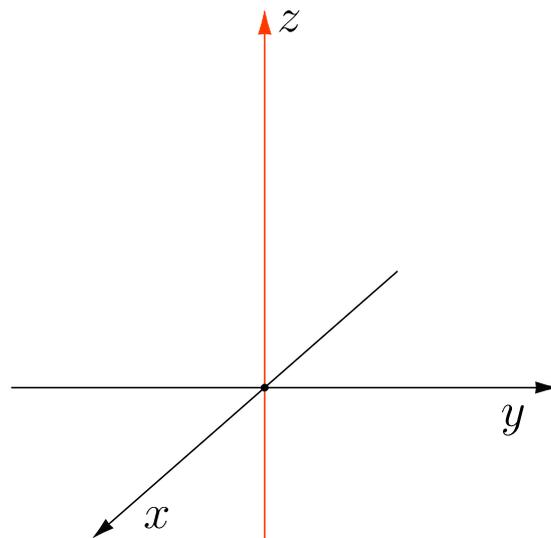


Abbildung 1.1: Das in dieser Arbeit zugrunde gelegte Koordinatensystem. Die z-Achse wird stets in Rot eingezeichnet.

aufgefasst. Für einen gegebenen Punkt p wird ein Vektor \vec{v} über diesen Punkt definiert wenn

$$p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad (1.3)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

gilt, d. h. wenn der Vektor die Koordinaten des Punktes und des Vektors identisch sind. Die Länge $\|\vec{v}\|$ eines Vektors ist definiert als

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \quad (1.5)$$

Die euklidische Distanz $d(\vec{v}, \vec{w})$ zwischen zwei Vektoren lässt sich durch

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| \quad (1.6)$$

als die Länge des Vektors $\vec{v} - \vec{w}$ definieren.

Eine Gerade l im 3D-Raum lässt sich mithilfe zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{x} + t \cdot \vec{v} = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

Abschnitt 1.1. Geometrie

parametrisieren, d. h. es handelt sich um die Menge aller Punkte, für welche die Gleichung 1.7 für ein $t \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann. Zwei Punkte p_1 und p_2 definieren eine Gerade. Die zugehörige Parametrisierung mit den über die Punkte definierten Vektoren \vec{p}_1 und \vec{p}_2 lautet dann

$$\vec{p}_1 + t \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Ein Vektor \vec{n} wird als Normalenvektor oder auch als Normale zu einem Vektor \vec{v} bezeichnet, wenn dieser Normalenvektor orthogonal zu ihm steht, d. h. wenn $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ gilt. Für einen Normalenvektor \vec{n} wird im Folgenden die übliche Konvention verwendet, dass $\|\vec{n}\| = 1$ angenommen wird. Durch einen Normalenvektor \vec{n} und einen Punkt $d \in \mathbb{R}^3$ lässt sich eine Ebene mithilfe der Gleichung

$$p \cdot \vec{n} + d = 0, \quad p \in \mathbb{R}^3 \quad (1.9)$$

parametrisieren. Als xy-Ebene wird die von der x- als auch y-Achse aufgespannten Ebene bezeichnet, d. h. es handelt sich um die durch

$$p \cdot \vec{n} = 0, \quad p \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

definierte Ebene. Diese entspricht genau der Menge der Punkte p_i , für die

$$p_i = (x_i, y_i, 0), \quad x_i, y_i \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

gilt.

Matrizen werden in Klammernotation angegeben und durch Großbuchstaben bezeichnet. Die Multiplikation einer Matrix M mit einem Vektor \vec{v} wird im Folgenden als Transformation bezeichnet und die Matrix M als die zugehörige Transformationsmatrix. Es werden ausschließlich sogenannte rigide Transformationen betrachtet. Dies sind jegliche Translationen und Rotationen. Je nach Kontext werden in der Literatur oft auch Reflexionen den rigiden Transformationen zugerechnet. Diese sind im vorliegenden Kontext nicht relevant und wir halten uns daher bezüglich der Definition an [DP11, S. 158]. Die Menge aller rigiden Transformationen bezeichnen wir als $SE(3)$. Wenn nicht anders angegeben, dann ist für eine Transformationsmatrix M also stets $M \in SE(3)$ angenommen. Matrizen aus $SE(3)$ haben die Form einer 4×4 -Matrix.

Ein Vektor der Form 1.2 kann durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (1.12)$$

in sogenannten homogenen Koordinaten ausgedrückt werden. Die Beschreibung von Transformationen im dreidimensionalen Raum durch 4×4 -Matrizen und vierdimensionale Vektoren ist ein in der Computergrafik gebräuchlicher Ansatz und erlaubt eine einheitliche Behandlung aller rigiden Transformationen [Fol95, S. 204].

Für bestimmte Transformationsmatrizen werden gesonderte Symbole verwendet. Mit dem Symbol \mathbb{I} wird die Identitätsmatrix bezeichnet, also die Matrix für die

$$\mathbb{I}\vec{v} = \vec{v}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

gilt. Die Matrizen

$$T_t^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_t^y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_t^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

bezeichnen Translationen der Länge t in Richtung der x-, y-, bzw. z-Achse. Mit

$$\begin{aligned} R_\phi^x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_\phi^y &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_\phi^z &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.15}$$

werden Rotationen um den Winkel ϕ im Bogenmaß um die x-, y-, bzw. z-Achse bezeichnet. Die Nutzung von Bogenmaß, d. h. die Verwendung von 2π für eine vollständige Rotation (Symbol: *rad*) ist aufgrund des geometrischen Zusammenhanges zu den trigonometrischen Funktionen mathematisch naheliegend. Im Folgenden wird neben dem Bogenmaß noch das ebenfalls gebräuchliche Winkelmaß Grad (Symbol: °) verwendet. Bei diesem bilden 360° eine vollständige Rotation. Durch eine Multiplikation mit dem Faktor $180/\pi$ kann eine Angabe im Bogenmaß in Grad umgewandelt werden. Wird mit $\pi/180$ multipliziert, so kann auf diese Weise von Grad in Bogenmaß umgerechnet werden.

Rotationen im dreidimensionalen Raum können auf mehrere Arten repräsentiert werden:

- Rotationsmatrizen
- Quaternionen
- Eulerwinkel
- Achse und Winkel

Jede dieser Darstellung hat eigene Vor- und Nachteile [Par02] (Interpolation, Implementierung, Performance, Gimbal-Lock, etc.) und wird daher je nach Anwendungsgebiet

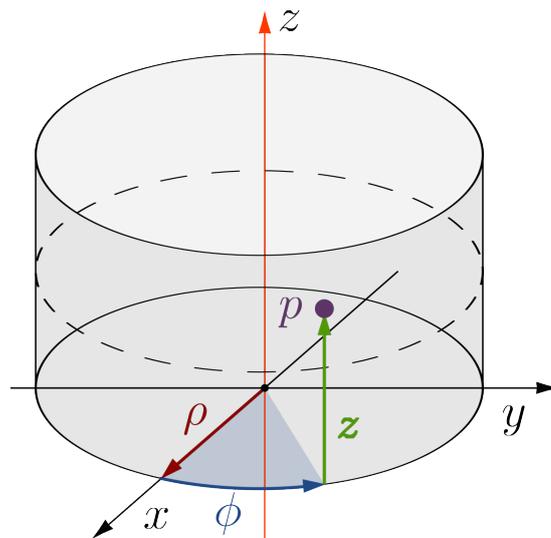


Abbildung 1.2: Darstellung eines Punktes p mithilfe von Zylinderkoordinaten. Dabei gibt ρ die Entfernung vom Ursprung der Projektion auf die xy -Ebene an, z die Distanz von p zu dieser Projektion und ϕ den Winkel zwischen dem Punkt p und der Polarachse.

verwendet. Neben Rotationsmatrizen werden in der vorliegenden Arbeit Rotationen als Kombination aus Achse und Winkel dargestellt, also als ein 2-Tupel (\vec{r}, ϕ) , bestehend aus einem Vektor bzw. der Drehachse \vec{r} und einem Winkel ϕ . Für eine kompakte Darstellung bezeichnet analog zu Gleichungen 1.15 $R_{\phi}^{\vec{r}}$ eine Rotation um die Achse $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ und den Winkel ϕ .

Kartesische Koordinaten sind die gängigste Parametrisierung eines Punktes $p \in \mathbb{R}^3$ (und analog dazu eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$) im dreidimensionalen Raum. In den folgenden Ausführungen wird außerdem von der Parametrisierung in Zylinderkoordinaten Gebrauch gemacht. Dabei handelt es sich um eine Parametrisierung als 3-Tupel

$$p = (\rho, \phi, z), \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \phi \in (0, 2\pi], z \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Die sogenannte Polarachse entspricht der x -Achse im kartesischen Koordinatensystem. Der Parameter ρ gibt die euklidische Distanz zum Ursprung des orthogonal auf die xy -Ebene projizierten Punktes p an. Mit ϕ wird der Winkel zwischen der Polarachse und des Punktes p angegeben. Der letzte Parameter z gibt die euklidische Distanz zwischen dem Punkt p und seiner orthogonalen Projektion auf die xy -Ebene an. Abbildung 1.2 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den Parametern.

Rotationssymmetrie

Symmetrien sind sowohl in der Natur als auch in menschlichen Produkten allgegenwärtig und üben schon immer eine Faszination auf Menschen aus. Betrachtungen zu Themen der Symmetrie spielen daher seit jeher eine wichtige Rolle in den Wissenschaften (vgl. [Liu08, S. 3ff.]). Allgemein sprechen wir von Symmetrie, wenn ein Objekt unter Anwendung einer bestimmten Operation bzw. Transformation eine seiner Eigenschaften beibehält. Eine Symmetrie ist also eine Invarianz, das heißt ein Objekt S nennen wir symmetrisch bezüglich einer Transformation M , wenn $MS = S$ gilt (vgl. [Liu08, S. 15] und [Mit+13]). Rotationssymmetrie im engeren Sinne bedeutet, dass für ein Objekt S eine Rotation R_ϕ^r existiert, sodass

$$R_\phi^r S = S, \quad r \in \mathbb{R}^3, \quad \phi \in (0, 2\pi] \quad (1.17)$$

gilt, wobei wir uns in dieser Arbeit auf den Fall beschränken, dass die Gleichung 1.17 für alle $\phi \in (0, 2\pi]$ erfüllt ist. Der zugehörige Zweig der Mathematik, welcher sich mit solchen Invarianten beschäftigt, ist die Gruppentheorie [Jae17; Rot12], welche weitläufige Anwendungen von Kryptographie bis hin zum Lösen von Rubiks Würfeln hat. Die mathematische Notation und der Verweis auf die Gruppentheorie verleitet dazu, dass Symmetrie als eine Eigenschaft betrachtet wird, die nur abstrakten Objekten innewohnt. Ein mathematischer Kreis beispielsweise weist eine Rotationssymmetrie um seinen Mittelpunkt auf, während jeder physikalisch existierende Kreis Unregelmäßigkeiten aufweist. Daher könnten diese, würde man den Symmetriebegriff auf den streng mathematischen Kontext beschränken, nicht als symmetrisch bezeichnet werden. Aber auch ein gezeichneter Kreis ist trotz seiner Unregelmäßigkeiten in einem gewissen Sinne rotationssymmetrisch und die zugehörige, dem Kreis innewohnende invariante Eigenschaft, wird auch als seine *Gestalt* bezeichnet [Arn54].

Die psychologische Dimension der Frage nach Symmetrie wird hier nicht weiter vertieft. In den folgenden Ausführungen wird der Begriff der Symmetrie jedenfalls im zuvor genannten Sinne verstanden. Er bezieht sich also auf Objekte, die in dem Sinne symmetrisch sind, dass ihre *Gestalt* trotz Rotation erhalten bleibt. Dies entspricht einer gängigen Definition, Symmetrie nicht als ein binäres Merkmal zu betrachten, welches vorhanden ist oder auch nicht, sondern als ein kontinuierliches Merkmal, welches zu einem bestimmten Grad vorhanden sein kann (vgl. [ZPA95] sowie [Liu08, S. 140ff.]). Dementsprechend ist ein Objekt S rotationssymmetrisch, wenn ein Objekt bis auf einen nichtkonstanten Fehlerterm ε rotationssymmetrisch im engeren Sinne ist. Darüber

hinaus sei ein Objekt S zusammengesetzt aus mehreren Teilmengen S_1, S_2, \dots, S_n , d. h. es gilt

$$S_i \subseteq S, \quad \text{und} \quad (1.18)$$

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = S. \quad (1.19)$$

Dabei bezeichnet S_1 den Teil des Objektes, welcher die Gestalt induziert und S_2, S_3, \dots, S_n zusätzliche Merkmale des Objektes. Wir bezeichnen dann ein Objekt als rotationssymmetrisch, wenn der gestaltgebende Teil S (bis auf einen Fehlerterm) rotationssymmetrisch ist. Ein Beispiel für eine solche Aufteilung ist eine Tasse mit einem Henkel. Dabei ist der Henkel ein nicht rotationssymmetrisches Merkmal des Objektes, der Rest der Tasse ist jedoch rotationssymmetrisch. Sofern nicht anders angegeben, wird zur Vereinfachung der Berechnung und Darstellung im Folgenden angenommen, dass die Rotationsachse mit der z -Achse zusammenfällt. Das zugehörige Objekt wird dann als korrekt ausgerichtet bezeichnet. Wenn die Rotationsachse von der z -Achse abweicht, wird das Objekt als inkorrekt ausgerichtet bezeichnet.

1.2 Digitalisierung und 3D-Scanning

3D-Modelle finden von der Architektur bis zu Computerspielen eine breite Anwendung. Für die folgenden Begriffsbestimmungen beschränken wir uns auf die für diese Arbeit relevanten Aspekte und gehen daher nicht auf Aspekte wie Materialeigenschaften oder Texturen ein. Ein 3D-Modell in unserem Kontext ist eine digitale abstrakte Repräsentation (vgl. [Yu+11]) eines Objektes. Als ein synthetisches 3D-Modell wird im Folgenden eine entsprechende Repräsentation eines nicht real existierenden Objektes bezeichnet. In jedem Fall basiert die Repräsentation auf einer Ansammlung von Punkten im 3D-Raum, welche durch geometrische Objekte verbunden sind. Wir beschränken uns dabei auf den am häufigsten verwendeten Ansatz von Dreiecken. Die Punkte eines 3D-Modells werden als Eckpunkte und die Dreiecke auch als Oberflächen bezeichnet. Jede dieser Oberflächen hat eine Orientierung, die Oberflächennormale oder kurz Normale genannt wird. Die Eckpunkte haben als eindimensionale Entität aus mathematischer Sicht keine Orientierung, aus technischen Gründen wird ihnen jedoch üblicherweise ebenfalls ein Richtungsvektor zugeordnet, die Eckpunktnormale. Die Gesamtheit der einem 3D-Modell zugeordneten Eckpunkte, Oberflächen und Normalen wird als Mesh

Abschnitt 1.3. RANSAC

(engl. für Drahtgitternetz) bezeichnet. Wir schreiben allgemein

$$S \in 3DO = \text{Menge aller 3D-Modelle} \quad (1.20)$$

für ein 3D-Modell S mit n Eckpunkten und definieren eine Operation

$$\cdot: SE(3) \times 3DO \longrightarrow 3DO, \quad (1.21)$$

$$M \cdot S = MS = \tilde{S}, \quad (1.22)$$

um die Anwendung einer Transformationsmatrix M auf dieses Objekt zu beschreiben. Im Kontext der Operation wird das 3D-Modell also aufgefasst als eine $4 \times n$ -Matrix, bestehend aus den Eckpunkten in homogenen Koordinaten.

1.3 RANSAC

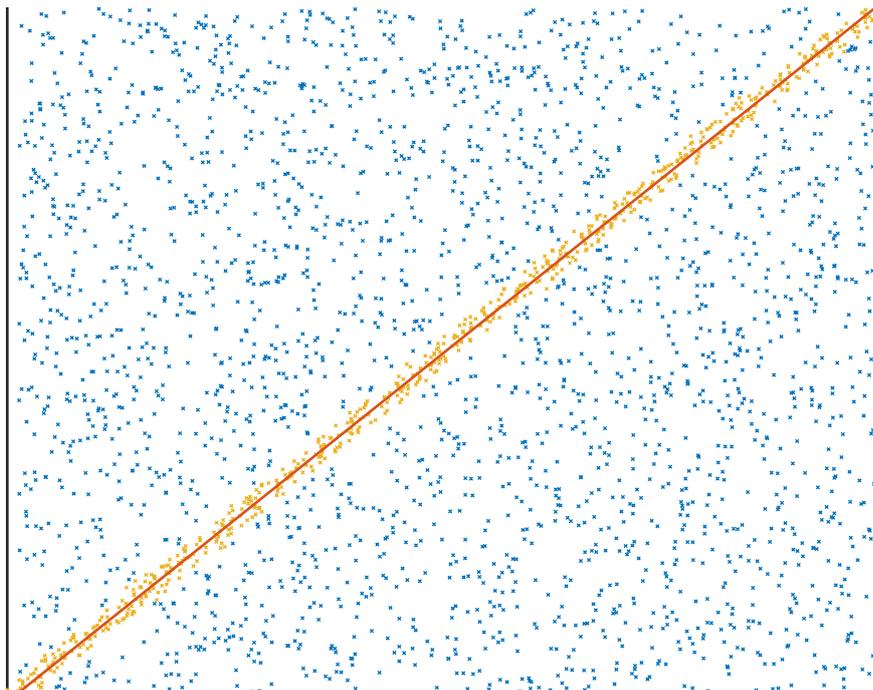


Abbildung 1.3: Mithilfe von RANSAC lassen sich auch in stark ver-räuschten Daten Strukturen identifizieren. Inlier sind orange, Ausreißer sind blau. In Rot ist das Modell mit den meisten unterstützenden Punkten eingezeichnet.

Bei RANSAC (random sample consensus) handelt es sich um ein Verfahren zur Schätzung eines Modells (z. B. einer Geraden), welches robust gegenüber Ausreißern (vgl.

Definition 1.1) ist. Insbesondere wird es im Bereich des maschinellen Sehens eingesetzt, um Eigenschaften von Bildern zu extrahieren [Sze22, S. 409]. Aufgrund der Robustheit handelt es sich um eines der am häufigsten eingesetzten Verfahren im Bereich des maschinellen Sehens [Rag+13].



Definition 1.1: Ausreißer und Inlier

Bei der Schätzung von Modellparametern können Punkte in den betrachteten Daten enthalten sein, welche nicht mit dem zu schätzenden Modell kompatibel sind. Diese Punkte werden auch als Ausreißer bezeichnet [Rag+13]. Mit dem Modell übereinstimmende Punkte werden als Inlier bezeichnet.

Dabei werden in einem ersten Schritt aus einer zufälligen und minimal notwendigen Menge an Datenpunkten die zugehörigen Parameter eines gegebenen Modells abgeleitet. Dieser Ansatz unterscheidet sich grundlegend von anderen robusten Verfahren wie M-Schätzern, welche versuchen, eine Abschätzung unter Berücksichtigung aller Datenpunkte vorzunehmen [Sze22, S. 409]. Nach der Erstellung des Modells werden die Datenpunkte gezählt, welche das Modell stützen, d. h. welche nicht weiter als ein vorher festgelegter Grenzwert vom Modell entfernt sind. Dieser Vorgang der Auswahl einiger weniger zufälliger Punkte und Zählung der das zugehörige Modell stützende Punkte wird nun wiederholt durchgeführt, wobei in jedem Durchlauf die Modellparameter anhand der zufällig gewählten Punkte abgeleitet werden. Das Ergebnis des Algorithmus ist das Modell mit der größten Unterstützung.

Es sei P die Menge der gegebenen Datenpunkte, V das Modell, dessen Parameter geschätzt werden sollen und n die Anzahl an Punkten die benötigt werden, um das Modell zu instantiieren. Vorab müssen drei Parameter festgelegt werden: Die maximal erlaubte Abweichung vom Modell ε , die Anzahl der durchzuführenden Iterationen i und die Mindestanzahl t an unterstützenden Punkten, damit ein Modell akzeptiert wird. Der formale Ablauf ist damit wie folgt (vgl. [FB81]):

1. Wähle eine zufällige Menge $L \subset P$ mit $|L| = n$ zufällig aus und instantiiere das Modell V mit den Elementen aus L
2. Ermittle die Menge $L^* \subset P$ der Datenpunkte, welche einen gegebenen maximalen Abstand ε von V aufweisen (auch Konsensmenge genannt)
3. Ist die Größe der Menge L^* größer als t , d. h. $|L^*| > t$, so wird das Modell akzeptiert

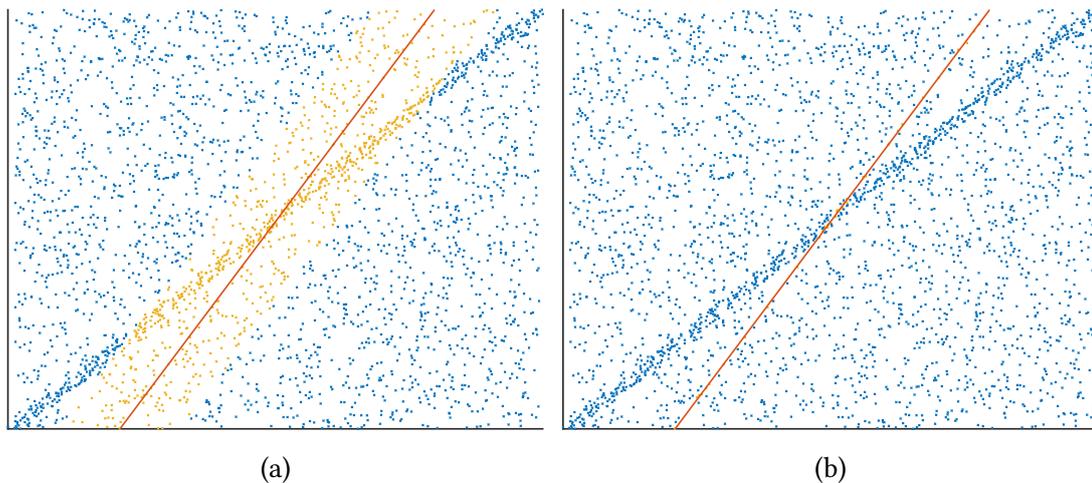


Abbildung 1.4: Der Einfluss der gewählten Fehlertoleranz ε auf das Ergebnis. (a) Wird ε zu groß gewählt, dann werden so viele Ausreißer fälschlich als Inlier identifiziert, dass ein Modell akzeptiert wird, das stark vom korrekten Ergebnis abweicht. (b) Wird ε hingegen zu klein gewählt, dann werden Inlier nicht mehr erkannt, wodurch das korrekte Ergebnis weniger unterstützende Punkte aufweist als ein Modell, welches aus Ausreißern gebildet wird.

4. Wiederhole Schritt 1 bis 3 solange, bis die Anzahl der Iterationen i erreicht ist
5. Gebe die akzeptierten Modelle aus

Je nach Kontext kann der Algorithmus auch verwendet werden, um genau ein passendes Modell zu finden. In dem Fall kann entweder der Algorithmus abgebrochen werden, wenn ein akzeptiertes Modell gefunden wird oder es werden alle Iterationen durchgeführt und das Ergebnis ist das Modell mit der größten Konsensmenge. Üblicherweise wird ein akzeptiertes Modell noch mithilfe klassischer Verfahren, wie z. B. Varianten Kleinst-Quadrat-Methoden, verfeinert, was auch als Glättung bezeichnet wird. Optimale Werte für die zu wählenden Parameter können jeweils vorab berechnet werden, wenn gewisse Informationen wie die Häufigkeit oder Verteilung der Ausreißer über die Daten bekannt sind. Diese stehen jedoch in praktisch allen relevanten Kontexten nicht zur Verfügung, sodass Heuristiken zur Schätzung der Parameter verwendet werden müssen. Diese werden aufbauend auf [FB81] und [Rag+13] im Folgenden vorgestellt, zusammen mit dem jeweiligen Einfluss der Parameterwahl auf das Ergebnis.

Erlaubte Abweichung vom Modell ε

Wie viel Abweichung sinnvollerweise vom Modell erlaubt sein soll, hängt in erster Linie von der erwarteten Qualität der Daten bzw. der Stärke des Rauschens ab. In [FB81] wird vorgeschlagen, die Fehlertoleranz experimentell zu ermitteln. Dazu wird den Daten zusätzliches Rauschen hinzugefügt sowie das zugehörige Modell und der durchschnittliche Fehler berechnet. Die gewählte Fehlertoleranz wird dann auf ein bis zwei Standardabweichungen jenseits des ermittelten durchschnittlichen Fehlers festgelegt. Zusätzlich kann experimentell ermittelt werden, welche Fehlertoleranz auf einem Teildatensatz ein zufriedenstellendes Ergebnis ergibt. Die Fehlertoleranz kann dann unter der Annahme festgelegt werden, dass zukünftige Bilddaten in einem sehr ähnlichen Kontext (verwendete Kamera, Lichtverhältnisse u. ä.) entstehen und damit die implizit in die Parameterwahl eingehenden Annahmen über Stärke und Verteilung des Rauschens konstant sind. In Abbildung 1.4 ist zu sehen, wie eine zu groß bzw. zu klein gewählte Fehlertoleranz das Ergebnis verfälscht.

Anzahl der Iterationen i

Im Idealfall würde aus jeder möglichen Kombination ein Modell bzw. die Konsensmenge gebildet werden. Für die meisten praktisch relevanten Fälle, insbesondere für Anwendungen im maschinellen Sehen, ist dies allerdings nicht möglich. Die Anzahl aller möglichen Kombinationen für ein aus n Datenpunkten gebildetes Modell ist die Anzahl aller möglichen Kombinationen $\binom{N}{n}$, wobei $N = |P|$ die Anzahl der Datenpunkte angibt. Ein möglichst einfaches Modell wird aus nur zwei Parametern gebildet (z. B. eine Gerade in 2D). Liegt die Anzahl der Datenpunkte in der Größenordnung von $N = 10\,000$, so ergeben sich demnach bereits $\binom{10\,000}{2} = 49\,995\,000 \approx 5,0 \cdot 10^8$ Kombinationen. Tabelle 1.1 gibt für verschiedene Varianten die Anzahl der möglichen Kombinationen an, um einen Eindruck von den auftretenden Größenordnungen zu vermitteln. Da eine Iteration durch alle Kombinationen daher nicht praktikabel ist, muss der Algorithmus zu einem bestimmten früheren Zeitpunkt beendet werden. Dazu sind zwei Ansätze denkbar (vgl. [FB81]): Es kann abgebrochen werden abhängig von der zu erwartenden Anzahl notwendiger Versuche k , die erforderlich sind, um eine Teilmenge von m Datenpunkten für das Modell auszuwählen, welche keine Ausreißer enthalten. Das Finden einer solchen Teilmenge wird im Folgenden auch als *Erfolg* bezeichnet. Dies ist abhängig von der vermuteten Wahrscheinlichkeit w , dass ein beliebiger Punkt kein Ausreißer ist. Die Anzahl ausgewählter Inlier ist binomialverteilt und

n \ N	$1,0 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^6$
2	$5,0 \cdot 10^8$	$5,0 \cdot 10^9$	$5,0 \cdot 10^{11}$
3	$1,6 \cdot 10^{11}$	$1,6 \cdot 10^{14}$	$1,6 \cdot 10^{17}$
4	$4,1 \cdot 10^{14}$	$4,1 \cdot 10^{18}$	$4,1 \cdot 10^{22}$
5	$8,3 \cdot 10^{17}$	$8,3 \cdot 10^{22}$	$8,3 \cdot 10^{27}$

Tabelle 1.1: Anzahl der Möglichkeiten, bei N gegebenen Datenpunkten ein Modell aus n Parametern zu bilden.

es ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von $p = w^{-m}$ eine solche Menge zu wählen. Für hinreichend kleine p kann dies mithilfe der Poisson-Verteilung approximiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für genau l gefundene ausreißerfreie Mengen bei k Versuchen ist dann

$$p(l, \lambda) = \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!}, \quad (1.23)$$

wobei λ den Erwartungswert von Erfolgen bei k Versuchen angibt. Soll nun mit 95 % Wahrscheinlichkeit ein solcher Erfolg erzielt werden, so ergibt sich die Anforderung $p(0, \lambda) = e^{-\lambda} < 0.05$ und damit $\lambda \approx 3$, also das im Durchschnitt drei gute Modelle gefunden werden müssen, um eine hinreichende Konfidenz zu gewährleisten (vgl. [Rag+13]). Ein weiterer Ansatz besteht darin, die Wahrscheinlichkeit z zu betrachten, dass mindestens eine Zufallsauswahl aus m Punkten keine Ausreißer enthält. Dazu muss k -mal ausgewählt werden, wobei

$$k \geq \frac{\log(1 - z)}{\log(1 - w^m)} \quad (1.24)$$

gilt (vgl. [FB81] und [Rag+13]). Die erwünschte Wahrscheinlichkeit z wird üblicherweise auf 0,95 oder 0,99 gesetzt. Da w in der Praxis meist nicht bekannt ist, kann entweder von besonders ungünstigen Bedingungen, also vielen Ausreißern bzw. kleinem w , ausgegangen werden oder es kann ein adaptives Verfahren angewendet werden [TZM98].

