

**Mathematik und Perspektive**  
**Die Zentral- und Parallelprojektion im schulischen**  
**Kontext**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Erziehungswissenschaften (Dr. paed.)

in der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der

Bergischen Universität Wuppertal

eingereicht von

Jaqueline Leddin

Wuppertal, Juni 2023



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin der Arbeitsgruppe *Didaktik und Geschichte der Mathematik* der Bergischen Universität Wuppertal entstanden. Ich möchte mich an dieser Stelle bei den vielen Personen bedanken, die mich in dieser Zeit unterstützt haben.

Besonders möchte ich mich bei Prof. Dr. Klaus Volkert bedanken, für die wertvollen Anregungen und Diskussionen, die Begutachtung, aber auch für die Gewährung großen Freiraums bei der Gestaltung und Ausarbeitung der Dissertation. Ebenso bedanke ich mich bei Prof. Dr. Andreas Filler für die Begutachtung meiner Dissertation, sowie der Prüfungskommission.

Des Weiteren möchte ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen der Arbeitsgruppe für die gute Zusammenarbeit bedanken und den vielen Anregungen nach den Vorträgen über mein Thema.

Schließlich danke ich auch meinen Freunden und meiner Familie, den Korrekturleserinnen und -lesern und ganz besonders meinem Partner für das gute Zureden und Aufbauen, wenn an schlechten Tagen einen die Motivation wieder verlassen hat.



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Projektion und Perspektive</b>	<b>3</b>
1.1	Ziele dieser Arbeit . . . . .	3
1.2	Lösung einer Schulbuchaufgabe . . . . .	10
1.3	Historischer Überblick zur Entwicklung der Perspektive . . . . .	15
<b>II</b>	<b>Mathematische Betrachtung der Projektion</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>23</b>
2.1	Die Objekte . . . . .	24
2.2	Die Axiome . . . . .	25
2.3	Das Teil- und Doppelverhältnis . . . . .	27
2.4	Geometrische Abbildungen . . . . .	35
2.4.1	Die Abbildung . . . . .	35
2.4.2	Eine Auswahl an Invarianten . . . . .	36
2.5	Der Strahlensatz . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Die Projektion</b>	<b>45</b>
3.1	Die Zentralprojektion . . . . .	46
3.1.1	Die Invarianten der Zentralprojektion . . . . .	50
3.1.2	Die Invarianten der Parallelprojektion . . . . .	53
3.2	Vier verschiedene Arten einer Projektion . . . . .	56
3.3	Dreitafelprojektion . . . . .	59
3.3.1	Aufgabenbeispiele . . . . .	63
3.4	Der Satz von Desargues . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Die Zentralprojektion</b>	<b>91</b>
4.1	Zentralprojektion in der Umwelt . . . . .	92
4.2	Eigenschaften der Bilder . . . . .	94
4.3	Konstruktionsmethoden . . . . .	96
4.3.1	Fluchtpunktperspektive und Horizontlage . . . . .	102

---

4.3.2	Konstruktionsmethoden mit Grund- und Aufriss . . . . .	106
4.3.3	Distanzkreis . . . . .	126
4.3.4	Messpunktverfahren . . . . .	130
4.3.5	Einschneideverfahren nach P. della Francesca . . . . .	139
4.4	Analytische Betrachtung der Zentralprojektion . . . . .	141
4.4.1	(i) Inzidenztreue der Projektion . . . . .	144
4.4.2	Formeln für die Bilder einer Zentralprojektion . . . . .	152
4.4.3	(ii) Parallele Geraden und Fluchtpunkte . . . . .	156
4.4.4	(iii) Fluchtpunkte liegen auf dem Horizont . . . . .	159
4.5	Perspektive Abbildungen . . . . .	163
4.5.1	Projektion zwischen zwei Geraden . . . . .	164
4.5.2	Perspektive Abbildungen . . . . .	171
4.5.3	Homogene Koordinaten . . . . .	176
4.6	Zentralprojektion in der Computergrafik . . . . .	179
4.6.1	Lineare Abbildungen . . . . .	180
4.6.2	Skalierung, Drehung und Translationen . . . . .	182
4.6.3	Das homogene Koordinatensystem . . . . .	187
4.6.4	Die Zentralprojektion mit homogenen Koordinaten . . . . .	198
<b>5</b>	<b>Die Parallelprojektion</b>	<b>205</b>
5.1	Analytische Betrachtung der Parallelprojektion . . . . .	206
5.2	Axonometrie . . . . .	210
5.2.1	Das Einschneideverfahren . . . . .	220
<b>III</b>	<b>Projektion im schulischen Kontext</b>	<b>227</b>
<b>6</b>	<b>Der Unterricht an Schulen in NRW</b>	<b>229</b>
6.1	Perspektive im Kunstunterricht . . . . .	230
6.2	Geometrieanteil im Mathematikunterricht . . . . .	233
6.3	Der Geometrieunterricht an Gymnasien und Gesamtschulen . . . . .	236
6.4	Schulbuchaufgaben zur Projektion . . . . .	239
6.4.1	Schrägbilddarstellung . . . . .	240
6.4.2	Dreitafelprojektion . . . . .	244
6.4.3	Zentralprojektion . . . . .	249
6.4.4	Projektion in der Oberstufe . . . . .	258
<b>7</b>	<b>Erzeugung einfacher Projektionen am Computer</b>	<b>261</b>
7.1	Das Anaglyphenverfahren . . . . .	264
7.2	Die Entwicklerumgebung von <i>Processing</i> . . . . .	267
7.3	Die Einheitskörper als Klassen . . . . .	269

---

7.4	<i>Processing</i> im Unterricht . . . . .	275
7.5	Parallelprojektion mit <i>Processing</i> . . . . .	285
7.6	Das Kamerakoordinatensystem . . . . .	290
7.7	Orthogonale Parallelprojektion in <i>Processing</i> . . . . .	300
7.8	Erzeugung von Anaglyphenbildern . . . . .	304
<b>8</b>	<b>Materialien und Anwendungsbeispiele</b>	<b>311</b>
8.1	Der Perspektograph . . . . .	312
8.2	Die Raumecke - Materialien zur Dreitafelprojektion . . . . .	322
8.3	Die zweite Variante der Raumecke . . . . .	329
<b>IV</b>	<b>Ausblick</b>	<b>333</b>
	<b>Literatur</b>	<b>339</b>



Teil I

Einleitung



# Kapitel 1

## Projektion und Perspektive

### 1.1 Ziele dieser Arbeit

Die Perspektive ist ein Teilgebiet der Kunst und findet in der Schule normalerweise nur Anwendung im Zeichenunterricht. Die Schülerinnen und Schüler lernen hier die Konstruktion von Gebäuden und Häuserreihen mithilfe von einem oder zwei Fluchtpunkten. Dass die Perspektive neben der Kunst und den Entwürfen von Gebäuden oder Bauteilen auch in der Mathematik ein interessantes Teilgebiet der Darstellenden Geometrie einnimmt, ist ein Aspekt, welcher in der Schule wenig Beachtung findet. Als *Perspektive* bezeichnen wir hierbei die Suggestion von Räumlichkeit auf einer ebenen Bildfläche. Dazu existieren verschiedene Möglichkeiten, u.a. durch Verkleinerung der Objekte, Veränderung der Farbe bzw. der Schärfe (Farbperspektive) oder der Verwendung von Tiefenlinien, d.h. parallele Geraden im Raum, welche sich im Bild in einem Fluchtpunkt schneiden. Die untere Abbildung zeigt einfache Beispiele dieser genannten Methoden.

Letztere entspricht der Zentralperspektive, deren Bilder unter der Verwendung der *Zentralprojektion* konstruiert werden. Allgemein wird unter einer *Projektion* die Abbildung eines Objektes im Raum auf eine zweidimensionale Ebene beschrieben.

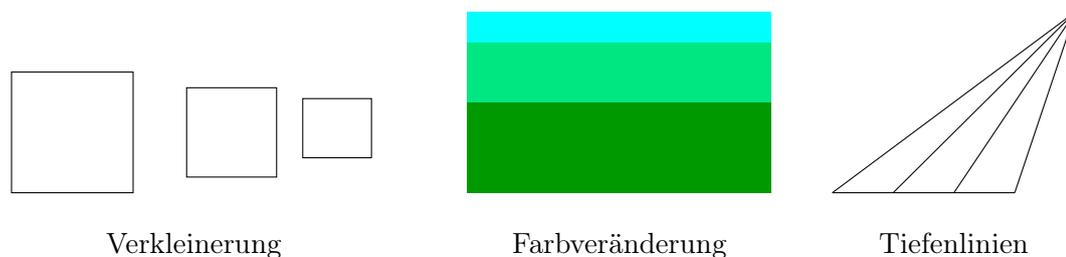


Abb. 1.1.1 Methoden zur Suggestion von Raum und Tiefe

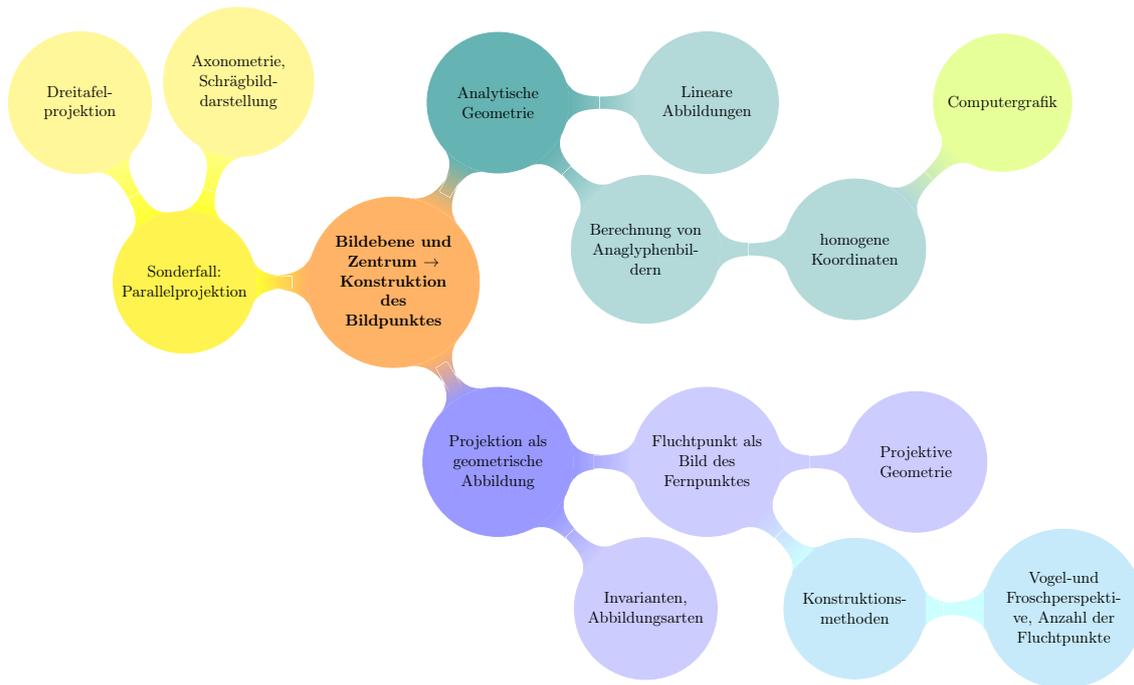


Abb. 1.1.2 Übersicht der Inhalte dieser Arbeit

Als perspektivische Abbildung liefert die Zentralprojektion eine Vielzahl an Erkundungsmöglichkeiten nicht nur für Schülerinnen und Schüler. Abb. 1.1.2 stellt eine Übersicht der verschiedenen Themenbereiche dar, welche in dieser Arbeit behandelt werden. Ausgehend von der Konstruktion des Bildpunktes (orange) betrachten wir die Projektion als geometrische Abbildung und stellen ihre Invarianten vor (violetter Bereich). Wir werden feststellen, dass der euklidische Raum nicht ausreicht, damit jeder Punkt der Bildebene einem Urbildpunkt im Raum zugeordnet werden kann. Wir fügen daher dem euklidischen Raum Fernpunkte hinzu und streifen damit ein weiteres Teilgebiet der Mathematik, die projektive Geometrie. Mit den Fluchtpunkten leiten wir zum Kunstunterricht über. In den dort gelehrt Konstruktionsmethoden zur Zentralperspektive werden u.a. auch solche Fluchtpunkte verwendet (hellblauer Bereich).

Da in der Sekundarstufe II analytische Geometrie unterrichtet wird, verwenden wir ihre Methodik, um Bildpunkte zu berechnen statt zu konstruieren (grüner Bereich). Vom Mathematikunterricht leiten wir dann über in den Informatikunterricht, lassen unter Einsatz von Programmiersprachen den Computer die Bildpunkte berechnen und streifen damit letztendlich die Computergrafik.

Das dritte Themengebiet (gelber Bereich) befasst sich mit einem Sonderfall der Zentralprojektion. Da wir auch Fernpunkte betrachten, verschieben wir das Projektionszentrum gedanklich unendlich weit weg von der Bildebene, sodass das Zentrum zum Fernpunkt wird. Die Projektionsstrahlen sind nun parallel, sodass wir von einer

Parallelprojektion sprechen. Ihre Bilder werden als Schrägbilder im Unterricht zur Darstellung von Quader, Würfel oder anderen Prismen verwendet.

Diese Übersicht zeigt, dass sich die Zentralprojektion in den Unterrichtsfächern Mathematik, Kunst und Informatik integrieren lässt und eine Möglichkeit für fächerübergreifenden Unterricht bietet.

Die Zentralprojektion ist eine Abbildungsmethode, welche den Raum auf eine Ebene projiziert. Die Abbildung selbst wird dabei durch einen festen Punkt, welches Projektionszentrum genannt wird, und der Bildebene definiert. Das Bild eines Punktes im Raum, welcher nicht gleich dem Projektionszentrum ist, entspricht dem Durchstoßpunkt der Projektionsgeraden mit der Bildebene. Die Projektionsgerade ist dabei die Verbindungsgerade des Punktes im Raum und des Projektionszentrums. Demnach haben alle Projektionsstrahlen das Projektionszentrum gemeinsam.

Ausgehend von dieser Konstruktion werden wir durch logische Schlussfolgerungen u.a. zeigen, dass der Fluchtpunkt das Bild eines Fernpunktes ist, welcher die Richtung paralleler Geraden beschreibt, während der Horizont das Bild einer Ferngeraden ist. Die Arbeit stützt sich auf die Axiome der euklidischen Geometrie, wobei wir die Fernpunkte- und geraden aus der projektiven Geometrie hinzunehmen werden. Dabei schneiden sich parallele Geraden in einem Fernpunkt, da sie dieselbe Richtung aufweisen.

Wir werden Begriffe wie *Fluchtpunkt* und *Horizont* bzgl. der Zentralprojektion einordnen und Konstruktionsmethoden aus dem Kunstunterricht (Fluchtpunktperspektive, Übereck-Perspektive) mathematisch erläutern. Wir werden zeigen, weshalb diese Methoden funktionieren und wirklichkeitsnahe Bilder erzeugen.

Die vorliegende Arbeit wurde in drei Teile verfasst. Nach dieser Einleitung folgt im zweiten Teil die Behandlung der Projektion vom mathematischen Standpunkt aus. Im dritten Teil betrachten wir die Projektion aus der Sicht der Schule, d.h. was geben die Lehrpläne vor, welche geometrischen Themen werden momentan behandelt und wie lässt sich hier die Projektion einordnen. In beiden Teilen werden Aufgabenbeispiele vorgestellt, welche exemplarisch eine mögliche Behandlung im Schulunterricht aufzeigen werden. Wir werden daher in beiden Teilen fachwissenschaftliche und didaktische Aspekte ansprechen. Nur der Schwerpunkt ist in beiden Teilen ein anderer. Im Folgenden werden die einzelnen Kapitel vorgestellt.

Im Kapitel zu den Grundlagen steht der Abbildungsbegriff und eine Auswahl an Invarianten im Vordergrund. Die Drehung um einen fixen Punkt und einen Winkel oder die Achsenspiegelung an einer festen Gerade sind in der Regel noch aus der Schule bekannte Abbildungen. Sie zählen zu den Kongruenzabbildungen, da sie vor allem Streckenlängen und Winkel unverändert lassen. Die zentrische Streckung ist ein Beispiel einer Ähnlichkeitsabbildung. Hierbei bleiben die Winkel noch erhalten, aber Streckenlängen ändern sich. Allerdings bleibt das Verhältnis zwischen zwei Strecken fest, weshalb die Objekte zwar vergrößert oder verkleinert, aber nicht verzerrt, erscheinen. Die zentrische Streckung wird im Mathematikunterricht der neunten Klasse thematisiert. Einer der zentralen Sätze ist dabei der Strahlensatz, welcher in einem eigenen Abschnitt behandelt wird, aufgrund der mehrfachen Anwendung in der vorliegenden Arbeit.

Nach den Grundlagen folgt die Definition der Projektion als punktweise Abbildung des Raumes auf eine Ebene. Je nach Lage von Objekt- zur Bildebene und Zentral- oder Parallelprojektion kommen Invarianten hinzu oder fallen weg.

Die Invarianten finden auch Verwendung in den Konstruktionsmethoden. Vor allem die Axonometrie, d.h. die Parallelprojektion von Objekten mit dem Koordinatensystem, wäre ohne die Teilverhältnistreue nicht möglich.

Die nachfolgenden Kapitel 4 und 5 behandeln Zentral- und Parallelprojektion getrennt voneinander. In beiden Fällen werden Bildpunkte konstruiert oder mithilfe von Vektoren berechnet.