Mindestgröße der Konsensmenge t

Die Konsensmenge muss groß genug sein, um die darauf folgende Glättung erfolgreich durchzuführen und groß genug, dass mit einer gewissen Sicherheit davon ausgegangen werden kann, dass zufällig ausgewählte Punkte, welche das Modell instantiiert haben, keine Ausreißer enthalten. Eines solches Modell wird als *korrekt* bezeichnet und analog

Abschnitt 1.3. RANSAC

dazu wird ein Modell, welches mit mindestens einem Ausreißer instantiiert wurde, als *inkorrekt* bezeichnet. Sei y die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt innerhalb der Fehlertoleranz eines inkorrekten Modells liegt, dann sollte y^{t-n} möglichst klein sein. Für $y < 0.5$ ergibt sich mit $t - n = 5$ eine Wahrscheinlichkeit von über 95 %, dass die gefundene Konsensmenge zu einem korrekten Modell gehört. Die Anforderungen an die

$\delta \backslash y$	95 %	99 %	99,5 %
0.5	5	7	8
0.2	2	3	4
0.1	2	2	3

Tabelle 1.2: Mindestgröße der Differenz $t - n$, um bei einer Wahrscheinlichkeit von y eine rechnerische Sicherheit von δ zu erhalten, dass die gefundene Konsensmenge auf einem korrekten Modell basiert.

Konsensmenge für die Glättung hängen vom gewählten Verfahren ab, siehe [\[Rag+13\]](#) für eine Übersicht.

Erweiterungen: Efficient RANSAC und MSAC

Der ursprüngliche Ansatz hinter RANSAC wurde seit seiner Erstveröffentlichung im Jahr 1981 in vielerlei Hinsicht kontinuierlich erweitert, wobei sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für Anwendungen in spezifischen Kontexten Varianten entwickelt worden sind [\[CG01\]](#). In [\[Rag+13\]](#) wird ein Rahmenwerk zur Klassifizierung dieser Varianten vorgestellt und in [\[Sze22\]](#) wird eine Übersicht über wichtige Erweiterungen gegeben. Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten Erweiterungen beschrieben. Eine Reihe von Verbesserungen für RANSAC legen den Fokus darauf, Alternativmethoden zur Modellbewertung zu nutzen, anstelle der Inlier-Zählung zur Erstellung der Konsensmenge [\[Rag+13\]](#). In diesem Sinne kann RANSAC als ein Algorithmus zur Minimierung einer Kostenfunktion aufgefasst werden: Es seien $p_i \in \mathbb{R}^3$ die gegebenen Datenpunkte, V das zu validierende Modell und $d(V, p_i)$ der Abstand eines Punktes zum Modell. Die zugehörige Kostenfunktion bei RANSAC lautet dann

$$C = \sum_i c(p_i), \quad (1.25)$$

wobei

$$c(p_i) = \begin{cases} 1 & d(M, p_i) \leq \varepsilon \\ 0 & d(M, p_i) > \varepsilon \end{cases} \quad (1.26)$$

gilt. Ein Modell wird dementsprechend akzeptiert, wenn $C \geq t$ gilt. Dies ist äquivalent zu der bisher verwendeten Notation, dass die Konsensmenge mindestens t Elemente enthalten muss, also das $|L^*| \geq t$ gilt. Die Funktionen C und $c(p_i)$ können durch komplexere Varianten ersetzt werden. Bei MSAC [TZ98; TZ00] wird ein Maximum-Likelihood-Schätzer verwendet. Anstatt die Inlier zu zählen wird

$$c(p_i) = \begin{cases} d(V, p_i) & d(V, p_i) < \varepsilon \\ \varepsilon & d(V, p_i) \geq \varepsilon \end{cases} \quad (1.27)$$

festgelegt. Ausreißern wird also noch immer ein fester Wert zugewiesen, Inlier werden jedoch linear entsprechend ihrer Abweichung vom Modell gewichtet.

In [SWK07] wird mit Efficient RANSAC ein auf Punktwolken spezialisiertes RANSAC-Verfahren vorgestellt, welches die Laufzeit stark verbessert. Es können Ebenen, Sphären, Zylinder, Kegel und Tori erkannt werden. Das Verfahren lässt sich jedoch auf beliebige Formen erweitern. Die Verbesserung der Laufzeit wird durch mehrere Ansätze erreicht:

- Anstelle von zufälligen Punkten werden basierend auf einer hierarchischen Datenstruktur nah beieinander liegende Punkte ausgewählt
- Es wird eine Kostenfunktion verwendet, welche Punktnormalen und Zusammenhangskomponenten berücksichtigt
- Die Kostenfunktion wird hierarchisch für größer werdende Teilmengen von P ermittelt

Bei [SWK07] wird demonstriert, dass diese Optimierungen die Geschwindigkeit um den Faktor 20 erhöhen können. Insgesamt sind fünf Parameter vorgesehen:

epsilon Wie beim klassischen RANSAC wird die maximal erlaubte Abweichung eines Punktes zum Modell angegeben.

normal_threshold Zusätzlich wird die maximal erlaubte Abweichung eines Punktes zum Modell bezogen auf die Punktnormalen angegeben.

Abschnitt 1.3. RANSAC

cluster_epsilon Potentielle Inlier werden auf das Modell projiziert. Liegen Gruppen dieser Punkte weiter entfernt als der Parameter erlaubt, so werden diese Gruppen getrennten Modellen zugeordnet.

min_points Die minimale Unterstützung, welche ein Modell aufweisen muss.

probability Es wird die erforderliche Wahrscheinlichkeit festgelegt, dass kein überlegener Modellkandidat mehr gefunden wird.

KAPITEL 2

Archäologische Grundlagen

2.1 Einführung

Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren sind geeignet, um die Rotationsachse jeglicher rotationssymmetrischer Objekte zu bestimmen. Sie wurden jedoch in Hinblick auf die besonderen Begebenheiten entwickelt, welche sich im Kontext archäologisch relevanter Keramikscherben ergeben. Dieses Kapitel gibt eine Übersicht darüber, wie antike Keramikgefäße hergestellt worden sind und welche Besonderheiten sich damit für die resultierenden Scherben ergeben. Die Einordnung automatisierter Verfahren kann nur auf Grundlage eines Verständnisses der etablierten Prozesse geschehen, daher wird auch auf den wissenschaftlichen Umgang mit Keramikscherben in der Archäologie eingegangen. Abschnitt 2.2 zeigt, welche Besonderheiten sich aus den antiken Herstellungsmethoden ergeben. In Abschnitt 2.3 wird dargestellt, wie antike Scherben aufgefunden und archäologisch aufbereitet werden. Zuletzt werden in Abschnitt 2.4 die für diese Arbeit relevanten Merkmale dieser Objekte vorgestellt.

2.2 Entstehung antiker Keramikware

Der Herstellungsprozess antiker Keramik weist eine hohe Variabilität auf. In jedem Fall wurde als Grundstoff Ton bzw. Lehm verwendet. Ton bezeichnet dabei den eigentlichen Grundstoff. Bei Lehm handelt es sich um ein auf Ton basierendes Gemisch, welches im Regelfall vor allem mit Sand vermischt ist. Sowohl Ton als auch Lehm sind im Erdreich weltweit problemlos auffindbar, was zusammen mit ihren für die Weiterverarbeitung geeigneten physikalischen Eigenschaften die weite Verbreitung von Lehm als Werkstoff erklärt. Reiner Ton bietet nicht genug Stabilität als Werkstoff und wird daher ggf.

Abschnitt 2.2. Entstehung antiker Keramikware

Phase	Bezeichnung
1	Beschaffung des Rohmaterials
2	Aufbereitung des Rohmaterials
3	Formen des Gefäßes
4	Behandlung vor dem Brennen
5	Trocknen
6	Brennen
7	Nachbehandlung

Tabelle 2.1: Phasen der Keramikherstellung, nach [OHH13, S. 122]

nachträglich mit Sand und anderen lokal vor Ort vorhandenen Materialien vor der weiteren Verarbeitung zu Lehm vermischt (die sog. *Magerung*). Lehm lässt sich mit Wasser vermischt leicht formen und härtet luftgetrocknet aus. Wird dieser (abhängig von der genauen Materialzusammensetzung) Temperaturen von 550 °C bis 600 °C ausgesetzt, findet eine chemische Reaktion statt: Aus Lehm wird Keramik (vgl. [OHH13, S. 122f.] und [Ric15, S. 90ff.]).

Das Ergebnis ist beständig gegenüber Wasser und wird auch bei lang anhaltender Exposition nicht mehr zerfallen. Dieser für sich genommen einfache Herstellungsprozess hat im Laufe der Jahrtausende eine vielfältige Ausarbeitung erfahren, je nach technologischem und kulturellem Stand der jeweiligen Zivilisation und abhängig von den lokalen Möglichkeiten und Fähigkeiten. Tabelle 2.1 gibt eine Übersicht über die verschiedenen Phasen des Herstellungsprozesses. Jede Phase hat dabei einen Einfluss auf das Endergebnis. Die Brucheigenschaften der Keramik und ihre Widerstandsfähigkeit gegen Zerfall variieren in Abhängigkeit des Rohmaterials. Sie sind aber auch abhängig von der Vorbehandlung vor dem Brennen, der Brenntemperatur, der Nachbehandlung sowie weiterer Einflussfaktoren. Sie sind also insgesamt das Ergebnis eines komplexen Prozesses mit einer entsprechend großen Vielfalt an Resultaten. In Abhängigkeit davon, wann, wo und wie das ursprüngliche Gefäß hergestellt worden ist, weisen aufgefundene Scherben daher charakteristische Merkmale bezüglich der Farbe, Tonstruktur, Magerung und Bruchkante auf, welche wesentlich zur Identifizierung beitragen [OHH13, S. 71ff.]. Tabelle 2.2 zeigt Beispiele für die Ausprägungsvielfalt dieser Merkmale.

Die für die vorliegende Arbeit relevanteste Phase der Keramikherstellung ist das Formen des Gefäßes. Grundsätzlich lassen sich Methoden zum Formen dahingehend unterscheiden, ob diese unter Verwendung von Rotation entstehen oder nicht. In [Hun17, S. 104f.] werden insgesamt zwölf Techniken aufgelistet, welche ohne Rotation auskommen, sowie fünf rotationsbasierte Techniken, welche zu rotationssymmetrischen Objekten

Abschnitt 2.3. Aufbereitung, Analyse und Interpretation von Keramikfunden

Scherbenfarbe	Tonstruktur	Magerung	Bild
braun, hellrot-orange bis braunrot	hart gebrannt, dicht	Kalk, fein	
graubraun, gelbbraun, hellrot und ocker bis hellbraun	porös, hart gebrannt	kleine, schwarze Einschlüsse, Kalk, grob	
braun, grünlichgrau und grau-violett	hart gebrannt, feinporig	kleine, schwarze Einschlüsse, Kalk, mitte	

Tabelle 2.2: Auszug der Bestimmung der Merkmale von in Jordanien aufgefundenen Scherben [Ken12, S. VI, XI, XII].

führen. Häufig wurden verschiedene Techniken kombiniert, so werden Merkmale, wie z. B. Henkel, einem Gefäß nachträglich hinzugefügt. Aber auch die Grundform ist häufig als Ergebnis einer Kombination aus mehreren Techniken entstanden. Ein Beispiel dafür ist das nachträgliche Schlagen gegen die innere Gefäßwand mit einem Werkzeug, um die Wanddicke zu verringern [OHH13, S. 131]. Diese Herstellungsmodalitäten können zu Deformationen führen, welche den Grad an Rotationssymmetrie verringern.

2.3 Aufbereitung, Analyse und Interpretation von Keramikfunden

Der überwiegende Teil an Keramikfunden wird im Rahmen archäologischer Grabungskampagnen entdeckt. Bei solchen sich oft über mehrere Jahre erstreckende Kampagnen werden regelmäßig zehntausende Scherben ausgegraben [OHH13, S. 45]. Die große Menge macht eine vollständige wissenschaftliche Aufbereitung aller Einzelfunde unmöglich. Es haben sich daher Praktiken für den Umgang mit dieser Fundart etabliert, um möglichst viele Informationen zu erhalten [OHH13, S. 45]. Nach [OHH13, S. 25ff.] lassen sich die zu gewinnenden Informationen in drei Kategorien einteilen:

1. Fundamentale Informationen, welche sich auf einzelne Scherben beziehen.
2. Integrierte Informationen, die auf 1. aufbauen und sich auf Ansammlungen von Scherben beziehen.

3. Interpretationen, welche die Informationen in einen größeren Gesamtkontext einordnen.

1. Zuerst geht es um Fragen wie „Wann und wofür wurde das Objekt hergestellt?“ oder „Welche Form hatte das ursprüngliche Objekt?“. Diese Fragen müssen beantwortet werden, damit darauf aufbauend weitere Erkenntnisse abgeleitet werden können. Die Lage der Rotationsachse ist ebenso eine solche fundamentale Information und ohne diese können Fragen zu Form und Funktion nicht korrekt beantwortet werden.

2. Diese Informationen zu einzelnen Scherben können für sich genommen jedoch nicht sinnvoll interpretiert werden [OHH13, S. 24]. Erst aus der Betrachtung von Ansammlungen lassen sich archäologisch relevante Erkenntnisse ableiten. Ein Gefäß kann vor Ort hergestellt worden sein, im Rahmen des regelmäßigen Handels importiert worden sein, kann sich aber auch um ein einzeln importiertes Objekt handeln, welches normalerweise nicht in der Region aufzufinden ist. Nur die Gesamtbetrachtung aufgefundener Scherben kann daher Aufschluss über weitergehende Fragen liefern.

3. Zuletzt können die auf der Grundlage von Ansammlungen von Scherben gewonnenen Informationen weitergehend interpretiert werden. Hat in dem Zeitraum, zu denen es Funde gibt, ein gesellschaftlicher Wandel stattgefunden? Sind neue externe oder interne Einflüsse aufgetreten? Sowohl die integrierten Informationen, als auch die weitergehenden Interpretationen bauen auf den fundamentalen Fragestellungen auf.

Ein zentrales Mittel der Dokumentation ist die manuelle Erstellung von Zeichnungen. Häufig werden diese erstellt, nachdem die Scherben in die aufgestellte Klassifikation eingeordnet wurden und es werden dann für die Zeichnungen Repräsentanten aus diesen ausgewählt [OHH13, S.94]. Abbildung 2.1 zeigt einige Beispiele solcher Zeichnungen. Es gibt jedoch keine einheitlichen Standards, welche weitergehenden Informationen über einzelne Scherben oder Ansammlungen von Scherben an einem bestimmten Fundkontext oder generell für die jeweilige Grabung dokumentiert werden [OHH13, S.60ff.]. Zusätzlich können Keramikfunde häufig aufgrund ihrer schieren Menge meist nicht vollständig aufbewahrt werden [OHH13, S. 69]. Demgegenüber steht die Tatsache, dass archäologische Grabungen invasiv sind und nicht wiederholt werden können. Das bedeutet, alle Informationen, die nicht dokumentiert werden, sind in diesem Sinne dauerhaft verloren.

Traditionell ist die Analyse der Formen der aufgefundenen Scherben der zentrale Ansatz bei der archäologischen Aufbereitung von Keramikfunden. Dennoch existiert bis

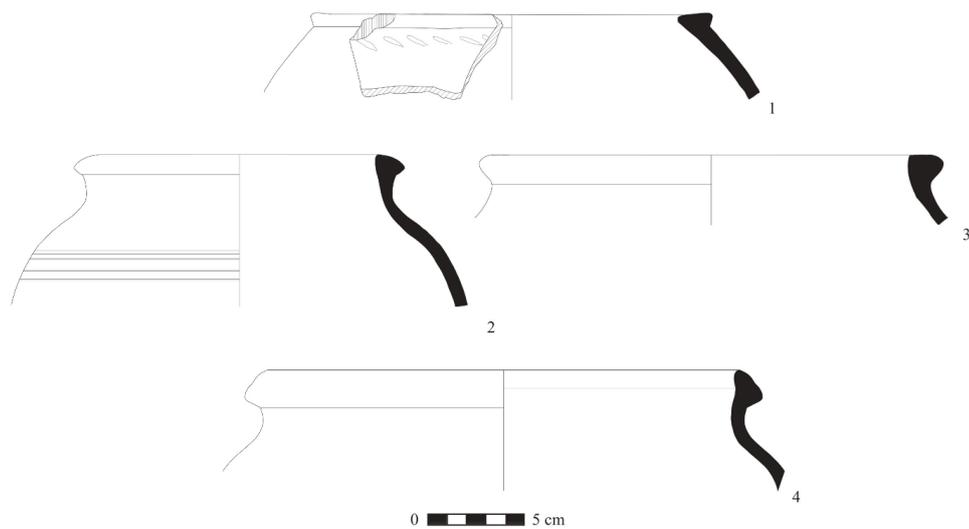


Abbildung 2.1: Zeichnungen von Keramikscherven nach archäologischen Standards (nach [Vie19, S. 375]).

heute kein einzelnes allgemein akzeptiertes System zur Klassifizierung der Form von Keramikfunden [OHH13, S. 81]. Stattdessen werden üblicherweise eine Mischung aus regionsspezifischen Standards und individuellen Bedürfnissen verwendet, welche sich an der Zusammensetzung der Funde und den archäologisch als aussichtsreich erachtete Fragestellungen orientiert. Der übliche Ansatz besteht darin, die Funde zuerst anhand der vermuteten Funktion zu klassifizieren, da diese einen wesentlichen Einfluss auf die Form hat (vgl. [OHH13, S. 82ff]). Die Klassifizierung basiert auf den bei den jeweiligen Grabungen aufgefundenen Scherven und kann daher nur begrenzt mit anderen Grabungen verglichen werden. Generell beruhen die Klassifizierungen auf subjektiven Einschätzungen, was zu unterschiedlichen Bewertungen durch verschiedene Archäologen führt [OHH13, S. 84]. Ein zusätzliches Problem besteht darin, dass sich eine klare Abgrenzung der Klassen aus mehreren Gründen als schwierig erweisen kann. Später gesichtete Funde können bezüglich einiger Aspekte eine Kombination aus zwei gewählten Klassen bilden oder sich generell nicht einer einzelnen Klasse zuordnen lassen [Ken12, S. 34]. Darüber hinaus tritt häufig das Problem auf, dass zu Anfangs scheinbar klare Grenzen zwischen zwei Klassen bei Sichtung von immer mehr Funden durch ein Kontinuum von Zwischentypen ersetzt werden und es dadurch immer schwerer wird, eine Grenze zu ziehen [OHH13, S. 84]. Abbildung 2.2 zeigt die Problematik anhand von zwei zueinander sehr ähnlichen Klassen.

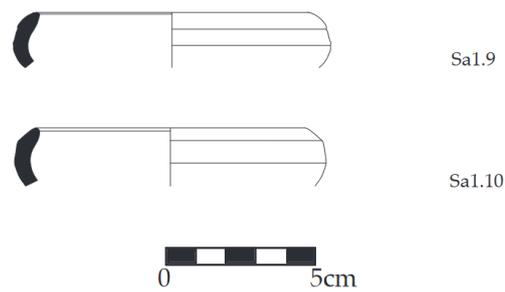


Abbildung 2.2: Die beiden Klassen Sa1.9 und Sa1.10 unterscheiden sich nur geringfügig voneinander (nach [Ken12, Tafel 14]). Siehe [Ken12, S. 108] für eine Diskussion der Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Klassen.

2.4 Regionen und Merkmale von Scherben

In Abschnitt 2.2 wurde gezeigt, dass Variationen in der Herstellung von Keramikgefäßen Einfluss auf das resultierende Objekt und damit auf die Scherben haben können. Die Form des Gefäßes folgt vor allem der jeweiligen Funktion, aber die technologischen Möglichkeiten haben einen großen Einfluss auf das Ergebnis. Es folgt eine Beschreibung der verschiedenen Regionen und Merkmale, welche Keramikscherben unabhängig von diesen Faktoren aufweisen bzw. aufweisen können. Da sich die vorliegende Arbeit rein mit morphologischen Eigenschaften beschäftigt, werden Verzierungen und andere Merkmale ausgelassen, welche keinen Einfluss auf die Form haben. Zuerst werden die im Rahmen dieser Arbeit relevanten Bereiche relevanten Regionen Rand, Innen/Außen, sowie Bruchkanten vorgestellt. Danach folgen mit dem Seitenprofil und dem Zentriwinkel zwei geometrische Merkmale von Scherben, welche für das weitere Verständnis der Arbeit von zentraler Bedeutung sind.

Rand

Eine für die Archäologie besonders interessante Region ist der obere Rand eines Gefäßes. Dieser lässt sich häufig nicht eindeutig vom Rest der Scherbe abgrenzen, eignet sich jedoch im Besonderen zur Klassifizierung und erfährt in der Archäologie daher besondere Aufmerksamkeit [She85, S. 245; Mar06, S. 30]. Er ist bei jedem Gefäß vorhanden, jedoch nicht notwendigerweise bei jeder Scherbe erhalten. Sprachlich werden Scherben als Randscherbe bzw. Bauchscherbe bezeichnet, in Abhängigkeit davon, ob der Rand vorhanden ist oder nur ein Teil des Bauches des Gefäßes vorliegt. Aufgrund

Abschnitt 2.4. Regionen und Merkmale von Scherben

der besonderen Rolle der Randscherben in der Archäologie wird im Folgenden die Existenz eines oberen Randes stets vorausgesetzt. Wenn nicht anders angegeben, dann sind also Randscherbe gemeint, wenn von Scherben gesprochen wird.

Innen und Außen

Teile des Inneren des ursprünglichen Objektes sowie Teile des Äußeren sind bei den hier betrachteten Scherben von Gefäßkeramik stets vorhanden. Diese beiden Regionen definieren die rotationssymmetrische Gestalt der Scherben und haben daher eine besondere Relevanz im Kontext dieser Arbeit. Die Kombination dieser Regionen wird im Folgenden auch als Innen/Außen bezeichnet.

Bruchkanten

Da in dieser Arbeit ausschließlich Scherben betrachtet werden, ist eine Bruchkante stets vorhanden. Abhängig von der Materialzusammensetzung und dem Herstellungsprozess kann eine glatte oder raue Bruchkante entstehen (vgl. Tabelle 2.2). Der Bruch kann gerade sein, was zu einer stark ausgeprägten Kante führt. Es können aber auch schräge Brüche auftreten, bei denen die Kante sehr flach ist. Abbildung 2.3 zeigt ein Beispiel einer Scherbe, welche sowohl einen geraden, als auch einen schrägen Bruch aufweist. Diese Variabilität kann eine Identifizierung der Bruchkante stark erschweren [Hua+06; PKT01].

Henkel und Dekoration

Neben den oben genannten zentralen Regionen können weitere vorhanden sein. Im Kontext dieser Arbeit sind dies Henkel und Dekorationen. Ein Henkel kann bei einer Scherbe ganz oder teilweise erhalten sein. Morphologisch relevante Dekorationen sind Veränderungen an der Keramik, welche dem rotationsbasierten Herstellungsprozess nachgelagert sind. Abgesehen von dem nachträglichen Auftragen von Material werden in [OHH13, S. 89f.] neun weitere Dekorationsmethoden aufgeführt. Ihre Gemeinsamkeit besteht darin, dass sie die rotationssymmetrische Gestalt des Objektes verringern.

Übersicht über die Regionen

Es gibt drei Regionen, welche Scherben prinzipiell aufweisen:

- Innen, also die im ursprünglichen Gefäß innenliegende Region



Abbildung 2.3: Eine Scherbe mit ausgeprägter, rauer Bruchkante. Der Rand ist durch einen schrägen Bruch mit flacher Kante unterbrochen.

Abschnitt 2.4. Regionen und Merkmale von Scherben

	Gefäß		Scherbe	
	Immer	Manchmal	Immer	Manchmal
Innen	✓		✓	
Außen	✓		✓	
Rand	✓			✓
Henkel		✓		✓
Dekoration		✓		✓
Bruchkante			✓	

Tabelle 2.3: Tabellarische Übersicht des Auftretens verschiedener Regionen bei Gefäßen bzw. Scherben.

- Außen, also die im ursprünglichen Gefäß außenliegende Region
- Eine oder mehrere Bruchkanten

Wenn nicht anders angegeben, dann wird in dieser Arbeit darüber hinaus die Existenz eines Randes angenommen. Abbildung 2.4 zeigt eine Übersicht über diese obligatorischen Scherbenregionen und Abbildung 2.5 zeigt eine Übersicht über die optionalen Merkmale. Tabelle 2.3 zeigt eine Übersicht über alle Regionen.

Seitenprofil

Ein Profilschnitt ist die Menge der Schnittpunkte eines Gefäßes mit einer Ebene, welche parallel zur z -Achse verläuft und diese schneidet. Das Seitenprofil (oder kurz: Profil) einer Scherbe bezeichnet die Überlagerung aller Profilschnitte. Das Profil zeigt dabei den charakteristischen Verlauf des Objektes und wird daher in der Archäologie als Grundlage für die Klassifizierung von Keramik verwendet. Bei einem rotationssymmetrischen Objekt sind alle Profilschnitte überlagert. Aufgrund von Unebenheiten und Deformationen ergeben sich bei archäologischen Scherben jedoch Abweichungen in den Profilen, wodurch diese nicht komplett überlagert sind. Bruchkanten sind nicht rotationssymmetrisch und überlagern sich daher grundsätzlich nicht mit dem restlichen Seitenprofil. Abbildung 2.6 zeigt einen einzelnen Profilschnitt sowie die Überlagerung der Profilschnitte, welche das Seitenprofil bilden. Mithilfe von Zylinderkoordinaten lässt sich das Seitenprofil sehr einfach berechnen. Es seien

$$p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^3, \quad p_i = (\rho_i, \phi_i, z_i), \quad i = 1, \dots, k \quad (2.1)$$

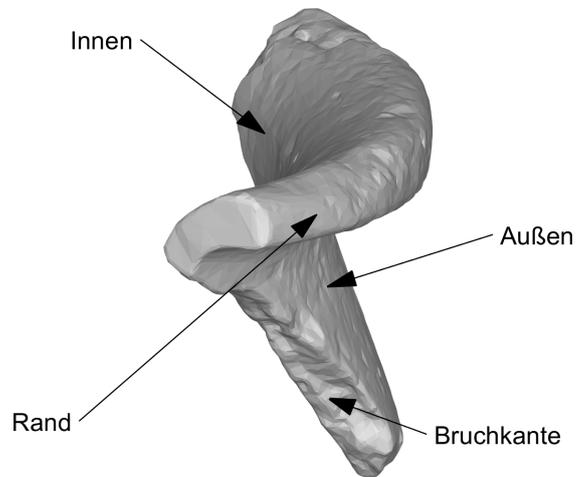


Abbildung 2.4: Das Innere, Äußere und eine Bruchkante sind definitionsgemäß stets bei einer Scherbe vorhanden. Der obere Rand wird im Kontext dieser Arbeit als vorhanden vorausgesetzt.

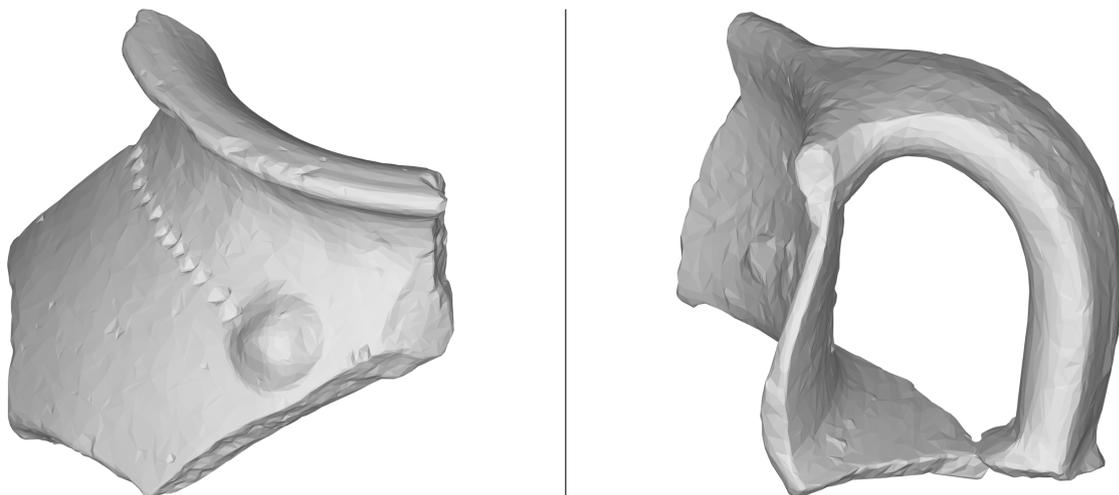


Abbildung 2.5: Dekoration oder ein Henkel können zusätzlich zu den obligatorischen Merkmalen auftreten.