Konstruktionsverfahren sollten nicht nur erlernt werden, um sie auszuführen. Stattdessen sollten Schülerinnen und Schüler auch dazu motiviert werden, diese zu hinterfragen und die Zusammenhänge zur Zentralprojektion als geometrische Abbildung zu verstehen. Die Auseinandersetzung erfolgt sowohl synthetisch als auch analytisch.

Am Ende erfolgt eine kurze Einführung in die projektive Geometrie. Schülerinnen und Schüler sollen hierbei das Konzept von Fern- und Fluchtpunkten über die zentralprojektive Abbildung zwischen zwei Geraden verstehen. Darauf aufbauend werden die homogenen Koordinaten eingeführt.

Homogene Koordinaten finden auch Verwendung in der Computergrafik. Mithilfe des Koordinatensystems kann die Position der Bildpunkte berechnet werden. Es wird sich herausstellen, dass die Zentralprojektion keine lineare Abbildung ist und somit nicht, wie eine Drehung um den Koordinatenursprung, durch eine Matrix beschrieben werden kann. Mithilfe homogener Koordinaten wird dies möglich.

Digitale Medien gehören heutzutage zum Alltag der Schülerinnen und Schüler. Zum einen lassen sich mit dem Handy schnell zentralprojektive Bilder erzeugen, sodass die Schülerinnen und Schüler an eigenen Beispielen die Anzahl und die Lage von Fluchtpunkten erkunden können. Zum anderen wollen wir den Computer zur Erstellung zentralprojektiver Bilder verwenden und thematisieren dabei die Computergrafik, wie sie auch in Computerspielen Verwendung findet.

Nach der Parallelprojektion und einem kurzen Überblick über die Axonometrie, folgt der dritte Hauptteil mit dem Bezug zur Schule als Schwerpunkt. Wie hoch ist der Anteil an Geometrie im Unterricht an Gymnasien und Gesamtschulen in NRW im Vergleich zu Algebra, Funktionen und Stochastik? Welche Themen aus der Geometrie werden im Mathematikunterricht besprochen? Zur Beantwortung dieser Fragen wurden vom Schulministerium zugelassene Schulbücher gesichtet. Dabei wurden einige Schulaufgaben zur Zentral- und Parallelprojektion gefunden, welche in einem eigenem Kapitel vorgestellt und besprochen werden.

Wie hoch ist der Stellenwert der Zentralprojektion im heutigen Mathematikunterricht? Es wurden nur wenige Aufgaben zu diesem Thema gefunden. Die Sichtung der Schulbücher hat generell gezeigt, dass den geometrischen Abbildungen eher eine geringe Gewichtung zugeschrieben wird. Es geht mehr um die Bilder an sich, z.B. in Bezug auf Symmetrien, also um ihre Entstehung durch Konstruktion mit dem Geodreieck.

Kapitel 7 greift die Zentralprojektion in der Computergrafik wieder auf, vor allem in Hinblick auf die Nutzbarkeit im Schulunterricht. Es wird der Prototyp eines Quellcodes besprochen, welcher sowohl Zentral- als auch Parallelprojektionen von einfachen, geometrischen Körpern erzeugt. Aus Einheitskörpern, wie Würfel und Pyramide, können Schülerinnen und Schüler durch Skalierung, Drehung und Verschiebung einfache Szenen erstellen und diese entweder unter einer Parallel- oder Zentralprojektion abbilden. Somit lassen sich auch bewegte Rot-Grün Bilder erzeugen. Werden diese mit einer Rot-Grün Brille betrachtet, erscheinen sie tatsächlich dreidimensional. Für Schülerinnen und Schüler sollte dies eine spannende Erfahrung sein, wenn sie die Resultate ihrer Berechnungen sogar sehen und selbst beurteilen können. Vor allem die Möglichkeit, mit dem Quellcode auch bewegte Bilder zu erzeugen, soll dieses Erlebnis positiv verstärken.

Der Bezug zur Computergrafik erfüllt zwei Ziele. Zum einen die sinnvolle Nutzung digitaler Medien durch Auseinandersetzung mit einer Programmiersprache und einem Quellcode, der einseh- und veränderbar ist. Hier geht es um mehr als die algorithmische Berechnung von Bildpunkten. Das andere Ziel ist die Validierung von Lösungen. Schülerinnen und Schüler sollen die Möglichkeit haben, zu überprüfen, wie gut die dreidimensionale Wirkung der Rot-Grün Bilder sind.

Neben dem Programmcode wurden auch haptische Materialien für die Verwendung im Schulunterricht entworfen. Diese werden im letzten Kapitel vorgestellt. Inspiriert von historischen Schriften wurden Materialien zur Zentral- und Dreitafelprojektion zuerst am Computer mithilfe eines CAD Programmes konstruiert und mit Pappkarton umgesetzt. Danach wurden erste Prototypen aus Holz, Acrylglas und Kunststoffen gebaut und konkrete Aufgaben hierzu entwickelt.

Für das Verständnis der Projektion ist eine gute Raumvorstellung nötig. Andererseits liefert sie auch die Möglichkeit, diese zu trainieren. Die entwickelten Materialien sollen die Schülerinnen und Schüler bei diesem Prozess unterstützen.

Grundsätzlich war das Ziel dieser Arbeit die mathematische Auseinandersetzung mit der Zentralprojektion sowie die Erarbeitung von Möglichkeiten, dieses Thema für den Schulunterricht nutzbar zu machen. Es erfolgte keine empirische Untersuchung der entwickelten Aufgaben und Materialien. Im Vordergrund stand die Verknüpfung zu anderen Unterrichtsfächern, damit Schülerinnen und Schüler Mathematik als ein Werkzeug verstehen, welches auch außerhalb des Mathematikunterrichtes Verwendung findet. So konnten vor allem Bezüge zur Kunst und Informatik erstellt werden. Zentralprojektion gibt es auch in der Physik, wenn es um Optik geht, denn der menschliche Sehvorgang entspricht einer Projektion mit zwei Zentren, unseren Augen. Da diese Arbeit aufgrund ihres Umfangs eingegrenzt werden musste, wurde dieser Aspekt nicht mehr berücksichtigt.

Die Aufgabenbeispiele und Materialien wurden mit dem Ziel konzipiert, die Schülerinnen und Schüler zu logischen Denkweisen anzuregen. Es sollte im Mathematikunterricht nicht primär um Inhalte gehen, denn diese werden von den Schülerinnen und Schüler sicherlich vergessen, wenn sie nach der Schule Berufe wählen, welche nur wenig Mathematik benötigen. Was bleibt sind Kompetenzen, wie bspw. Aneignung von neuem Wissen oder Erstellung von Zusammenhängen, Umgang mit Problemen, Wechsel von Sichtweisen usw.

Was gibt die Aufgabenstellung vor? Lassen sich mehrere Lösungswege finden oder sogar auch verschiedene Lösungen? Wie gelangt man schrittweise zu einer Lösung

durch logischen Schlussfolgerungen statt auszuprobieren?

Diese Arbeit soll aufzeigen, welche Möglichkeiten hierzu die Zentralprojektion als Thema zur Aneignung dieser Kompetenzen bietet, sie stellt sich aber nicht auf den Standpunkt, dass nicht auch andere Themen hierzu geeignet wären.

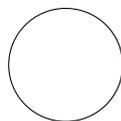
Der Mathematikunterricht sollte nicht nur daraus bestehen, Rechnungen in den Taschenrechner einzugeben oder gar vorgezeigte Algorithmen nachzuahmen. Viel mehr sollen Schülerinnen und Schüler dazu ermutigt werden, durch logischen Schlussfolgerungen solche Algorithmen oder Lösungsmethoden selbst zu entwickeln. Zur besseren Erklärung wird im folgenden Abschnitt eine Beispielaufgabe aus einem Schulbuch vorgestellt.

## 1.2 Lösung einer Schulbuchaufgabe

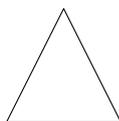
Die folgende Aufgabe ist aus dem Schulbuch *mathe live 8* zum Thema Schrägbilder und Dreitafelprojektion [27, S. 17]. Wir stellen die Aufgabe vor und zeigen dann eine Herangehensweise, welche schrittweise zur Lösung führt und sogar zeigt, dass es mehrere Lösungen gibt.



Würfel, Quader, quadratische Pyramide, Zylinder, gekipptes Prisma



Kugel, Kegel, Zylinder



Pyramide, Kegel, Prisma

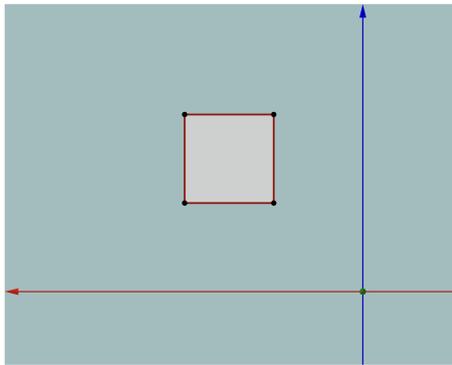
Abb. 1.2.1 Beispiel einer Aufgabe in Klasse 8 [27, S. 17]

Gegeben ist ein Quadrat, ein Kreis und ein Dreieck. Sie stellen jeweils eine Ansicht eines unbekanntes Körpers dar, d.h. sie entsprechen einem Rissbild in einer Dreitafelprojektion (Abs. 3.3, S. 59).

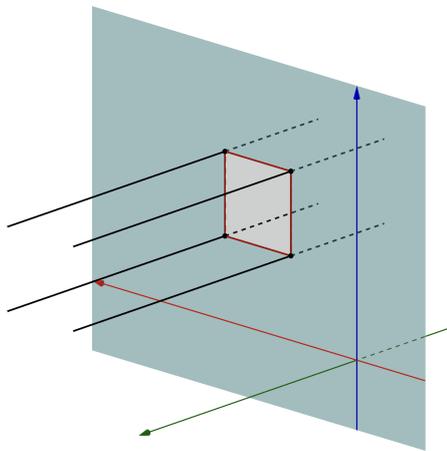
Die Schülerinnen und Schüler sollen mindestens drei passende Körper finden. Eine Herangehensweise ist nun, einfach alle bekannten Körper auszuprobieren, da ihre Anzahl in der Schule relativ übersichtlich ist. In der nebenstehenden Abbildung steht unterhalb der Ansichten einige Lösungsvorschläge.

Eine andere Herangehensweise ist, sich der Lösung durch logische Schlussfolgerungen anzunähern. Was ist die Ausgangssituation in der Aufgabenstellung und welche Anforderungen muss die Lösung erfüllen? Was bleibt variabel, welche Eckpunkte oder Kanten der Objekten lassen sich verändern, so dass die Voraussetzungen dennoch erfüllt bleiben?

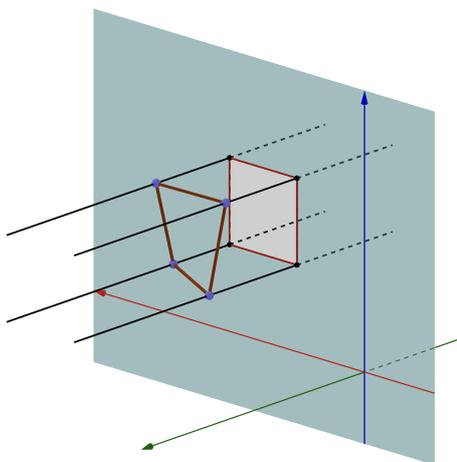
Die Schülerinnen und Schüler können bspw. mit einer dynamischen Geometriesoftware wie *GeoGebra* die Ausgangssituation nachbauen und die o.g. einzelnen Fragen durchgehen. Wir besprechen dazu den ersten Teil der Aufgabe mit dem Quadrat als Seitenriss. Hierbei sind in den Abbildungen abhängige Punkte, wie Schnittpunkte, schwarz markiert und die verschiebbaren in blau. Für die Lösung dieser Aufgabe ist kein Koordinatensystem nötig. Da wir als visuelle Unterstützung aber *GeoGebra* verwenden, müssen wir hier eine Bildebene festlegen, in unserem Fall die  $xz$ -Ebene.



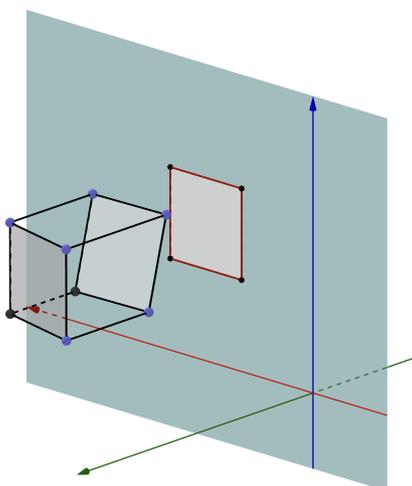
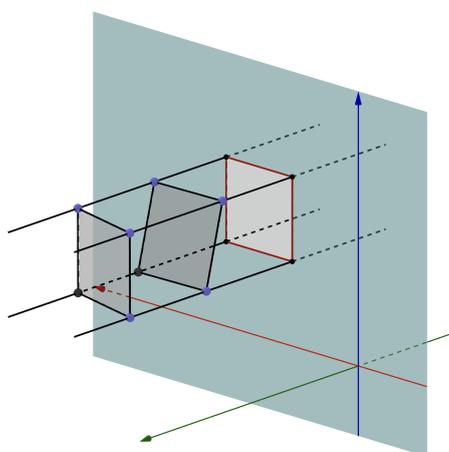
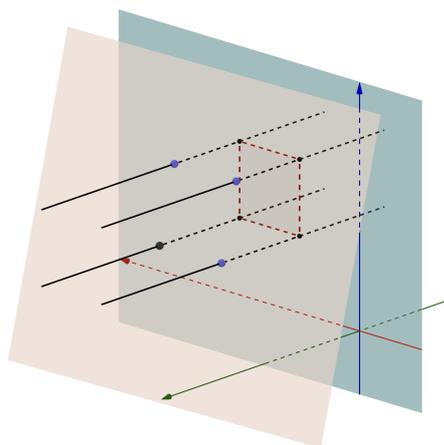
**1. Schritt:** Wir öffnen in *GeoGebra* die 3D sowie die Algebra Ansicht. Mit dem Werkzeug zur Erstellung von Ebenen markieren wir die rote  $x$ - sowie die blaue  $z$ -Achse und erhalten die Bildebene. Mit dem Werkzeug zur Flächenerstellung zeichnen wir ein Quadrat, wie es in der Aufgabenstellung vorgegeben wird. Die Kantenlänge und Lage in der Bildebene kann dabei beliebig gewählt werden.



**2. Schritt:** Da das Quadrat das Bild einer Dreitafelprojektion ist, ist dies das Ergebnis einer orthogonalen Projektion eines noch unbekanntes Körpers auf die Bildebene. Wir ergänzen daher die Projektionsstrahlen, welche senkrecht zur Bildebene stehen und durch die Eckpunkte des Quadrates verlaufen.



**3. Schritt:** Wir wissen, dass die Eckpunkte des gesuchten Körpers auf den Projektionsstrahlen liegen müssen. Schülerinnen und Schüler können daher auf die Idee kommen, einfach vier Punkte auf den Strahlen zu setzen und zu einem Viereck zu verbinden. Markieren wir die ersten drei Punkte, so wird von dem Programm noch eine Fläche gezeichnet. Sobald der vierte hinzukommt, wird die Fläche i. d. R. verschwinden und der Inhalt der Fläche in der Algebra Ansicht als ? ausgegeben. Schülerinnen und Schüler sind nun in der Situation, sich zu überlegen, wie viele Punkte eine Ebene festlegen.



**3. Schritt, neuer Versuch:** Drei nicht kollineare Punkte legen eine Ebene fest (vgl. Axiom (E1) in Kapitel 2.2, S. 25). Wir verwenden in *GeoGebra* das Tool, eine Ebene aus den ersten drei Punkten auf den Strahlen zu bilden. Diese wird die vierte Gerade in einem Punkt schneiden. Markieren wir nun diese vier Punkte, so bildet sich eine Fläche und das Fragezeichen verschwindet aus der Objektliste. Somit bleiben für die erste Fläche nur drei der vier Eckpunkte variabel.

**4. Schritt:** Wir verfahren genauso mit der gegenüberliegenden Fläche und rekonstruieren so schrittweise den Körper.

**1. Lösung:** Wir ergänzen die fehlenden Kanten und haben eine erste Lösung konstruiert. Nun können die Schülerinnen und Schüler überlegen, welche Möglichkeiten sie haben, um den Körper zu verändern, ohne dass sich der Seitenriss ändert. Beide Flächen werden durch jeweils drei Punkte festgelegt. Sie können also insgesamt sechs Punkte auf den Geraden verschieben. Wie müssen die Punkte bspw. liegen, damit die ihnen bekannten geometrischen Körper entstehen?

Wir richten die Flächen parallel zueinander aus. Es entsteht ein Quader (Abb. 1.2.2). Sind die vier verbleibenden Kanten gleich lang, so entsteht als Sonderfall der Würfel. Verkippen wir die Flächen derart, dass sie zwar noch parallel sind, aber nicht mehr parallel zur Bildebene, so liegen die vier letzten Kanten nicht mehr senkrecht auf den Seitenflächen. Es entsteht ein

Parallelepiped, wobei dieser Körper im Unterricht wohl eher selten besprochen wird. Als vierte Möglichkeit ergibt sich ein verkipptes Prisma mit dreieckiger Grundfläche.

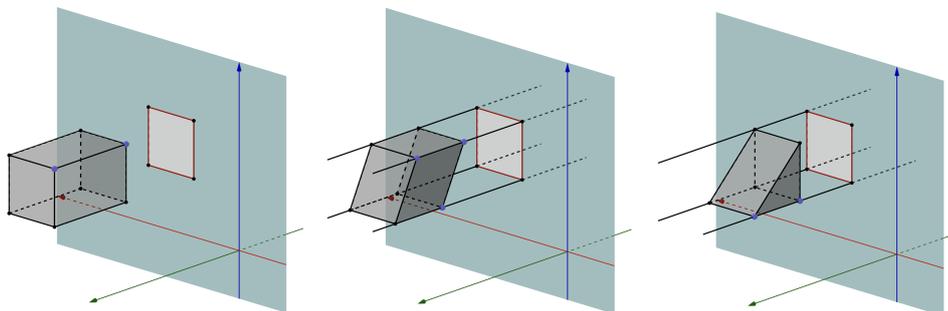
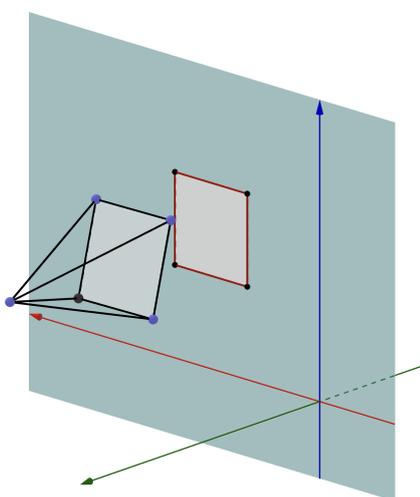
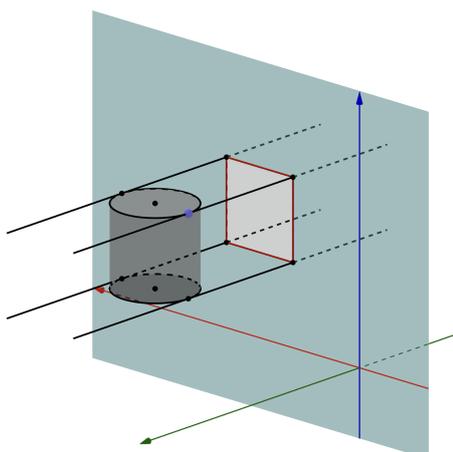


Abb. 1.2.2 Geometrische Körper anhand der ersten Lösung



**2. Lösung:** In der ersten Lösung wurde die Situation mit vier Projektionsstrahlen untersucht. Schülerinnen und Schüler könnte auffallen, dass wir zwar so Würfel und Quader finden konnten, aber eine quadratische Pyramide erfüllt ebenfalls diesen Seitenriss. Was müssen wir also ändern, damit auch diese Lösung auftaucht? Gehen wir davon aus, dass der Körper nicht durchsichtig ist, so können wir zwischen den vier Geraden weitere Projektionsgeraden hinzufügen. So entsteht die quadratische Pyramide (Abb. 1.2.3) oder auch ein Pyramidenstumpf.



**3. Lösung:** Nun fehlt noch der Zylinder. Hierbei ist der Seitenriss eine Schnittfläche des Körpers mit einer zur Bildebene parallelen Ebene. Daher lässt sich auch ein Prisma mit dreieckiger oder trapezförmiger Grundfläche finden. Eine Übersicht der weiteren Lösungen zeigt Abb. 1.2.3.

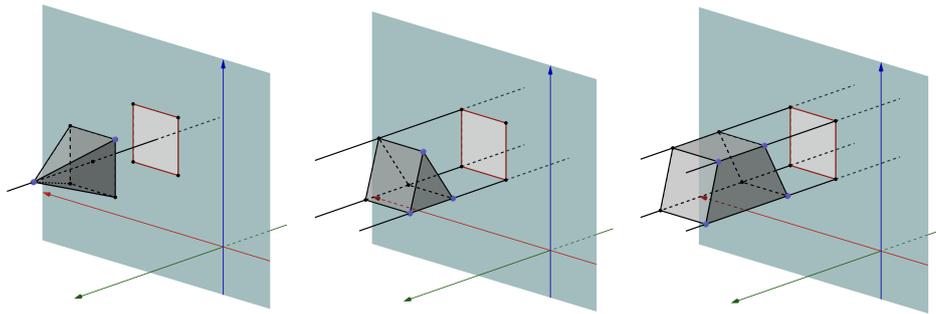


Abb. 1.2.3 Geometrische Körper anhand der zweiten und dritten Lösung

Die Aufgabenstellung des Schulbuches ermöglicht eine intensive Auseinandersetzung mit der Dreitafelprojektion, sofern diese auch als orthogonale Parallelprojektion im Unterricht besprochen wurde. Andernfalls fehlt den Schülerinnen und Schülern die Kenntnisse, welche für den schrittweisen Lösungsweg nötig sind. Wir werden leider bei der Besprechung weiterer Schulbuchaufgaben zum Thema Dreitafelprojektion feststellen, dass oft der Zusammenhang zur Parallelprojektion nicht aufgezeigt wird und somit Schülerinnen und Schüler nur noch die Möglichkeit bleibt, bekannte Körper einfach auszuprobieren. Dies stärkt aber weder logische Denkweisen noch die Raumvorstellung.

Mit der Aufgabe sollte der didaktische Anspruch bzw. die Ausrichtung dieser Arbeit nun geklärt sein. Bevor wir den ersten Hauptteil zur mathematischen Auseinandersetzung der Zentralprojektion beginnen, liefert der folgende Abschnitt eine kurze Übersicht der historischen Entwicklung, von der Antike bis zur Renaissance, welche als Geburtsstunde der Zentralperspektive gewertet wird.

### 1.3 Historischer Überblick zur Entwicklung der Perspektive

Schon zu früheren Zeiten gab es das Bestreben, durch Zeichnungen auf ebener Fläche einen räumlichen Eindruck zu erwecken. So finden sich Wandmalereien mit Fenstern bzw. Säulengängen mit Ausblick auf imaginäre Landschaften oder Scheinarchitekturen aus der Antike. Vermutlich aus der Beobachtung heraus wurden die Tiefenlinien schräg gezeichnet, sodass sie zusammenlaufen, je tiefer sie in die Bildebene hineinragten. Auffällig jedoch ist, dass diese sich nicht in einem zentralen Fluchtpunkt schneiden, sondern in mehreren, welche vertikal übereinander liegen.

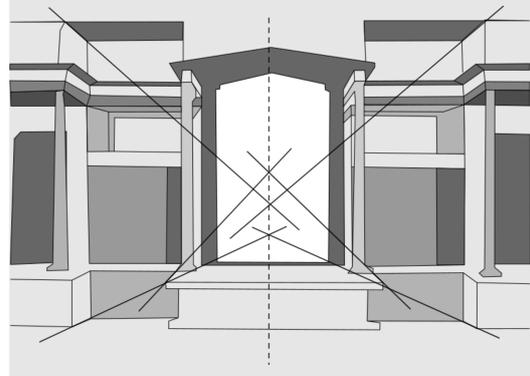


Abb. 1.3.1 Skizze einer antiken Wandmalerei mit Scheinarchitektur als Beispiel der Teilungskonstruktion

Abb. 1.3.1 zeigt eine Skizze einer Wandmalerei im *Haus des Augustus* auf dem Palatin in Rom, welche dem 2. Stil der römischen Wandmalerei zugeordnet wird. Dieser Stil ist von 80 bis 20 v. Chr. datiert. Die Verwendung der schräg verlaufenden Tiefenlinien suggeriert eine räumliche Tiefe, auch wenn die Scheinarchitektur noch verzerrt und flach wirkt. Nach dem Deutschen G. J. Kern wird diese Art der Darstellung als *Teilungskonstruktion* bezeichnet [20], welche noch bis ins 5. Jh. n. Chr. nachgewiesen werden kann.

In der Zeit danach kommt die Weiterentwicklung der perspektivischen Darstellung zum Erliegen, denn im Mittelalter erlischt das Bestreben nach räumlicher Illusion in Europa. Die Ikonenmalerei trat verstärkt in den Vordergrund, die weniger Wert auf die perfekte Suggestion von Raumtiefe als auf die symbolhafte Darstellung biblischer Ereignisse legte. Erst zur Zeit der Renaissance erlebte die Perspektive einen neuen Aufschwung in Italien und Deutschland. Daher wird in der Literatur oftmals die Renaissance als die Geburtsstunde der Zentralperspektive genannt, da zu dieser Zeit mit *Brunelleschi*, *Pietro della Francesca* und *Albrecht Dürer* Abhandlungen über konkrete Konstruktionsprinzipien zu finden sind. Abb. 1.3.2 zeigt eine Übersicht der historischen Entwicklung der Perspektive in der Mathematik und Kunst. Zur Zeit der Antike sind einige Beispiele zur Erzeugung von Raumillusionen genannt, während für die Renaissance bedeutende Personen gelistet sind. Die Länge der grau unterlegten Boxen richtet sich nach der Zeitspanne, in welcher sie lebten. Daneben sind ihre Rollen bei der Etablierung der Perspektivkonstruktion sowie wichtige literarische Werke genannt.

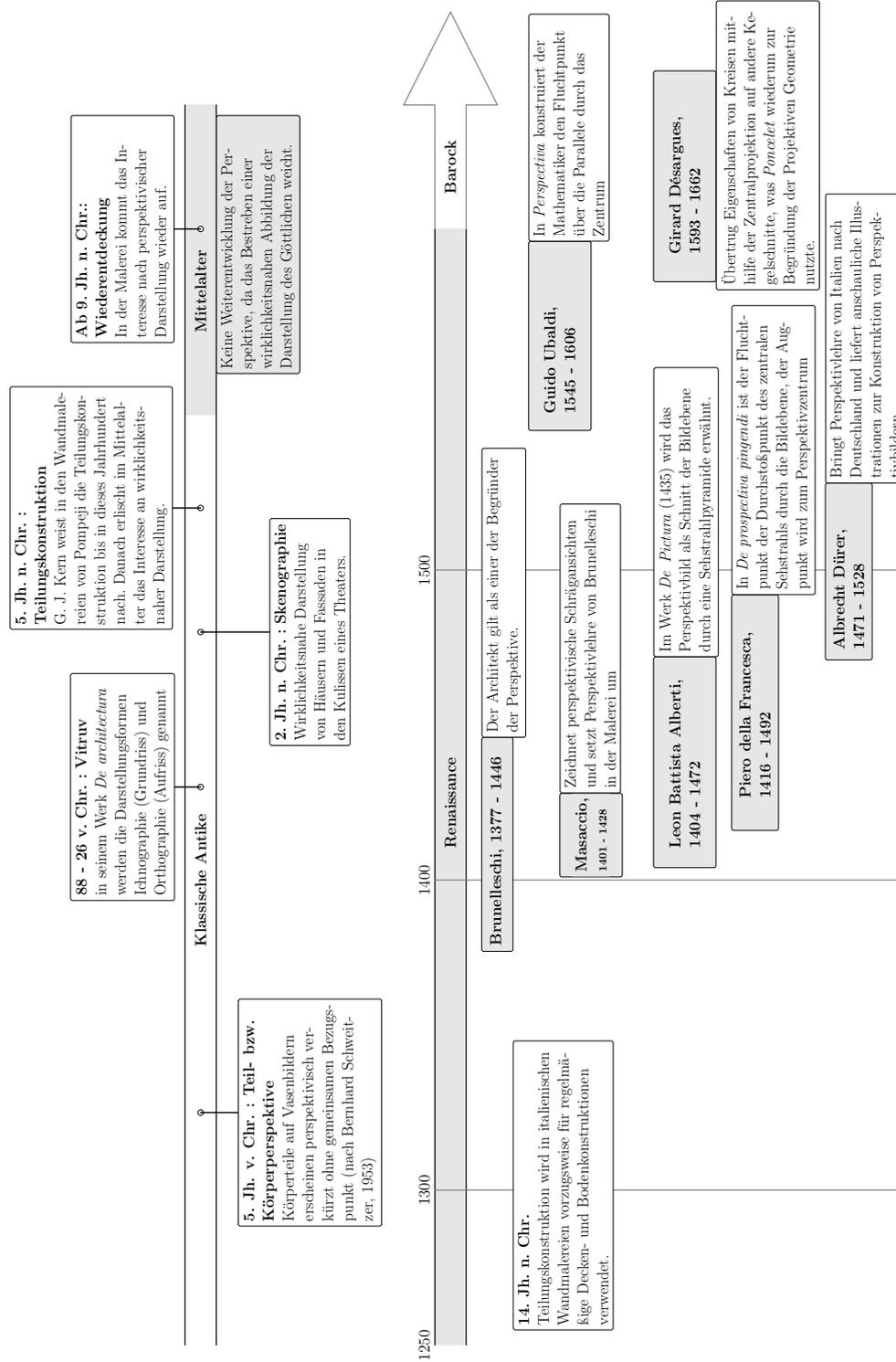


Abb. 1.3.2 Ein historischer Überblick zur Entwicklung der Perspektive [49, 6ff], [2, 10ff], [19]

Es wird deutlich, dass nach dem Mittelalter in der Renaissance die Perspektive wieder in den Fokus der Wissenschaftler und Künstler rückte. So findet sich in italienischen Wandmalereien die Teilungskonstruktion in Decken- und Bodendarstellungen wieder [19, S. 42], bspw. in Ugolino da Siena - Geißelung Christi, Barna da Siena - Abendmahl oder Lorenzo di Bicci - Enthauptung des Apostels Jakobus d. Ä., um nur einige Beispiele aus dem zitierten Werk von G. J. Kern zu nennen.

Der Bildhauer und Architekt *Brunelleschi* war im 15. Jahrhundert in Florenz bekannt für seine Bauwerke und gilt noch heute als Erfinder der Zentralperspektive [41, S. 20], welcher seine Konstruktionsmethoden an seinen Schüler *Masaccio* weitergab. Ein berühmtes Experiment Brunelleschis bestand darin, dass er ein Abbild des Baptisterium in Florenz zentralprojektiv auf einer Tafel abbildete [8]. An die Stelle des Fluchtpunktes wurde ein Loch gebohrt. Der Betrachter sollte nun vor dem Baptisterium stehend durch die Rückseite des Loches schauen. Dort sah er dann auf einen Spiegel, welcher das konstruierte Abbild des Gebäudes auf der Vorderseite zeigt. Den Aufzeichnungen *Manettis*, dem Biographen Brunelleschis und einzige Quelle aus dieser Zeit, zufolge, glaubte der Betrachter, er sehe tatsächlich durch das Loch das echte Bauwerk und nicht nur eine Zeichnung dessen. Die Tafel mit dem Abbild des Bauwerkes ist nicht erhalten geblieben und es gibt ebenso keine zeitgenössische Aufzeichnung darüber, wie genau Brunelleschi die Projektion konstruiert hat [41, S. 24].

Eine der ersten Beschreibungen der neuen Darstellungsmethode findet sich in den Schriften von *Leon Battista Alberti*, welcher 1435 im Werk *De pictura* zwei Varianten beschreibt [41, S. 20], [7, S. 136]. Die erste ähnelt der Fluchtpunkt konstruktion, welche Abb. 1.3.3 zeigt. Auf der rechteckigen Bildfläche wird die Größe eines Menschen festgelegt und auf dessen Höhe der Horizont gezeichnet. Nach Alberti ist der Mensch drei *braccia*, einem damals verwendeten Längenmaß, groß. Die untere Bildseite wird daher in ein Drittel der festgelegten Größe des Menschen unterteilt. Auf dem Horizont wird der Fluchtpunkt festgelegt. Da in diesem Fall der Zentralstrahl, d.h. der Sehstrahl durch das Zentrum, welcher senkrecht auf die Bildebene fällt, in diesem Punkt die Bildebene durchstößt, wird jener auch als Hauptpunkt  $H$  bezeichnet. Nun werden alle unteren Abschnitte mit  $H$  verbunden, um die Tiefenlinien zu erhalten. Diese sind im Raum die Parallelen zum Zentralstrahl und liegen ebenfalls orthogonal zur Bildebene.

Um eine regelmäßige Unterteilung des Bodens in Quadrate zu erreichen, fehlen noch die Transversalen, d.h. die horizontalen Linien, welche parallel zur Bildebene verlaufen. Wir werden später noch zeigen, dass der Abstand der Transversalen abhängig von der Distanz des Betrachters zur Bildebene ist (vgl. Abb. 6.4.16, S. 253). Albertis Lösung besteht darin, die Lage von Betrachter und Bildebene in einer Seitenansicht zu skizzieren. Wir zeichnen neben dem Rechteck eine Linie auf Höhe der Grundlinie.