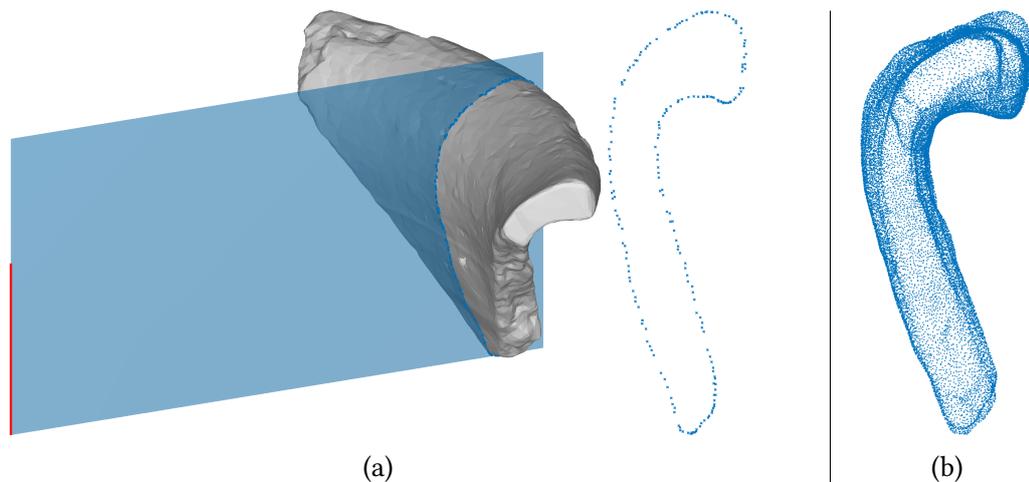


Abbildung 2.6: (a) Als Profilschnitt werden die Schnittpunkte der Scherbe mit einer zur z-Achse parallel verlaufenden Ebene bezeichnet. (b) Das Seitenprofil bezeichnet die Überlagerung aller Profilschnitte.

die Eckpunkte einer Scherbe $S \in 3DO$ in Polarkoordinaten. Das Seitenprofil ist dann die Projektion $\omega(S)$ in den 2D-Raum, welche sich durch

$$\omega(S) = p_1, p_2, \dots, p_k, \quad (2.2)$$

$$p_i = (\rho_i, z_i), \quad i = 1, \dots, k \quad (2.3)$$

ergibt.

Zentriwinkel

Der Begriff des Zentriwinkels (siehe Definition 2.1) stammt aus dem Teilbereich der Geometrie, welche sich mit Kreisen beschäftigt. Abbildung 2.7 veranschaulicht die Definition des Zentriwinkels.



Definition 2.1: Zentriwinkel

Ein Zentriwinkel (auch: *Mittelpunktswinkel*) ist ein Winkel, der von dem Mittelpunkt eines Kreises als Anfangspunkt und zwei auf diesem Kreis liegenden Punkten aufgespannt wird [RMW91, S. 450].

Im Kontext der Arbeit wird der Begriff für ein 3D-Modell einer Scherbe wie folgt erweitert: Für eine zur z-Achse orthogonalen Ebene bezeichnet der zugehörige Zentriwinkel den Winkel, welcher von der Rotationsachse und den äußersten Schnittpunkten dieser

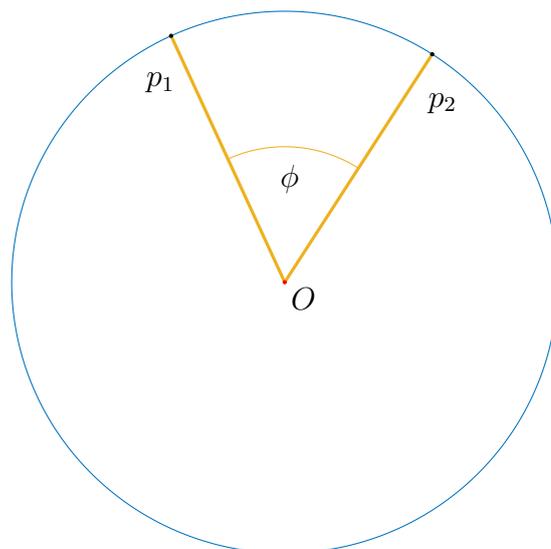


Abbildung 2.7: Ein Zentriwinkel ϕ wird aufgespannt durch den Mittelpunkt O eines Kreises als Anfangspunkt und zwei auf diesem Kreis liegende Punkte p_1 und p_2 .

Ebene mit dem 3D-Modell aufgespannt wird. Der Zentriwinkel einer Scherbe ist dann definiert als der größtmögliche zu einer solchen Ebene zugehörige Zentriwinkel. Zur näherungsweise Berechnung kann eine Anzahl von passenden äquidistanten Ebenen definiert werden und die Schnittpunkte dieser Ebenen mit dem 3D-Modell berechnet werden [Möl197]. Es seien

$$q_1, q_2, \dots, q_m \in \mathbb{R}^3, \quad q_i = (\rho_i, \phi_i, z_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

die Schnittpunkte des 3D-Modells mit einer einzelnen Ebene. Der Zentriwinkel dieser Ebene ist dann die Länge des kleinsten Intervalls, welches alle ϕ_i enthält, also

$$\phi_{max} = \max_i \phi_i - \min_i \phi_i. \quad (2.5)$$

Das Maximum der Zentriwinkel aller dieser Ebenen entspricht dann dem Zentriwinkel der Scherbe. Abbildung 2.8 veranschaulicht den Zentriwinkel einer Scherbe anhand eines Beispiels.

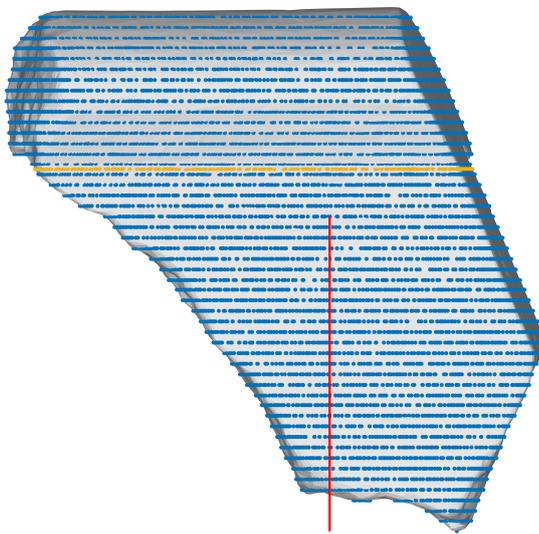


Abbildung 2.8: Der Zentriwinkel einer Scherbe ist der größte Zentriwinkel, welcher mithilfe von zur z-Achse orthogonalen Ebenenschnitten erreicht werden kann. In Blau sind Schnitte solcher Ebenen mit der z-Achse markiert und in Orange ist der Ebenenschnitt mit dem größten Zentriwinkel dargestellt.

KAPITEL 3

Existierende Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse

3.1 Einführung

Das erste Verfahren zur automatisierten Bestimmung der Rotationsachse archäologischer Keramikscherben wurde Ende der 90er Jahre in [HF97] vorgestellt und basiert auf geometrischen Eigenschaften der zum 3D-Modell zugehörigen Normalen. Seitdem entstanden verschiedene Verfahren, über die im Folgenden ein Überblick gegeben wird. In [Esl+20] wird ein allgemeiner Überblick über Verfahren zur Analyse archäologischer Keramikscherben gegeben. Dieser enthält (bis 2019) die Publikationen, die sich mit der Bestimmung der Rotationsachse befassen. Bei [Di +22] werden diese in verschiedene Verfahrensklassen aufgeteilt. Verfahren lassen sich dahingehend einteilen, welche geometrischen Eigenschaften als Grundlage für die Bestimmung der Rotationsachse verwendet werden. Die meisten Ansätze basieren auf Verfahren, bei denen die Normalen des 3D-Modells als Grundlage für die Bestimmung der Rotationsachse verwendet werden. [CM02; DDM14; HH14; SM99; WOC03]. Abweichend davon werden in [Hal99] und [MS06] Verfahren basierend auf Kreisschnitten vorgestellt. In [Kar10], [Wil+00] und [Wil+18] werden Verfahren basierend auf Profilschnitten vorgestellt. Ein weiterer Ansatz besteht darin, die durch händische Herstellung entstehenden konzentrischen Furchen insbesondere auf der Innenseite von Scherben als Grundlage zur Bestimmung zu verwenden. Dieser Ansatz wird in [DDM14] beschrieben. In der überwiegenden Mehrheit der Publikationen wird übereinstimmend berichtet, dass Verfahren erfolgreich eingesetzt wurden, nachdem zuvor entweder manuell oder mithilfe eines auf Normalen basierendes Verfahren eine erste Ausrichtung ermittelt wurde [DP18; Hal99; KS08; Wil+18]. In der Übersichtsarbeit [Di +22] wird zusätzlich hervorgehoben, dass

Verfahren basierend auf Normalen besonders geeignet sind, eine erste Schätzung der Rotationsachse zu ermitteln. In [MS06] wird jedoch anhand von synthetischen Modellen experimentell dargelegt, dass auf Normalen basierende Methoden nur eine sehr ungenaue Bestimmung der Rotationsachse erlauben, sobald die Objekte Unebenheiten aufweisen. Dies ist jedoch aufgrund der antiken Herstellungsmethoden, sowie der teilweise stattgefunden nachträglichen Bearbeitung, (vgl. Kapitel 2) bei archäologischer Keramikware stets der Fall.

Aus den oben genannten Gründen wird daher in der vorliegenden Arbeit der Ansatz einer Aufteilung des Prozesses in zwei Schritte verfolgt. Die Ermittlung einer ersten Ausrichtung wird als Grobausrichtung bezeichnet. Die darauf aufbauende Verbesserung durch ein zweites Verfahren wird als Feinausrichtung bezeichnet. Analog dazu wird ein Verfahren, welches eine Grobausrichtung ermittelt, als globales Verfahren bezeichnet. Ein Verfahren, welches eine Feinausrichtung ermittelt, wird als lokales Verfahren bezeichnet. Ein Verfahren basierend auf den Normalen sowie ein Verfahren basierend auf Kreisschnitten findet im weiteren Verlauf dieser Arbeit Anwendung. Daher werden diese Ansätze in den Abschnitten 3.2 und 3.3 genauer beschrieben. Neben der Darstellung der grundsätzlichen Idee wird jeweils das konkret verwendete Verfahren vorgestellt.

3.2 Normalen-Verfahren

Für ein rotationssymmetrisches Objekt $S \in 3DO$ schneiden die zum Objekt zugehörigen Normalen n_1, n_2, \dots, n_k die Rotationsachse. Dies gilt auch für jedes Teilobjekt $S_i \subseteq S$. Abbildung 3.1 zeigt diesen Zusammenhang zwischen den Normalen und der Rotationsachse. Einige Verfahren verwenden diesen Zusammenhang indirekt, d. h. es werden nicht die Normalen selber, sondern aus den Normalen abgeleitete Entitäten als Grundlage verwendet. So werden in [HH14] Ebenen über die Normalen definiert und in [CM02] werden Sphären als Grundlage verwendet.

Aufbauend auf [HF97] wird in [Wil+18] ein Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse vorgestellt, welches auf diesen Zusammenhang in direkter Weise aufbaut und nun beschrieben wird. Es sei

$$a = \vec{x}_0 + t_0 \cdot \vec{v}_0, \quad \vec{x}_0, \vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3, t_0 \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

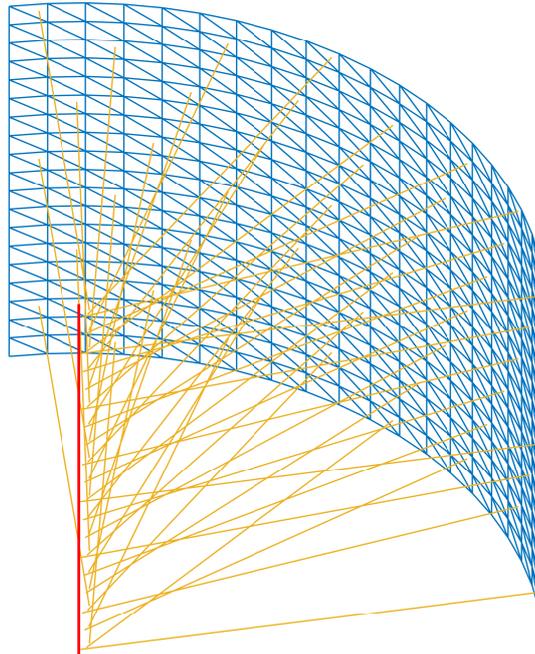


Abbildung 3.1: Die Normalen eines Teilobjektes eines rotationssymmetrischen Objektes schneiden sich auf der Rotationsachse.

die gesuchte Rotationsachse und es seien

$$\vec{n}_i = \vec{x}_i + t_i \cdot \vec{v}_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad \vec{x}_i, \vec{v}_i \in \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

die zu einem Objekt $S \in 3DO$ gehörenden Normalen. Der Abstand zwischen der Rotationsachse und jeweils einer Normalen lässt sich dann mit

$$d(\vec{n}_i, a) = \frac{|(\vec{x}_i - \vec{x}_0) \cdot (\vec{v}_i \times \vec{v}_0)|}{\|\vec{v}_i \times \vec{v}_0\|} \quad (3.3)$$

berechnen. Diese Distanzen lassen sich durch

$$\arg \min_a \sum_{i=1}^k d^2(\vec{n}_i, a) \quad (3.4)$$

mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate als Minimierungsproblem formulieren, um die Rotationsachse näherungsweise zu bestimmen. Der Parameterraum weist aufgrund von Gleichung 3.1 sechs Dimensionen auf. Das Minimierungsproblem 3.4 kann jedoch auf zwei Parameter reduziert werden, wenn berücksichtigt wird, dass die Vektoren \vec{x}_0 und \vec{n}_0 in einem linearen Zusammenhang zueinander stehen [HF97]. Das Mini-

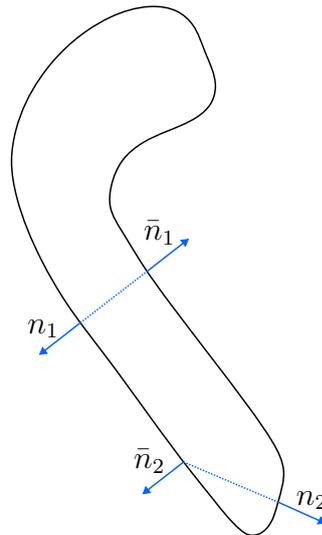


Abbildung 3.2: Zu einem auf dem Inneren/Äußeren liegenden Eckpunkt n_1 existiert ein in Gegenrichtung der zugehörigen Normalen liegender Eckpunkt \bar{n}_1 mit parallel verlaufender Normale. Für einen Eckpunkt n_2 , welcher nicht auf dem Inneren/Äußeren liegt, gilt dies nicht.

mierungsproblem wird mithilfe des im Bereich der nichtlinearen Optimierung weit verbreiteten Nelder-Mead-Verfahrens gelöst [Ara+19; CST97; NM65].

In [Wil+18] wird vorab Innen/Außen der Scherbe identifiziert, da dieser Teil die rotationssymmetrische Gestalt definiert (vgl. Abschnitt 2.4). Dazu wird die geometrische Eigenschaft verwendet, dass die Normalen des Inneren in die entgegengesetzte Richtung des Äußeren zeigen. Abbildung 3.2 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

Zur Vorverarbeitung der 3D-Modelle werden diese vorab mithilfe des als *Quadric Edge Collapse Decimation* bekannten Verfahrens auf 10 000 Eckpunkte reduziert. Zur Reduzierung von Unebenheiten werden die reduzierten Modelle darüber hinaus einer Laplace-Glättung [VMM99] unterzogen.

3.3 Kreisschnitte

Im Kontext archäologischer Keramikscherben wurde erstmalig in [Mar06] ein Verfahren basierend auf Kreisschnitten vorgestellt. Bei diesen Verfahren werden die Objekte mit Ebenen geschnitten, welche orthogonal zur z-Achse liegen. Für korrekt ausgerichtete Objekte sind die Schnittpunkte kreisförmig angeordnet, wobei der Mittelpunkt auf der Rotationsachse liegt. Das bedeutet insbesondere, dass die Abstände der Schnitt-

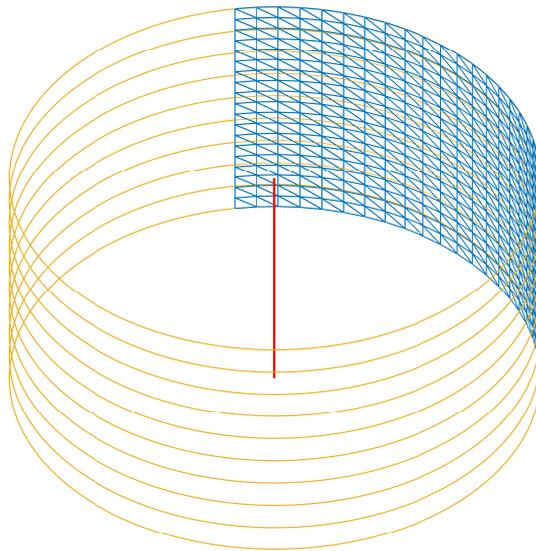


Abbildung 3.3: Schnitte mit Ebenen, welche orthogonal zur z-Achse verlaufen, sind kreisförmig.

punkte zur Rotationsachse konstant sind. Abbildung 3.3 zeigt diesen Zusammenhang. In [Wil+18] wird daher die mittlere Varianz der Abstände der Schnittpunkte zur Rotationsachse minimiert. Es seien wie in Gleichung 3.1 \vec{x}_0 und \vec{v}_0 zwei die Rotationsachse a definierende Vektoren und \vec{p} der durch den Punkt p definierte Vektor. Die Distanz zwischen a und p lässt sich dann durch

$$d(p, a) = \frac{\|(\vec{p} - \vec{v}_0) \times (\vec{p} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x}_0 - \vec{v}_0\|} \quad (3.5)$$

berechnen [Wei23]. Diese Abstände werden analog zu Abschnitt 3.2 als Minimierungsproblem formuliert und mit dem Nelder-Mead-Verfahren gelöst.

KAPITEL 4

Repeated-RANSAC-Verfahren

4.1 Einführung

Das Repeated-RANSAC-Verfahren (im Folgenden als *RRANSAC* bezeichnet) baut auf dem in Abschnitt 1.3 beschriebene Verfahren Efficient RANSAC auf, einem Verfahren zur Segmentierung (siehe Definition 4.1) von räumlichen 3D-Daten.



Definition 4.1: Segmentierung

Unter Segmentierung wird die Einteilung eines Bildes, eines Meshes oder allgemein einer Form nach geometrischen, semantischen oder topologischen Kriterien verstanden. Segmentierung wird in vielen Bereichen der Computergrafik angewendet, zum Verstehen von 3D-Szenen, aber auch zur Kompression, Vereinfachung oder Kollisionsdetektion von Objekten [Att+06; GW02; Yu+11].

In Kapitel 3 wurden die gängigen Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse vorgestellt. Diese verwenden nicht die im maschinellen Sehen üblichen Ansätze zur Interpretation von Objekten [Yu10] und insbesondere keine Verfahren zur Segmentierung von Objekten, sondern greifen spezifische geometrische Eigenschaften auf, welche sich aus der Rotationssymmetrie ableiten. Der Grund dafür liegt in der Natur der Problemstellung: Archäologische Keramikscherben lassen sich nur sehr eingeschränkt auf einzelne simple Geometrien wie Zylinder oder Ebenen reduzieren oder in klar abgegrenzte semantische Regionen einteilen (vgl. auch Abschnitt 2.4). Darüber hinaus lässt sich aus einer Segmentierung in Regionen wie Innenseite, Bruchkante oder Rand die Rotationsachse nicht direkt ableiten. Aufgrund der amorphen Form der Scherben sind die Übergänge zwischen einzelnen Regionen meist fließend und zusammen mit der



(a)



(b)

Abbildung 4.1: (a) Viele alltägliche Objekte lassen sich in klar abgegrenzte, geometrische Formen (rot) einteilen. (b) Keramikscherben sind hingegen weitgehend amorph (Bildquelle: BAI-Wuppertal).

großen Formvariabilität bei archäologischen Keramikscherben ergibt sich, dass sich nur schwer allgemein gültige Ansätze zur Segmentierung ableiten lassen. Eine Segmentierung setzt üblicherweise passende geometrische Formen oder zumindest morphologisch robuste Eigenschaften voraus, welche im hier gegebenen Kontext nicht bzw. nur sehr eingeschränkt vorliegen. Abbildung 4.1 zeigt den qualitativen Unterschied der Problemstellungen. In Kapitel 2 wurde dargelegt, dass aufgrund der Vielfalt der Objekte in Hinblick auf ihre Form und Beschaffenheit Merkmale in ihrer Ausprägung stark variieren können.

Bei RRANSAC werden diese Probleme umgangen, indem mit Efficient RANSAC zwar ein klassischer Ansatz zur Segmentierung verwendet wird, dieser aber mit einer sich aus der Rotationssymmetrie ergebenden geometrischen Eigenschaft kombiniert wird. Aufgrund der Symmetrie und des stetig verlaufenden Seitenprofils sind die Scherben stückweise zylinderförmig (siehe Abbildung 4.2). Zwar lässt sich keine eindeutige Segmentierung in Zylinder durchführen, jedoch ist dies zur Bestimmung der Rotationsachse nicht notwendig. Es ist ausreichend, dass die Zylinderachsen in einer Ebene mit der Rotationsachse liegen bzw. diese schneiden. In Abbildung 4.3 ist diese Grundidee

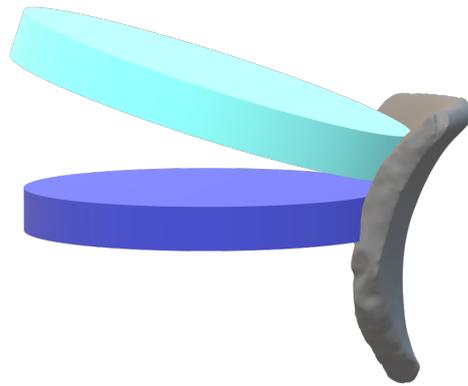


Abbildung 4.2: Keramikscherben sind stückweise zylinderförmig.

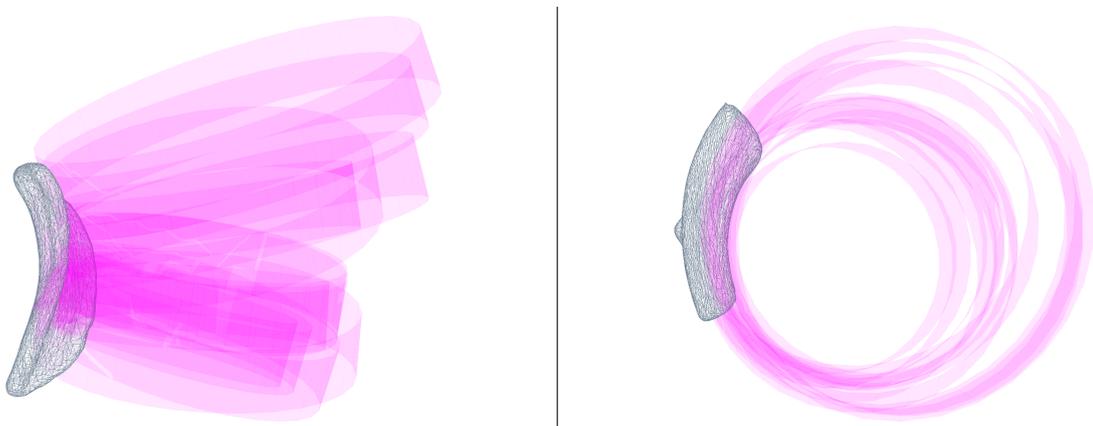


Abbildung 4.3: Zylindrische Formen überschneiden sich bei Scherben. Die Zylindermittelpunkte schneiden dabei die Rotationsachse.

dargestellt. Eine solche Segmentierung ist jedoch nicht nur uneindeutig, sondern auch stark fehlerbehaftet, denn zylindrische Formen lassen sich je nach Grundform auch unabhängig von der Rotationssymmetrie finden. Daher lässt sich aus ihr im Regelfall nicht ohne weiteres die Rotationsachse nicht rekonstruieren. Aufgrund der Uneindeutigkeit der Segmentierung kann diese jedoch mehrfach durchgeführt werden, um so hinreichend viele Zylinder zu identifizieren, dessen Mittelpunkt mit der Rotationsachse zusammenfällt.

Das 3D-Modell durchläuft bei RRANSAC zuerst einen mehrstufigen Vorverarbeitungsschritt. Auf das so vorbereitete 3D-Modell wird nun wiederholt das Efficient RANSAC Verfahren angewendet, um zylinderförmige Bereiche im Modell zu identifizieren. Aus den daraus resultierenden Zylindermittelpunkten werden Ausreißer entfernt und ein robustes Line-Fitting durchgeführt, um die Rotationsachse zu ermitteln. Das Ergebnis

Abschnitt 4.1. Einführung

wird zuletzt noch mithilfe eines Kleinste-Quadrate-Verfahrens optimiert. Abbildung 4.4 zeigt den Ablauf und welche Eingabe bzw. Ausgabe die einzelnen Schritte haben.

In Abschnitt 4.2 wird auf die für das Verfahren notwendigen Schritte zur Vorverarbeitung eingegangen. Das wiederholte Aufrufen von RANSAC wird in Abschnitt 4.5 genauer beschrieben und in Abschnitt 4.4 werden die darauf aufbauenden Schritte beschrieben. Zuletzt werden in Abschnitt 4.5 die bei RRANSAC festzulegenden Parameter aufgelistet und der Einfluss dieser auf das Ergebnis wird diskutiert.

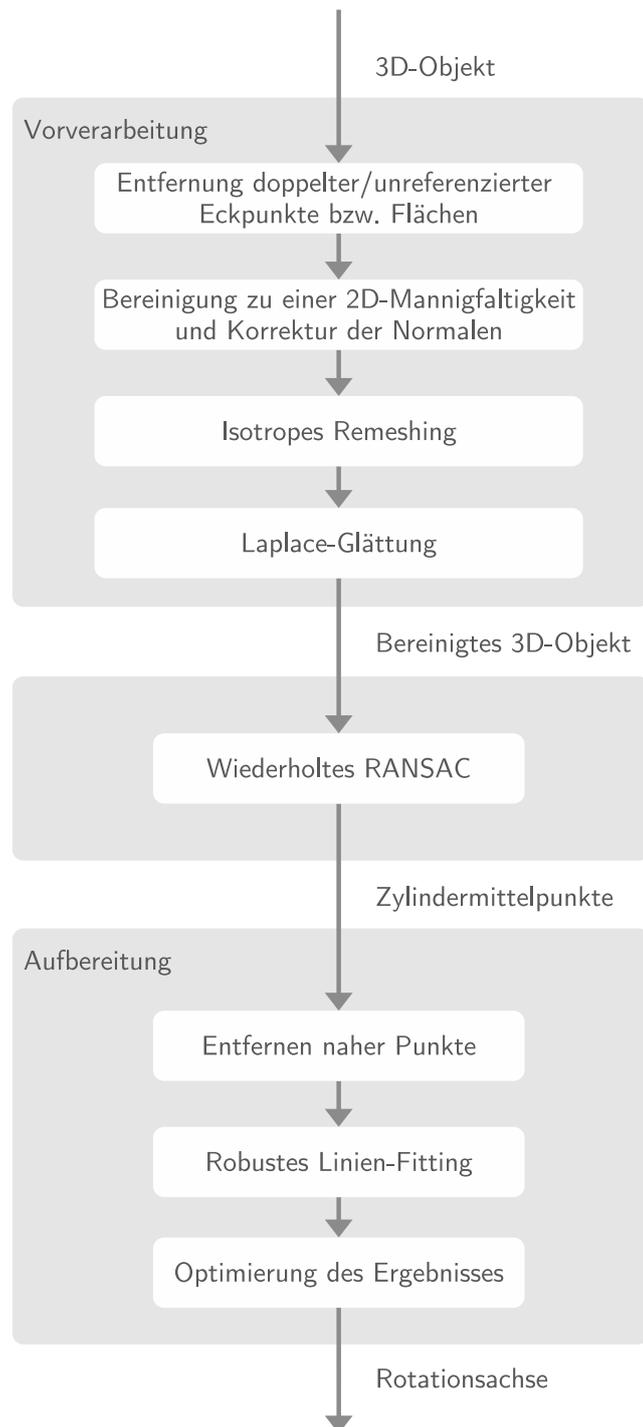


Abbildung 4.4: Übersicht über die im Verfahren stattfindenden Schritte. Nach einer Vorverarbeitung werden mithilfe von wiederholten Aufrufen von RANSAC Zylindermittelpunkte generiert, aus welchen dann die Rotationsachse abgeleitet wird.

4.2 Vorverarbeitung

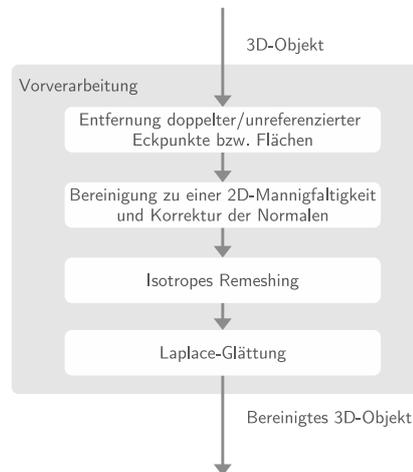


Abbildung 4.5: Ausgehend vom unbereinigten 3D-Modell werden zuerst Eckpunkte und Flächen entfernt, sodass eine 2D-Mannigfaltigkeit entsteht. Danach werden die Normalen korrigiert und zuletzt wird das Modell geglättet.

Bevor das eigentliche Verfahren angewendet wird, durchläuft das Modell eine Reihe von Vorverarbeitungsschritten (siehe Abbildung 4.5). Einerseits sollen Scan-Artefakte korrigiert werden, um ein fehlerfreies Funktionieren der Verfahren zu gewährleisten. Andererseits wird die Geometrie des Meshes vereinheitlicht, sodass in den folgenden Schritten robustere Annahmen über dieses getroffen werden können. Dabei werden unreferenzierte und doppelte Eckpunkte, sowie doppelte Oberflächen entfernt. Im Anschluss werden Oberflächen entfernt die verhindern, dass das Modell eine 2D-Mannigfaltigkeit bildet (siehe Definition 4.2).