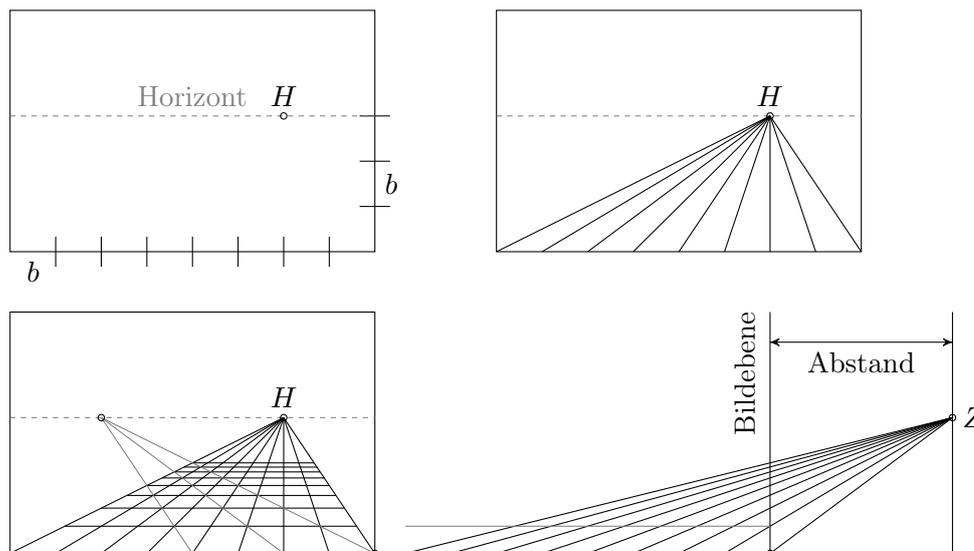


Abb. 1.3.3 Die *Costruzione legittima* nach Leon Battista Alberti [8, S. 82]

Da die Transversalen ebenfalls den Abstand von einem *braccia* haben sollen, wird die Linie mit diesem Maß unterteilt. Aufgrund der Seitenansicht wird die Bildebene zur Linie, welche die Objektebene u.a. im grau markierten Punkt schneidet. Nun muss das Zentrum  $Z$  der Projektion festgelegt werden. Die Lage des Horizontes bestimmt die Höhe von  $Z$ . Der Abstand zur Bildebene kann dagegen frei gewählt werden. Anschließend werden die Seh- bzw. Projektionsstrahlen eingezeichnet, welche die Bildebene auf Höhe der projizierten Transversalen schneidet. Diese werden auf das linke Rechteck übertragen, sodass letztendlich ein Schachbrettmuster entsteht. Zur Kontrolle sollten sich die Diagonalen in einem anderen Fluchtpunkt schneiden, da diese im Raum ebenfalls parallel sind, allerdings in eine andere Richtung zeigen, als die Tiefenlinien [8, S. 81], [51, S. 58]. Damit lässt sich die Projektion eines Raumes in gleiche Abschnitte unterteilen, sodass sich Objekte im projizierten Raum platzieren lassen.

Die zweite Methode erinnert an einen Kupferstich in Dürers *Underweysung der Messung*, in welcher die Szene durch ein Gitter betrachtet wird. Die Bildebene ist ebenfalls in ein Gitter unterteilt, sodass nun der Künstler die gesehene Szene in die einzelnen Felder übertragen kann. Diese Methode orientiert sich an der Vorstellung, dass das gesehene Bild einem Schnitt durch die Sehstrahlpyramide aus der Optik entspricht [41, S. 21]. Wir werden bei der Besprechung der Invarianten der Projektion feststellen, dass die Zentralprojektion eine Ähnlichkeitsabbildung ist, wenn Objekt und Bildebene zueinander parallel sind. Demnach müssen lediglich die Streckenverhältnisse des Gitters auf dem Schleier und der Bildebene übereinstimmen. Nachteil der zweiten Methode ist allerdings, dass nur real existierende Objekte abgebildet werden können. Hier steht im Vordergrund die Abbildung der Wirklichkeit auf eine

zweidimensionale Bildfläche und nicht die Konstruktion eines fiktiven Raumes mithilfe von Horizont und Fluchtpunkten [7, 136f].

Die Bilder einer Zentralprojektion sind abhängig vom Standort und Höhe des Betrachters relativ zur Bildebene. Damit die Raumwirkung perfekt ist, muss der Betrachter einen bestimmten Standpunkt vor dem Bild einnehmen. Der Fluchtpunkt bekommt eine besondere Bedeutung mit dem Werk von *Piero della Francesca*. Nach der damaligen Theorie zur Optik gingen Sehstrahlen vom Auge aus und trafen auf die Objekte. Dabei bildet sich die sog. *Sehstrahlpyramide*, dessen Spitze im Auge liegt. Wie bei der Konstruktion von *Alberti* schon erwähnt wurde, entspricht die Höhe dem zentralen Sehstrahl, welcher die Bildebene orthogonal durchstößt. Der Lotfußpunkt wird Hauptpunkt genannt und befindet sich auf dem Horizont. Der Fluchtpunkt aller Tiefenlinien, welche senkrecht zur Bildebene stehen, fällt mit dem Hauptpunkt zusammen (vgl. Konstruktionsmethode 4.3.2, S. 110). Da die Projektion der Tiefenlinien in einem Punkt zusammenlaufen, nutzten Maler diese zur Blickführung des Betrachters. Ein bekanntes Beispiel ist das *Abendmahl* von *Leonardo*, wo der zentrale Fluchtpunkt auf das Haupt Christi weist [7, S. 145].

Neben der Entwicklung der Perspektive in der Kunst und Architektur gab es auch eine in den mathematischen Wissenschaften, wo die Perspektive zur Begründung der Projektiven und Darstellenden Geometrie führte. Der Mathematiker *G. Ubaldi* konstruierte in seinem Werk *Perspectiva* den Fluchtpunkt der Tiefenlinien, d.h. Geraden, welche nicht parallel zur Bildebene verlaufen, über die Parallele zur Tiefenlinie durch das Projektionszentrum [2, S. 17] (Vgl. Satz 3.1.3, S. 49). Der Schweizer Mathematiker und Physiker *J. H. Lambert* schrieb 1759 *Die freye Perspektive*, in welcher er auch seinen Perspektographen vorstellte. Dieser wurde im Rahmen der Arbeit nachgebaut. Der Entwurf sowie seine Funktionsweise werden im Abschnitt 8.1, S. 312, erläutert.

Die Darstellende Geometrie sowie die Projektive Geometrie sind eng verknüpft mit der Zentralprojektion und ihrer Deutung als mathematische Raumtheorie, derer sich vor allem der Mathematiker *Girard Désargues* annahm. Somit begann die Auseinandersetzung mit der Perspektive in der Malerei und Architektur und setzte ihren Weg in der mathematischen Wissenschaft fort.



Teil II

Mathematische Betrachtung der  
Projektion



## Kapitel 2

# Grundlagen

Die Zentralprojektion ist eine geometrische Abbildung, welche Punkte im Raum den Punkten einer festgelegten Ebene zuordnet. In den folgenden Abschnitten wollen wir einige grundlegende Begriffe einführen, welche für die Behandlung der Projektion nötig sind. Wir verwenden dabei den euklidischen Raum mitsamt seiner Metrik, da wir auch Abstände und Winkel behandeln werden. Zusätzlich werden wir die Fernelemente der projektiven Geometrie hinzunehmen. Dies hat zur Folge, dass nun zwei verschiedene Geraden sich immer schneiden werden. In dem Sonderfall, dass sie parallel sind bzw. dieselbe Richtung aufweisen, schneiden sich diese in einem Fernpunkt. Die Hinzunahme von Fernelementen führt dazu, dass die Projektion eine surjektive Abbildung wird, d.h. zu jedem Punkt der Ebene existiert mindestens ein Urbildpunkt im Raum.

Das Besondere an geometrischen Abbildungen sind ihre Invarianten, d.h. Eigenschaften von Objekten, welche durch das Abbilden nicht verändert werden. So bleiben bei Kongruenzabbildungen Winkel und Streckenlängen erhalten, während Ähnlichkeitsabbildungen zwar winkel- aber nicht längentreu sind. In der neunten Klasse wird im Mathematikunterricht an Gesamtschulen und Gymnasien in NRW die zentrische Streckung besprochen und mit ihr das Streckenverhältnis. Weil die Projektion u.a. das Teil- und Doppelverhältnis invariant lässt, diese aber im Unterricht in der Regel nicht thematisiert werden, wird in einem Abschnitt gesondert darauf eingegangen. Bzgl. der zentrischen Streckung erlernen Schülerinnen und Schüler den Strahlensatz. Da dieser bei Herleitungen von Formeln und Beweisführungen zur Zentralprojektion öfters angewendet wird, wird der erste und zweite Strahlensatz kurz wiederholt.

## 2.1 Die Objekte

Zur Behandlung geometrischer Problemstellungen werden im schulischen Unterricht die Objekte Punkt, Gerade und Ebene verwendet. Dabei soll der betrachtete Anschauungsraum im euklidischen Sinne aus unendlich vielen Punkten bestehen. Die Objekte werden wie folgt bezeichnet [12, S. 2]:

### Definition 2.1.1: Punkt, Gerade, Ebene

- i) Der Raum bestehe aus unendlich vielen *Punkten*, welche mit Großbuchstaben  $A, B, C, \dots$  bezeichnet werden.
- ii) Eine *Gerade* sei eine eindimensionale Menge von Punkten, wobei jene mit Kleinbuchstaben  $a, b, c, \dots$  bezeichnet werden. Gilt  $A \in g$ , so bedeutet dies in der Anschauung, dass der Punkt  $A$  auf der Geraden  $g$  liegt.
- iii) Eine *Ebene* sei eine zweidimensionale Menge von Punkten, wobei jene mit griechischen Großbuchstaben  $E, \Pi, \Sigma, \dots$  bezeichnet werden. Gilt  $A \in \Pi$  bzw.  $g \subset \Pi$ , so bedeutet dies, dass der Punkt  $A$  bzw. die Gerade  $g$  in der Ebene  $\Pi$  liegt.

In der obigen Definition liegt eine Inzidenzrelation zwischen Punkte und Geraden bzw. Ebenen vor. Liegen alle Punkte einer Geraden  $g$  auch auf einer Geraden  $h$ , so sind diese *identisch*, d.h.  $g = h$ . Gibt es dagegen nur einen gemeinsamen Punkt, so wird dieser *Schnittpunkt* genannt. Wir werden später anhand der zugrunde gelegten Axiome zeigen, dass zwei verschiedene Geraden nicht mehr als einen Schnittpunkt gemeinsam haben können. Liegen beide Geraden in einer Ebene und haben keinen Punkt gemeinsam, so wird dies als *echt parallel* bezeichnet.

Da die Zentralprojektion eine Abbildung ist, welche parallele Geraden, bis auf Ausnahmen, auf sich schneidende abbildet, würde dies zu folgendem Problem führen: die Abbildung ist nicht surjektiv, denn nicht alle Punkte der Bildebene besitzen mindestens ein Urbild im Raum. Der Schnittpunkt der Bildgeraden, dem Fluchtpunkt, kann kein gewöhnlicher Punkt als Urbild zugeordnet werden, denn parallele Geraden schneiden sich im euklidischen Sinne nicht. Es wird daher im nächsten Abschnitt axiomatisch gefordert, dass zwei verschiedene Geraden immer einen gemeinsamen Punkt besitzen. Für den Parallelfall wird der euklidische Raum daher um sog. *Fernpunkte* aus der *Projektiven Geometrie* erweitert. Um gewöhnliche Punkte von den Fernpunkten zu unterscheiden, werden jene mit  $\star$  gekennzeichnet. Ist  $S$  ein gemeinsamer Punkt zweier verschiedener Geraden  $g$  und  $h$  in einer Ebene, so schneiden sie sich in einem gewöhnlichen Punkt. In Abb. 2.1.1 ist der gemeinsame Punkt von  $g$  und  $h$  der Fernpunkt  $S^\star$ , sodass  $g$  und  $h$  echt parallel sind. Die Richtung der Geraden wird in der Abbildung über die Pfeildarstellung bei  $S^\star$  angegeben. So sind in Abb.

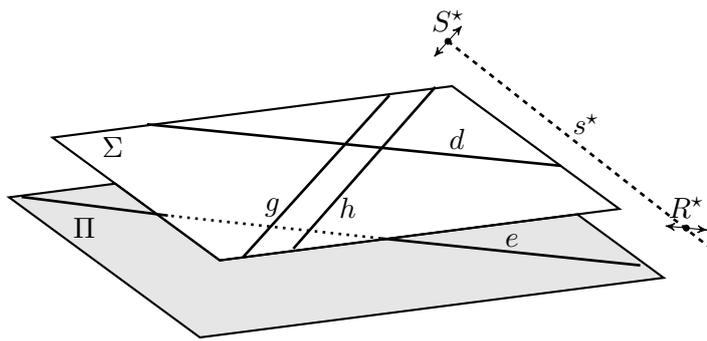


Abb. 2.1.1 Parallele Geraden und ihre Fernpunkte, wie auch parallele Ebenen mit einer Ferngeraden

2.1.1 die Geraden  $d$  und  $e$  parallel, allerdings ist ihre Richtung eine andere als die von  $g$  und  $h$ . Sie schneiden sich demnach in einem anderen Fernpunkt  $R^*$ .

Im Raum schneiden sich zwei verschiedene Ebenen  $\Pi$  und  $\Sigma$  in einer Schnittgeraden  $s$ . Auch hier lässt sich das Prinzip der Fernelemente anwenden. So schneiden sich in Abb. 2.1.1 die parallelen Ebenen  $\Pi$  und  $\Sigma$  in einer Ferngeraden  $s^*$ , welche die Fernpunkte  $S^*$  und  $R^*$  enthält. Wir werden später zeigen, dass der Horizont die Projektion einer Ferngeraden ist.

## 2.2 Die Axiome

Die Arbeit ist schulnah ausgerichtet. Daher wird der euklidische Raum mit den entsprechenden Axiomen Zugrunde gelegt, wie auch seine Metrik für Strecken und Winkel. Im Sinne einer projektiven Erweiterung werden folgende Axiome verändert [12, S. 3]:

### Axiome 2.2.1

- (G1) Zwei verschiedene Punkte legen genau eine Gerade fest. Dabei heißt die Gerade, welche durch die Punkte  $A$  und  $B$  festgelegt wird, die *Verbindungsgerade*  $AB$ .
- (G2) Zwei verschiedene Geraden, welche in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkt.
- (E1) Folgende Kombinationen legen genau eine Ebene fest:
  - a) drei verschiedene nicht-kollineare Punkte
  - b) zwei verschiedene Geraden, welche sich schneiden
  - c) eine Gerade und ein Punkt, welcher nicht auf jener liegt
- (E2) Zwei verschiedene Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden.

Während in (G1) und (E1) nicht nur die Existenz sondern auch die Eindeutigkeit der Objekte gefordert wird, kann die fehlende Eindeutigkeit in (G2) und (E2) mithilfe der anderen Axiome wie folgt indirekt bewiesen werden.

**Satz 2.2.2**

Der Schnittpunkt  $S$  zweier verschiedener Geraden  $a$  und  $b$  ist eindeutig, ebenso die Schnittgerade  $s$  zweier verschiedener Ebenen  $E$  und  $\Pi$ .

*Beweis.*

Annahme: Es sei  $P \neq S$  ein zweiter Schnittpunkt von  $a, b$  sowie  $p \neq s$  eine zweite Schnittgerade der Ebenen. Dann gilt  $a \cap b = \{S, P\}$ . Wegen (G1) ist  $SP$  die eindeutige Verbindungsgerade, d.h.  $a = SP = b$ . Dies steht im Widerspruch dazu, dass  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Geraden sind. Analog führt auch (E1) bzgl. der Ebenen zum Widerspruch. □

Da zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade festlegen, kann die Verbindungsgerade von  $A$  und  $B$  als  $AB$  oder  $BA$  bezeichnet werden. Durch das Hinzufügen von Fernelementen ist auch das Parallelenaxiom durch die o.g. Axiome berücksichtigt, wie folgender Satz zeigt:

**Satz 2.2.3**

Zu einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $P$  existiert genau eine Gerade  $h$  mit:

$$P \in h \text{ und } h \parallel g$$

*Beweis.*

Jede Gerade hat eine Richtung, d.h.  $g$  inzidiert mit einem Fernpunkt  $G^*$ . Nach (G1) legen zwei Punkte genau eine Gerade fest. Sei  $h$  die Gerade, welche mit  $P$  und  $G^*$  inzidiert. Da  $g$  und  $h$  sich in demselben Fernpunkt schneiden, sind sie parallel. □

## 2.3 Das Teil- und Doppelverhältnis

Werden verschiedene Abbildungen auf ihre Eigenschaften untersucht, so stellt sich auch die Frage, ob es Eigenschaften gibt, welche sich durch die Abbildung nicht ändern, d.h. *invariant* sind. Liegt beispielsweise eine Kongruenzabbildung vor, welche folglich eine Figur auf eine deckungsgleiche Figur abbildet, so bleiben u.a. Strecklängen und Winkelgrößen erhalten. Wird ein Rechteck durch eine zentrische Streckung vergrößert, so bleiben die Winkel erhalten, aber die Seitenlängen verändern sich, allerdings nicht beliebig, sondern um einen festen Faktor. Somit bleibt das Verhältnis zwischen dem Bild und der ursprünglichen Strecke erhalten, d.h. die zentrische Streckung ist streckenverhältnistreu.

Da im Abschnitt 2.4.2 einige Invarianten von Abbildungen besprochen werden, werden im Folgenden die Begriffe Teilverhältnis und Doppelverhältnis erläutert. Diese werden im Mathematikunterricht an Gesamtschulen und Gymnasien in NRW in der Regel nicht besprochen, da sie im Lehrplan nicht vorausgesetzt werden, im Gegensatz zu längen- und winkeltreu, da sie Invarianten von Kongruenzabbildungen sind. Einige Invarianten der Projektion werden bei der Konstruktion von Bildern verwendet. Schülerinnen und Schüler sollten sich daher auch mit diesen beiden Begriffen im Unterricht auseinandersetzen, wenn später Konstruktionsverfahren aus dem Kunstunterricht mathematisch begründet werden sollen. Zur Vereinfachung wird sowohl die Strecke als Objekt mit  $\overline{AB}$  bezeichnet wie auch ihre Länge, d.h.  $d(A, B) = \overline{AB}$ . Es ist daher dem Kontext zu entnehmen, welche der beiden Bedeutungen gemeint ist.

Wir besprechen im Folgenden das Teilverhältnis mit Aufgabenbeispielen. Wird der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet, so ist die Abbildung teilverhältnistreu. Wir betrachten also Verhältnisse von Streckenlängen. Nun könnten Schülerinnen und Schüler meinen, dies wäre dasselbe wie streckenverhältnistreu, eine Eigenschaft von Ähnlichkeitsabbildungen. Tatsächlich gibt es aber einen Unterschied zwischen den beiden Begriffen. Bei der Streckenverhältnistreu betrachten wir zwei verschiedene Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ . In ihrer Lage sind sie nicht abhängig von einander, d.h. Anfangs- und Endpunkte können verschieden sein oder auch nicht. Im anderen

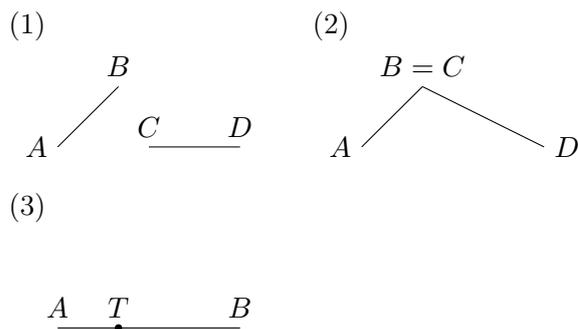


Abb. 2.3.1 (1) und (2) sind Strecken mit dem Streckenverhältnis  $\overline{AB} : \overline{CD}$ , während (3) sich auf das Teilverhältnis  $TV(A, B, T)$  bezieht.

Fall betrachten wir **eine** Strecke  $\overline{AB}$ , welche von einem Punkt  $T$  geteilt wird, d.h. Anfangs-, End-, und Teilungspunkt sind kollinear. Abb. 2.3.1 zeigt den Unterschied. Wir kommen nun zur Definition des Teilverhältnisses einer Strecke:

**Definition 2.3.1: Teilverhältnis**

Gegeben seien drei Punkte  $A, B, C$  einer Geraden. Das *Teilverhältnis*  $TV(A, B, C)$  ist dann das Verhältnis der Streckenlängen  $\overline{AC} : \overline{BC}$ . ([47], S. 52)

$C$  ist dabei der *Teilungspunkt* von  $\overline{AB}$ .

In der folgenden Abbildung ist ein Beispiel zur o.g. Definition gegeben. Dabei ergeben sich folgende Teilverhältnisse auf der Strecke  $\overline{AB}$  und dem Teilungspunkt  $C$  bzw.  $D$ .

$$\begin{aligned}\overline{AC} : \overline{BC} &= 2 \text{ LE} : 6 \text{ LE} = 1 : 3 \\ \overline{AD} : \overline{BD} &= 4 \text{ LE} : 12 \text{ LE} = 1 : 3\end{aligned}$$

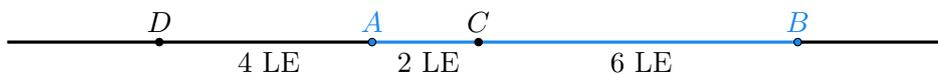


Abb. 2.3.2  $C$  und  $D$  sind Teilungspunkte der Strecke  $\overline{AB}$

Es ergibt sich dasselbe Verhältnis, obwohl sich die Lage der Teilungspunkte  $C$  und  $D$  bzgl. der Strecke  $\overline{AB}$  qualitativ unterscheidet:  $C$  liegt auf dem Streckenabschnitt  $\overline{AB}$ ,  $D$  dagegen nicht.

Zur Unterscheidung, ob der Teilungspunkt zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  liegt, oder außerhalb der Strecke  $\overline{AB}$ , wird der Geraden ein Richtungssinn zugeordnet, sodass Streckenlängen  $\overline{AB}$  und  $\overline{BA}$  durch ein negatives Vorzeichen unterschieden werden. Negative Strecken würden aber in der Schule zum Konflikt führen. Ebenso auch der weiter gefasste Begriff des Streckenverhältnisses, wo rein intuitiv davon ausgegangen wird, dass der Teilungspunkt innerhalb der betrachteten Strecke liegt und nicht außerhalb. Aus didaktischen Gründen verzichten wir daher auf den Richtungssinn einer Geraden und auf negative Streckenlängen.

Zum Einstieg können Schülerinnen und Schüler verschiedene Teilverhältnisse wie in der obigen Abb. 2.3.2 berechnen. Doch was passiert, wenn wir zu einer gegebenen Strecke ein Teilverhältnis vorgeben. Ist dann der gesuchte Teilungspunkt eindeutig? Folgt aus  $TV(A, B, C) = TV(A, B, D)$  stets  $C = D$ ?

Wir betrachten drei kollineare Punkte  $A, B$  und  $C$ , wobei wieder  $C$  der Teilungspunkt der Strecke  $\overline{AB}$  ist. Sei  $D$  nun ein zweiter Punkt der Geraden, welcher die Strecke im selben Teilverhältnis teilt wie  $C$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} TV(A, B, C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = TV(A, B, D) &\Rightarrow \frac{\overline{AB} - \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} - \overline{BD}}{\overline{DB}} \\ &\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} \\ &\Rightarrow \overline{BC} = \overline{BD} \quad \text{mit } \overline{AB} \neq 0 \\ &\Rightarrow C = D \end{aligned}$$

Der Teilungspunkt ist demnach eindeutig.

Im Unterricht können die Schülerinnen und Schüler die Lage des Teilungspunktes bei gegebenem Teilverhältnis wie folgt untersuchen:

#### Aufgabenbeispiel 2.3.1

- Zeichne jeweils eine Strecke mit 4, 6 und 10 cm und markiere den Anfangs- und Endpunkt mit  $A$  und  $B$ . Bestimme die Teilverhältnisse  $TV(A, B, C)$ , wenn  $C$  immer der Mittelpunkt der Strecke ist. Was fällt dir auf?
- Zeichne eine Strecke von 12 cm und markiere wieder den Anfangs- und Endpunkt mit  $A$  bzw.  $B$ . Wo liegt der Punkt  $C$ , wenn das Teilverhältnis 2 ist? Wo liegt  $C$ , wenn  $TV(A, B, C) = \frac{1}{2}$  ist?
- Wiederhole Teil b) mit 3 und  $\frac{1}{3}$  bzw. mit 5 und  $\frac{1}{5}$ . Was fällt dir auf?

Im Aufgabenteil a) sollte den Schülerinnen und Schüler auffallen, dass das Teilverhältnis immer 1 ergibt, wenn der Teilungspunkt der Mittelpunkt der Strecke ist. Dies ist leicht zu erklären, da der Mittelpunkt nach Definition eine Strecke in zwei gleichgroße Abschnitte teilt. Demnach ist  $\overline{AC} = \overline{BC}$ .

Für Teil b) lassen sich folgende Gleichungen aufstellen, da das Teilverhältnis bekannt ist:

$$\begin{aligned} TV(A, B, C) = 2 = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} &\Rightarrow \overline{AC} = 2 \cdot \overline{BC} \\ 12 = \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} &= 3\overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = 4 \end{aligned}$$

Auch ohne Gleichungen lässt sich auf die Lösung schließen, da die Länge der Strecke bewusst so gewählt wurde, damit die Lösung ganzzahlig wird. Aufgrund des Teilverhältnisses muss die Strecke  $\overline{AC}$  doppelt so groß sein wie  $\overline{BC}$ . Da beide zusammen

12 ergeben müssen, hat die erste Strecke die Länge  $12 \cdot \frac{2}{3}$ . Der Abstand von  $C$  zu  $A$  ist daher 8 cm.

Was passiert nun, wenn wir  $\frac{1}{2}$ , also den Kehrwert von 2 betrachten? Dann ist die Strecke  $\overline{BC}$  doppelt so groß wie  $\overline{AC}$ , d.h.  $C$  liegt nun 8 cm vom Punkt  $B$  entfernt. Mit Aufgabenteil c) sollen die Schülerinnen und Schüler die Systematik aus b) erkennen. Da auch 4 und 6 Teiler von 12 sind, sind die Ergebnisse, welche in folgender Tabelle gelistet sind, wieder ganzzahlig:

$TV(A, B, C)$	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	5	$\frac{1}{5}$
$\overline{AC}$	8	4	9	3	10	2
$\overline{BC}$	4	8	3	9	2	10

Bei der Lage der Punkte sollte den Schülerinnen und Schülern auffallen, dass der Kehrwert des Teilverhältnisses eine Spiegelung am Mittelpunkt  $M$  der Strecke bewirkt. Demnach ist Teil a) ein Sonderfall, denn der Kehrwert von 1 ist wieder 1, sodass sich derselbe Punkt ergibt. Der einzige Punkt, welcher bei einer Punktspiegelung an  $M$  an sich selbst abgebildet wird, ist  $M$ .

Wir kommen nun zur Definition des Doppelverhältnisses, welcher dem Verhältnis von zwei Teilverhältnissen entspricht. Zu dem ersten Teilungspunkt kommt nun ein zweiter hinzu.

### Definition 2.3.2: Doppelverhältnis

Gegeben sind vier verschiedene kollineare Punkte  $A, B, C, D$ . Dann entspricht das Verhältnis der Teilverhältnisse dem *Doppelverhältnis* [47, S. 53]:

$$DV(A, B, C, D) = TV(A, B, C) : TV(A, B, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

In Abb. 2.3.2, S. 28, ist das Doppelverhältnis  $DV(A, B, C, D) = -1$ , d.h. die Teilverhältnisse sind bis auf ihr Vorzeichen gleich. Für den Schulunterricht nehmen wir wieder dieselbe Vereinfachung wie bei dem Teilverhältnis vor. Wir vernachlässigen den Richtungssinn von Geraden, d.h. die Teilverhältnisse  $TV(A, B, C)$  und  $TV(A, B, D)$  müssen positiv sind. Dies führt dazu, dass die Teilungspunkte  $C$  und  $D$  zwischen  $A$  und  $B$  liegen müssen. Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Lage der Teilungspunkte  $C$  und  $D$  auf das Doppelverhältnis auswirkt und formulieren dazu folgendes Aufgabenbeispiel:

**Aufgabenbeispiel 2.3.2**

Zeichne für jeden Aufgabenteil eine Strecke von 12 cm und markiere den Anfangs- und Endpunkt mit  $A$  und  $B$ .

- Der Punkt  $C$  ist der Mittelpunkt der Strecke und das Doppelverhältnis ist 1. Bestimme den Punkt  $D$ . Findest du auch eine zweite Lösung? Wo liegt  $D$ , wenn  $C$  4 cm von  $A$  entfernt liegt und das Doppelverhältnis immer noch 1 beträgt?
- Wie in a) sei wieder  $C$  der Mittelpunkt der Strecke, aber das Doppelverhältnis ist 2. Bestimme die Lage von  $D$ . Wo liegt  $D$ , wenn  $C$  8 cm von  $A$  entfernt liegt?
- Das Doppelverhältnis ist wieder 2. Kannst du eine allgemeine Formel herleiten, um  $\overline{AD} = y$  zu bestimmen, wenn der Abstand  $\overline{AC} = x$  bekannt ist?

Hier lässt sich die Lösung rein mit Gleichungen oder durch Schlussfolgerungen finden. In Bezug auf a) gilt

$$DV(A, B, C, D) = 1 \Rightarrow TV(A, B, C) = TV(A, B, D).$$

Da  $C$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$  ist, muss nach dem vorherigen Aufgabenbeispiel  $TV(A, B, C) = 1$  sein. Dann ist aber auch  $TV(A, B, D) = 1$  und somit  $D$  der Mittelpunkt der Strecke. Also ist  $C = D$  die einzige Lösung. Wird die Lage von  $C$  verändert, so ändert sich das Teilverhältnis  $TV(A, B, C)$ . Mit der Angabe in der Aufgabenstellung gilt dann:

$$TV(A, B, C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{12 - 4} = \frac{1}{2}.$$

Da das Doppelverhältnis immer noch 1 beträgt, ist auch

$$TV(A, B, D) = \frac{1}{2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Teilungspunkte zwischen Anfangs- und Endpunkt der Strecke liegen müssen, gilt aufgrund der zuvor gezeigten Eindeutigkeit der Teilungspunkte wieder  $C = D$ . Das Ergebnis ist somit unabhängig von der Lage von  $C$ . In Teil b) wird nun das Doppelverhältnis verändert. Da  $C$  der Mittelpunkt ist, gilt wieder:

$$TV(A, B, C) = 1.$$

Mit dem Doppelverhältnis kennen wir dann auch die Lage von  $D$ :

$$\begin{aligned} 2 = DV(A, B, C, D) = TV(A, B, C) : TV(A, B, D) = 1 : TV(A, B, D) \\ \Rightarrow TV(A, B, D) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dies kennen wir schon aus a), d.h.  $D$  liegt 4 cm von  $A$  entfernt. Für  $\overline{AC} = 8$  ergibt sich  $\overline{AD} = 6$ . Was lässt sich aus den zwei Beispielen vermuten? Anscheinend liegt der Punkt  $D$  immer vor  $C$  bzw. näher an  $A$ . Woran das liegt, wird nach der Besprechung der Lösung des Aufgabenbeispiels erklärt.

Teil c) ist eine Verallgemeinerung von b). Der Lösungsweg ist derselbe, erfordert allerdings einige Termumformungen:

$$\begin{aligned} TV(A, B, C) &= \frac{\overline{AC}}{12 - \overline{AC}} = \frac{x}{12 - x} & TV(A, B, D) &= \frac{y}{12 - y} \\ 2 = DV(A, B, C, D) &= TV(A, B, C) : TV(A, B, D) \\ \Rightarrow TV(A, B, D) &= \frac{TV(A, B, C)}{2} = \frac{x}{24 - 2x} \\ \frac{y}{12 - y} &= \frac{x}{24 - 2x} \Rightarrow 24y - 2xy = 12x - xy \Rightarrow (24 - x)y = 12x \\ \Rightarrow \overline{AD} = y &= \frac{12x}{24 - x}. \end{aligned}$$

Wir überprüfen unsere Formel mit den Beispielen aus b):

$$\begin{aligned} \overline{AC} = 6 \Rightarrow y &= \frac{12 \cdot 6}{24 - 6} = \frac{12 \cdot 6}{18} = 4 \\ \overline{AC} = 8 \Rightarrow y &= \frac{12 \cdot 8}{24 - 8} = \frac{12 \cdot 8}{16} = 6 \end{aligned}$$

Die Formel liefert für beide Zahlenbeispiele das richtige Ergebnis. Die folgende Abbildung zeigt die Lage der Teilungspunkt aus b).

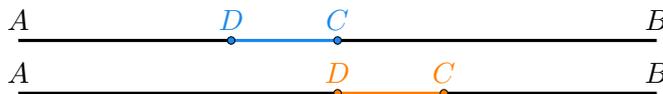


Abb. 2.3.3 Die Lösung von Teil b) des Aufgabenbeispiels 2.3.2

Was in dem Bild auffällt, ist der unveränderte Abstand von  $C$  und  $D$ . Dies ist ein Sonderfall, da im ersten Beispiel  $C$  der Mittelpunkt ist und im zweiten  $D$ . Bei der Untersuchung des Teilverhältnisses hatte sich gezeigt, dass  $0 < TV(A, B, C) < 1$  gilt, wenn der Teilungspunkt links vom Mittelpunkt liegt und andernfalls größer als 1 ist. Im ersten Fall ist  $TV(A, B, D) = \frac{1}{2}$ , im zweiten dagegen der Kehrwert, sodass die beiden Ergebnisse eine Punktspiegelung verbindet. Demnach sind die Abstände von  $C$  und  $D$  in beiden Fällen identisch.

Wie sich die Abstände der beiden Teilungspunkte verändern und welche Auswirkung das Doppelverhältnis sowie die Länge der Strecke hat, wird im Folgenden untersucht. Sei  $l$  die Länge der Strecke und  $d$  das Doppelverhältnis. Statt den Termumformungen aus Teil c) verwenden wir hier einen alternativen Weg:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = d \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} &\Rightarrow \frac{l - \overline{BC}}{\overline{BC}} = d \cdot \frac{l - \overline{BD}}{\overline{BD}} \\ &\Rightarrow \frac{l}{\overline{BC}} - 1 + d = \frac{d \cdot l}{\overline{BD}} \\ &\Rightarrow \frac{l + (d - 1)\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{d \cdot l}{\overline{BD}} \\ &\Rightarrow \overline{BD} = \frac{d \cdot l \cdot \overline{BC}}{l + (d - 1)\overline{BC}} \end{aligned}$$

Damit lässt sich folgender Satz formulieren:

**Satz 2.3.3**

Sei  $l$  die Länge der Strecke  $\overline{AB}$  und  $d$  das Doppelverhältnis  $DV(A, B, C, D)$ . Ist die Lage des ersten Teilungspunktes  $C$  bekannt, so lässt sich die Lage von  $D$  wie folgt berechnen:

$$\overline{BD} = \frac{d \cdot l \cdot \overline{BC}}{l + (d - 1)\overline{BC}}$$

Wir wollen nun berechnen, an welcher Position einer gegebenen Strecke  $\overline{AB}$  sich die Teilungspunkte befinden müssen, um ein gegebenes Doppelverhältnis von  $d = 2$  zu erfüllen. Aufgrund der vielen Berechnungen wurde der Computer zur Hilfe genommen, indem die Formel im zuvor genannten Satz in der Programmiersprache *Julia* implementiert wurde. Mit dieser Sprache wurde auch die Lage der Teilungspunkte grafisch dargestellt. In Abb. 2.3.4 entsprechend die Linien der Strecke  $\overline{AB}$ . Den rechten Punkten der farbig hervorgehobenen Strecken entspricht  $C$ , welcher jeweils um 1 weiter von  $A$  weg verschoben wurde. Die unterste Linie entspricht einer Skala mit den Abständen einer Längeneinheit. Über den berechneten Abstand  $\overline{BD}$  wurde die Lage des zweiten Teilungspunktes  $D$ , dem jeweils linken Punkt in der Abb. 2.3.4 bestimmt. Die Abbildung zeigt die Lage der Punkte bei einer Streckenlänge von  $l = 8$  und  $l = 12$ . Die beiden Beispiele zeigen, dass der Abstand  $\overline{DC}$  der Teilungspunkte variiert.