Definition 4.2: 2D-Mannigfaltigkeit

Eine 2D-Mannigfaltigkeit ist eine zweidimensionale Oberfläche, eingebettet im dreidimensionalen Raum (vgl. [Lee10, S. 3]).

Es werden ggf. falsch ausgerichtete Normalen korrigiert, sodass sie einheitlich nach außen vom 3D-Modell weg zeigen. Diese Säuberungen verbessern das spätere Ergebnis, da sie die Konstruktion entarteter Zylinder sowie falsche Zählungen bezüglich der Inlier verhindern. Sie verhindern außerdem, dass Punkte aufgrund einer falsch ausgerichteten Normalen nicht richtig zugeordnet werden können.

Abschnitt 4.3. Wiederholtes RANSAC

Nach diesen korrektiven Veränderungen wird die Geometrie des Meshes verbessert. Es wird ein isotropes Remeshing (siehe Definition 4.3) durchgeführt, sodass die Eckpunkte gleichförmig auf dem Modell verteilt sind. Dies ist wichtig, da im weiteren Verlauf Bezug auf den durchschnittlichen Eckpunkteabstand genommen wird. Durch das isotrope Remeshing ist gewährleistet, dass die Eckpunkte nur gering von dem Durchschnitt abweichen.



Definition 4.3: Isotropes Remeshing

Beim isotropen Remeshing besteht das Ziel darin, dass das Mesh aus möglichst gleichförmigen Dreiecken besteht [Kha+22; Xu+19].

Es wird dabei der Algorithmus aus [BK04] verwendet, bei welchem wiederholt Kanten aufgeteilt, zusammengefügt und gespiegelt werden, um das gewünschte Ergebnis zu erreichen.

Herstellungs- und witterungsbedingt können die Scherben Unebenheiten aufweisen. Diese werden mithilfe einer Laplace-Glättung [Sor05] ausgeglichen, indem die Eckpunkte entsprechend der gemittelten Position ihrer direkten Nachbarn verschoben werden. Dies verbessert die Erkennung der Zylinder, da so auch bei kleinerer Fehlertoleranz mehr korrekte Inlier identifiziert werden können.

4.3 Wiederholtes RANSAC

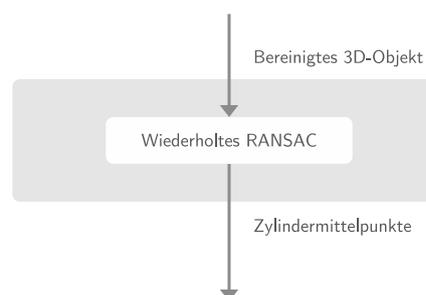


Abbildung 4.6: Aus dem bereinigten 3D-Objekt werden durch wiederholtes Ausführen von RANSAC Zylindermittelpunkte generiert.

Mit dem aufbereiteten Modell wird nun das wiederholte RANSAC durchgeführt (siehe Abbildung 4.6). Wie in der Einführung dieses Kapitels bereits erwähnt, wird dabei Efficient RANSAC verwendet. Dieses ist speziell für räumliche 3D-Daten konzipiert und berücksichtigt insbesondere neben den Eckpunkten auch die Normalen der Eckpunkte.

Abschnitt 4.4. Aufbereitung

Es wird eine Segmentierung in Zylinder durchgeführt. Aufgrund des kontinuierlichen Profilverlaufs finden sich in jeder Profilhöhe überlagernde Zylinderformen. Die Höhe der Zylinder ist dabei antiproportional zur Krümmung des Profils an dieser Stelle. Aufgrund dieser Überschneidungen kann es keine eindeutige Segmentierung geben.

Eine Segmentierung an sich ist daher in der Regel nicht erfolgversprechend. Das stellt jedoch kein Problem dar, denn das eigentliche Ziel besteht nicht in einer Segmentierung der Scherbe. Stattdessen sollen möglichst viele sich ggf. überlappende Zylinder gefunden werden. Dazu wird die Segmentierung wiederholt durchgeführt. Würde diese jedoch stets mit derselben Parametersequenz ausgeführt werden, so würden die Ergebnisse jeweils nahezu identisch zueinander sein. Um das zu vermeiden, wird das Verfahren bei jedem Durchlauf mit einem anderen Wert für die Fehlertoleranz ε (vgl. Abschnitt 1.3) aufgerufen. Dieser Parameter wird variiert, da er den größten Einfluss auf das Ergebnis hat, ohne dass das eigentliche Ziel, das Auffinden der überlappenden Zylinder, beeinträchtigt wird. Durch das isotrope Remeshing im Vorverarbeitungsschritt haben die Eckpunktabstände nur eine geringe Varianz, daher kann ε robust in Abhängigkeit von diesen gewählt werden.

4.4 Aufbereitung

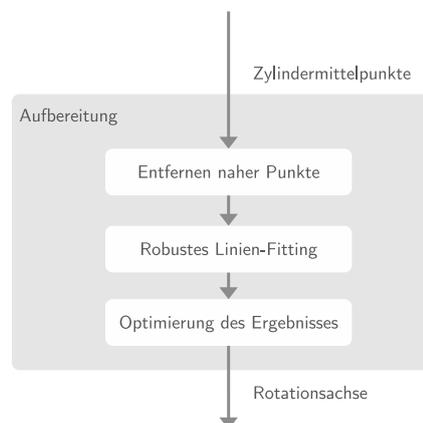


Abbildung 4.7: Im Zuge der Aufbereitung wird aus den Zylindermittelpunkten die Rotationsachse generiert.

Entfernen naher Punkte

Bevor aus den Zylindermittelpunkten die Rotationsachse rekonstruiert wird, werden die Ergebnisse noch gesäubert (siehe Abbildung 4.7 für eine Übersicht). Dabei werden

Abschnitt 4.4. Aufbereitung

Zylindermittelpunkte entfernt, welche sehr nah am Modell liegen, da diese keine Inlier sein können. Dies hat zwei Vorteile: zum einen können beim wiederholten Aufrufen von RANSAC viele sehr kleine Zylinder auftreten, welche dazu führen können, dass die Rotationsachse nicht richtig erkannt wird. Zum anderen kann der Profilverlauf von Scherben derart verlaufen, dass zylindrische Formen unabhängig von der Rotationsachse auftreten. Abbildung 4.8 zeigt ein Beispiel einer solchen Scherbe.

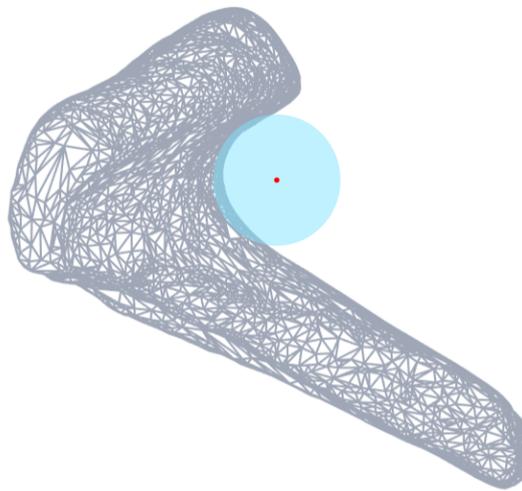


Abbildung 4.8: Scherben können derart geformt sein, dass ihr Profilverlauf jenseits der Rotationsachse zylindrische Formen impliziert

Die zugehörigen Teile der Scherbe sind für sich betrachtet ebenso rotationssymmetrisch wie die Scherbe an sich, was ein prinzipielles Problem darstellt, unabhängig vom gewählten Verfahren zur Rotationsachsenbestimmung. Ein auf Oberflächennormalen basierte Ansatz kann diese Tatsache nicht berücksichtigen. Das liegt daran, dass dabei ein Optimierungsproblem auf Grundlage von Richtungsvektoren gelöst wird, für welche ein Abstand zum 3D-Modell als Eigenschaft nicht existiert.

Der erforderliche Mindestabstand für das Entfernen kann in Abhängigkeit vom mittleren Eckpunktabstand des 3D-Modells gewählt werden. Er darf den zu erwartenden Abstand des 3D-Modells von der Rotationsachse nicht überschreiten, da sonst die Zylindermittelpunkte, welche die Rotationsachse beschreiben, entfernt werden.

Robustes Linien-fitting

Die generierten Zylindermittelpunkte können viele Ausreißer enthalten, welche im vorherigen Schritt noch nicht entfernt worden sind. Daher wird die Rotationsachse mithilfe eines robusten Verfahrens rekonstruiert. Es gibt drei verschiedene Ansätze für robuste Verfahren:

- Kleinste-Quadrate-Schätzer
- Hough-Transformation
- RANSAC

Weit verbreitete robuste Varianten von Kleinste-Quadrate-Schätzern sind zum Beispiel M-Schätzer und Median-Regression [RL05]. Ein Nachteil dieser Verfahren ist jedoch, dass ihr *Breakdown Point* bei 50 % liegt, d. h. maximal die Hälfte der Punkte dürfen Ausreißer sein [DG07; Mee+91]. Verfahren basierend auf Hough-Transformation sind nur für Modelle mit sehr wenigen Parametern geeignet, darüber hinaus ist die Laufzeitkomplexität sehr hoch [IK88]. Wie schon in Kapitel 1.3 dargelegt, sind daher RANSAC-basierte Verfahren eine häufige Wahl. Da bei der Berechnung der Zylindermittelpunkte auch mehr als 50 % Ausreißer auftreten können und ein Zylinder mit beliebiger Höhe durch insgesamt sieben Parameter bestimmt ist (seinen Radius $r \in \mathbb{R}$ sowie einen Stützpunkt $p \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$), wird hier auf ein RANSAC-Verfahren zurückgegriffen. Dabei wird das in Abschnitt 1.3 beschriebene Verfahren MSAC verwendet, eine auf M-Schätzern basierte Verbesserung von RANSAC. Als Fehlertoleranz wird $\varepsilon = 1,96 \cdot \sigma$ gewählt, sodass Inlier in nur 5 % der Fälle fälschlich abgelehnt werden (vgl. [TZ00]). Der Parameter σ bezeichnet dabei die der Normalverteilung zugehörigen Standardabweichung. Diese wird basierend auf der Median-Abweichung der Zylindermittelpunkte wie folgt abgeschätzt: Die Inlier $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ liegen normalverteilt um die Rotationsachse. Der euklidische Abstand zweier solcher Punkte x_n und x_m beträgt

$$d(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{n_i} - x_{m_i})^2}. \quad (4.1)$$

Abschnitt 4.5. Einfluss der Parameterwahl

Der Abstand folgt also einer Chi-Verteilung mit drei Freiheitsgraden. Der Mittelwert dieser Verteilung beträgt (vgl. [Cha+12; JKB94])

$$\mu = \sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1,5)} \cdot \sigma \approx 1,6 \cdot \sigma. \quad (4.2)$$

Sind mindestens 50 % der Punkte Inlier, so ergibt der Medianabstand \tilde{X} eine gute Abschätzung für den durchschnittlichen Abstand der Inlier, d. h. $\mu \approx \tilde{X}$. Damit erhalten wir als Abschätzung der Standardabweichung

$$\sigma \approx \frac{\mu}{1,6} \quad (4.3)$$

und damit als Abschätzung der Fehlertoleranz

$$\varepsilon = \frac{1,96}{1,6} \cdot \mu = 1,225 \cdot \mu. \quad (4.4)$$

Optimierung des Ergebnisses

Im letzten Schritt wird die ermittelte Rotationsachse noch mithilfe eines zweiten Verfahrens optimiert. Dabei handelt es sich um ein übliches Vorgehen, um das Ergebnis eines RANSAC-Verfahrens zu verbessern [Rag+13]. An dieser Stelle werden nur noch die im letzten Schritt identifizierten Inlier berücksichtigt. Auf diese Weise kann ein Verfahren ohne Rücksicht auf Robustheit verwendet werden. Wir folgen dabei dem Ansatz aus [Hal99] und verwenden das klassische Kleinste-Quadrate-Verfahren. Der Einsatz elaborierterer Verfahren ist zwar möglich, aber nicht zielführend: Die Zylindermittelpunkte selber sind bereits fehlerbehaftet, sodass eine bestmögliche Rekonstruktion der Rotationsachse basierend auf diesen Daten ohnehin nicht möglich ist. Dies stellt kein Problem dar, da das Ziel bei RRANSAC darin besteht, eine Grobausrichtung vorzunehmen, d. h. eine initiale Rotation zu ermitteln. Auf dieser Grundlage können die in Kapitel 3 beschriebenen lokalen Verfahren zur weiteren Optimierung des Ergebnisses verwendet werden.

4.5 Einfluss der Parameterwahl

Da RRANSAC auf Efficient RANSAC aufbaut, erbt es auch die diesem Verfahren innewohnenden Parameter. Diese werden nun im Kontext der hier spezifischen Zielstellung

Abschnitt 4.5. Einfluss der Parameterwahl

besprochen. Darüber hinaus werden bei RRANSAC weitere Parameter eingeführt: Die Anzahl der Wiederholungen, aber auch die vorab festgelegte obere- bzw. untere Schranke für das ε -Intervall. Im Folgenden werden Überlegungen dargelegt, auf dessen Grundlage die Parameter festgelegt werden müssen.

Die von Efficient RANSAC geerbten Parameter sind (vgl. Abschnitt 1.3)

- `normal_threshold`,
- `cluster_epsilon`,
- `min_points` und
- `probability`.

Der Parameter `normal_threshold` exkludiert Punkte, welche zwar innerhalb des ε -Bandes liegen, deren Normalen jedoch zu stark vom Modell abweichen. Dies vermeidet eine Fehlzuordnung bei Kanten. In Bezug auf das Seitenprofil von Scherben ist festzustellen, dass Übergänge üblicherweise fließend verlaufen. Bruchkanten hingegen weisen häufig (aber nicht immer) einen Winkel von ca. 90° auf. Bei RRANSAC wird `normal_threshold` entsprechend auf 80° gesetzt um eine Falschzuordnung an den Bruchkanten zu vermeiden und dabei möglichst Inlier auszuschließen.

Nachdem anhand der ε -Abweichung Inlier-Kandidaten identifiziert wurden und ggf. anhand der Normalenabweichung ausgeschlossen wurden, werden bei Efficient RANSAC die Kandidaten in einen verzerrungsfreien und winkeltreuen 2D-Parameterraum transformiert und dort die Zusammenhangskomponenten identifiziert um ein erkanntes Modell ggf. aufzuteilen. Dabei gelten zwei Punkte als benachbart, wenn ihr Abstand nicht mehr als $2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{cluster_epsilon}$ beträgt. Eine solche Aufteilung eines erkannten Zylinders ist im hier vorliegenden Kontext nicht zielführend, da aufgeteilte Zylinder denselben Mittelpunkt besitzen. Da die Eckpunktabstände vorab vereinheitlicht werden, kann der Parameter direkt in Abhängigkeit von dem durchschnittlichen Eckpunkteabstand `avg_density` gewählt werden. Es sollte `cluster_epsilon` größer als `avg_density` gewählt werden, da ansonsten Zylinder aufgeteilt werden. Eine wichtige Konsequenz aus der Berücksichtigung der Normalen potenzieller Inlier ist, dass ein Zylinder sich auch bei sehr dünnen Scherben nicht gleichzeitig auf die Innenseite auch die Außenseite einer Scherbe erstrecken kann, was zu vielen Zylindern mit in Bezug auf die Rotationsachse verschobenen Zylinderachsen führen würde.

Abschnitt 4.5. Einfluss der Parameterwahl

Der Parameter `min_points` wird in Abhängigkeit von `avg_density` sowie der Breite und Höhe des 3D-Modells gewählt und legt die minimal zulässige Höhe eines Zylinders fest. Für eine robuste Zylindererkennung sollte die minimale Höhe ein Vielfaches von `avg_density` betragen, da Zylinder mit geringer Höhe weniger abhängig vom Profilverlauf einer Scherbe sind und daher weniger zuverlässige Ergebnisse liefern.

Mit `probability` wird die verlangte Mindestwahrscheinlichkeit angegeben, dass Zylinder mit der größten Anzahl unterstützender Punkte gefunden worden sind. Vergleichbare Parameter werden üblicherweise auf 95 % gesetzt [Rag+13]. Die in diesem Sinne besten Zylinder zu finden ist wichtig für den Erfolg des Verfahrens, jedenfalls sollten nach Möglichkeit Zylinder gefunden werden, welche das gesamte Seitenprofil abdecken. Da ein hoher Wert für `probability` nur mit einer moderaten Erhöhung der Laufzeit einhergeht [Oes+], kann der Parameter auf 99 % festgelegt werden.

Das von ε durchlaufene Intervall $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$ muss so gewählt werden, dass ε den durchschnittlichen Eckpunkteabstand nicht überschreitet. Dies verhindert eine zu große Höhe der Zylinder, da ansonsten Eckpunkte unabhängig vom Profilverlauf zugeordnet werden würden. Bei kleinem ε werden korrekte Zylinder (d. h. Zylinder mit Mittelpunkt auf der Rotationsachse) in Regionen erkannt, an welchen das Seitenprofil der Scherbe wenig gekrümmt ist. In Regionen mit großer Krümmung werden zusätzlich Zylinder mit sehr geringer Höhe und wenig unterstützenden Punkten erkannt, die daher keine robuste Schätzung der Rotationsachse ermöglichen. Mit steigendem ε werden auch an stärker gekrümmten Stellen korrekte Zylinder erkannt, bis schließlich der Profilverlauf der Scherbe keinen Einfluss mehr auf das Ergebnis hat und somit keine brauchbaren Zylinder mehr erkannt werden. Das Minimum des Intervalls muss so gewählt werden, dass Unebenheiten, die nicht durch die vorangegangene Laplace-Glättung entfernt wurden, nicht dazu führen, dass keine dem Profilverlauf entsprechenden Zylinder mehr erkannt werden. Wird die Anzahl der Wiederholungen ε_{steps} zu klein gewählt, so ergeben sich insgesamt nicht genügend Inlier. Mit zunehmendem ε_{steps} tragen die einzelnen Wiederholungen immer weniger zum Gesamtergebnis bei, da sich die einzelnen Ergebnisse immer weniger voneinander unterscheiden. Ein hoher Wert ist daher im Allgemeinen vorzuziehen, da zusätzliche Wiederholungen bzw. kleinere Schrittweiten das Ergebnis nicht negativ beeinflussen.

4.6 Zusammenfassung

Es wurde ein neues Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse vorgestellt. Es handelt sich um ein globales Verfahren auf der Grundlage von RANSAC, bei welchem die sich aus der Rotationssymmetrie ergebenden zylindrischen Formeigenschaften von Scherben verwendet werden. Es wurde auf die Vorverarbeitung der Scherben eingegangen. Mithilfe gängiger Verfahren wird ein Mesh erzeugt, welches frei von Scan-Artefakten ist. Darüber hinaus wird isotropes Remeshing verwendet, um ein gleichförmiges Mesh zu erzeugen, dessen Eckpunkteabstände nur gering vom Durchschnitt abweichen. Das ist entscheidend, da nachfolgende Schritte den Durchschnitt als Grundlage verwenden. Bezüglich der Durchführung des wiederholten RANSAC wurden die für diesen Kontext notwendigen geometrischen Voraussetzungen erläutert, insbesondere die Uneindeutigkeit einer Segmentierung durch Zylinder. Es wurde dargelegt, dass der Distanz-Grenzwert ε geeignet ist, variiert zu werden. Das Variieren dieses Parameters führt maßgeblich dazu, dass sich die Ergebnisse der einzelnen Segmentierungen unterscheiden und überschneiden, aber dennoch korrekt sind.

Im Anschluss wurde gezeigt, wie die Ergebnisse des wiederholten RANSAC aufbereitet werden, um das eigentliche Ergebnis, die Rotationsachse, zu erhalten. Zu nah am 3D-Objekt liegende Zylindermittelpunkte werden dazu entfernt und danach ein robustes Linien-fitting durchgeführt. Es wurde gezeigt, dass für dieses Linien-fitting ein RANSAC-Ansatz geeignet ist. Nach der Beschreibung des Verfahrens wurde der Einfluss der Parameterwahl für die von Efficient RANSAC geerbten Parameter bewertet und erläutert, wie diese zu bestimmen sind.

KAPITEL 5

Hybridverfahren

5.1 Einführung

In den vorherigen Kapiteln wurden diverse Methoden zur Rekonstruktion der Rotationsachse vorgestellt. In Kapitel 3 wurde eine Übersicht über den Stand der Forschung gegeben und in Kapitel 4 wurde ein neues Verfahren basierend auf der Segmentierung durch RANSAC vorgestellt. Zwar existiert eine Reihe von Verfahren, vor der Einführung von RRANSAC war jedoch nur der auf Normalen basierende Ansatz geeignet, eine Grobausrichtung automatisiert zu generieren. Schlug dies fehl, so musste manuell eine Grobausrichtung vorgenommen werden.

Das Normalen-Verfahren und RRANSAC unterscheiden sich dabei grundlegend in Ihrem Ansatz. Bei der Grobausrichtung mithilfe der Normalen wird die Eigenschaft verwendet, dass die Normalen des 3D-Objektes jeweils die Rotationsachse schneiden. Es handelt sich dabei um eine lokale Eigenschaft der Objekte. Bei RRANSAC wird hingegen genutzt, dass die Scherben stückweise zylinderförmig sind. Diese Zylinderförmigkeit manifestiert sich nicht in einem einzelnen Eckpunkt oder einer einzelnen Oberfläche, sondern ist eine Eigenschaft der Scherbe an sich und damit eine nichtlokale Eigenschaft. Abbildung 5.1 zeigt diese qualitativen Unterschiede zwischen den beiden Verfahren. Aus einer anderen Perspektive betrachtet lässt sich festhalten, dass bei RRANSAC über die Zylinder und ihre Mittelpunkte ein Zwischenschritt vorhanden ist, welcher bei dem Ansatz basierend auf Normalen fehlt. Dies wird bei RRANSAC verwendet, um Ausreißer zu identifizieren, indem die Lage und Geometrie der Zylinder betrachtet wird. Abbildung 5.2 zeigt die einzelnen Schritte und welche geometrischen Entitäten verwendet werden.

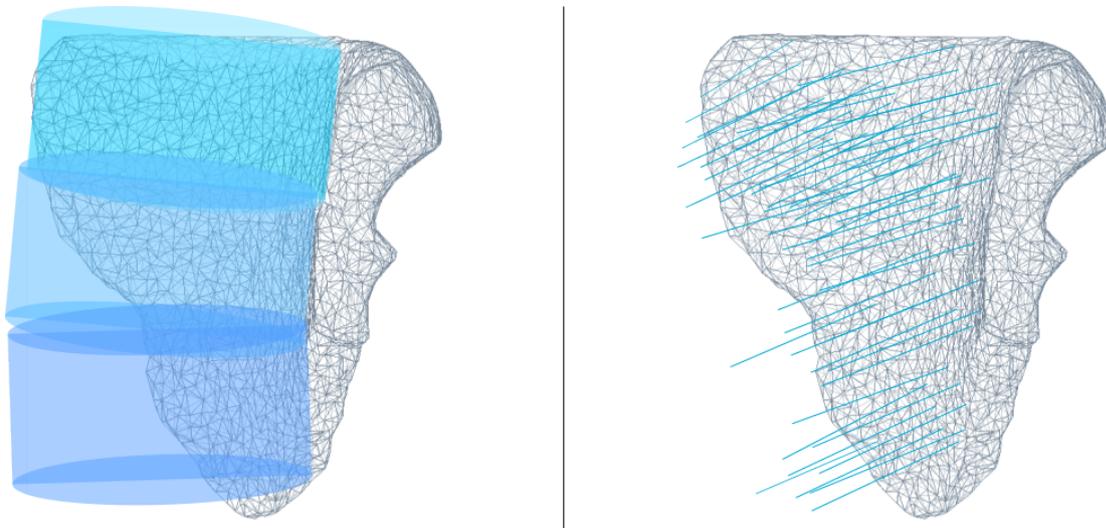


Abbildung 5.1: (a) Zylindrische Formen sind eine nichtlokale Eigenschaft von Scherben. (b) Die Richtungen der Normalen eines Objektes sind eine lokale Eigenschaft.

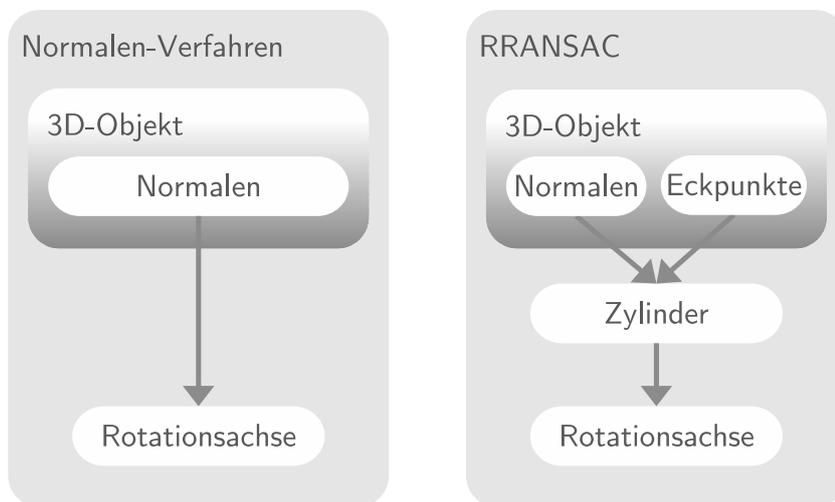


Abbildung 5.2: Beim Normalen-Verfahren wird aus den Normalen direkt die Rotationsachse abgeleitet. Bei RRANSAC hingegen werden zuerst Zylinder generiert, aus dessen Mittelpunkte dann die Rotationsachse abgeleitet wird.



Definition 5.1: Hybrid

Bedeutungsübersicht (vgl. [22])

[meist fachsprachlich] zwei eigenständige Phänomene, Ansätze, Gedanken, Dinge o.Ä. in einem vereinernd, aufweisend

- I **Technik** zwei konkurrierende technologische Ansätze vereinernd, aufweisend
- II **Biologie** aus zwei getrennten Arten gekreuzt, kombiniert

Bei dem in diesem Kapitel vorgestellten Hybridverfahren (siehe Definition 5.1) wird diese Andersartigkeit der beiden Ansätze verwendet, um zu einem zuverlässigeren Ergebnis zu kommen, als dies mit nur jeweils einem der Verfahren möglich wäre. Dabei ist die Andersartigkeit eine notwendige Voraussetzung, denn zwei gleichartige Verfahren würden zu häufig zum selben Ergebnis kommen und eine Kombination hätte daher keinen Mehrwert. Neben der Andersartigkeit ist eine weitere Eigenschaft notwendig, damit ein hybrides Verfahren sinnvoll sein kann: Die Ergebnisse der Verfahren können mithilfe desselben lokalen Verfahrens verbessert und damit sinnvoll verglichen werden, denn das Ergebnis ist in jedem Fall eine Kombination aus Rotation und Verschiebung. In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass das Normalen-Verfahren im Wesentlichen ein Optimierungsproblem löst. Für den Parameterraum der möglichen Rotationen und Verschiebungen wird also in Bezug auf einen gewissen Zielwert das Minimum gesucht. Werden nun sowohl die Ergebnisse aus RRANSAC als auch das Normalen-Verfahren mit demselben lokalen Verfahren optimiert, so sind die Zielwerte miteinander vergleichbar und damit kann entschieden werden, welches Verfahren besser abgeschnitten hat.

Der hybride Ansatz besteht darin, dass zuerst beide Verfahren unabhängig voneinander ausgeführt werden und die Ergebnisse mithilfe desselben lokalen Verfahrens optimiert werden. Die Resultate werden dann miteinander verglichen. Das schlechtere Ergebnis wird verworfen und die bessere Feinausrichtung ist das vorläufige Ergebnis des Verfahrens. Durch diese Kombination hat das Hybridverfahren eine bessere Chance, das Objekt korrekt auszurichten, als wenn nur ein einzelnes Verfahren angewendet wird.

Ein Urteil über die erfolgreiche Erkennung der Rotationsachse kann letztendlich nur ein Mensch fällen, jedoch wird beim Hybridverfahren zusätzlich eine Heuristik verwendet, mit welcher das korrekte Erkennen der Rotationsachse geprüft werden kann: Dazu wird die Scherbe wiederholt zufällig rotiert und verschoben. Das beste Ergebnis aus

diesem Prozess wird dann mit dem vorläufigen Ergebnis verglichen. Ist das vorläufige Ergebnis schlechter als das beste zufällige Ergebnis, so ist von einem Fehlschlag auszugehen. Wenn das vorläufige Ergebnis besser ist, dann wird das vorläufige Ergebnis zum Endergebnis des Verfahrens und ausgegeben. Abbildung 5.3 zeigt eine Übersicht über die im Hybridverfahren durchgeführten Schritte.