Wir vertiefen daher die Aufgabe und tragen den Abstand  $\overline{DC}$  gegen  $\overline{AC}$  auf und verwenden als Parameter die Streckenlänge  $l = \overline{AB}$  mit Doppelverhältnis  $d = 2$  bzw.

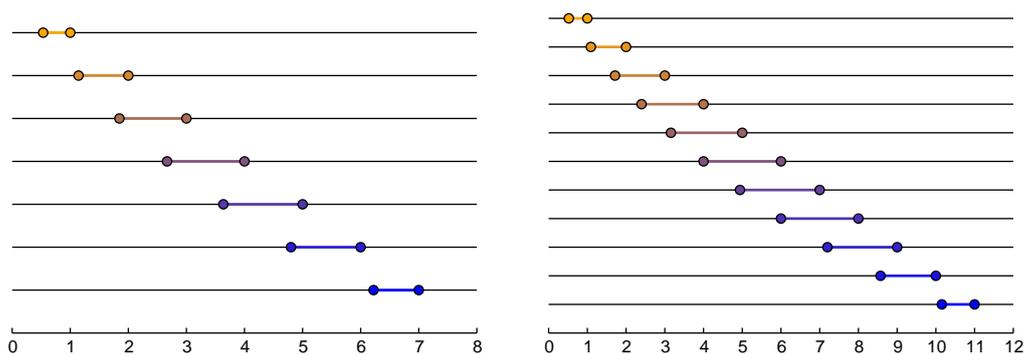


Abb. 2.3.4 Variation des Abstandes  $\overline{AC}$  bei  $DV(A, B, C, D) = 2$ . Links:  $\overline{AB} = 8$ , rechts:  $\overline{AB} = 12$

das Doppelverhältnis  $d$  mit fester Streckenlänge  $l = 12$ . Die Ergebnisse zeigt Abb. 2.3.5. Es ist erkennbar, dass der maximale Abstand der Teilungspunkte vorliegt, wenn  $\overline{AC}$  etwa 60% der Strecke ausmacht. Weiterhin ist die Differenz  $\overline{AC} - \overline{AD}$  immer positiv, was bedeutet, dass der zweite Teilungspunkt vor dem ersten liegt (vgl. Abb. 2.3.3). Die rechte Grafik von Abb. 2.3.5 zeigt den Einfluss des Doppelverhältnisses. So ändert sich die Reihenfolge der Teilungspunkte, wenn das Doppelverhältnis zwischen 0 und 1 liegt. Die entsprechenden Graphen verbindet eine Punktspiegelung an  $(6, 0)$ . Da eine Strecke von 12 LE vorlag, wird die obige Aussage gestützt, dass die Bildung des Kehrwertes eine Punktspiegelung der Teilungspunkte am Mittelpunkt bewirkt.

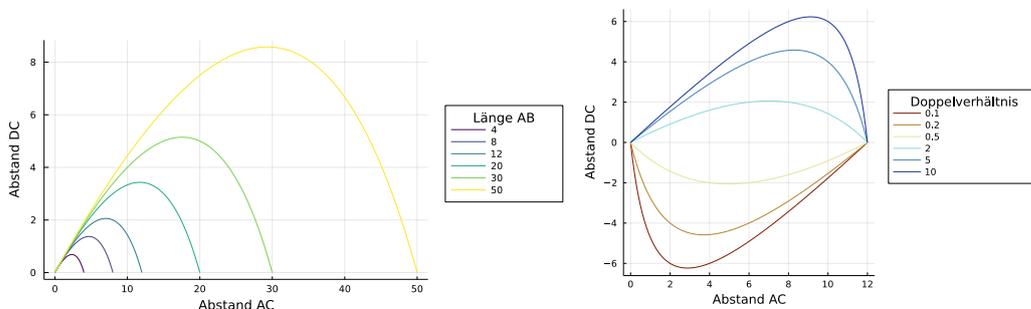


Abb. 2.3.5 Auswirkungen des Abstandes der Teilungspunkte bei Variation der Streckenlänge (links mit  $DV(A, B, C, D) = 2$ ) und des Doppelverhältnisses (rechts mit  $\overline{AB} = 12$ )

Anhand der Graphen lassen sich einige vorherige Vermutungen stützen, allerdings entstehen hier Kurven, welche auch für die Schülerinnen und Schüler der Oberstufe unbekannt sind, da es sich weder um Polynom- noch um Exponentialfunktionen handelt, die nach dem Lehrplan NRW besprochen werden. Dies ist auch anhand der Formel im obigen Satz 2.3.3 erkennbar. Die Behandlung im Unterricht sollte daher auf einem beispielhaften Niveau erfolgen, wie im vorgestellten Aufgabenbeispiel 2.3.2.

## 2.4 Geometrische Abbildungen

Die Projektion gehört zu den geometrischen Abbildungen wie auch Kongruenzabbildungen, welche im Schulunterricht behandelt werden. Kongruenzabbildungen, wie Drehung, Verschiebung oder Spiegelung, zeichnen sich dadurch aus, dass sie nur Orientierung und Lage des Objektes verändern, ihre Form und Größe aber erhalten bleibt, da sich Streckenlängen und die Winkelgrößen nicht ändern. Hieraus resultiert auch, dass der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet. Kongruenzabbildungen weisen somit eine große Anzahl an Invarianten auf.

Mit der zentrischen Streckung wird eine weitere Gruppe von Abbildungen im Unterricht behandelt: die Ähnlichkeitsabbildungen. Die zentrische Streckung vergrößert oder verkleinert Objekte, sodass zwar die Winkel erhalten bleiben, die Längen dagegen nicht. Dennoch wird auch hier der Mittelpunkt einer Strecke dem Mittelpunkt der Bildstrecke zugeordnet. Es fällt somit nur ein Teil der Invarianten der Kongruenzabbildung weg, wenn wir eine Ähnlichkeitsabbildung betrachten.

Die folgenden Abschnitte erläutern zuerst die Abbildung allgemein, um abschließend eine Auswahl an Invarianten im metrischen Raum vorzustellen.

### 2.4.1 Die Abbildung

Die Projektion wird hier als eine Abbildung im euklidischen Raum unter der Zunahme von Fernpunkten und -geraden behandelt. Wir definieren daher im allgemeinen eine Abbildung als eine Zuordnung zwischen zwei Punktfolgen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ .

#### Definition 2.4.1: Geometrische Abbildung

Eine *geometrische Abbildung*  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  ordnet jedem Punkt  $P \in \mathbb{A}$  genau einen Punkt  $\varphi(P) \in \mathbb{B}$  zu [1, S. 224].

- i) Die Abbildung ist *injektiv*, wenn es zu einem Bildpunkt  $Q \in \mathbb{B}$  maximal ein Urbild  $P \in \mathbb{A}$  gibt.
- ii) Die Abbildung ist *surjektiv*, wenn es zu jedem Bildpunkt  $Q \in \mathbb{B}$  mindestens ein Urbild  $P \in \mathbb{A}$  gibt.
- iii) Die Abbildung ist *bijektiv*, wenn i) und ii) erfüllt sind, d.h. wenn zu jedem Bildpunkt genau ein Urbild existiert. Die Abbildung ist dann auch umkehrbar, d.h. es existiert  $\varphi^{-1} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ .

Zur Vereinfachung kann der Bildpunkt mit  $P'$  statt  $\varphi(P)$  bezeichnet werden, wenn aus dem Kontext hervorgeht, um welche Abbildung es sich handelt. Kongruenzabbildungen in der Ebene sind bijektiv, d.h. die Zuordnung von Punkt und Bildpunkt ist

eindeutig bzw. es existiert eine *Umkehrabbildung*, welche einem Bildpunkt sein Urbild zuordnet. Ein ebenes Objekt, welches um den Punkt  $P$  um den Winkel  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  gedreht wurde, kann entweder um  $-\alpha$  „zurückgedreht“ werden oder um  $360^\circ - \alpha$  unter Einbehaltung der Drehrichtung. Die zentrische Streckung ist ebenfalls bijektiv, sofern der Streckfaktor von null verschieden ist. Wird ein Objekt um den Faktor  $k$  vergrößert, so kann das ursprüngliche Bild mit  $\frac{1}{k}$  erhalten werden.

Wir werden im Abschnitt 3.1 (Die Zentralprojektion, S. 46) zeigen, dass die Projektion nicht injektiv ist, denn alle Punkte einer Projektionsgeraden werden auf denselben Bildpunkt projiziert. Sie ist somit nicht bijektiv, d.h. aus einem zentralprojektiven Bild kann nicht ohne Weiteres das ursprüngliche Objekt im Raum eindeutig rekonstruiert werden. Damit die Projektion surjektiv wird, fügen wir dem euklidischen Raum die Fernpunkte und -geraden hinzu. Damit kann dem Fluchtpunkt ein Fernpunkt als Urbild zugeordnet werden.

Bei einer geometrischen Abbildung gibt es auch Punkte oder Geraden, welche auf sich selbst abgebildet werden. Diese werden *Fixpunkt* bzw. *Fixgeraden* genannt. Bei einer Punktspiegelung an einem Punkt  $P$  ist dieser auch ein Fixpunkt, während Geraden, die  $P$  enthalten, Fixgeraden sind. Wir werden später zeigen, dass bei einer Projektion alle Punkte, welche in der Bildebene liegen, Fixpunkte sind.

### 2.4.2 Eine Auswahl an Invarianten

Wie in der Einführung erwähnt, gibt es im metrischen Raum eine Vielzahl an Invarianten, welche charakteristisch für einige Abbildungen sind. Zuvor wurde zur Vereinfachung auch der Abstand mit  $\overline{AB}$  bezeichnet. Im Folgenden sei  $\overline{AB}$  wieder die Strecke zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  und  $d(A, B)$  der Abstand.

#### Definition 2.4.2

Es seien  $g$  und  $h$  Geraden sowie  $P, A, B, \dots$  Punkte. Eine Abbildung  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  heißt

- i) *punkttreu*, wenn gilt: Jeder Punkt wird auf einen Punkt abgebildet.
- ii) *geradentreu*, wenn gilt: Jede Gerade wird auf eine Gerade abgebildet.
- iii) *inzidenztreu*, wenn gilt:  $P \in g \Rightarrow \varphi(P) \in \varphi(g)$
- iv) *parallelentreu*, wenn gilt:  $g \parallel h \Rightarrow \varphi(g) \parallel \varphi(h)$
- v) *streckentreu*, wenn gilt: Jede Strecke wird auf eine Strecke abgebildet, z.B.  
 $\overline{AB} \mapsto \overline{A'B'}$

- vi) *längentreu*, wenn gilt: Jede Strecke wird auf eine Strecke derselben Länge abgebildet, d.h.  $d(A, B) = d(A', B')$
- vii) *winkeltreu*, wenn gilt: Alle Winkel werden auf Winkel derselben Größe abgebildet.
- viii) *streckenverhältnistreu*, wenn gilt: Das Streckenverhältnis zweier Strecken bleibt immer erhalten, d.h.  $d(A, B) : d(C, D) = d(A', B') : d(C', D')$
- ix) *teilverhältnistreu*, wenn gilt:  $TV(A, B, C) = TV(A', B', C')$  für alle kollinearen Punkte  $A, B, C$  bzw.  $A', B', C'$ .
- x) *doppelverhältnistreu*, wenn gilt:  $DV(A, B, C, D) = DV(A', B', C', D')$  für alle Kombinationen aus vier kollinearen Punkten.

Da wir nur Zuordnungen zwischen zwei Mengen von Punkten betrachten, ist *i*) immer erfüllt. Der zweite Punkt trifft bei vielen geometrischen Abbildungen zu, so auch bei Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen. Bei Projektionen existiert eine Ausnahme: enthält die abzubildende Gerade das Projektionszentrum, so ist das Bild der Geraden ein Punkt. Ein Würfel kann derart fotografiert werden, dass Kanten verschwinden und mit den Ecken zusammenfallen.

Ist eine Abbildung inzidentreu, so müssen zwei Bildgeraden einen Schnittpunkt besitzen, wenn sich ihre Urbilder schneiden. Die Schnittpunkte werden dabei aufeinander abgebildet. Aus der Inzidentreue folgt allerdings nicht die Paralleltreue. Sind zwei Geraden parallel, so ist ihr Schnittpunkt ein Fernpunkt. Der gemeinsame Punkt der Bildgeraden kann aber auch ein gewöhnlicher Punkt sein, wie es bspw. bei der Zentralprojektion der Fall ist.

Von allen nachfolgenden Punkte vi) - x) ist nur das Doppelverhältnis eine Invariante jeder Zentralprojektion. Die anderen Punkte werden von Sonderfällen der Projektion erfüllt. Bevor wir auf diese eingehen, wollen wir einige Abhängigkeiten zwischen den Invarianten besprechen.

### Satz 2.4.3

Sei  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  eine injektive Abbildung, welche punkt- und inzidentreu ist. Dann ist  $\varphi$  auch geradentreu.

*Beweis.*

Sei  $g$  eine Gerade mit den Punkten  $A$  und  $B$ ,  $A \neq B$ . Da  $\varphi$  injektiv ist, ist  $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ . Wegen (G1) (Axiome, S. 25) legen die Bildpunkte genau eine Gerade fest, welche wegen der Inzidenztreue die Bildgerade von  $g$  sein muss.

□

Mit der Eigenschaft *längentreu* erfüllt eine Abbildung weitere Invarianten, wie folgender Satz zeigen wird. Längentreue Abbildungen sind Kongruenzabbildungen wie Drehung, Spiegelung oder Verschiebung.

**Satz 2.4.4**

Sei  $\alpha$  eine Abbildung. Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ ist längentreu} &\stackrel{(1)}{\implies} \alpha \text{ ist streckenverhältnistreu} \\ &\stackrel{(2)}{\implies} \alpha \text{ ist teilverhältnistreu} \\ &\stackrel{(3)}{\implies} \alpha \text{ ist doppelverhältnistreu} \end{aligned}$$

*Beweis.*

Zu (1):

Wegen der Längentreue ist  $d(A, B) = d(A', B')$  und  $d(C, D) = d(C', D')$ . Also gilt auch

$$d(A, B) : d(C, D) = d(A', B') : d(C', D')$$

Zu (2):

Nach Def. 2.3.1 ist  $TV(A, B, C) = d(A, C) : d(B, C)$  mit den Punkten  $A, B, C$ , welche auf einer Geraden liegen. Wegen der Streckenverhältnistreu gilt dann auch

$$TV(A, B, C) = d(A, C) : d(B, C) = d(A', C') : d(B', C') = TV(A', B', C')$$

Zu (3):

Nach Def. 2.3.2 und der Teilverhältnistreu gilt für vier beliebige Punkte einer Geraden

$$\begin{aligned} DV(A, B, C, D) &= TV(A, B, C) : TV(A, B, D) \\ &= TV(A', B', C') : TV(A', B', D') \\ &= DV(A', B', C', D') \end{aligned}$$

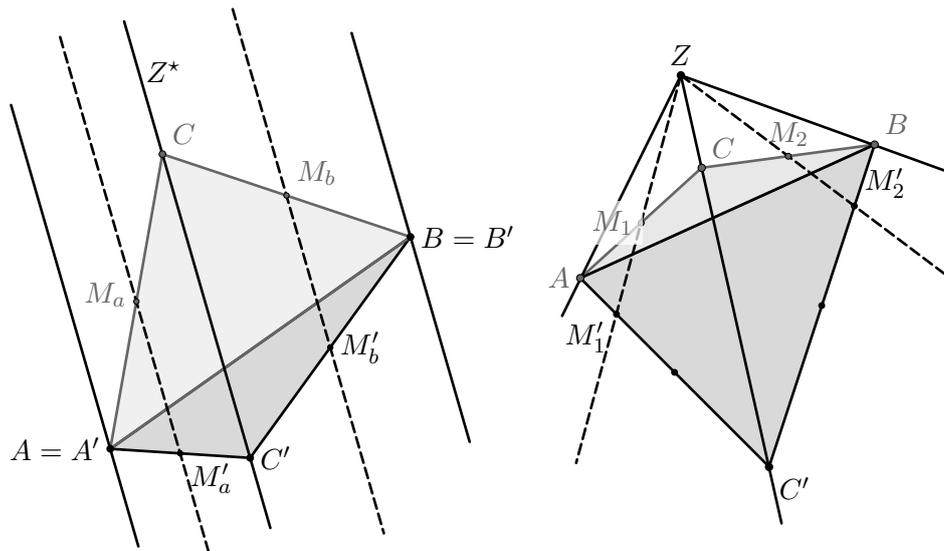


Abb. 2.4.1 Gegenbeispiele zu Satz 2.4.4

□

Die Umkehrungen der Implikationen (1) bis (3) gilt nicht. So liegen in der Abb. 2.4.1 im ersten Beispiel Punkt und Bildpunkt auf parallelen Geraden. Das Bild  $M'_1$  des Mittelpunktes  $M_1$  der Strecke  $\overline{AC}$  muss wegen der Inzidenztreue auf der Strecke  $\overline{A'C'}$  liegen. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Bildstrecke. Gleiches gilt auch für den Punkt  $M_2$  der Strecke  $\overline{BC}$ . Dies sind somit zwei Beispiele für den Erhalt des Teilverhältnisses. Dass für alle Kombinationen von drei kollinearen Punkten und ihren Bildpunkten das Teilverhältnis erhalten bleibt, kann mithilfe des Strahlensatzes, welcher erst im Kap. 2.5 besprochen wird, bewiesen werden. Es ist aber erkennbar, dass die Streckenverhältnistreu nicht erfüllt ist, denn

$$d(A, B) : d(A, C) \neq d(A', B') : d(A', C'),$$

da  $\overline{AC}$  auf eine kürzere Strecke, dagegen  $\overline{AB}$  auf sich selbst abgebildet wird.

Auf der rechten Seite der Abbildung 2.4.1 sind die Geraden kopunktal statt parallel bzw. der gemeinsame Punkt ist jetzt kein Fernpunkt mehr. Die Zuordnung ist nicht mehr teilverhältnistreu, denn der Mittelpunkt  $M_1$  der Strecke  $\overline{AC}$  wird nicht auf den markierten Mittelpunkt der Strecke  $\overline{A'C'}$  abgebildet. Dasselbe gilt auch für  $M_2$ . Die rechte Projektion in der Ebene ist allerdings doppelverhältnistreu. Der Beweis wird im Abschnitt 3.1.1 (Die Invarianten der Zentralprojektion, S. 50) geführt.

## 2.5 Der Strahlensatz

Da die Strahlensätze mehrfach für Beweise bzgl. der Zentralprojektion verwendet werden, wird hier kurz darauf eingegangen. Wie die Übersicht in Abb. 6.3.1 (S. 237) zeigt, ist die zentrische Streckung und die mit ihr verbundenen Strahlensätze Teil des Unterrichts der 9. Klasse an Gymnasien und Gesamtschulen in NRW. Zur Vereinfachung, wenn nicht anders angegeben, ist mit  $\overline{AB}$  die Streckenlänge gemeint.

### Definition 2.5.1

Die *zentrische Streckung* ist eine Abbildung  $\vartheta_{Z,k} : E \rightarrow \Pi$  in einer Ebene oder zwischen zwei Ebenen im Raum mit Streckzentrum  $Z$  und Streckfaktor  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ . Dabei gilt:

i)  $Z$ , Punkt  $P$  und Bildpunkt  $P'$  sind kollinear.

ii) Bildpunkt  $P'$  liegt  $k$ -mal soweit von  $Z$  entfernt, wie  $P$ , d.h.  $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$

(Vgl. [3, S. 52], [1, S. 226]).

Die Länge der Strecke  $\overline{ZP}$  ändert sich demnach um den Faktor  $k$ , welcher im folgenden auf die positiven reellen Zahlen beschränkt sei.

Die Abb. 2.5.1 zeigt ein Beispiel einer zentrischen Streckung mit Streckzentrum  $Z$  und Streckfaktor  $k = 1,5$ .

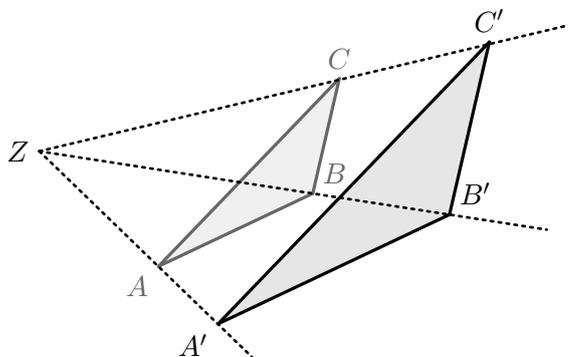


Abb. 2.5.1 Zentrische Streckung an  $Z$  mit Faktor  $k = 1,5$

Aufgrund der obigen Definition gilt:

$$\overline{ZA} = 1,5 \cdot \overline{ZA'}$$

$$\overline{ZB} = 1,5 \cdot \overline{ZB'} \Rightarrow \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZC'}} = 1,5$$

$$\overline{ZC} = 1,5 \cdot \overline{ZC'}$$

Die zentrische Streckung ist u.a. winkel-, parallelen- und streckenverhältnistreu, was dazu führt, dass die vergrößerten oder verkleinerten Figuren nicht verzerrt wirken. Das Original und ihr Bild sind *ähnlich* zueinander. Diese Ähnlichkeitsabbildung wird in der Schule als Vorstufe der Strahlensätze behandelt, welche im *Lambacher Schweizer* der neunten Klasse wie folgt formuliert werden [3, S. 58]:

### Satz 2.5.2: Strahlensätze

Werden von einem Punkt  $Z$  ausgehende Strahlen von zwei Parallelen  $g$  und  $h$  geschnitten, dann gilt:

#### 1. Strahlensatz:

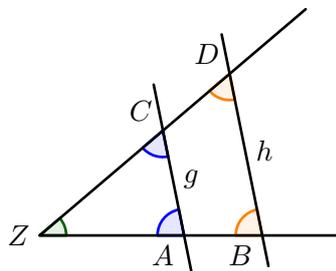
Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl, d.h.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}$$

#### 2. Strahlensatz:

Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich zueinander wie die von  $Z$  aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl, d.h.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$$



*Beweis.*

Aufgrund der parallelen Geraden sind die farbig hervorgehobenen Stufenwinkel gleich groß. Somit stimmen die Dreiecke  $\triangle ZAC$  und  $\triangle ZBD$  in ihren Winkeln überein und sind folglich zueinander ähnlich. Demnach kann  $\triangle ZAC$  auf  $\triangle ZBD$  durch eine zentrische Streckung an  $Z$  abgebildet werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\overline{ZB} &= k \cdot \overline{ZA} & \overline{ZD} &= k \cdot \overline{ZC} \\ \Rightarrow \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} &= k = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{ZA} + \overline{AB}}{\overline{ZA}} &= \frac{\overline{ZB} + \overline{BD}}{\overline{ZB}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}\end{aligned}$$

Der zweite Strahlensatz folgt direkt ohne weitere Umformungen aus der Ähnlichkeit der Dreiecke.  $\square$

Während der erste Strahlensatz umkehrbar ist, gilt dies für den zweiten nicht, sofern nur zwei der drei Verhältnisse gegeben sind. Dann muss es keine entsprechende zentrische Streckung geben bzw. die Geraden  $AB$  und  $A'B'$  sind nicht zwingend parallel, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

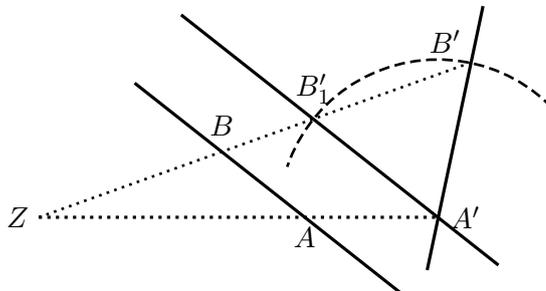


Abb. 2.5.2 Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes ist nicht immer gültig.

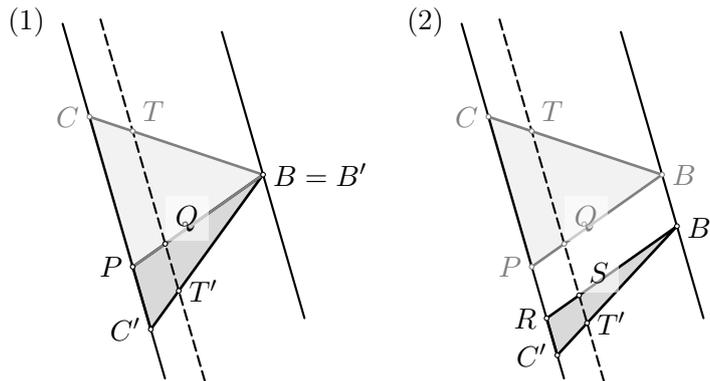
Es ist  $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = 1,5 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ . Doch ist erkennbar, dass es keine zentrische Streckung an  $Z$  gibt, welche  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  abbildet, obwohl das Streckenverhältnis gleich ist, denn der Kreis um  $A'$  mit dem Radius  $1,5 \cdot \overline{AB}$  schneidet die Gerade  $ZB$  in zwei Punkten. Nur für den zweiten Schnittpunkt ist auch  $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} = 1,5$ . Erst dann gilt  $AB \parallel A'B'$ .

Wir hatten im vorherigen Abschnitt in Abb. 2.4.1 eine Zuordnung gezeigt, welche in der Ebene Punkte durch parallele Strahlen einander zuordnet. Dabei war es offensichtlich, dass diese Zuordnung nicht streckenverhältnistreu ist. Sie ist aber teilver-

haltnistreu. So werden Mittelpunkte der Strecke und Bildstrecke aufeinander abgebildet. Wir wollen nun mithilfe der Strahlensätze zeigen, dass diese Eigenschaft auch für jedes andere Verhältnis vorhanden ist.

**Satz 2.5.3**

Bei der parallelen Projektion innerhalb der Ebene (vgl. Abb. 2.4.1, S. 39) bleibt das Teilverhältnis invariant. Wir betrachten hier zu zwei verschiedene Fälle:



*Beweis.*

Zu (1) :

Aufgrund der parallelen Strahlen können wir den ersten Strahlensatz auf das Dreieck  $\triangle PBC$  und  $\triangle PB'C'$  anwenden. Beide Dreiecke haben die Seite  $\overline{PB}$  gemeinsam, sodass wir folgende Gleichung aufstellen können:

$$TV(C, B, T) = \frac{\overline{CT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{C'T'}}{\overline{T'B'}} = TV(C', B', T').$$

Zu (2):

Der Endpunkt der Strecke ist nun kein Fixpunkt mehr. Die Beweisführung funktioniert dennoch analog zum ersten Fall, denn die Hilfsstrecke  $\overline{PB}$  und  $\overline{RB'}$  sind parallel, sodass die Teilstrecken  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RS}$  gleich lang sind, wie auch  $\overline{QB}$  und  $\overline{SB'}$ . Dann gilt:

$$TV(C, B, T) = \frac{\overline{CT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{C'T'}}{\overline{T'B'}} = TV(C', B', T').$$

□

Mit dem Strahlensatz und den vorherigen Abschnitten über geometrische Abbildungen und das Doppel- und Teilverhältnis haben wir nun alle Grundlagen vorgestellt, die für die Projektion nötig sind. Wir wollen nun im folgenden Kapitel diese Abbil-

zung definieren und einige Eigenschaften nennen, welche sowohl von der Zentralprojektion wie auch von ihrem Sonderfall, der Parallelprojektion, erfüllt werden.

## Kapitel 3

# Die Projektion

Hinter der Projektion verbirgt sich ein Verfahren, welches es ermöglicht, dreidimensionale Objekte eines Raumes auf eine zweidimensionale Ebene abzubilden. Dies ist vergleichbar mit der Fotografie oder auch dem natürlichen Sehprozess. In der Kunst gab es nicht zuletzt seit der Renaissance das Bestreben, auf der Bildfläche einen räumlichen Eindruck zu erschaffen, d.h. den natürlichen Sehprozess derart nachzuahmen, dass die Illusion eines Raumes auf der Bildfläche entsteht. Mathematisch betrachtet verbirgt sich hinter dieser Abbildung die Zentralprojektion. Aus dieser lassen sich einige Konstruktionen ableiten, welche auch im Kunstunterricht für das perspektivische Zeichnen verwendet werden. Ein Sonderfall der Zentralprojektion ist die Parallelprojektion. Ihre Bilder sind weniger realistisch. Dagegen ist sie parallelen-treu. Unter einer bestimmten Lage von Objekt- und Bildebene belieben Winkel und Strecken sogar erhalten. Die Konstruktionsmethoden, welche sich von der Parallelprojektion ableiten lassen, werden daher primär beim technischen Zeichnen verwendet. Dieses Kapitel stellt nach der Definition der Zentralprojektion ihre Invarianten vor. Danach wird die Parallelprojektion als Sonderfall vorgestellt. Der letzte Teil zeigt auf, wie sich die Invarianten bei der Abbildung ebener Figuren ändern, wenn neben der Projektion auch die räumliche Lage zwischen Objekt- und Bildebene verändert wird. Hierbei können vier verschiedene Abbildungen wiedergefunden werden: die Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildung, welche auch im Mathematikunterricht behandelt werden, sowie die perspektive Affinität und Perspektivität.

### 3.1 Die Zentralprojektion

Wir definieren die Zentralprojektion wie folgt:

#### Definition 3.1.1

Die *Zentralprojektion* ist eine punktweise, inzidenztreue Abbildung des Raumes auf eine Ebene, der *Bildebene*, welche im Folgenden mit  $\Pi$  bezeichnet wird. Ein Punkt  $P$  wird dabei durch folgende Konstruktion eindeutig einem Punkt  $P'$  in der Bildebene zugeordnet [38, S. 3]:

- i) Es wird ein fester Punkt  $Z$  im Raum außerhalb der Bildebene festgelegt. Dieser wird *Projektionszentrum* genannt.
- ii) Durch einen von  $Z$  verschiedenen Punkt  $P$  wird eine Gerade gelegt, welche ebenfalls durch  $Z$  verläuft. Dies ist die *Projektionsgerade*  $g_P$  von  $P$ .
- iii) Der Schnittpunkt der Projektionsgerade mit der Bildebene  $\Pi$  ergibt den Bildpunkt  $P'$ .

Die Zentralprojektion wird mit  $\varphi_z$  gekennzeichnet.

Die Abb. 3.1.1 zeigt ein Beispiel. Hier werden zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  sowie die Verbindungsgerade  $PQ$  auf die Bildebene  $\Pi$  projiziert. Nach Definition 2.4.1 der geometrischen Abbildung (S. 35) muss die Zuordnung zwei Bedingungen erfüllen: jeder Punkt aus dem Definitionsbereich besitzt ein Bild und dieses ist eindeutig. Wir prüfen daher nun verschiedene Fälle und beginnen mit der Eindeutigkeit des Bildpunktes.

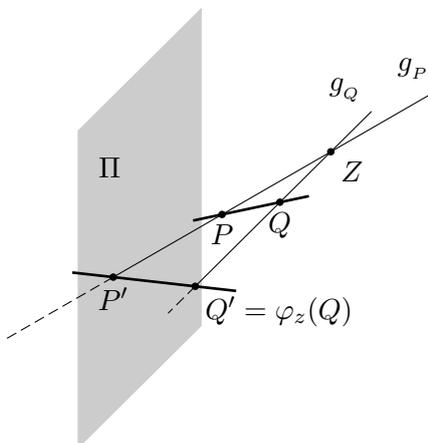


Abb. 3.1.1 Die Zentralprojektion mit Zentrum  $Z$

Der Schnittpunkt der Projektionsgeraden mit der Bildebene ist eindeutig, sofern die Gerade nicht in jener liegt. Dieser Fall ist ausgeschlossen, da nach Definition das Projektionszentrum außerhalb der Bildebene liegen muss. Im anderen Fall kann die Projektionsgerade parallel zur Bildebene sein. Dann ist der Schnittpunkt ein Fernpunkt. Da wir diese Fernelemente in unserer Betrachtung des euklidischen Raumes

berücksichtigen, existiert auch in diesem Fall ein Bildpunkt. Er lässt sich allerdings nicht zeichnen. Dies betrifft alle Punkte, welche in der parallelen Ebene zur Bildebene durch  $Z$  liegen. Diese Ebene wird daher auch als *Verschwindungsebene* bezeichnet. Insgesamt ist die Zuordnung eindeutig.

Wir kommen nun zur Existenz. Nach Definition muss jeder Punkt im Raum ein Bildpunkt besitzen. Das Projektionszentrum  $Z$  kann daher nicht abgebildet werden, da keine Projektionsgerade existiert. Wir müssen daher diesen Punkt aus dem Definitionsbereich ausschließen. Punkte der Bildebene werden auf sich selbst abgebildet. Die Projektionsgeraden von Fernpunkten verlaufen durch  $Z$  und sind parallel zu der Richtung ausgerichtet, die der Fernpunkt repräsentiert. Fernpunkte lassen sich somit auch auf die Bildebene projizieren.

Die Zentralprojektion weist folgende Eigenschaften auf:

- i) Sind die Punkte  $P, Q, Z$  kollinear, so besitzen  $P$  und  $Q$  denselben Projektionsstrahl und werden demnach auf denselben Bildpunkt projiziert. Die Projektion ist daher nicht injektiv und somit auch nicht umkehrbar.
- ii) Die Projektion ist surjektiv.
- iii) Liegen  $P$  und  $Q$  auf einer Geraden  $g$ , welche nicht das Projektionszentrum enthält, so werden die Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$  auf die Bildgerade  $g'$  projiziert. Die Abbildung ist in diesem Fall geradentreu.

In dem folgendem Foto eines Flures werden einige Eigenschaften der Zentralprojektion exemplarisch dargestellt, denn ein Fotoapparat oder das menschliche Auge bilden die Wirklichkeit im Sinne der Zentralprojektion ab. D.h. ein Foto ist das Resultat einer zentralprojektiven Abbildung.