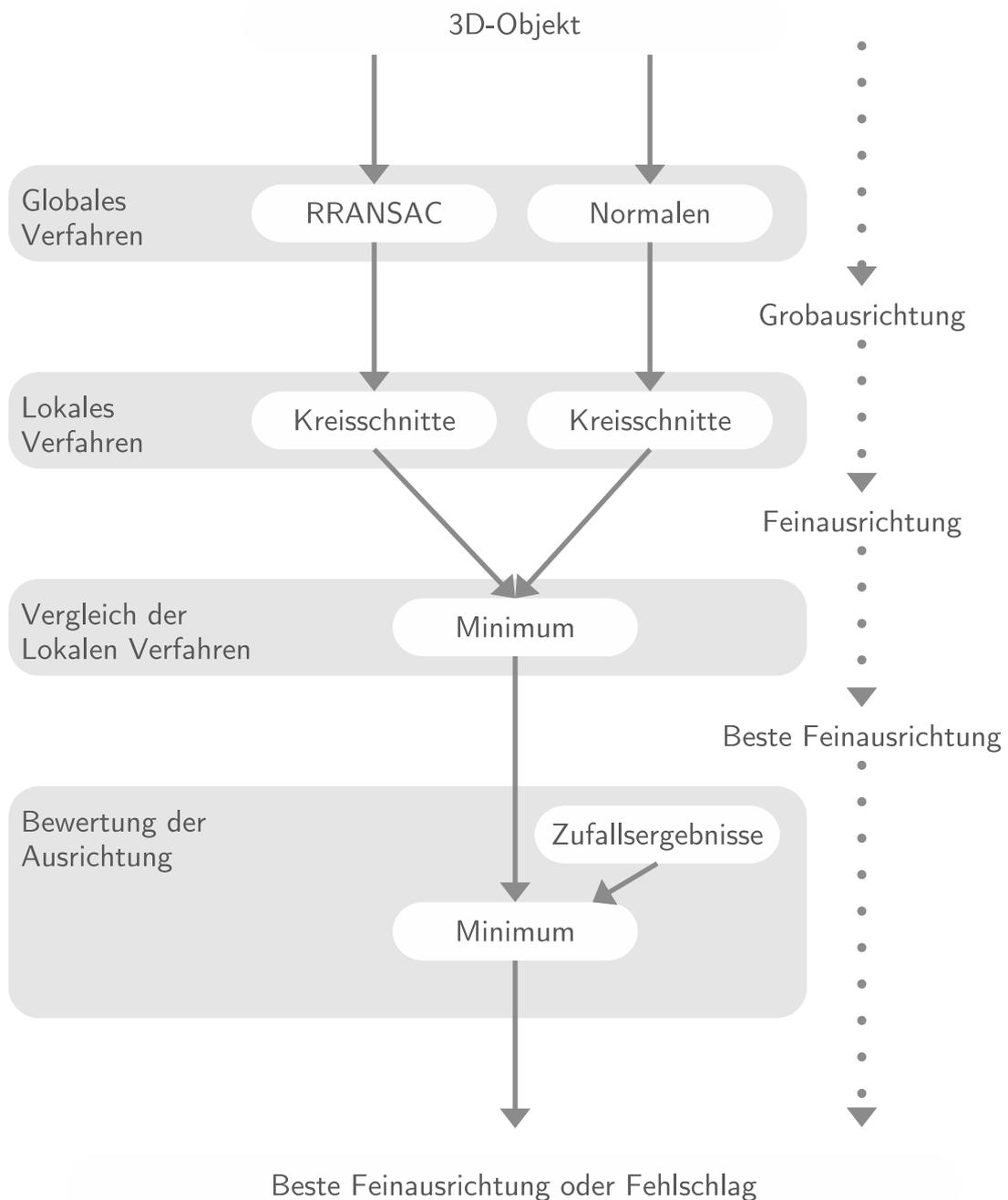


Abbildung 5.3: Übersicht über die im Hybridverfahren stattfindenden Schritte. Mit zwei verschiedenen Verfahren wird zuerst eine Grobausrichtung ermittelt. Diese wird dann mithilfe eines lokalen Verfahrens verfeinert. Die Ergebnisse werden verglichen und das Schlechtere wird verworfen. Zuletzt wird das Bessere mit zufällig generierten Ergebnissen verglichen. Wenn die zufälligen Ergebnisse besser abschneiden, dann wird ein Fehlschlag gemeldet, ansonsten wird die ermittelte Feinausrichtung zurückgegeben.

5.2 Mathematische Beschreibung

Für ein umfassendes Verständnis des Verfahrens ist es wichtig zu verstehen, welche Daten in den einzelnen Schritten erzeugt bzw. an den nächsten Schritt übergeben werden. Alle Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse generieren letztendlich eine Transformation der Scherbe. In unserem Kontext ist dies eine Kombination aus Rotation und Translation, d. h. ein Element aus $SE(3)$, den rigiden Transformationen (vgl. Kapitel 1.1), welches als eine 4×4 -Matrix dargestellt werden kann.

Es bezeichne $S \in 3DO$ das 3D-Objekt und es ist MS das durch die Matrix M transformierte Objekt. Siehe dazu auch Definitionen 1.20 und 1.21. Das Ergebnis bei RRANSAC bzw. dem Normalen-Verfahren kann damit nun kompakt bezeichnet werden als $M_R S$ und $M_N S$, wobei M_R die von RRANSAC und M_N die vom Normalen-Verfahren berechnete Transformation bezeichnet.

Beim auf Kreisschnitte basierenden, lokalen Verfahren wird eine Transformationsmatrix M_P generiert. Da die lokalen Verfahren auf das bereits transformierte Objekt angewendet werden, ist das Ergebnis der beiden Feinausrichtungen dementsprechend $M_P M_R S$ bzw. $M_P M_N S$. Wie im vorherigen Abschnitt bereits erwähnt, handelt es sich bei den lokalen Verfahren um Verfahren zur Lösung eines Optimierungsproblems. Wir folgen dabei der an [GT93] angelehnten Notation und bezeichnen mit

$$\arg \min_x p(S, x), \quad p: G \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.1)$$

das gelöste Minimierungsproblem. Die Zielfunktion p hat dabei die reellen Zahlen als Wertebereich und der Definitionsbereich ist das Kreuzprodukt aller 3D-Objekte $3DO$ mit allen rigiden Transformationen $SE(3)$, d. h. es gilt $G = 3DO \times SE(3)$. Damit erhalten wir

$$M_P M_R = \arg \min_x p(M_R S, x), \quad p: 3DO \times SE(3) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ sowie} \quad (5.2)$$

$$M_P M_N = \arg \min_x p(M_N S, x), \quad p: 3DO \times SE(3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.3)$$

als Definition für die beiden Transformationen nach der Feinausrichtung. Es kommt das in Kapitel 3.3 vorgestellte Verfahren basierend auf horizontalen Kreisschnitten zum Einsatz, bei welchem die Varianz der Schnittpunkte zur Rotationsachse minimiert wird.

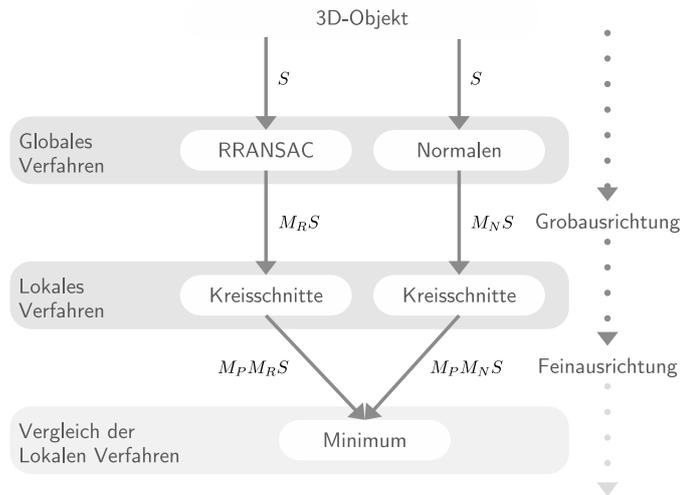


Abbildung 5.4: Die ersten Schritte im Hybrid Verfahren, ergänzt um die mathematische Beschreibung der Ausgabe nach jedem Schritt.

Dabei ist zu beachten, dass für die praktische Umsetzung nicht wie oben beschrieben $SE(3)$ als Definitionsbereich von $p(x)$ verwendet wird. Die Darstellung einer rigiden Transformation als eine Matrix ist konzeptionell praktisch, aber mit dieser Darstellung lassen sich Änderungen an der Transformation, wie sie zum Lösen eines Optimierungsproblems notwendig sind, nicht gut verständlich umsetzen. Stattdessen wird die Gesamttransformation als eine Sequenz aus Rotationen und Translationen verstanden: Eine Rotation um die x-Achse ϕ , eine Rotation um die y-Achse θ , sowie jeweils eine Translation a und b in Richtung derselben Achsen. Diese vier Transformationen sind ausreichend, da eine Translation entlang der z-Achse sowie eine Rotation um diese aufgrund der Rotationssymmetrie keinen Einfluss auf die Bestimmung der Rotationsachse hat. Anders ausgedrückt gilt für die praktische Umsetzung

$$x = (\phi, \theta, a, b), \text{ mit } \phi, \theta \in [0, 2\pi) \text{ und } a, b \in \mathbb{R} \text{ bzw.} \quad (5.4)$$

$$G = ([0, 2\pi), [0, 2\pi), \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times 3DO. \quad (5.5)$$

Für die theoretischen Ausführungen verbleiben wir jedoch dabei, die Transformationen als Matrizen zu betrachten. Die ersten, parallel verlaufenden Schritte im Hybridverfahren lassen sich somit gemäß Abbildung 5.4 darstellen.

In der Einführung 5.1 wurde bereits darauf eingegangen, dass die Ergebnisse der beiden Verfahren nach der Feinausrichtung mit dem lokalen Verfahren insofern kombiniert werden, als das schlechtere Ergebnis verworfen wird. Daher sind nun nicht mehr

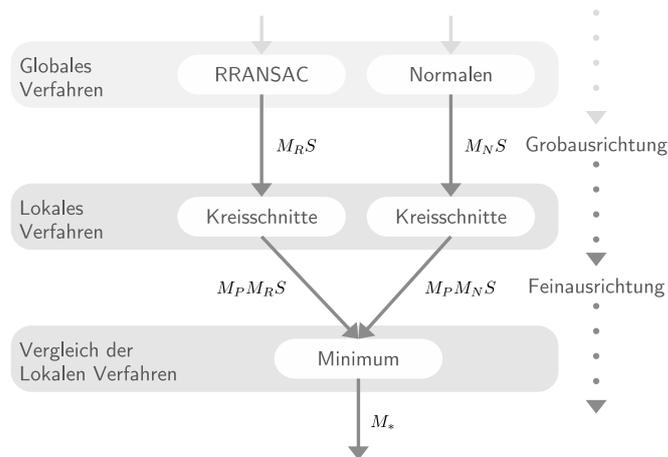


Abbildung 5.5: Nachdem beide globalen Verfahren mit den lokalen Verfahren optimiert worden sind, werden diese verglichen. Die beste Feinausrichtung $M_* \in \{M_P M_R, M_P M_N\}$ wird an den Folgeschritt weiter gereicht.

nur die Transformationen $M_P M_R$ und $M_P M_N$ von Interesse, sondern ebenso der jeweils erreichte Zielwert. Dabei bezeichnet $p_R \in \mathbb{R}$ bzw. $p_N \in \mathbb{R}$ den durch $M_P M_R$ bzw. $M_P M_N$ erreichten Zielwert, also

$$p_R = p(S, M_P M_R), \text{ sowie} \tag{5.6}$$

$$p_N = p(S, M_P M_N). \tag{5.7}$$

Als p_* wird nun im Folgenden der kleinere der beiden Zielwerte bezeichnet, es gilt also

$$p_* = \min(p_R, p_N). \tag{5.8}$$

Es bezeichnet weiterhin

$$M_* = \begin{cases} M_P M_R, & p_R \leq p_N \\ M_P M_N, & p_R > p_N \end{cases} \tag{5.9}$$

die zu p_* zugehörige Transformation. Diagramm 5.5 zeigt den Vergleichsschritt zusammen mit den relevanten Ausgaben.

Die Minima p_R und p_N können wie beschrieben miteinander verglichen werden, um das schlechtere Ergebnis zu verwerfen. Dies gibt jedoch keinen Anhaltspunkt, ob eines der beiden Verfahren erfolgreich gewesen ist. Vereinfacht ausgedrückt, lässt sich die Frage

„Was ist ein gutes Ergebnis?“ nicht ohne weiteres beantworten. Präziser ausgedrückt, lässt sich nicht bestimmen, ob es sich bei p_* um das globale Optimum handelt. Diese Problematik ist vielen Optimierungsproblemen inhärent und die Behandlung dieses Problems ist ein eigener Forschungsbereich [LS13]. Da der Suchraum üblicherweise zu groß ist für eine systematische, erschöpfende Suche kommen häufig Heuristiken zum Einsatz. Beim hier vorliegenden Hybridverfahren wird ebenfalls eine Heuristik eingesetzt, jedoch nicht zum Auffinden des globalen Minimums, sondern zur Evaluation des berechneten Minimums p_* . Es werden dazu zufällige Transformationen \hat{M}_i generiert und die zugehörigen Ergebnisse p_i jeweils mit der besten Feinausrichtung verglichen. Sollte eine zufällige Transformation besser abschneiden als die beste Feinausrichtung, so wird nicht die Transformation M_* zurückgegeben. Stattdessen wird ein Fehlschlag signalisiert, im Folgenden durch die leere Menge repräsentiert. Dabei ist es ausreichend, das Minimum der Zufallsergebnisse

$$\hat{p} = \min_i p_i = \min_i p(M_*S, \hat{M}_i) \quad (5.10)$$

mit der besten Feinausrichtung p_* zu vergleichen. Es ist zu beachten, dass das Bewertungskriterium nicht der im lokalen Verfahren minimierten Zielfunktion p entspricht. Stattdessen wird für die Zielfunktion

$$k: G \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.11)$$

ein auf Kreisschnitten basiertes Verfahren verwendet. Wir erhalten somit insgesamt

$$R = \begin{cases} M_*, & \min_i k(M_*S, \hat{M}_i) < k(M_*S, \mathbb{I}) \\ \emptyset, & \min_i k(M_*S, \hat{M}_i) \geq k(M_*S, \mathbb{I}) \end{cases} \quad (5.12)$$

als Ergebnis der Bewertung und damit auch als Gesamtergebnis des Hybridverfahrens. Diagramm 5.6 zeigt den Ablauf der Bewertung zusammen mit dem Gesamtergebnis R des Verfahrens. Im folgenden Abschnitt wird die Durchführung der Bewertung weitergehend dargelegt.

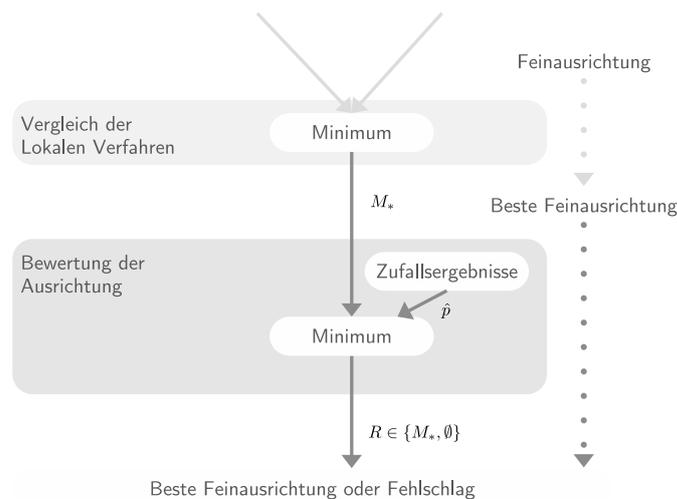


Abbildung 5.6: Nachdem die beste Feinausrichtung M_* gegen Zufallsergebnisse getestet wurde, wird entweder diese oder ein Fehlschlag, repräsentiert durch die leere Menge, ausgegeben.

5.3 Bewertung der ermittelten Ausrichtung

Im letzten Schritt des Verfahrens wird die ermittelte beste Feinausrichtung bewertet (siehe Diagramm 5.6). Damit soll festgestellt werden, ob die gewünschte Lösung tatsächlich gefunden wurde oder ob das Verfahren fehlgeschlagen ist. Es handelt sich dabei um einen im Vergleich zum Stand der Forschung wichtigen Fortschritt: Da bei archäologischen Ausgrabungen Tausende von Scherben gefunden und verarbeitet werden, ist ein effizienter Arbeitsablauf für eine nutzbringende Automatisierung erforderlich, wofür eine automatisierte Auswertung der Ergebnisse unabdingbar ist. Nicht korrekt ausgerichtete Scherben sollten daher automatisiert erkannt werden, sodass auch nur diese einer nachträglichen Überprüfung unterzogen werden müssen.

Dazu wird eine Reihe von zufälligen Transformationen generiert und mit der besten Feinausrichtung verglichen. Dabei ist zu beachten, dass der Vergleich nicht unter Verwendung der Zielfunktion des lokalen Verfahrens stattfindet, also nicht mit dem Zielwert

$$p_* = \min(p_R, p_N) \quad (5.13)$$

verglichen wird. Stattdessen wird eine andere Zielfunktion verwendet. Der Grund dafür ist, dass die Feinausrichtung M_* ein für die Zielfunktion p optimiertes Ergebnis

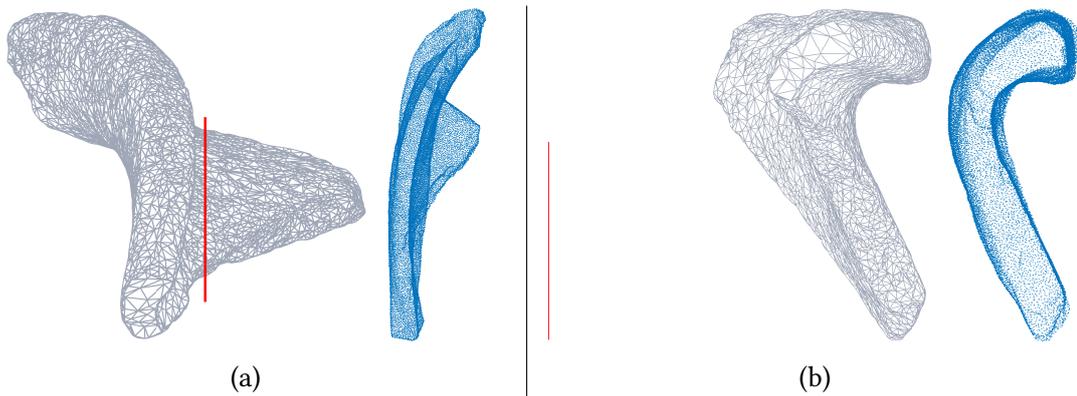


Abbildung 5.7: (a) Die Rotationsachse ist falsch berechnet worden. Das zugehörige Seitenprofil hat keine der Rotationssymmetrie folgenden Ausprägung. (b) Wurde die Rotationsachse korrekt identifiziert, so ist auch die Verteilung der Punkte des Seitenprofils minimal.

ist. Dabei kann es sich um ein lokales Optimum handeln, also nicht die gesuchte Lösung. Im Vergleich zu zufällig generierten Ergebnissen könnte diese Lösung dennoch besser abschneiden. Dieses Problem kann umgangen werden, indem die zufälligen Lösungen ebenfalls im Sinne von p optimiert werden. Da für eine korrekte Ausrichtung vier Parameter optimiert werden müssen, müsste schon bei einer sehr geringen Auflösung von $10 \times 10 \times 10 \times 10$ Zufallsergebnissen entsprechend $10^4 = 10\,000$ Durchläufe des lokalen Verfahrens abgeschlossen werden. Dies ist jedoch aufgrund des nötigen Rechenaufwandes nicht praktikabel. Die Verwendung einer anderen Zielfunktion hat noch einen weiteren wichtigen Vorteil: Handelt es sich bei M_* um die korrekte Transformation, d. h. um die Transformation, welche die Scherbe entsprechend ihrer Rotationsachse korrekt ausrichtet, so handelt es nicht nur um das globale Optimum von p . Die Transformation wird dann auch jede andere Zielfunktion

$$k(S, x), \quad k: G \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.14)$$

minimieren, solange es sich um eine Funktion handelt, welche auf geometrischen Eigenschaften von Rotationssymmetrie aufbaut. Dies gilt jedoch nicht für eine falsche Ausrichtung. Bei einer solchen können andere Zielfunktionen beliebig hohe Werte annehmen. Abbildung 5.7 zeigt beispielhaft, dass die Bestimmung eines lokalen Optimums ein Seitenprofil ergibt, das nicht die für rotationssymmetrische Objekte übliche Ausprägung hat. Wird hingegen das globale Optimum gefunden, so minimiert sich die Verteilung der Punkte des Seitenprofils.

Beim Hybridverfahren kommt in diesem Schritt daher ein auf dem Seitenprofil basierendes Verfahren zur Anwendung. Es basiert auf der Beobachtung, dass die das Seitenprofil bildenden Punkte bei korrekter Ausrichtung eine minimale Distanz zueinander haben. In [Wil+18] wird ein lokales Verfahren vorgestellt, bei dem die Summe der quadratischen Abstände vertikaler Ebenenschnitte minimiert wird. Damit handelt es sich um ein Verfahren, welches dieselbe geometrische Eigenschaft wie das hier zum Einsatz kommende Verfahren als Grundlage hat. Entsprechende Ebenenschnitte zu generieren ist jedoch aufwendig. Es besteht auch kein Grund, sich auf einzelne Schnitte zu beschränken, wenn das eigentliche Seitenprofil bereits effizient berechnet werden kann (vgl. dazu Kapitel 1.1).

Während das Seitenprofil eines korrekt ausgerichteten idealisierten Körpers eine 2D-Kurve bildet, ist das Seitenprofil desselben Körpers eine Fläche, wenn dieser nicht korrekt ausgerichtet ist. Diese Fläche wird größer, je weiter sich der Körper von der korrekten Ausrichtung entfernt. Dasselbe Prinzip gilt auch für die in unserem Kontext relevanten Objekte, nur dass diese herstellungsbedingt auch bei idealer Ausrichtung noch eine Fläche als Seitenprofil aufweisen. Abbildung 5.8 veranschaulicht diese Zusammenhänge. Auf diesen Ansatz aufbauend ist eine ganze Reihe von Zielfunktionen denkbar. Allerdings ist weiterhin zu beachten, dass der Rechenaufwand hier entscheidend ist, da das Verfahren ansonsten nicht praktikabel ist. Daher wird als Zielfunktion der Median der Abstände der Punkte zum nächsten Nachbarn verwendet. Von jedem Eckpunkt wird der naheliegendste Nachbar ermittelt und von diesen Abständen wird der Median berechnet. Das effiziente Auffinden des nächsten Nachbarn und des Median sind gut untersuchte Probleme [BV10; Knu97; MR01], sodass hier effiziente Algorithmen Verfügung stehen, welche eine durchschnittliche Laufzeitkomplexität von $\mathcal{O}(n \log n)$ bzw. $\mathcal{O}(n)$ aufweisen [BDH96]. Beide Verfahren können darüber hochgradig parallelisiert werden, was die Laufzeit auf Rechnern mit einer modernen GPU deutlich verringern kann [FP08; MWM11].

Es bezeichne

$$\omega(S) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, \quad n = \|S\| \quad (5.15)$$

das Seitenprofil der Scherbe S , d. h. die auf eine Ebene projizierten Eckpunkte von S (vgl. Abschnitt 2.4). Der nächste Nachbar $\text{NN}(p_k)$ und die zugehörige Distanz $\text{NND}(p_k) = d_k$ zu einem Punkt p_k sind dann unter Verwendung des euklidischen

Abschnitt 5.3. Bewertung der ermittelten Ausrichtung

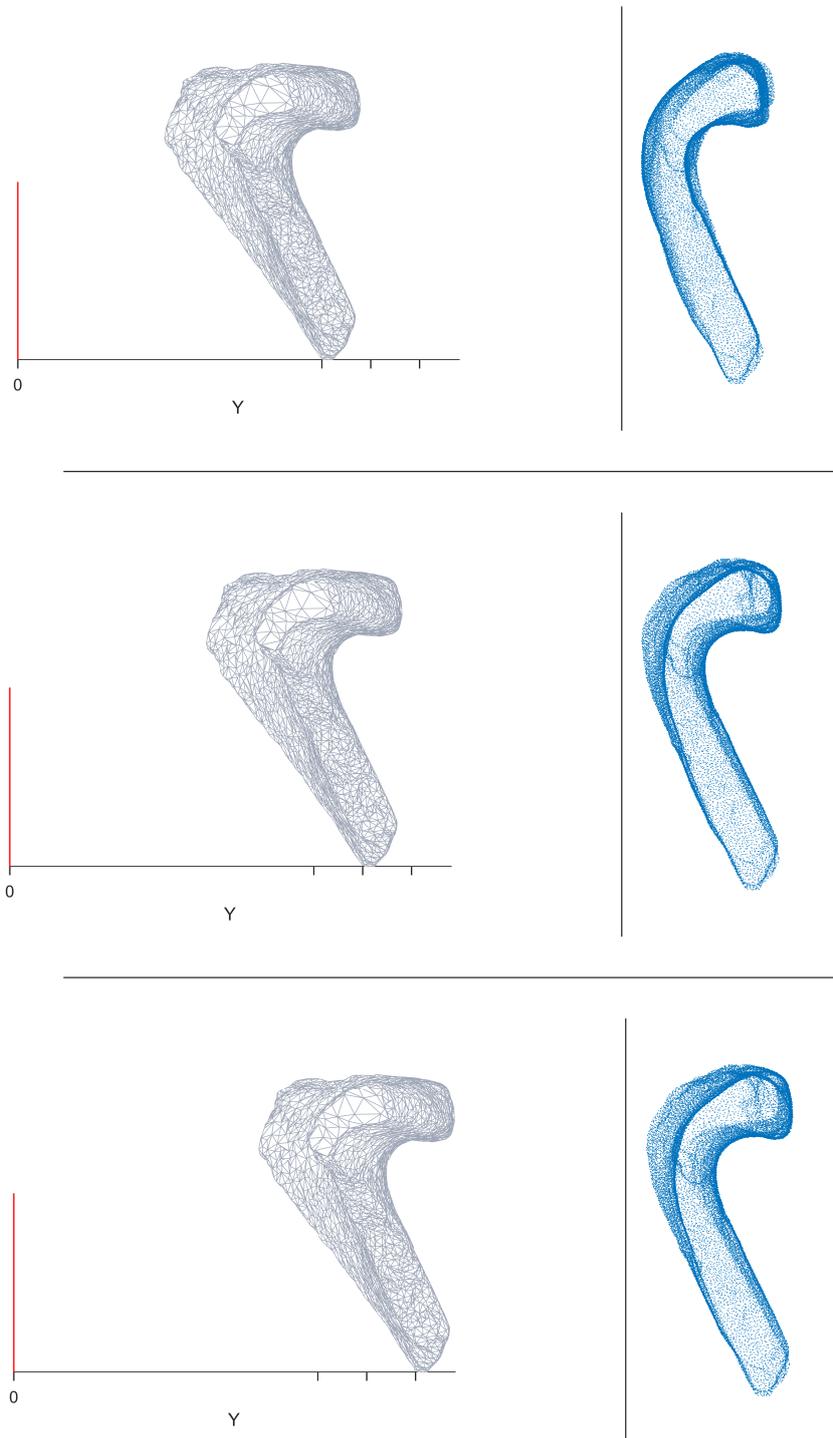


Abbildung 5.8: Je weiter sich die Scherbe von ihrer korrekten Ausrichtung entfernt, desto größer wird die Fläche des Seitenprofils.

Abschnitt 5.3. Bewertung der ermittelten Ausrichtung

Abstandes d definiert durch

$$\text{NN}(p_k) = \arg \min_{p_i} d(p_k, p_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k, \quad \text{sowie} \quad (5.16)$$

$$\text{NND}(p_k) = \min_{p_i} d(p_k, p_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k. \quad (5.17)$$

Sei nun

$$\begin{aligned} D(\omega(S)) &= \{d_1, d_2, \dots, d_n\} = \{\text{NND}(p_1), \text{NND}(p_2), \dots, \text{NND}(p_n)\}, \\ D: \mathbb{R}^{3n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (5.18)$$

die Funktion, welche dem Seitenprofil $\omega(S)$ einer Scherbe die Nächster-Nachbarn-Distanzen d_i zuordnet. Weiterhin bezeichnet allgemein für eine aufsteigend nach Größe sortierte Sequenz

$$x = x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad x_j \leq x_k, \quad \text{für } j \leq k \quad (5.19)$$

die Funktion

$$\text{MED}(x) = \begin{cases} x_{m+1} & n = 2m + 1 \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}) & n = 2m \text{ gerade} \end{cases}, \quad \text{MED}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.20)$$

den Median der Punkte x_i . Mit diesen Festlegungen kann nun die in 5.11 eingeführte Funktion k definiert werden. Zur Bewertung der besten Feinausrichtung im Hybridverfahren wird für eine Anzahl zufälliger Transformationen \hat{M}_i ein Ergebnis \hat{k} durch

$$\hat{k} = \min_i k_i = \min_i k(M_* S, \hat{M}_i) \quad (5.21)$$

unter Verwendung der Zielfunktion

$$k(S, x) = \text{MED}(D(\omega(xS))), \quad k: G \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.22)$$

generiert.

Die zufälligen Transformationen \hat{M}_i sind bisher als gegeben vorausgesetzt und nicht näher definiert worden. Zur hinreichenden Spezifizierung dieser Transformationen müssen die folgenden Fragen beantwortet werden:



Problemstellungen im Kontext der Generierung zufälliger Transformationen

- I Mit welcher Methode können zulässige Matrizen \hat{M}_i generiert werden?
- II Wie kann der unbegrenzte Parameterraum aller zulässigen Transformationen sinnvoll beschränkt werden?
- III Wie viele zufällige Transformationen werden benötigt?

In Abschnitt 5.2 wurde schon darauf eingegangen, dass es für praktische Belange oft zielführender ist, die Transformation als eine Sequenz von Rotationen und Translationen aufzufassen. Es wird die Sequenz aus Gleichung 5.4 (ϕ, θ, a, b) verwendet. Rotationen um die x- bzw. y-Achse mit darauf folgenden Translationen in Richtung der x- bzw. y-Achse. Dies kann (vgl. Abschnitt 1.1) in eine Matrix umgewandelt werden. Es bezeichnen (vgl. Kapitel 1.1) R_r^x, R_r^y sowie R_r^z Rotationsmatrizen um die x-, y-, bzw. z-Achse. Mit T_t^x, T_t^y sowie T_t^z werden analog Translationsmatrizen in Richtung der x-, y-, bzw. z-Achse bezeichnet. Der Parameterraum bezüglich der Rotationen R_ϕ^x und R_θ^y kann aus Gründen der Symmetrie auf das Intervall

$$\phi, \theta \in (0, 2\pi]. \quad (5.23)$$

beschränkt werden. Die Rotationen können mithilfe einer simplen Beobachtung weiter eingeschränkt werden. Es gilt

$$\omega(R_\pi^x S) = -\omega(S) \quad \text{sowie} \quad (5.24)$$

$$\omega(R_\pi^y S) = -\omega(S) \quad (5.25)$$

für das Seitenprofil $\omega(R_\pi^x S)$ einer um π rad ($= 180^\circ$) rotierten Scherbe, d. h. die Seitenprofile von $R_\pi^x S$ und $R_\pi^y S$ sind bis auf das Vorzeichen identisch mit dem Seitenprofil von S . Abbildung 5.9 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Daraus ergibt sich, dass ϕ und θ auf das Intervall $(0, \pi]$ beschränkt werden können. Für die Translationen T_a^x und T_b^x wird eine Heuristik zur Beschränkung verwendet. Durch die beiden im

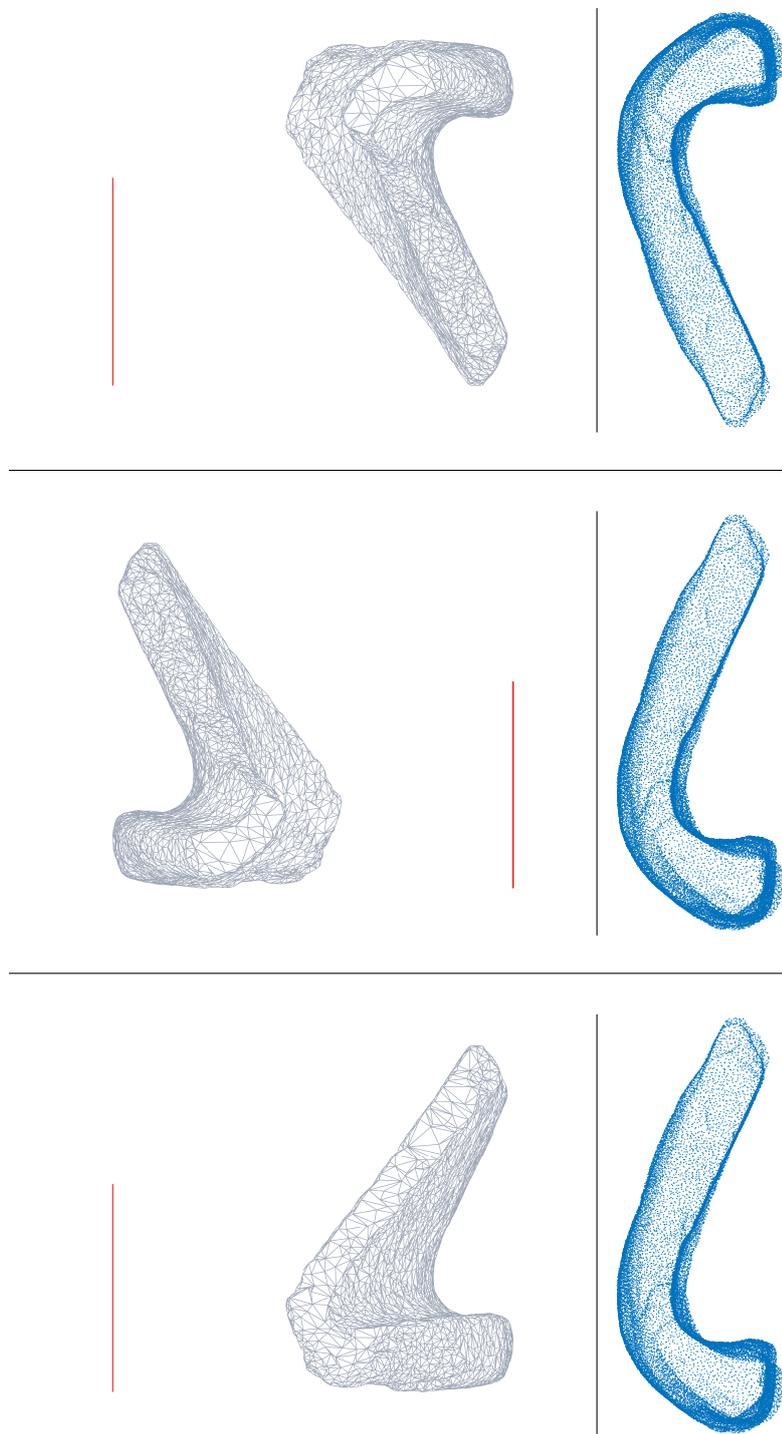


Abbildung 5.9: Eine Rotation um 180° um die x- oder y-Achse spiegelt das zugehörige Profil. Die Abstände der Punkte zueinander bleiben erhalten.

vorherigen Schritt berechneten Transformationen

$$M_P M_R = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & t_{PR1} \\ & R_{PR} & & t_{PR2} \\ & & & t_{PR3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad (5.26)$$

$$M_P M_N = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & t_{PN1} \\ & R_{PN} & & t_{PN2} \\ & & & t_{PN3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (5.27)$$

liegen für zwei Optima bereits Translationen

$$\vec{t}_{PR} = \begin{pmatrix} t_{PR1} \\ t_{PR2} \\ t_{PR3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (5.28)$$

$$\vec{t}_{PN} = \begin{pmatrix} t_{PN1} \\ t_{PN2} \\ t_{PN3} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

vor, aus welchen sich die Größenordnungen der notwendigen Translationen ableiten lassen. Da mit den Zufallsergebnissen nicht das eigentliche globale Optimum ermittelt werden soll, ist es ausreichend, die Translationen T_a^x und T_b^x durch

$$a, b \in [-t_{\max}, t_{\max}], \quad \text{mit} \quad (5.30)$$

$$t_{\max} = \max(t_{PR1}, t_{PR2}, t_{PR3}, t_{PN1}, t_{PN2}, t_{PN3}) \quad (5.31)$$

zu beschränken.

Zuletzt bleibt die Frage zur Anzahl der durchgeführten zufälligen Transformationen. Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes (siehe Theorem 5.1) folgen die Werte k_1, \dots, k_n der Zielfunktion k einer linksseitig abgeschnittenen Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2, l)$ mit Erwartungswert μ , Varianz σ^2 und linksseitiger Begrenzung l als die zugehörigen Lageparameter.

Theorem 5.1: Zentraler Grenzwertsatz

Der Zentrale Grenzwertsatz ist eine der wichtigsten Aussagen in der Statistik [Fis11]: Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilte (und damit insbesondere nicht unbedingt normalverteilte) Zufallsvariablen mit endlicher Varianz und endlichem Mittelwert. Für $n \rightarrow \infty$ nähern sich dann sowohl die Summe als auch der Mittelwert dieser Zufallsvariablen einer Normalverteilung an [SS22].

Wir folgen der üblichen mathematischen Notation für Zufallsvariablen Großbuchstaben zu verwenden [SS22, S. 272] und bezeichnen daher im Folgenden mit K die als Zufallsvariable interpretierte Funktion k und mit K_i Stichproben aus dieser Verteilung, welche ebenfalls als Zufallsvariablen interpretiert werden können [Dek05, S. 17f.]. Damit gilt, dass

$$K \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2, l) \quad (5.32)$$

der linksseitig abgeschnittene Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2, l)$ folgt, wobei die linksseitige Grenze $l \in \mathbb{R}^+$ dem globalen Minimum der Funktion k entspricht. Die zugehörige kumulative Verteilungsfunktion

$$F_K(x) = P(K \leq x) \quad (5.33)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable K einen Wert kleiner oder gleich x annimmt. Analog dazu gibt

$$F_{K_i}(x) = P(K_i \leq x) \quad (5.34)$$

die Wahrscheinlichkeit an, dass die Stichprobe K_i einen Wert kleiner oder gleich x annimmt. Die Wahrscheinlichkeit

$$P(K \leq l) \approx 0, \quad (5.35)$$

zufällig das reale Minimum zu finden, ist sehr klein. Daher ist die durch die linksseitige Begrenzung l abgeschnittene Fläche sehr klein und die zugehörige unbegrenzte Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist eine gute Approximation für die Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2, l)$. Daher kann im Folgenden die übliche unbegrenzte Normalverteilung als zugrunde liegende Verteilung angenommen werden, um die folgenden Berechnungen erheblich zu vereinfachen. Die Lageparameter μ und σ^2 können auf Grundlage einer Stichprobe durch eine Maximum-Likelihood-Methode abgeschätzt werden [Mil11, S.26ff].

Abschnitt 5.3. Bewertung der ermittelten Ausrichtung

Mit

$$1 - F_{K_i}(x) = P(K_i > x) \quad (5.36)$$

kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass eine Stichprobe größer als x ist. Daraus folgt, dass

$$P(K_1 > x) \cdot P(K_2 > x) \cdot \dots \cdot P(K_n > x) \quad (5.37)$$

die Wahrscheinlichkeit angibt, dass alle Elemente K_i größer als x sind und wir bezeichnen mit

$$P_K(x) = 1 - P(K_1 > x) \cdot P(K_2 > x) \cdot \dots \cdot P(K_n > x) \quad (5.38)$$

die zugehörige Gegenwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Stichprobe K_i kleiner als x ist. Somit erhalten wir durch $P_K(p^*)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Zufallsergebnisse kleiner als das Ergebnis p^* für die beste Feinausrichtung ist. Hierbei ist zu beachten, dass die realisierten Werte der Stichproben K_i nur zur Abschätzung der Lageparameter der Normalverteilung einfließen und daher nur einen indirekten Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit $P_K(x)$ haben.

Mithilfe der Gleichung 5.38 lässt sich nun berechnen, wie viele Zufallsergebnisse benötigt werden, um mit 99,9% Wahrscheinlichkeit ein Ergebnis zu erzielen, welches besser als das berechnete Optimum p^* ist. Wenn ein solches Ergebnis jedoch nicht erzielt wird, lässt sich in diesem Sinne sagen, dass mit 99,9% Wahrscheinlichkeit das gesuchte globale Optimum gefunden worden ist.

Die benötigte Anzahl an Zufallsergebnissen hängt dabei von den Lageparametern der zugrunde liegenden Normalverteilung sowie dem berechneten Optimum p^* ab. Zu den Lageparametern ist zu beachten, dass hier nur die zugehörigen Punktschätzer und nicht, wie oft üblich, Konfidenzintervalle angegeben werden. Da die Länge der Konfidenzintervalle für die Lageparameter jedoch mit steigendem n gegen Null konvergieren [Dek05, S. 353 ff.] und aufgrund der effizienten Berechenbarkeit der Zielfunktion k sehr viele Stichproben realisiert werden können, kann hier zuverlässig ausschließlich mit den Punktschätzern gearbeitet werden. Aus demselben Grund spielt es keine Rolle, dass die Lageparameter variieren und damit auch die benötigte Anzahl an Zufallsergebnissen variieren kann.

Die Umsetzung dieses Haltekriteriums erfolgt derart, dass nach jeweils 1000 Stichproben erst die zugehörigen Lageparameter μ und σ berechnet werden. Darauf aufbauend

wird die Wahrscheinlichkeit $P_K(p^*)$ berechnet, solange bis

$$P_K(p^*) < 0,001 \quad (5.39)$$

gilt.

5.4 Zusammenfassung

Mit dem Hybridverfahren wurde ein neues Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse vorgestellt, bei welchem bestehende Verfahren kombiniert werden. Es wurde dargelegt, dass verschiedenartige Verfahren zur Anwendung kommen müssen, um einen systematischen Mehrwert gegenüber der Verwendung eines einzelnen Verfahrens zu generieren. Mithilfe eines lokalen Verfahrens werden die von den Verfahren berechneten Ergebnisse optimiert und miteinander verglichen. Die aus diesem Vergleich hervorgehende beste Ausrichtung wird zuletzt noch gegen zufällige generierte Transformationen getestet. Auf diese Weise kann das Ergebnis bewertet und ggf. ein Fehlschlag erkannt werden.

KAPITEL 6

Experimentelle Validierung

6.1 Einführung

In den letzten Kapiteln wurden zwei neue Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse archäologischer Keramikscherben vorgestellt. Diese werden nun verwendet, um die Rotationsachse archäologischer Keramikscherben zu rekonstruieren und damit experimentell zu validieren und mit dem Stand der Forschung zu vergleichen. In bisherigen Veröffentlichungen wurden verschiedene Angaben zu den verwendeten Scherben gemacht: Zum Teil wurden Verfahren nur anhand einzelner Scherben ($n \leq 5$) [CM02; Hal99] oder synthetischer Modelle bzw. moderner Keramik [DDM14; Kam01; SM99] getestet. Zum Teil wurden keine Angaben zu den Scherben publiziert [DP18; KSM05; MS05; WOC03]. In [Wil+18] und [KS08] wird übereinstimmend berichtet, dass der maximale Zentriwinkel (siehe Kapitel 1) das wichtigste Kriterium dafür ist, ob eine Ausrichtung erfolgreich ist. In [Mar06] wird in Bezug auf den Zentriwinkel 25° als Minimum für eine erfolgreiche Ausrichtung angegeben. In [KS08] wird 15° angegeben, jedoch wurden die Scherben hier vorab manuell grob ausgerichtet. Zuletzt wird in [Wil+18] berichtet, dass Scherben mit einem Zentriwinkel kleiner als 12° erfolgreich ausgerichtet wurden. Die Zuverlässigkeit der Methode konnte in [DP18] nicht bestätigt werden, jedoch wurden dort keine entsprechenden Daten zu den verwendeten Scherben erhoben. Unabhängig vom Zentriwinkel konnten zum einen besonders kleine Scherben nicht zuverlässig ausgerichtet werden, zum anderen können grundsätzlich flache und stark deformierte Scherben nicht ausgerichtet werden, da diese nicht rotationssymmetrisch sind.

6.2 Methodik

Als Datenbasis dienten Scherben, welche bei archäologischen Grabungen am Tell Ziraa aufgefunden worden sind, die vom Biblisch-Archäologischen Institut Wuppertal (BAI) [Viea] und dem Deutschen Evangelischen Institut für Altertumswissenschaften des Heiligen Landes (DEI) [Vieb] durchgeführt worden sind. Ein Tell ist ein in der Region Nahost üblicher Begriff um einen Hügel zu bezeichnen, der durch eine wiederholte Besiedelung entsteht. Die Überreste der jeweiligen Besiedelungen bilden Schichten, welche sich im Laufe von Jahrtausenden ansammeln und so Erhöhungen von mehreren Metern entstehen lassen [Vie06]. Bei dem Tell Ziraa handelt es sich um einen in im Norden Jordaniens gelegenen 16 Meter hohen Tell. Die 5000 Jahre umspannende Siedlungsgeschichte wird seit dem Jahr 2001 im Rahmen von mehreren Grabungskampagnen des BAI und DEI archäologisch erforscht. Es wurde der Fundbestand, welcher vor Ort am BAI vorhanden ist, mithilfe des 3D-Scanners *EinScan Pro 2X* der Firma *Shining 3D* digitalisiert. Dabei handelt es um eine nach archäologischen Gesichtspunkten ausgewählte Teilmenge des gesamten Fundbestandes. Die Auswahl erfolgte auf Grundlage allgemeiner Überlegungen, es wurden keine konkreten Kriterien verwendet, sondern besonders erhaltenswerte bzw. archäologisch wertvolle Funde ausgewählt. Insgesamt wurden 154 Randscherben digitalisiert. Zur Generierung der Ground Truth (siehe Definition 6.1) wurden die 3D-Modelle manuell ausgerichtet.



Definition 6.1: Ground Truth

Ground Truth (übersetzt: *Bodenwirklichkeit* oder auch *Grundwahrheit*) kann als Bezeichnung für die Kenntnis der Wahrheit in Bezug auf eine bestimmte Frage angesehen werden. Sie ist das ideale erwartete Ergebnis (vgl. [LC08, S. 272]).

Für Scherben, bei denen Zeichnungen zur Verfügung standen (ca. 50 %) wurde die manuelle Ausrichtung mit diesen abgeglichen. Für alle verwendeten Scherben wurde zusätzlich der Durchmesser der Öffnung am Rand ermittelt und die manuellen Ausrichtungen mit diesem Durchmesser verglichen.

Für das Normalverfahren und das Kreisschnittverfahren wurden die Standardwerte für die Parameter aus [Wil+18] verwendet. Die Parameter für RRANSAC wurden auf der Grundlage der Überlegungen in Abschnitt 4.5 und anhand einzelner Scherben, die nicht Teil der beschriebenen Datenbasis sind, vorab festgelegt. Tabelle 6.1 zeigt eine Übersicht über die bei RRANSAC verwendeten Parameter.

Abschnitt 6.3. Analyse des Datenbestandes

Name des Parameters	Wert
ε_{min}	avg_density/35
ε_{max}	avg_density/2
ε_{steps}	35
normal_threshold	80°
cluster_epsilon	3 · avg_density
min_points	5 · (max(b, h)/avg_density)
probability	0,99

Tabelle 6.1: Übersicht über die bei RRANSAC verwendeten Parameterwerte. Die Parameter b und h bezeichnen dabei die Breite bzw. Höhe des 3D-Modells.

6.3 Analyse des Datenbestandes

	Minimum	Maximum	Durchschnitt	Standardabweichung
Breite (cm)	1,96	12,43	5,82	2,03
Höhe (cm)	1,36	10,10	4,62	1,69
Zentriwinkel (Grad)	4,37	158,23	39,21	32,24

Tabelle 6.2: Tabellarische Übersicht über Breite, Höhe und Zentriwinkel der Scherben.

Für die in den hier durchgeführten Experimenten verwendeten Scherben wurden die relevanten Angaben, d. h. Breite, Höhe und Zentriwinkel auf Grundlage der 3D-Modelle berechnet. Diese können nach einer erfolgreichen (ggf. manuellen) Ausrichtung automatisch berechnet werden. Tabelle 6.2 zeigt eine tabellarische Übersicht dieser Daten. Eine genauere Aufschlüsselung wird durch die zugehörigen Boxplots und Histogramme in Abbildung 6.1 ermöglicht. Es zeigt sich dabei eine hohe Bandbreite. Die kleinsten Scherben sind nur wenige Zentimeter breit und hoch, während die größten über 10 cm breit und hoch sind. Die Scherben sind im Durchschnitt etwas breiter als hoch und nur 38 von ihnen sind höher als breit. Abbildung 6.2 zeigt eine Auswahl der verwendeten Scherben. Zwischen Breite und Höhe besteht eine große Korrelation ($r = 0,56$), zwischen der Fläche (d. h. die Breite multipliziert mit der Höhe) der Scherben und dem Zentriwinkel besteht jedoch nur eine sehr kleine Korrelation ($r = 0,10$, Interpretation nach [Coh88]). Das bedeutet, dass größere Scherben keinen größeren Zentriwinkel aufweisen, sondern zu größeren Gefäßen gehören. Abbildung 6.3 zeigt diese beiden Zusammenhänge.

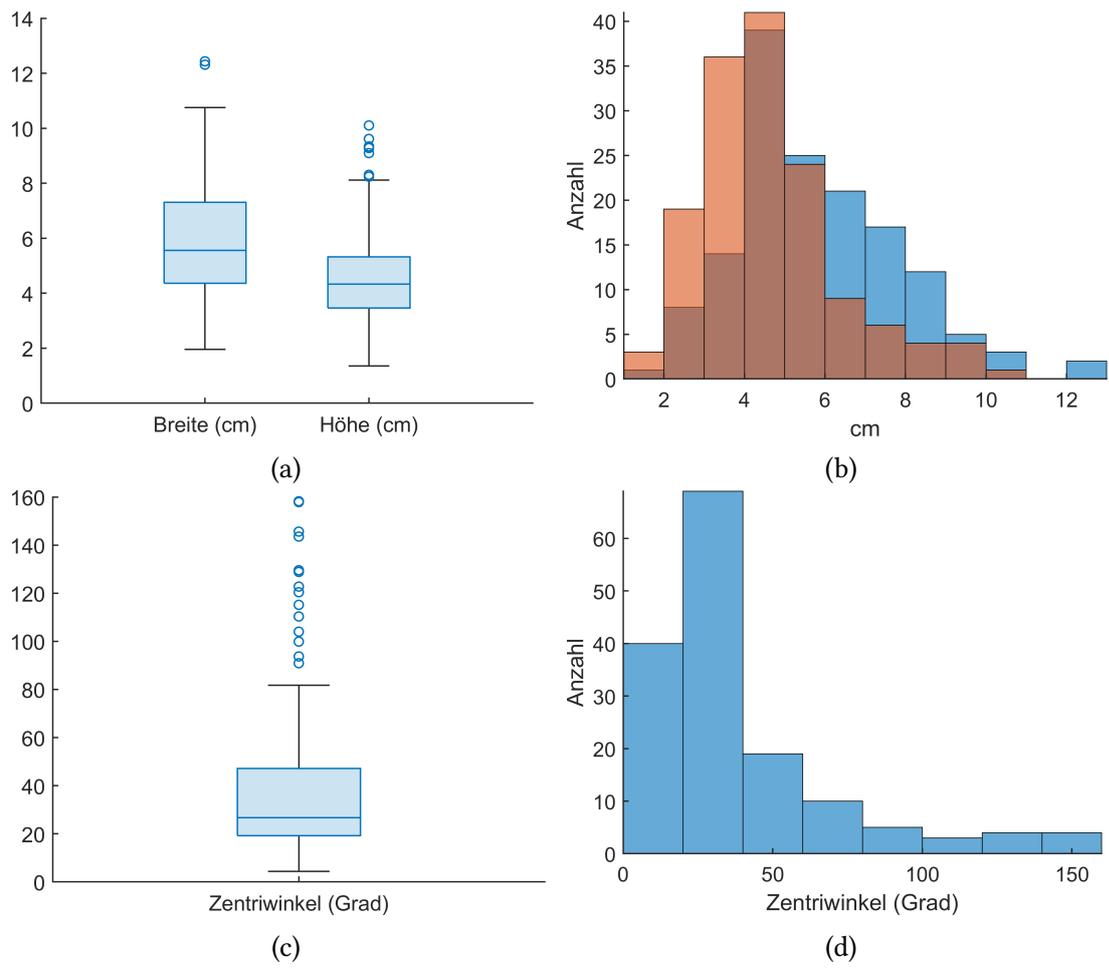


Abbildung 6.1: (a) und (b) zeigen als Boxplot und Histogramm eine grafische Übersicht über Breite und Höhe der verwendeten Scherben in Zentimetern. (c) und (d) zeigen in Grad dieselbe Übersicht für den Zentriwinkel.

Abschnitt 6.3. Analyse des Datenbestandes



Abbildung 6.2: Eine Auswahl der bei den Experimenten verwendeten Scherben. Jeweils abgebildet ist das Innere und das Äußere.

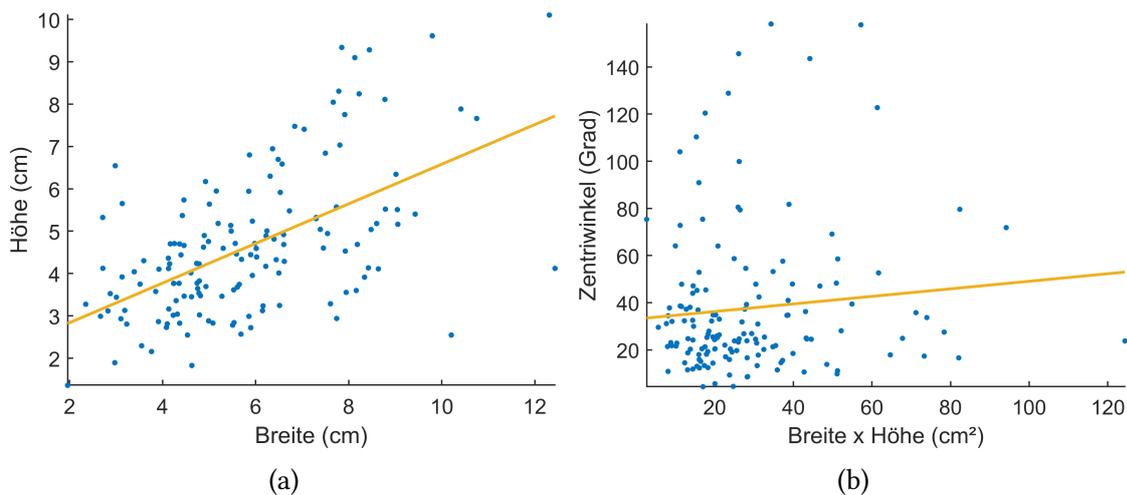


Abbildung 6.3: (a) zwischen Breite und Höhe besteht ein starker linearer Zusammenhang. (b) zwischen der Fläche und dem Zentriwinkel besteht nur ein sehr kleiner linearer Zusammenhang.

6.4 Berechnung der Abweichung vom korrekten Ergebnis

Abweichungen von der Ground Truth müssen mithilfe einer festgelegten Metrik gemessen werden können. Im Folgenden wird eine Metrik hergeleitet, mithilfe derer nicht nur zwei Transformationen derselben Scherbe mit dem korrekten Ergebnis verglichen werden können, sondern auch Ergebnisse bezüglich verschiedener Scherben. Zwei Transformationen können nicht ohne weiteres miteinander verglichen werden. Eine Transformation ist eine Kombination aus einer Translation und einer Rotation. Während die Translation eine dimensionslose Kennzahl ist (bzw. nach entsprechender Skalierung in angegeben werden kann), wird eine Rotation in Grad angegeben, d. h. es handelt sich um zwei nicht direkt verrechenbare Größen. Eine sinnvolle Distanzmetrik muss außerdem relative Abweichungen in Bezug auf die Translation berücksichtigen, da ansonsten eine Vergleichbarkeit zwischen verschiedenen Scherben nicht sinnvoll ist.

Zur Beschreibung der Abweichungen rotationssymmetrischer Körper wird in verschiedenen Bereichen die DIN EN ISO 1101 verwendet. Diese basieren jedoch auf der Grundannahme einer hohen Qualität der Werkstücke, welche bei archäologischen Keramikscherben nicht gegeben ist (vgl. Kapitel 2). Darüber hinaus bieten diese eine Reihe spezialisierter Angaben und kein vereinheitlichendes Maß, mithilfe dessen die Güte

Abschnitt 6.4. Berechnung der Abweichung vom korrekten Ergebnis

der Ausrichtung zweier verschiedener Objekte angegeben werden kann. Aus diesen Gründen kann diese Norm hier nicht als Grundlage zur Entwicklung einer einheitlichen Metrik dienen.

Soweit es die archäologischen Keramikscherben betrifft, können schon zwei Transformationen derselben Scherbe nicht ohne weiteres miteinander verglichen werden. Der Grund dafür ist, dass sowohl eine Rotation um die z-Achse, als auch eine Verschiebung parallel zur z-Achse das Seitenprofil nicht verändert. Daher werden sowohl die vorab ermittelten korrekten Ausrichtungen als auch die Ergebnisse der Verfahren normiert. Dazu wird eine Scherbe S derart entlang der z-Achse verschoben, dass der unterste Eckpunkt des 3D-Modells auf der von der x- und y-Achse aufgespannten Ebene liegt. Seien

$$\begin{aligned} \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, v_n, \quad \vec{v}_i \in S \quad \text{mit} \\ \vec{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.1)$$

die Eckpunkte des 3D-Modells S und damit v_{iz} die zugehörigen z-Koordinaten der Eckpunkte. Um das Modell nun wie beschrieben zu verschieben, genügt es, das Minimum der z-Koordinaten

$$v_{min} = \min v_{iz} \quad (6.2)$$

zu bestimmen und das 3D-Modell um $-v_{min}$ zu verschieben, d. h. die Translationsmatrix $T_{-v_{min}}^z$ auf das Modell anzuwenden. Zur Normierung der Rotation werden die Eckpunkte des Modells in Zylinderkoordinaten dargestellt. Seien

$$\rho_i, \theta_i, z_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

die entsprechenden Koordinaten. Das 3D-Modell wird derart rotiert, dass der kleinste Polarwinkel

$$\theta_{min} = \min \theta_i \quad (6.4)$$

auf Null gesetzt wird. Die zugehörige Rotationsmatrix ist dementsprechend $R_{\theta_{min}}^z$. Abbildung 6.4 zeigt beispielhaft das Ergebnis dieser beiden Transformationen. Nach der Normierung der Ausrichtung können zwei Orientierungen einer Scherbe miteinander verglichen werden. Um jedoch zu entscheiden, ob eine Scherbe genauer ausgerichtet wurde als eine andere, müssen die Scherben noch einheitlich skaliert werden. Dazu wird die Diagonale des achsenorientierten Begrenzungsrahmens (engl. *Bounding Box* [Par02, S. 431f.]) bb_{diag} verwendet. Dies entspricht der Skalierungsmatrix $S_{bb_{diag}}$. Die Skalierung muss als erstes durchgeführt werden, damit die anderen beiden Transformationen

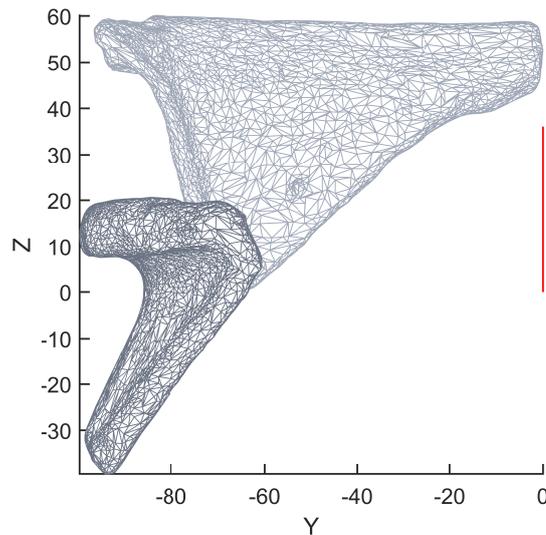


Abbildung 6.4: In dunkelgrau ist eine korrekt ausgerichtete Scherbe zu sehen. In hellgrau ist dieselbe Scherbe nach der Normierung der Ausrichtung dargestellt. Die Scherbe wurde dazu um die z-Achse rotiert und entlang der z-Achse verschoben, sodass der unterste Eckpunkte auf der von der x- und y-Achse aufgespannten Ebene liegt.

korrekt berechnet werden. Insgesamt ergibt sich damit

$$N = T_{-v_{min}}^z \cdot R_{\theta_{min}}^z \cdot S_{bb_{diag}} \quad (6.5)$$

als Normierungsmatrix.

Darauf aufbauend können Ausrichtungen miteinander verglichen werden. Dabei ist zu beachten, dass die Koordinaten einzelner Eckpunkte bei Rotationen erhalten bleiben können. Insbesondere gilt dies auch für große Abweichungen in den Ausrichtungen. Daher wird eine Metrik verwendet, welche an die Hausdorff-Metrik [BT06] angelehnt ist. Die Hausdorff-Metrik ist ein weit verbreiteter Ansatz [Lew01, S. 99], der sich als effektiv erwiesen hat, um zwei Geometrien S_1 und S_2 miteinander zu vergleichen [CRS98]. Es wird für jeden Punkt $v_i \in S_1$ und $w_i \in S_2$ die kürzeste euklidische Entfernung zur jeweils anderen Geometrie gemessen und das Maximum über alle diese kürzesten Entfernungen ermittelt. Im hier vorliegenden Kontext liegen jedoch mehr Informationen vor, sodass dieser Ansatz deutlich vereinfacht werden kann. Die zwei Geometrien S_1 und S_2 entsprechen demselben Scherbenmodell S mit jeweils verschie-

Abschnitt 6.4. Berechnung der Abweichung vom korrekten Ergebnis

denen Transformationen, d. h. es gilt

$$S_2 = M \cdot S_1, \quad (6.6)$$

wobei M eine beliebige Transformationsmatrix bezeichnet. Insbesondere kann jeder Eckpunkt $v_i \in S_1$ dem zugehörigen Eckpunkt $w_i \in S_2$ durch $w_i = Mv_i$ zugeordnet werden. Analog gilt dies auch für die normalisierende Transformation 6.5. Damit kann nach der Normalisierung für jeden Eckpunkt $v_i \in NS_1$ die Strecke

$$d(v_i, NS_2) = d(v_i, NMS_1) = d(v_i, NMv_i) = \|v_i - NMv_i\| \quad (6.7)$$

angegeben werden, also die euklidische Distanz, die ein Eckpunkt aufgrund der Transformation M und nach der Normalisierung N zurückgelegt hat. Als Metrik wird im Folgenden das Maximum

$$d(S_1, S_2) = \max_i d(v_i, NS_2), \quad v_i \in NS_1 \quad (6.8)$$

über diese Distanzen verwendet. In einigen Kontext ist es ausreichend, ausschließlich Transformationen derselben Scherbe zu vergleichen. In diesem Fall kann die Skalierung bei Gleichung 6.5 entfallen und es ergibt sich

$$\hat{d}(S_1, S_2) = \max_i d(v_i, \hat{N}S_2), \quad v_i \in \hat{N}S_1, \quad (6.9)$$

$$\hat{N} = T_{-v_{min}}^z \cdot R_{\theta_{min}}^z \quad (6.10)$$

als unskalierte Distanzmetrik. Diese hat entgegen der Metrik d den Vorteil, dass sie aufgrund der fehlenden Skalierung Abstände zwischen Punkten erhält und daher keine dimensionslose Größe ist, sondern in Zentimetern angegeben werden kann. Im Folgenden wird mit $d(S, GT)$ und $\hat{d}(S, GT)$ die jeweilige Distanz einer Scherbe von der ermittelten Ground Truth bezeichnet.

Alle Verfahren haben die Einschränkung, dass jeweils zwei gleichwertige Lösungen existieren. Wird das Ergebnis um 180° um die y-Achse rotiert, so ergibt dies ebenso ein Minimum (vgl. Abbildung 5.9). Um dies zu berücksichtigen, wird die Metrik 6.8 sowohl mit dem Ergebnis, als auch mit dem um 180° gedrehten Ergebnis berechnet. Das Minimum wird dann als Vergleichswert verwendet. Abbildung 6.5 zeigt eine Übersicht der Schritte zur Berechnung der Abweichung vom korrekten Ergebnis.

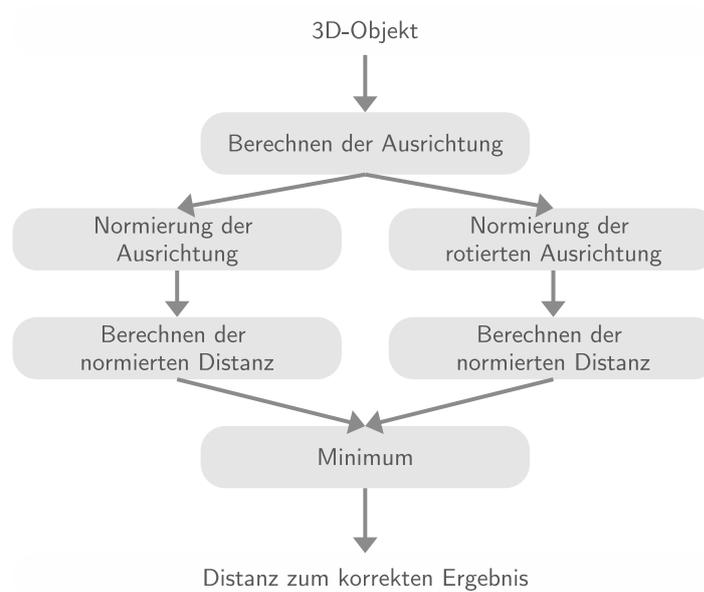


Abbildung 6.5: Übersicht über die Schritte, die durchgeführt werden, um die Abweichung vom korrekten Ergebnis zu berechnen.

6.5 Ergebnisse

Tabelle 6.3 zeigt die Ergebnisse für RRANSAC und das Hybridverfahren im Vergleich mit dem Normalen-Verfahren. In [Mar06] wird die Problematik dargelegt, dass es für archäologische Keramikscherben keine allgemeingültige Ground Truth geben kann nur selten genügend Scherben aufgefunden werden, um das ursprüngliche Gefäß zu rekonstruieren. Dies ist für eine objektive Bestimmung jedoch erforderlich. Dort wird vor allem die aus der Rotationsachse ermittelte Profilform bewertet, daher wurden Abweichungen von bis zu 95,65 mm noch als Erfolg bewertet, solange die Form des Profils der Ground Truth entspricht. In [Wil+18] werden für beispielhaft ausgewählte Scherben Abweichungen von bis zu 9 mm noch als Erfolg bewertet, ohne das ein allgemeingültiges Kriterium benannt wird. In Ermangelung eines etablierten Kriteriums zur Bewertung von Ergebnissen wurde in der vorliegenden Arbeit für die normalisierte Distanz im Sinne von Abschnitt 6.4 ein Schwellenwert von 0,1 festgelegt, d. h. eine Abweichung von maximal 0,1 wurde als Erfolg gewertet.

Das Normalen-Verfahren hat 18,18 % der Scherben korrekt ausgerichtet und durch RRANSAC wurden 14,29 % korrekt ausgerichtet. Durch die Kombination im Hybridverfahren konnte die Erfolgsquote auf 24,03 % erhöht werden. Dies entspricht einer Verbesserung von 32,18 %. Zwischen den normierten Distanzen und den realen

Abschnitt 6.6. Diskussion

	Normalen-Verfahren	RRANSAC	Hybridverfahren
Korrekt ausgerichtet (%)	18,18	14,29	24,03
Distanz Minimum	0,01	0,01	0,01
Distanz Maximum	2,30	3,52	1,24
Distanz (SD)	0,35	0,55	0,29

Tabelle 6.3: Ergebnisse der verschiedenen Verfahren. Das Normalen-Verfahren hat 18,18 %, RRANSAC 14,29 % und das Hybridverfahren 24,03 % der Scherben korrekt ausgerichtet.

Abweichungen in Zentimeter besteht eine starke Korrelation von $r = 0,83$. Dies belegt, dass es sich bei der eingeführten Distanzmetrik um ein sinnvolles Maß handelt. Die Verbesserung durch das Hybridverfahren zeigt, dass einige Scherben nur von einem der beiden Verfahren korrekt ausgerichtet worden sind. Tabelle 6.4 zeigt in Absolutwerten, wie vielen Scherben von einem der beiden Verfahren bzw. beiden Verfahren erfolgreich ausgerichtet werden konnten.

	Nur Normalen-Verfahren	Nur RRANSAC	Beide
Korrekt ausgerichtet	16	10	12
Falsch ausgerichtet	10	16	116

Tabelle 6.4: Anzahl der Scherben, welche bei den jeweiligen Verfahren korrekt bzw. falsch ausgerichtet worden sind.

6.6 Diskussion

Die Erfolgsrate von 24,03 % liegt deutlich unter den Ergebnissen der Publikationen, welche ebenfalls Ergebnisse für das Normalen-Verfahren berichten. Als Referenzimplementierung diente hier [Wil+18], dort wird eine Erfolgsrate von 77,27 % ($n = 110$) angegeben. Bei [DP18] wird für ein Normalen-Verfahren ohne Reduktion des Modells auf das Innere/Äußere und mit einem weniger robusten Optimierungsverfahren eine Erfolgsrate von 93,33 % ($n = 20$) [sic] angegeben¹. Für diese Unterschiede kann es mehrere Gründe geben. In den beiden Veröffentlichungen wurden nur von wenigen ausgewählten Scherben bzw. von keinen Scherben Angaben zum Zentriwinkel gemacht. Bei [Mar06] wurde experimentell ermittelt, dass je nach Beschaffenheit der Scherbe ein Zentriwinkel von ca. 25° für eine automatische Ausrichtung notwendig ist.

¹Es wurden 168 Scherben verwendet, davon 12 % = 20,16 \approx 20 Randscherben. Die berichtete Fehlerrate liegt bei 6,67 %, also 1,33 \approx 1 falsch ausgerichteten Scherben.

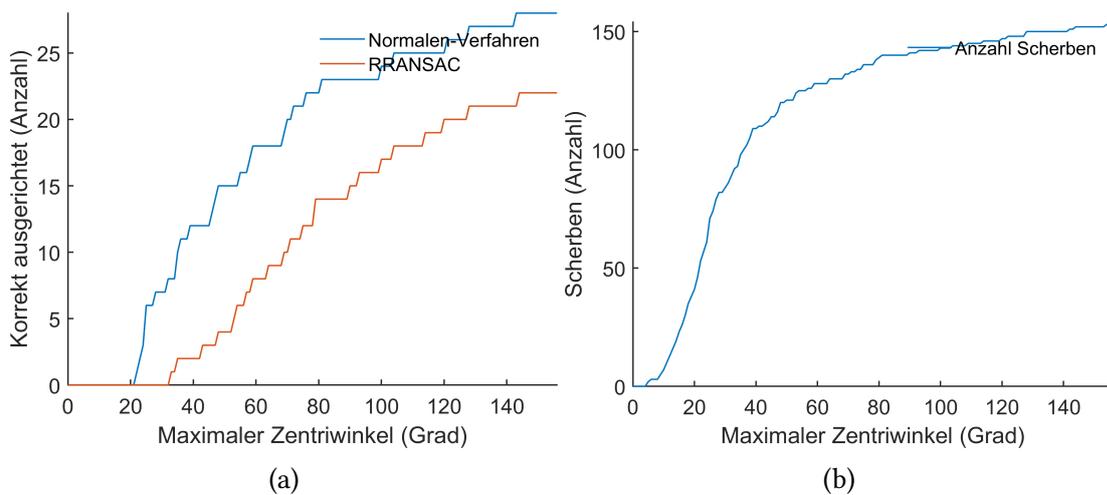


Abbildung 6.6: (a) Anzahl der korrekt ausgerichteten Scherben in Abhängigkeit des maximalen Zentriwinkels. (b) Anzahl der Scherben insgesamt in Abhängigkeit des maximalen Zentriwinkels.

In [KS08] wird berichtet, dass Scherben von 9° bis 25° auch bei manuell durchgeführter Grobausrichtung nicht zuverlässig korrekt ausgerichtet werden konnten. Dies ist konsistent mit den hier vorliegenden Ergebnissen. Der kleinste Zentriwinkel für eine korrekt ausgerichtete Scherbe liegt beim Normalen-Verfahren bei $21,16^\circ$ und bei $32,29^\circ$ bei RRANSAC. Abbildung 6.6 zeigt, wie viele Scherben insgesamt korrekt ausgerichtet wurden in Abhängigkeit vom kleinsten Zentriwinkel der Scherben und parallel dazu die Anzahl der Scherben, welche einen solchen Zentriwinkel mindestens aufweisen. Der große Anteil an Scherben mit vergleichsweise kleinem Zentriwinkel kann also einen wesentlichen Einfluss auf das Gesamtergebnis gehabt haben. In bisherigen Experimenten wurden keine Fehlertoleranzen definiert, also wie viel Abweichung innerhalb einer Metrik erlaubt ist, damit ein Ergebnis als korrekt bezeichnet wird. Mit 0,1 wurde hier ein konservativer Grenzwert verwendet, welcher einer maximalen Abweichung von 1 cm in der unskalierten Metrik 6.9 entspricht. Abbildung 6.7 zeigt kumuliert die (skalierten) Distanzen in Abhängigkeit vom Zentriwinkel.

Zuletzt wird das in Kapitel 5.3 eingeführte Bewertungskriterium des Hybridverfahrens evaluiert. Bei diesem wird anhand des Seitenprofils entschieden, welches der beiden im Hybridverfahren verwendete Verfahren zur Grobausrichtung besser abgeschnitten hat. Danach wird auf der Grundlage zufälliger Transformationen festgestellt, ob eine korrekte Ausrichtung ermittelt werden konnte. Das Kriterium stellt damit einen binären Klassifikator dar. In 87,66 % der Fälle wurde korrekt klassifiziert. Tabelle 6.5 zeigt die Ergebnisse der Klassifikation als Konfusionsmatrix und Tabelle 6.6 zeigt die

Abschnitt 6.6. Diskussion

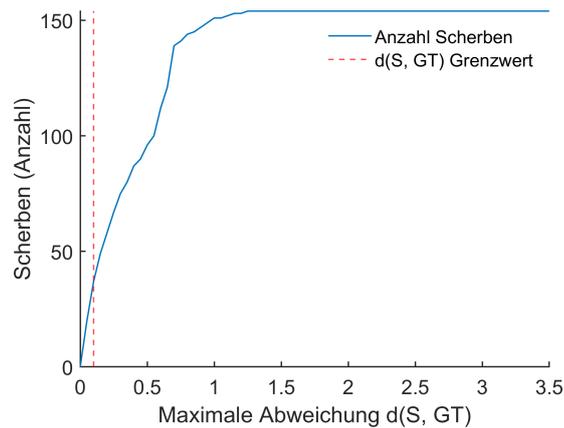


Abbildung 6.7: Anzahl der Scherben in Abhängigkeit der maximalen Abweichung von der Ground Truth in der Distanzmetrik $d(S, GT)$.

Gütekriterien der Klassifikation. Es zeigt sich, dass das Hybridverfahren nur wenige

Hybrid- verfahren	Ground Truth	
	Korrekt ausgerichtet	Falsch ausgerichtet
Korrekt ausgerichtet	30	12
Falsch ausgerichtet	7	105

Tabelle 6.5: Konfusionsmatrix der Klassifizierung durch das Hybridverfahren.

	Sensitivität	Spezifität	Positiver Vorhersagewert	Negativer Vorhersagewert	F-Maß
Bewertungs- kriterium beim Hybridverfahren	0,81	0,90	0,71	0,94	0,76

Tabelle 6.6: Gütekriterien der Klassifizierung durch das Hybridverfahren.

falsch-negative Bewertungen ergibt, d. h. dass in den meisten Fällen richtig erkannt wird, dass eine Scherbe korrekt ausgerichtet worden ist. Schlechter schneidet das Verfahren bei den falsch-positiven Bewertungen ab. Das Verfahren hat einen hohen Anteil von falsch ausgerichteten Scherben als korrekt ausgerichtet bewertet.

6.7 Zusammenfassung

Der Einsatz des Hybridverfahrens hat den Anteil der korrekt ausgerichteten Scherben um 32,18 % erhöht gegenüber dem Normalen-Verfahren. Als Datenbasis dienten 154 nach archäologischen Gesichtspunkten ausgewählte Scherben, für welche vorab manuell die korrekte Ausrichtung ermittelt worden ist. Zur Bewertung der Ergebnisse wurde eine neue Distanzmetrik eingeführt, welche eine Ausrichtung normiert und durch Skalierung eine Vergleichbarkeit nicht nur von zwei Ausrichtungen derselben Scherbe, sondern auch von zwei Ausrichtung unterschiedlicher Scherben ermöglicht. Mit 24,03 % korrekt ausgerichteten Scherben wurden deutlich weniger Scherben korrekt ausgerichtet als in der Literatur. Dabei ist zu beachten, dass das in der Literatur mit deutlich höheren Erfolgsraten behandelte Normalen-Verfahren in den hier durchgeführten Experimenten nur eine Erfolgsrate von 18,18 % aufweist. Die Gründe dafür können sein, dass Scherben mit kleinerem Zentriwinkel als in der Vergleichsliteratur vorlagen und das hier geringere Fehlertoleranzen verwendet worden sind.

Fazit und Ausblick

Ein hybrides Verfahren zur Bestimmung der Rotationsachse von Scherben zylindrischer Gefäße wurde vorgestellt und experimentell validiert. In **Kapitel 1** und **Kapitel 2** wurden die zum Verständnis der Arbeit notwendigen Grundlagen dargelegt und ein Einblick in die archäologische Arbeit mit Keramikscherben gegeben. Keramikscherben stellen innerhalb der Archäologie insofern eine Sonderrolle dar, als die Häufigkeit dieser Fundart spezielle Prozesse benötigt und etabliert hat, um die logistischen und wissenschaftlichen Herausforderungen zu bewältigen. Die diversen Herstellungskontexte bedingen dabei eine hohe Variabilität bezüglich der Qualität und des Grades der Deformation der Scherben und die kontinuierliche Nutzung und damit einhergehende Entwicklung erschwert eine eindeutige und objektive Klassifizierung der Funde. Keramikfunde werden in erster Linie als Sammlung interpretiert. Neben einer objektiven und reproduzierbaren Aufarbeitung ist daher die Effizienz von entscheidender Bedeutung. Während Methoden aus anderen Wissenschaften heute an vielerlei Stellen ein etablierter Teil der Archäologie sind, so ist die Aufarbeitung von Keramikscherben noch immer ein manueller Prozess.

In **Kapitel 3** wurde gezeigt, dass die Bestimmung der Rotationsachse auf der Grundlage verschiedener sich aus der Rotationssymmetrie ergebenden Eigenschaften durchgeführt werden kann. Viele Ansätze funktionieren jedoch nur zuverlässig, wenn die Scherbe vorab grob ausgerichtet worden ist. Dies wird teilweise immer noch manuell durchgeführt. Eine solche manuelle Aufbereitung ist ein Hindernis für eine mögliche Reformierung des Gesamtprozesses. In Bezug auf die automatisierte Bestimmung der Grobausrichtung sind verschiedene Varianten verbreitet, welche darauf basieren, dass die Normalen in Richtung der Rotationsachse zeigen.

In **Kapitel 4** wurde mit dem Repeated-RANSAC-Verfahren ein gänzlich neuer Ansatz vorgestellt. Es wurde dargelegt, dass sich die Scherben in zylindrische Formen segmentieren lassen. Der Profilverlauf ist gekrümmt, dadurch ist eine Segmentierung nicht eindeutig. Diese Tatsache wird bei RRANSAC verwendet, um eine Bestimmung der Rotationsachse durchzuführen. Dieser Ansatz, Verfahren zur Segmentierung für Objekte zu verwenden, für welche die Segmentierung nicht eindeutig durchgeführt werden kann, könnte auch in anderen Kontexten verwendet werden, um geometrische Eigenschaften von Objekten abzuleiten. Normalerweise wird versucht, passende Parameter für ein Verfahren abzuleiten. Bei RRANSAC hingegen wird ein Parameter variiert und die Ergebnisse der Durchläufe mit diesen variierenden Parametern gesammelt. Mithilfe eines robusten Verfahrens werden dann die Ausreißer ermittelt und entfernt. Dieser Ansatz kann daher überall dort angewendet werden, wo keine hinreichend genauen Schätzungen für Parameter abgeleitet werden können und wo die Ausreißer nachträglich mithilfe eines robusten Verfahrens identifiziert werden können. Die wiederholte Durchführung mit verschiedenen Parametern muss jedoch praktikabel sein.

Mit dem Hybridverfahren wurde in **Kapitel 5** ein System zur Kombinierung mehrerer Verfahren vorgestellt. Bei diesem wird sich zunutze gemacht, dass rotationssymmetrische Objekte mehrere verschiedenartige geometrische Eigenschaften aufweisen. In Abhängigkeit der Form des jeweiligen Objektes kann eine bestimmte Eigenschaft zuverlässiger Ergebnisse liefern als eine andere. Ergebnisse zweier Verfahren mit kategorisch unterschiedlichen Zielwerten lassen sich nicht ohne weiteres miteinander vergleichen. Im Hybridverfahren werden die beiden Ergebnisse daher zusätzlich mit einem Verfahren zur Feinausrichtung verbessert. Auf diese Weise werden zwei Ergebnisse generiert, die auf einer Optimierung gegen denselben Zielwert basieren und daher verglichen werden können. Das Seitenprofil einer korrekt ausgerichteten Scherbe hat die kleinstmögliche Fläche. Auf Grundlage dieser Eigenschaft wird mithilfe von Zufallsergebnissen entschieden, ob eine korrekte Ausrichtung ermittelt werden konnte. Insgesamt werden also vier verschiedene geometrische Eigenschaften verwendet.

Sowohl das Hybridverfahren als auch RRANSAC sind in **Kapitel 6** experimentell validiert worden. Als Datenbasis dienten 154 archäologische Randscherben aus den Beständen des Biblisch-archäologischen Instituts Wuppertal (BAI Wuppertal). Mithilfe von RRANSAC wurden 14,29 % der Scherben korrekt ausgerichtet. Als Vergleichswert diente das auf Normalen basierendes Verfahren aus [Wil+18]. Bei diesem wurden 18,18 % korrekt ausgerichtet. Die beiden Verfahren wurden mithilfe des Hybridverfahrens kombiniert. Dies erhöhte die Erfolgsrate auf 24,03 %, was einer Verbesserung von

32,18 % entspricht. Zusätzlich wurde die beim Hybridverfahren durchgeführte Bewertung evaluiert. Diese ergab 30 richtig-positive und 105 richtig-negative Ergebnisse. Bei 12 Scherben wurde fälschlich eine korrekte Ausrichtung angenommen (falsch-positiv) und bei 7 wurde fälschlich eine inkorrekte Ausrichtung angenommen (falsch-negativ). Dies entspricht einer Sensitivität von 0,81, einer Spezifität von 0,90 und einem F-Maß von 0,76.

RRANSAC hat damit etwas schlechter abgeschnitten als das dem Stand der Forschung entsprechende Vergleichsverfahren. Die Kombinierung beider Verfahren mithilfe des Hybridverfahrens hat jedoch zu einer deutlichen Verbesserung geführt. Es hat sich gezeigt, dass die im Hybridverfahren durchgeführte Bewertung der ermittelten Ausrichtung grundsätzlich funktioniert. In Bezug auf das übergeordnete Ziel der Prozessautomatisierung ist jedoch vor allem die hohe Anzahl an falsch-positiven Bewertungen problematisch. Der Grund dafür kann sein, dass die in Abschnitt 5.3 getroffene Annahme über die Verteilung der Punkte des Seitenprofils verletzt ist. Eine falsche Erkennung von inkorrekt ausgerichteten Scherben führt dazu, dass mehr Scherben als nötig noch einmal manuell abgehandelt werden müssen, um eine korrekte Ausrichtung zu gewährleisten. Dies kann einen vorläufigen Kompromiss zwischen der heute noch üblichen vollständig manuellen und einer zukünftigen vollautomatischen Aufbereitung angesehen werden. Wichtiger ist dagegen, dass eine inkorrekte Ausrichtung auch als solche erkannt wird, sodass keine falschen Daten im Zuge des Weiteren archäologischen Prozesses abgeleitet werden. Die Minimierung von falsch-positiven Ergebnissen ist daher entscheidend, wenn solche Bewertungskriterien zukünftig Anwendung finden sollen. Es handelt es sich hier um einen ersten Schritt zu einem System, welches vollautomatisch und zuverlässig die Rotationsachse bestimmt und nur in Einzelfällen eine manuelle Aufbereitung benötigt.

Darüber hinaus sind die Ergebnisse dieser Arbeit im Zusammenhang mit grundsätzlichen Fragen zur Bestimmung richtig-positiver bzw. richtig-negativer Ergebnisse zu sehen. In [Mar06, S. 70] wird darauf hingewiesen, dass es für archäologische Keramikscherben in der Regel keine objektivierbare Ground Truth geben kann. Der Grund dafür ist, dass meist zu wenig von einem Gefäß erhalten ist, um diese zweifelsfrei zu bestimmen. Dieses Problem könnte zukünftig auf zwei Arten angegangen werden: Da das manuelle Ausrichten seit Jahrzehnten den Standard in der Archäologie darstellt, müssten in Abhängigkeit von zuverlässig messbaren Größen Fehlertoleranzen ermittelt werden, indem Scherben mehrfach durch verschiedene Personen manuell aufbereitet werden. Dem Autor (und den auf dieses Thema angesprochenen Archäologen) zumin-

dest sind derartige systematischen Erhebungen nicht bekannt. Ein weiterer und in der Informatik üblicher Ansatz besteht darin, einen Benchmark-Datensatz zu etablieren, gegen den neue Verfahren getestet werden können. Das Herstellen authentischer Replika wird unter anderem im Rahmen der experimentellen Archäologie praktiziert. Bei dieser werden antike Methoden verwendet, um Fragestellungen zu behandeln, welche sich nur zuverlässig durch eine Nachbildung damaliger Möglichkeiten beantworten lässt. Es ist also durchaus möglich, authentische Scherben zu generieren, bei denen alle relevanten Daten zu einem Zeitpunkt erhoben werden, zu denen die Gefäße als Ganzes noch existierten und damit zuverlässig und zweifelsfrei erhoben werden konnten. Die entstehenden Scherben können dann als zuverlässige Ground Truth dienen, gegen die Verfahren validiert und verglichen werden können.

Dem gegenüber steht der aktuelle Stand der Forschung, keine Fehlertoleranzen anzugeben (vgl. [DP18; Hal99; Mar06; Wil+18]). In der vorliegenden Arbeit wurden mit der als $d(S, GT)$ bezeichneten Metrik Abweichungen von der Ground Truth einheitlich und vergleichbar gemessen. Im Wesentlichen wird dabei für jeden Eckpunkt die Distanz gemessen, welche dieser zum selben Eckpunkt des Modells in der Ground Truth aufweist und das Maximum über diese Distanzen ermittelt. Dieser Ansatz orientiert sich an der Hausdorff-Metrik, welche sich in vielen Bereichen bewährt hat, um Unterschiede zwischen zwei komplexen Geometrien zu messen [CRS98]. Der Nachteil der Reduzierung der Abweichung auf eine einzelne Metrik, d. h. einen einzelnen Wert, besteht darin, dass alle Abweichungen gleich gewichtet werden. Eine Abweichung bezüglich der Verschiebung eines Gefäßes kann dazu führen, dass das korrekte Seitenprofil ermittelt wird und nur der Radius des ursprünglichen Gefäßes unter- bzw. überschätzt wird. Daher kann eine Abweichung, welche das Seitenprofil an sich verfälscht als schwerwiegender angesehen werden. Andererseits wurde mit $d(S, GT) < 0,1$ ein Grenzwert gewählt, der eine maximale Abweichung von 1 cm erlaubt hat. Dies entspricht qualitativ der Abweichung, welche bei [Wil+18] als Beispiel für eine akzeptable Abweichung genannt wird. Dort wird jedoch keine Obergrenze bezüglich der akzeptierten Abweichung genannt. Bei [Mar06] wurden Abweichungen von mehreren Zentimetern noch akzeptiert. In diesem Sinne wurde zur Auswertung der Experimente in dieser Arbeit ein konservativer Grenzwert gewählt und die in dieser Arbeit vorgestellten experimentellen Ergebnisse sind unter Berücksichtigung dieser Aspekte zu betrachten.

Neben solchen gerade erwähnten Diskussionspunkten zur Ground Truth fehlen noch Übersichtsarbeiten, welche nicht nur einen Überblick über veröffentlichte Verfahren geben, sondern diese auch in eine Systematik einordnen, wie dies zum Beispiel

bei [Rag+13] für RANSAC-Verfahren gemacht wurde. Dies kann Erkenntnisse darüber bringen, welche geometrischen Eigenschaften von Scherben in welchen Fällen besonders geeignet sind und mit welchem Optimierungsverfahren diese kombiniert werden sollten. Das Hybridverfahren könnte dann zukünftig als übergeordneter Rahmen fungieren, bei dem zukünftig mehrere Verfahren miteinander kombiniert werden, um auch in den schwierigsten Fällen ein korrektes Ergebnis zu produzieren.

Der in der Einleitung erwähnte Paradigmenwechsel, welcher die automatisierte Aufbereitung von Keramikfunden zum Standardrepertoire in der Archäologie macht und neue Herangehensweisen ermöglicht, steht also noch aus. Darüber hinaus existiert eine technologische Lücke: Die Digitalisierung von Funden kann noch nicht effizient genug abgewickelt werden. Dazu sollte nicht, wie aktuell noch üblich [Di +23; Wil+18], jede Scherbe einzeln manuell in die jeweiligen Programme geladen werden müssen. Aktuelle Ansätze verwenden eine individuelle Zusammenstellung verschiedener Programme, beinhalten oft eine speziell für das jeweilige Projekt angefertigte Elemente und basieren auf einem besonderen Engagement der durchführenden Archäologen. Dies erschwert die Reproduzierbarkeit und verhindert eine breite Anwendung der eingeführten Prozesse. In [Göt+21] wurde gezeigt, dass auch ein sorgfältig geplanter Prozess nach heutigem Stand der Technik nicht schneller ist als ein manuelles Zeichnen der Scherben. Das ist sicherlich kein zufriedenstellendes Ergebnis. Auf der anderen Seite konnte zwar die investierte Gesamtzeit nicht reduziert werden, aber doch zumindest die notwendige Zeit, welche vor Ort während der Grabung aufgewendet werden muss. Solche Proof-of-Concepts sind zwar elementar, können aber nicht in der Breite Anwendung finden. Sowohl bestehende Software zur Bestimmung der Rotationsachse bzw. zur darauf aufbauenden Generierung archäologischer Zeichnungen als auch Software für die Digitalisierung der Funde benötigt Erfahrung und Expertenwissen und kann nicht ohne eine ausführliche Einarbeitung verwendet werden. Existierende Software zur Generierung archäologischer Zeichnungen ist darüber hinaus schon rein technologisch noch nicht so weit ausgereift, dass diese Teil des archäologischen Alltags werden kann. Hier zeigt sich nun in der Tiefe das bereits in der Einführung erwähnte Henne-und-Ei-Problem. Es fehlt ein Gesamtsystem, welches im Idealfall Hardware und Software miteinander verbindet. Ohne das Schließen der in den letzten Absätzen erwähnten Lücken und ohne Etablierung von Standards fehlen jedoch die Anreize für ein solches Gesamtsystem. Der „Fahrplan“ zu diesem wurde hier jedoch dargelegt und die vorliegende Arbeit kann dahingehend als ein Schritt in die entsprechende Richtung aufgefasst werden.

Literatur

- [Ara+19] F. J. Aragón, M. A. Goberna, M. A. López und M. M. Rodríguez. *Nonlinear Optimization*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Cham: Springer International Publishing, 2019. DOI: [10.1007/978-3-030-11184-7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-11184-7) (siehe S. 38).
- [Arn54] R. Arnheim. *Art and Visual Perception: A Psychology of the Creative Eye*. University of California Press, 1954 (siehe S. 11).
- [Att+06] M. Attene, S. Katz, M. Mortara, G. Patane, M. Spagnuolo und A. Tal. „Mesh Segmentation - A Comparative Study“. In: *IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications 2006 (SMI'06)*. Matsushima, Japan: IEEE, 2006, S. 7–7. DOI: [10.1109/SMI.2006.24](https://doi.org/10.1109/SMI.2006.24) (siehe S. 41).
- [BDH96] C. B. Barber, D. P. Dobkin und H. Huhdanpaa. „The Quickhull Algorithm for Convex Hulls“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 22.4 (1996-12), S. 469–483. DOI: [10.1145/235815.235821](https://doi.org/10.1145/235815.235821) (siehe S. 66).
- [BV10] N. Bhatia und Vandana. „Survey of Nearest Neighbor Techniques“. In: *International Journal of Computer Science and Information Security* 8.2 (2010) (siehe S. 66).
- [BT06] T. Biršan und D. Tiba. „One Hundred Years since the Introduction of the Set Distance by Dimitrie Pompeiu“. In: *System Modeling and Optimization: Proceedings of the 22nd IFIP TC7 Conference Held from July 18–22, 2005, in Turin, Italy* 22. Springer, 2006, S. 35–39 (siehe S. 82).
- [BK04] M. Botsch und L. Kobbelt. „A Remeshing Approach to Multiresolution Modeling“. In: *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*. SGP04: Symposium on Geometry Processing. Nice France: ACM, 2004-07-08, S. 185–192. DOI: [10.1145/1057432.1057457](https://doi.org/10.1145/1057432.1057457) (siehe S. 47).
- [CM02] Y. Cao und D. Mumford. „Geometric Structure Estimation of Axially Symmetric Pots from Small Fragments“. In: *Signal Processing, Pattern Recognition, and Applications, IASTED International Conference*. Bd. 2. 2002 (siehe S. 35, 36, 75).
- [Cha+12] V. Chandrasekaran, B. Recht, P. A. Parrilo und A. S. Willsky. „The Convex Geometry of Linear Inverse Problems“. In: *Foundations of Computational Mathematics* 12.6 (2012-12), S. 805–849. DOI: [10.1007/s10208-012-9135-7](https://doi.org/10.1007/s10208-012-9135-7) (siehe S. 51).

- [CG01] T. Chaperon und F. Goulette. „Extracting Cylinders in Full 3D Data Using a Random Sampling Method and the Gaussian Image“. In: Vision Modeling and Visualization Conference 2001 (VMV-01). Stuttgart, Germany, 2001-11, S. 9 (siehe S. 18).
- [CRS98] P. Cignoni, C. Rocchini und R. Scopigno. „Metro: Measuring Error on Simplified Surfaces“. In: *Computer Graphics Forum* 17.2 (1998), S. 167–174 (siehe S. 82, 92).
- [Coh88] J. Cohen. *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. 2nd ed. Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates, 1988. 567 S. (siehe S. 77).
- [CST97] A. R. Conn, K. Scheinberg und Ph. L. Toint. „Recent Progress in Unconstrained Nonlinear Optimization without Derivatives“. In: *Mathematical Programming* 79.1-3 (1997-10), S. 397–414. DOI: [10.1007/BF02614326](https://doi.org/10.1007/BF02614326) (siehe S. 38).
- [DG07] P. L. Davies und U. Gather. „The Breakdown Point—Examples and Counterexamples“. In: *REVSTAT-Statistical Journal* 5.1 (2007), S. 1–17 (siehe S. 50).
- [Dek05] M. Dekking, Hrsg. *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How*. Springer Texts in Statistics. London: Springer, 2005. 486 S. (siehe S. 72, 73).
- [Di +23] L. Di Angelo, P. Di Stefano, E. Guardiani und A. E. Morabito. „An Automatic Method for Geometric and Morphological Information Extraction and Archiving of Ceramic Finds“. In: *The Future of Heritage Science and Technologies*. Hrsg. von R. Furferi, L. Governi, Y. Volpe, F. Gherardini und K. Seymour. Cham: Springer International Publishing, 2023, S. 48–59. DOI: [10.1007/978-3-031-17594-7_4](https://doi.org/10.1007/978-3-031-17594-7_4) (siehe S. 93).
- [Di +22] L. Di Angelo, P. Di Stefano, E. Guardiani und C. Pane. „A Review on Computer-Based Methods for Archeological Pottery Classification and Reconstruction“. In: *Design Tools and Methods in Industrial Engineering II: Proceedings of the Second International Conference on Design Tools and Methods in Industrial Engineering, ADM 2021, September 9–10, 2021, Rome, Italy*. Springer, 2022, S. 909–919 (siehe S. 35).
- [DDM14] L. Di Angelo, P. Di Stefano und A. E. Morabito. „Comparison of Methods for Axis Detection of High-Density Acquired Axially-Symmetric Surfaces“. In: *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJDeM)* 8.3 (3 2014-08), S. 199–208. DOI: [10.1007/s12008-014-0209-4](https://doi.org/10.1007/s12008-014-0209-4) (siehe S. 35, 75).
- [DP18] L. Di Angelo und S. Paolo Di. „Axis Estimation of Thin-Walled Axially Symmetric Solids“. In: *Pattern Recognition Letters* 106 (2018-04), S. 47–52. DOI: [10.1016/j.patrec.2018.02.022](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2018.02.022) (siehe S. 35, 75, 85, 92).
- [DP11] F. Dunn und I. Parberry. *3D Math Primer for Graphics and Game Development*. 2nd ed. Boca Raton, FL: A K Peters/CRC Press, 2011. 824 S. (siehe S. 5, 7).
- [Esl+20] D. Eslami, L. Di Angelo, P. Di Stefano und C. Pane. „Review of Computer-Based Methods for Archaeological Ceramic Sherds Reconstruction“. In: *Virtual Archaeology Review* 11.23 (2020-07-08), S. 34. DOI: [10.4995/var.2020.13134](https://doi.org/10.4995/var.2020.13134) (siehe S. 35).

- [Fis11] H. Fischer. *A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory*. New York, NY: Springer New York, 2011. DOI: [10.1007/978-0-387-87857-7](https://doi.org/10.1007/978-0-387-87857-7) (siehe S. 72).
- [FB81] M. A. Fischler und R. C. Bolles. „Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography“. In: *Communications of the ACM* 24.6 (6 1981-06), S. 381–395. DOI: [10.1145/358669.358692](https://doi.org/10.1145/358669.358692) (siehe S. 14–17).
- [Fol95] J. D. Foley, Hrsg. *Computer Graphics: Principles and Practice*. 2nd ed. in C. Addison-Wesley Systems Programming Series. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1995. 1175 S. (siehe S. 8).
- [FP08] L. Frias und J. Petit. „Parallel Partition Revisited“. In: *Experimental Algorithms*. Hrsg. von C. C. McGeoch. Bd. 5038. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 142–153. DOI: [10.1007/978-3-540-68552-4_11](https://doi.org/10.1007/978-3-540-68552-4_11) (siehe S. 66).
- [GW02] R. C. Gonzalez und R. E. Woods. *Digital Image Processing*. 2nd ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 2002. 793 S. (siehe S. 41).
- [Göt+21] F. Göttlich, A. Schmitt, A. Kilian, H. Gries und K. Badreshany. „A New Method for the Large-Scale Documentation of Pottery Sherds Through Simultaneous Multiple 3D Model Capture Using *Structure from Motion* : Phoenician Carinated-Shoulder Amphorae from Tell El-Burak (Lebanon) as a Case Study“. In: *Open Archaeology* 7.1 (2021-05-06), S. 256–272. DOI: [10.1515/opar-2020-0133](https://doi.org/10.1515/opar-2020-0133) (siehe S. 93).
- [GT93] C. Großmann und J. Terno. *Numerik der Optimierung*. Teubner Studienbücher Mathematik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1993. DOI: [10.1007/978-3-322-80135-7](https://doi.org/10.1007/978-3-322-80135-7) (siehe S. 60).
- [Hal99] R. Halir. „An Automatic Estimation of the Axis of Rotation of Fragments of Archaeological Pottery: A Multi-Step Model-Based Approach“. In: *Proc. of the 7th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Interactive Digital Media (WSCG'99)*. 1999 (siehe S. 35, 51, 75, 92).
- [HF97] R. Halir und J. Flusser. „Estimation of Profiles of Sherds of Archaeological Pottery“. In: *Proceedings of the Czech Pattern Recognition Workshop (CPRW'97)*. 1997, S. 126–130 (siehe S. 35–37).
- [HH14] D. Han und H.-S. Hahn. „Axis Estimation and Grouping of Rotationally Symmetric Object Segments“. In: *Pattern Recognition* 47.1 (2014-01), S. 296–312. DOI: [10.1016/j.patcog.2013.06.022](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2013.06.022) (siehe S. 35, 36).
- [Hua+06] Q.-X. Huang, S. Flöry, N. Gelfand, M. Hofer und H. Pottmann. „Reassembling Fractured Objects by Geometric Matching“. In: *ACM SIGGRAPH 2006 Papers on - SIGGRAPH '06*. ACM SIGGRAPH 2006 Papers. Boston, Massachusetts: ACM Press, 2006, S. 569. DOI: [10.1145/1179352.1141925](https://doi.org/10.1145/1179352.1141925) (siehe S. 27).
- [Hun17] A. M. W. Hunt, Hrsg. *The Oxford Handbook of Archaeological Ceramic Analysis*. OCLC: ocn945718423. Oxford: Oxford University Press, 2017. 724 S. (siehe S. 22).

- [22] *hybrid – Schreibung, Definition, Bedeutung, Etymologie, Synonyme, Beispiele*. DWDS. 2022-02-21. URL: <https://www.dwds.de/wb/hybrid> (besucht am 2023-04-24) (siehe S. 57).
- [IK88] J. Illingworth und J. Kittler. „A Survey of the Hough Transform“. In: *Computer vision, graphics, and image processing* 44.1 (1988), S. 87–116 (siehe S. 50).
- [Jae17] F. M. Jaeger. *Lectures on the Principle of Symmetry and Its Applications in All Natural Sciences*. "Elsevier", Publishing Company Elsevier, 1917. DOI: [10.5962/bhl.title.19096](https://doi.org/10.5962/bhl.title.19096) (siehe S. 11).
- [JKB94] N. L. Johnson, S. Kotz und N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*. 2nd ed. Bd. 1. 2 Bde. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: Wiley, 1994. 2 S. (siehe S. 51).
- [Kam01] M. Kampel. „On 3d Modelling of Archaeological Sherds“. In: *3-D Digital Imaging and Modeling*. 2001 (siehe S. 75).
- [KSM05] M. Kampel, R. Sablatnig und H. Mara. „ROBUST 3D RECONSTRUCTION OF ARCHAEOLOGICAL POTTERY BASED ON CONCENTRIC CIRCULAR RILLS“. In: *Proc. of the 6th International Workshop on Image Analysis for Multimedia Interactive Services (WIA-MIS05)*. 2005 (siehe S. 75).
- [Kar10] A. Karasik. „A Complete, Automatic Procedure for Pottery Documentation and Analysis“. In: *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPR Workshops)*. San Francisco, CA, USA: IEEE, 2010-06, S. 29–34. DOI: [10.1109/CVPRW.2010.5543563](https://doi.org/10.1109/CVPRW.2010.5543563) (siehe S. 35).
- [KS08] A. Karasik und U. Smilansky. „3D Scanning Technology as a Standard Archaeological Tool for Pottery Analysis: Practice and Theory“. In: *Journal of Archaeological Science* 35.5 (5 2008-05), S. 1148–1168. DOI: [10.1016/j.jas.2007.08.008](https://doi.org/10.1016/j.jas.2007.08.008) (siehe S. 35, 75, 86).
- [Ken12] F. Kenkel. „Untersuchungen zur hellenistischen, römischen und byzantinischen Keramik des Tall Zira'a im Wadi al-'Arab (Nordjordanien) - Handelsobjekte und Alltagsgegenstände einer ländlichen Siedlung im Einflussgebiet der Dekapolisstädte“. Diss. Universität zu Köln, 2012 (siehe S. 23, 25, 26).
- [Kha+22] D. Khan, A. Plopski, Y. Fujimoto, M. Kanbara, G. Jabeen, Y. J. Zhang, X. Zhang und H. Kato. „Surface Remeshing: A Systematic Literature Review of Methods and Research Directions“. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 28.3 (2022-03-01), S. 1680–1713. DOI: [10.1109/TVCG.2020.3016645](https://doi.org/10.1109/TVCG.2020.3016645) (siehe S. 47).
- [Knu97] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*. 3rd ed. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1997. 3 S. (siehe S. 66).
- [Kot19] D. P. Kothari. *Mathematics for Computer Graphics and Game Programming: A Self-Teaching Introduction*. Dulles, Virginia: Mercury Learning and Information, 2019. 400 S. (siehe S. 5).
- [Lee10] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Bd. 202. Springer Science & Business Media, 2010 (siehe S. 46).

- [LC08] Y. Lemoigne und A. Caner, Hrsg. *Molecular Imaging: Computer Reconstruction and Practice ; [Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Molecular Imaging from Physical Principles to Computer Reconstruction and Practice, Archamps, France, 9 - 21 November 2006]*. NATO Science for Peace and Security Series Series B: Physics and Biophysics. Dordrecht: Springer, 2008. 286 S. (siehe S. 76).
- [Lew01] M. S. Lew, Hrsg. *Principles of Visual Information Retrieval*. Bearb. von S. Singh. Advances in Pattern Recognition. London: Springer London, 2001. DOI: [10.1007/978-1-4471-3702-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3702-3) (siehe S. 82).
- [Liu08] Y. Liu. „Computational Symmetry in Computer Vision and Computer Graphics“. In: *Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision* 5.1-2 (1-2 2008), S. 1–195. DOI: [10.1561/0600000008](https://doi.org/10.1561/0600000008) (siehe S. 11).
- [LS13] M. Locatelli und F. Schoen. *Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications*. MOS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia: Mathematical Optimization Society : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 437 S. (siehe S. 63).
- [MS05] H. Mara und R. Sablatnig. „A Comparison of Manual, Semiautomatic and Automatic Profile Generation for Archaeological Fragments †“. In: Proceedings of the 10th Computer Vision Winter Workshop. Zell an der Pram Australia, 2005, S. 123–134 (siehe S. 75).
- [Mar06] H. Mara. „Documentation of Rotationally Symmetric Archaeological Finds by 3D Shape Estimation“. 2006 (siehe S. 1, 26, 38, 75, 84, 85, 91, 92).
- [MS06] H. Mara und R. Sablatnig. „Orientation of Fragments of Rotationally Symmetrical 3D-Shapes for Archaeological Documentation“. In: Third International Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission (3DPVT'06). Chapel Hill, NC, USA: IEEE, 2006-06, S. 1064–1071. DOI: [10.1109/3DPVT.2006.105](https://doi.org/10.1109/3DPVT.2006.105) (siehe S. 35, 36).
- [MR01] C. Martínez und S. Roura. „Optimal Sampling Strategies in Quicksort and Quickselect“. In: *SIAM Journal on Computing* 31.3 (2001-01), S. 683–705. DOI: [10.1137/S0097539700382108](https://doi.org/10.1137/S0097539700382108) (siehe S. 66).
- [Mee+91] P. Meer, D. Mintz, A. Rosenfeld und D. Y. Kim. „Robust Regression Methods for Computer Vision: A Review“. In: *International Journal of Computer Vision* 6.1 (1991-04), S. 59–70. DOI: [10.1007/BF00127126](https://doi.org/10.1007/BF00127126) (siehe S. 50).
- [Mil11] R. B. Millar. *Maximum Likelihood Estimation and Inference: With Examples in R, SAS and ADMB*. 1. Aufl. Wiley, 2011-09-09. DOI: [10.1002/9780470094846](https://doi.org/10.1002/9780470094846) (siehe S. 72).
- [Mit+13] N. J. Mitra, M. Pauly, M. Wand und D. Ceylan. „Symmetry in 3d geometry: Extraction and applications“. In: *Computer Graphics Forum*. Bd. 32. 6. Wiley Online Library. 2013, S. 1–23 (siehe S. 11).
- [Möl97] T. Möller. „A Fast Triangle-Triangle Intersection Test“. In: *Journal of Graphics Tools* 2.2 (1997-01), S. 25–30. DOI: [10.1080/10867651.1997.10487472](https://doi.org/10.1080/10867651.1997.10487472) (siehe S. 32).

- [MWM11] L. Monroe, J. Wendelberger und S. Michalak. „Randomized Selection on the GPU“. In: *Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on High Performance Graphics*. HPG '11: High Performance Graphics. Vancouver British Columbia Canada: ACM, 2011-08-05, S. 89–98. DOI: [10.1145/2018323.2018338](https://doi.org/10.1145/2018323.2018338) (siehe S. 66).
- [NM65] J. A. Nelder und R. Mead. „A Simplex Method for Function Minimization“. In: *The Computer Journal* 7.4 (1965-01-01), S. 308–313. DOI: [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308) (siehe S. 38).
- [Oes+] S. Oesau, Y. Verdie, C. Jamin, P. Alliez, F. Lafarge, S. Giraudot, T. Hoang und D. Anisimov. *CGAL 5.5.2 - Shape Detection: User Manual*. URL: https://doc.cgal.org/latest/Shape_detection/index.html#Shape_detection_RANSACPerformance (besucht am 2023-04-12) (siehe S. 53).
- [OHH13] C. Orton, M. Hughes und M. Hughes. *Pottery in archaeology*. 2. ed., [rev. and updated]. Cambridge manuals in archaeology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 340 S. (siehe S. 1, 2, 22–25, 27).
- [PKT01] G. Papaioannou, E.-A. Karabassi und T. Theoharis. „Virtual Archaeologist: Assembling the Past“. In: *IEEE Computer Graphics and Applications* 21.2 (March-April/2001), S. 53–59. DOI: [10.1109/38.909015](https://doi.org/10.1109/38.909015) (siehe S. 27).
- [Par02] R. Parent. *Computer animation: algorithms and techniques*. The Morgan Kaufmann series in computer graphics and geometric modeling. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2002. 527 S. (siehe S. 9, 81).
- [Rag+13] R. Raguram, O. Chum, M. Pollefeys, J. Matas und J.-M. Frahm. „USAC: A Universal Framework for Random Sample Consensus“. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 35.8 (8 2013-08), S. 2022–2038. DOI: [10.1109/TPAMI.2012.257](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2012.257) (siehe S. 14, 15, 17, 18, 51, 53, 93).
- [RMW91] R. Rhoad, G. Milauskas und R. Whipple. *Geometry for Enjoyment and Challenge*. New ed. Evanston, Ill.: McDougal, Littell, 1991 (siehe S. 31).
- [Ric15] P. M. Rice. *Pottery Analysis: A Sourcebook*. Second edition. Chicago ; London: University of Chicago Press, 2015. 561 S. (siehe S. 22).
- [Rot12] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*. Bd. 148. Springer Science & Business Media, 2012 (siehe S. 11).
- [RL05] P. J. Rousseeuw und A. M. Leroy. *Robust Regression and Outlier Detection*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2005-01-28. DOI: [10.1002/0471725382.ch1](https://doi.org/10.1002/0471725382.ch1) (siehe S. 50).
- [SM99] R. Sablatnig und C. Menard. „On Estimating the Position of Fragments on Rotational Symmetric Pottery“. In: *3-D Digital Imaging and Modeling, 1999. Proceedings. Second International Conference On*. IEEE, 1999, S. 455–462 (siehe S. 35, 75).
- [SWK07] R. Schnabel, R. Wahl und R. Klein. „Efficient RANSAC for Point-Cloud Shape Detection“. In: *Computer Graphics Forum* 26.2 (2 2007-06), S. 214–226. DOI: [10.1111/j.1467-8659.2007.01016.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2007.01016.x) (siehe S. 19).

- [She85] A. O. Shepard. *Ceramics for the archaeologist*. Repr. Publication / Carnegie Institution of Washington 609. Washington, DC: Carnegie Inst, 1985. 414 S. (siehe S. 26).
- [Sor05] O. Sorkine. „Laplacian Mesh Processing“. In: *Eurographics (State of the Art Reports) 4.4* (2005), S. 53–70 (siehe S. 47).
- [SS22] T. C. Stocker und I. Steinke. *Statistik: Grundlagen Und Methodik*. 2., korrigierte Auflage. Boston: DE GRUYTER OLDENBOURG, 2022 (siehe S. 72).
- [Sze22] R. Szeliski. *Computer Vision: Algorithms and Applications*. 2. Aufl. Texts in Computer Science. Cham: Springer, 2022. 925 S. (siehe S. 14, 18).
- [TZM98] P. H. S. Torr, A. Zisserman und S. J. Maybank. „Robust Detection of Degenerate Configurations Whilst Estimating the Fundamental Matrix“. In: *Computer Vision and Image Understanding* 71.3 (1998), S. 312–333 (siehe S. 17).
- [TZ98] P. Torr und A. Zisserman. „Robust Computation and Parametrization of Multiple View Relations“. In: *Sixth International Conference on Computer Vision (IEEE Cat. No.98CH36271)*. IEEE 6th International Conference on Computer Vision. Bombay, India: Narosa Publishing House, 1998, S. 727–732. DOI: [10.1109/ICCV.1998.710798](https://doi.org/10.1109/ICCV.1998.710798) (siehe S. 19).
- [TZ00] P. Torr und A. Zisserman. „MLESAC: A New Robust Estimator with Application to Estimating Image Geometry“. In: *Computer Vision and Image Understanding* 78.1 (1 2000-04), S. 138–156. DOI: [10.1006/cviu.1999.0832](https://doi.org/10.1006/cviu.1999.0832) (siehe S. 19, 50).
- [Viea] D. Vieweger. *Biblisch-Archäologisches Institut – BAI Wuppertal*. URL: <https://www.bai-wuppertal.de/> (besucht am 2023-05-29) (siehe S. 76).
- [Vieb] D. Vieweger. *DEIAHL – Deutsches Evangelisches Institut für Altertumswissenschaft des Heiligen Landes*. URL: <https://www.deiahl.de/> (besucht am 2023-05-29) (siehe S. 76).
- [Vie19] D. Vieweger. *Tall Zirā’a: the Gadara Region project (2001-2011) ; final report. Volume 2: Early and Middle Bronze Age (strata 25-17) / Dieter Vieweger ; with contributions by Andrea Schwermer*. Hrsg. von J. Häser. Unter Mitarb. von A. Schwermer. 1. Auflage. Gütersloh: Gütersloher Verlagshaus, 2019. 568 S. (siehe S. 25).
- [Vie06] D. Vieweger. *Tell. WiBiLex Das wissenschaftliche Bibellexikon im Internet*. 2006. URL: https://www.bibelwissenschaft.de/fileadmin/buh_bibelmodul/media/wibi/pdf/Tell__2018-09-20_06_20.pdf (besucht am 2023-06-21) (siehe S. 76).
- [VMM99] J. Vollmer, R. Mencl und H. Muller. „Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes“. In: *Computer Graphics Forum* 18.3 (1999-09), S. 131–138. DOI: [10.1111/1467-8659.00334](https://doi.org/10.1111/1467-8659.00334) (siehe S. 38).
- [Wei23] E. W. Weisstein. *Point-Line Distance–3-Dimensional*. 2023. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Point-LineDistance3-Dimensional.html> (besucht am 2023-07-11) (siehe S. 39).
- [Wil+18] J. Wilczek, F. Monna, A. Jébrane, C. L. Chazal, N. Navarro, S. Couette und C. C. Smith. „Computer-Assisted Orientation and Drawing of Archaeological Pottery“. In: *Journal on Computing and Cultural Heritage* 11.4 (4 2018-12-29), S. 1–17. DOI: [10.1145/3230672](https://doi.org/10.1145/3230672) (siehe S. 35, 36, 38, 39, 66, 75, 76, 84, 85, 90, 92, 93).

LITERATUR

- [WOC03] A. Willis, X. Orriols und D. B. Cooper. „Accurately Estimating Sherd 3D Surface Geometry with Application to Pot Reconstruction“. In: *Computer Vision and Pattern Recognition Workshop, 2003. CVPRW'03. Conference On*. Bd. 1. IEEE, 2003, S. 5–5 (siehe S. 35, 75).
- [Wil+00] A. Willis, X. Orriols, S. Velipasalar, X. Binefa und D. B. Cooper. „Extracting Axially Symmetric Geometry From Limited 3D Range Data“. 2000 (siehe S. 35).
- [Xu+19] Q.-C. Xu, D.-M. Yan, W. Li und Y.-L. Yang. „Anisotropic Surface Remeshing without Obtuse Angles“. In: *Computer Graphics Forum* 38.7 (2019-10), S. 755–763. DOI: [10.1111/cgf.13877](https://doi.org/10.1111/cgf.13877) (siehe S. 47).
- [Yu10] F. Yu, Hrsg. *Three-Dimensional Model Analysis and Processing*. Advanced Topics in Science and Technology in China. Hangzhuou : Heidelberg ; New York: Zhejiang University Press ; Springer, 2010. 421 S. (siehe S. 41).
- [Yu+11] F. Yu, Z. Lu, H. Luo und P. Wang. *Three-dimensional model analysis and processing*. Springer Science & Business Media, 2011 (siehe S. 12, 41).
- [ZPA95] H. Zabrodsky, S. Peleg und D. Avnir. „Symmetry as a Continuous Feature“. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 17.12 (1995), S. 1154–1166. DOI: [10.1109/34.476508](https://doi.org/10.1109/34.476508) (siehe S. 11).