Abb. 3.1.2 Fotografien von langen Fluren eignen sich besonders gut, um Eigenschaften der Zentralprojektion zu untersuchen.

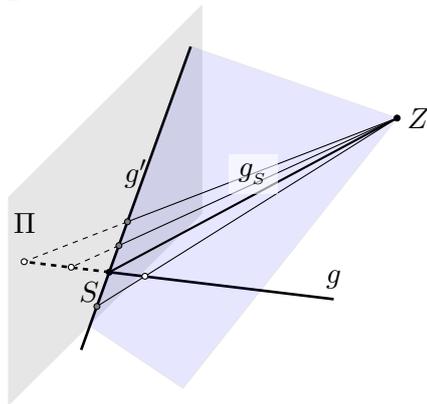
- 1) Die Fliesen des Fußbodens, die Säulen sowie die horizontalen Kanten der Fenster verlaufen in Wirklichkeit parallel. Auf dem Foto werden parallele Geraden, bis auf die Ausnahme in 2) und 3), auf sich schneidenden Geraden abgebildet. Sie schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Fluchtpunkt.
- 2) Geraden, welche parallel zur Bildebene verlaufen, werden auf ebenfalls parallele Geraden abgebildet. Die Säulen haben in Wirklichkeit denselben Abstand zueinander. In der Abbildung verkürzt sich dieser in Richtung des Fluchtpunktes.
- 3) Vertikale Geraden, welche parallel zur Bildebene verlaufen, werden auf vertikale Geraden abgebildet. Da Decke und Boden denselben Abstand haben, sind die Säulen in Wirklichkeit gleich hoch. In der Abbildung verkleinert sich dieser in Richtung des Fluchtpunktes.

Die Punkte 2) und 3) ließen sich noch zusammenfassen: Geraden, welche in einer Ebene parallel zur Bildebene enthalten sind, werden auf parallele Geraden abgebildet. Selbiges gilt somit auch für Ebenen. Nach dem anschaulichen Beispiel kommen wir nun zu einigen Eigenschaften bzw. Invarianten der Zentralprojektion.

**Satz 3.1.2**

Sei  $\varphi_z$  eine Zentralprojektion mit Zentrum  $Z$  auf die Ebene  $\Pi$  und  $g \notin \Pi$  eine Gerade, wobei  $Z \notin g$ . Dann schneiden sich Gerade und Bildgerade in dem Fixpunkt  $S$ .

*Beweis.*



Der Schnittpunkt  $S$  existiert, da  $g$  und  $\varphi_z(g)$  in einer Ebene liegen, welche von  $g$  und  $Z$  aufgespannt wird. Diese Projektionsebene ist in der nebenstehenden Abbildung blau markiert. Der Schnitt dieser Ebene mit der Bildebene  $\Pi$  entspricht der Bildgeraden  $\varphi_z(g)$ .

$$g \cap \varphi_z(g) = \{S\} \Rightarrow S \in \varphi_z(g) \Rightarrow S \in \Pi$$

Nach Definition der Projektionsstrahlen gilt auch:  $S \in g_s$ . Also ist  $\varphi_z(S) = S$ . □

Falls  $g$  parallel zur Bildebene liegt, so schneiden sich  $g$  und  $g'$  in einem Fernpunkt  $S^*$ . Da dieser ein Fixpunkt ist, weisen  $g$  und  $g'$  dieselbe Richtung auf, d.h.  $g \parallel g'$ .

Wie bereits erwähnt, lässt sich beobachten, dass parallele Geraden in der Regel auf sich schneidende Geraden projiziert werden, d.h.  $g \parallel h$ , aber  $\varphi_z(g) \not\parallel \varphi_z(h)$ . Die Zentralprojektion ist somit nicht parallelentreu. Der Schnittpunkt der Bilder der Geraden des Parallelenbüschels wird Fluchtpunkt genannt und ist dadurch hervorgehoben, dass dieser das Bild des Fernpunktes ist, welcher die Richtung der Geraden  $g$  und  $h$  symbolisiert [33, S. 227]. Wegen der Inzidenztreue gilt nun Folgendes:

**Satz 3.1.3**

Der Fluchtpunkt  $F$  ist das Bild eines Fernpunktes  $F^*$  unter einer Zentralprojektion  $\varphi_z$ .

*Beweis.*

Seien  $g$  und  $h$  zwei parallele Geraden, welche sich in  $F^*$  schneiden. Der Schnittpunkt der Bildgeraden sei  $F$ . Dann gilt:

$$g \parallel h \Rightarrow F^* \in g \wedge F^* \in h \Rightarrow \varphi_z(F^*) \in \varphi_z(g) \wedge \varphi_z(F^*) \in \varphi_z(h) \Rightarrow \varphi_z(F^*) = F$$

□

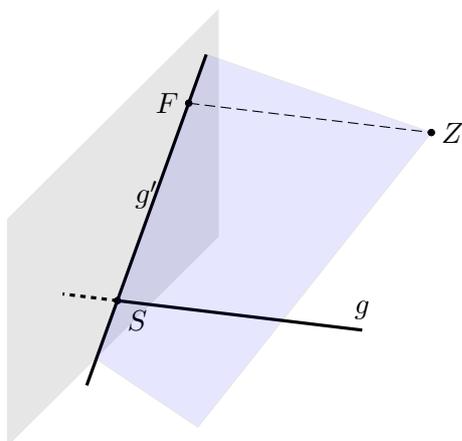
Konstruktiv lässt sich der Fluchtpunkt eines Parallelbüschels mit Fernpunkt  $G^*$  und einer Geraden  $g$  wie folgt bestimmen:

Um das Bild des Fernpunktes zu erhalten, muss nach der Konstruktionsvorschrift  $G^*$  mit  $Z$  verbunden werden. Wir müssen also die Parallele zu  $g$  durch  $Z$  zeichnen, um die Projektionsgerade von  $G^*$  zu erhalten. Ihr Schnitt mit der Bildebene entspricht dem Fluchtpunkt  $F$  mit  $\varphi_z(G^*) = F$ . Weiterhin ist  $G^* \in g$ , sodass aufgrund der Inzidenztreue auch  $F \in g'$  gelten muss.

Der folgende Abschnitt stellt die Invarianten der Projektion vor. Das Projektionszentrum kann sowohl ein gewöhnlicher Punkt als auch ein Fernpunkt sein. Im ersten Fall handelt es sich um die *Zentralprojektion*, im zweiten Fall um die *Parallelprojektion*, da alle Projektionsstrahlen einen gemeinsamen Fernpunkt besitzen und demnach paarweise parallel sind.

### 3.1.1 Die Invarianten der Zentralprojektion

Die Zentralprojektion enthält wenige Invarianten, u.a. die Doppelverhältnistreue. Dazu folgender Beweis [38, S. 6].



Wir wollen zeigen, dass

$$DV(A, B, C, D) = DV(A', B', C', D')$$

gilt. Da die Punkte nach Definition des Doppelverhältnisses kollinear sein müssen, seien diese Teil einer Geraden  $g$ , welche über das Projektionszentrum  $Z$  auf die Bildebene projiziert wird. Die Geraden  $g$  und  $\varphi_z(g) = g'$  spannen die Projektionsebene auf und ihr Schnitt mit der Bildebene ist das Bild von  $g$ , wie die nebenstehende Abbildung zeigt.

$S$  ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Bildgeraden und  $F$  der Fluchtpunkt von  $g$ . Der Beweis zur Doppelverhältnistreue wird in der blauen Projektionsebene geführt, welche Abb. 3.1.3 mit den vier Punkten  $A, B, C, D$  auf  $g$  zeigt. Wir werden nun unter Verwendung der Strahlensätze zeigen, dass das Doppelverhältnis dieser vier beliebigen Punkte auf  $g$  mit dem der Bildpunkte auf  $g'$  übereinstimmt.

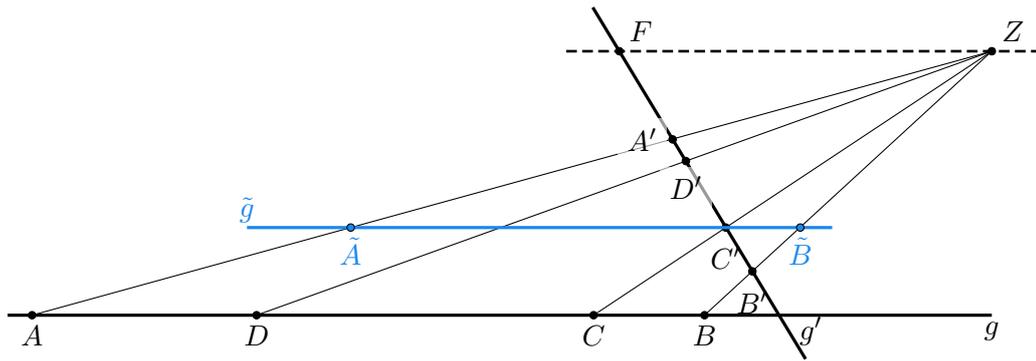


Abb. 3.1.3 Beweisfigur zur Doppelverhältnistreue der Zentralprojektion

*Beweis.*

Nach vorheriger Erklärung gilt:

$$ZF \parallel g$$

Die Bildpunkte  $A'$  bis  $D'$  ergeben sich durch den Schnitt der Verbindungsgeraden der Urbildpunkte und  $Z$  mit  $g'$ . Wir ergänzen zusätzlich die Gerade  $\tilde{g}$  mit der Bedingung:

$$C' \in \tilde{g} \text{ und } \tilde{g} \parallel g.$$

In Abb. 3.1.3 betrachteten wir nun mehrere Strahlensatzfiguren, welche die drei parallelen Geraden  $g$ ,  $g'$  und  $\tilde{g}$  enthalten. Zur besseren Unterscheidung werden jeweils das Streckzentrum und die beiden äußeren Strahlen genannt.  $\overline{AB}$  ist dabei der Abstand von  $A$  und  $B$ .

(1)  $Z$  mit  $ZA$  und  $ZB$ :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}$$

(2)  $A'$  mit  $Z\tilde{A}$  und  $FC'$ :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'F}} = \frac{\overline{\tilde{A}C'}}{\overline{ZF}} \Rightarrow \overline{ZF} = \frac{\overline{\tilde{A}C'}}{\overline{A'C'}} \cdot \overline{A'F}$$

(3)  $B'$  mit  $B'F$  und  $B'Z$ :

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'F}} = \frac{\overline{\tilde{B}C'}}{\overline{ZF}} \Rightarrow \overline{ZF} = \frac{\overline{\tilde{B}C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \overline{B'F}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{\overline{\tilde{A}C'}}{\overline{A'C'}} \cdot \overline{A'F} = \frac{\overline{\tilde{B}C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \overline{B'F} \Rightarrow \frac{\overline{\tilde{A}C'}}{\overline{\tilde{B}C'}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'F}}{\overline{A'F}}$$

Mit (1) erhalten wir:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'F}}{\overline{A'F}}$$

Analog werden die Schritte (1) bis (3) mit  $D$  durchgeführt, indem wir eine weitere parallele Hilfsgerade durch  $D'$  legen. Wir erhalten:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}} \cdot \frac{\overline{B'F}}{\overline{A'F}}$$

Mit beiden Gleichungen lässt sich nun folgern, dass das Doppelverhältnis erhalten bleibt:

$$DV(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}} = DV(A', B', C', D')$$

□

Damit haben wir gezeigt, dass die Zentralprojektion doppelverhältnistreu ist. Sie ist allerdings nicht teilverhältnistreu. Ein gutes Gegenbeispiel ist dabei die Projektion des Mittelpunktes einer Quaderfläche wie in Abbildung 4.2.2, S. 95. Nach Satz 2.4.4, S. 38, kann die Projektion somit auch nicht streckenverhältnis- oder längentreu sein.

### 3.1.2 Die Invarianten der Parallelprojektion

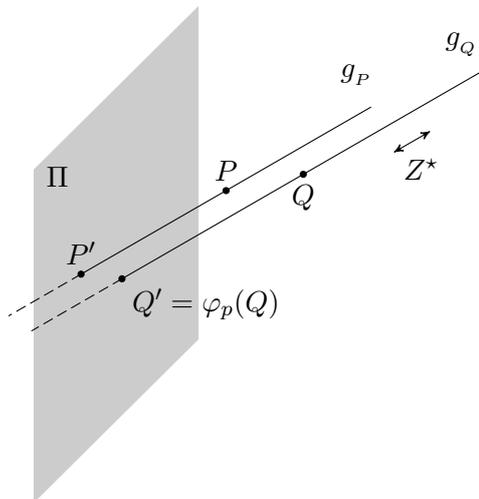


Abb. 3.1.4 Die Parallelprojektion ist ein Sonderfall, wenn das Projektionszentrum  $Z^*$  ein Fernpunkt ist.

Wir kommen zu einem Sonderfall der Zentralprojektion. Ist das Projektionszentrum ein Fernpunkt, so sind die Projektionsstrahlen nicht mehr kopunktal, sondern parallel. Dies bewirkt u.a., dass einige Invarianten hinzukommen, welche in den folgenden Sätzen genannt und bewiesen werden. Um die Parallelprojektion von der Zentralprojektion zu unterscheiden, wird jene mit  $\varphi_p$  gekennzeichnet.

#### Satz 3.1.4

Sind die Geraden  $g$  und  $h$  parallel, aber selbst keine Projektionsgeraden, dann sind auch ihre Bilder  $\varphi_p(g)$  und  $\varphi_p(h)$  parallel zueinander.

Die Parallelprojektion ist somit *parallelerentreu*.

*Beweis.*

Hierzu können verschiedene Betrachtungsweisen herangezogen werden. Die Projektionsebenen sind jeweils definiert durch die Ursprungsebene und dem Projektionszentrum. Da dieses ein Fernpunkt ist, sind die Projektionsebenen parallel. Dann sind auch ihre Schnittgeraden mit der Bildebene parallel zueinander. Wäre dies nicht der Fall, so würden sich die Projektionsebenen schneiden.

Die alternative Argumentation beruht darauf, dass sich die Bilder paralleler Geraden im Fluchtpunkt schneiden. Um diesen zu konstruieren, wurde bei der Zentralprojektion eine parallele Gerade durch das Zentrum gezeichnet und ihr Schnitt mit der Bildebene ergab den gesuchten Schnittpunkt der Bildgeraden. Es wurde also der

Fernpunkt der parallelen Geraden mit dem Projektionszentrum verbunden. Übertragen auf die Parallelprojektion müssen wir die Verbindungsgerade von  $S^*$  und  $Z^*$  bilden. Diese ist eine Ferngerade. Da alle Punkte einer Ferngeraden Fernpunkte sind, muss auch der Schnittpunkt mit der Bildebene ein Fernpunkt sein. Die Bildgeraden sind demnach parallel.

□

Abb. 3.1.5 zeigt zwei Beispiele für die Projektion paralleler Geraden mit den entsprechenden Projektionsebenen. Bei der Zentralprojektion haben die Projektionsebenen  $Z$  als gemeinsamen Punkt, d.h. sie müssen sich schneiden. Wird eine dritte Gerade parallel zu den anderen hinzugefügt, so ergeben die Projektionsebenen ein Ebenenbüschel mit der Verbindungsgerade  $ZF$  als Trägergerade (d.h. alle Ebenen des Büschels schneiden sich in der Trägergeraden).

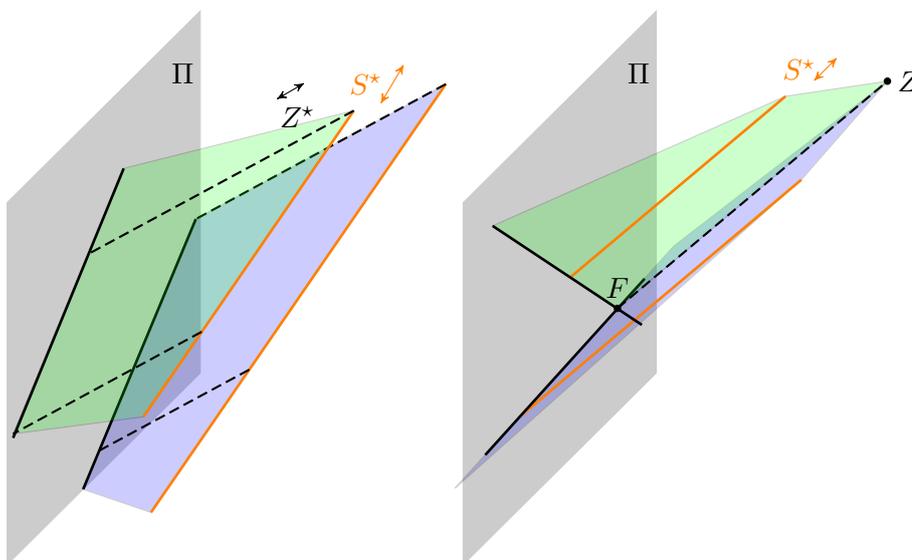


Abb. 3.1.5 Die Parallelprojektion (links) ist parallelentreu, die Zentralprojektion (rechts) dagegen nicht.

**Satz 3.1.5**

Gegeben seien drei Punkte  $A, B, C$  einer nichtprojizierenden Geraden. Dann ist das Teilverhältnis  $TV(A, B, C)$  gleich dem Teilverhältnis  $TV(A', B', C')$  ihrer Bilder [31, S. 7] [38, S. 7].

Die Parallelprojektion ist somit *teilverhältnistreue*.

*Beweis.*

Da die Projektionsstrahlen parallel sind, lässt sich der erste Strahlensatz anwenden. Daraus folgt direkt die Teilverhältnistreue.

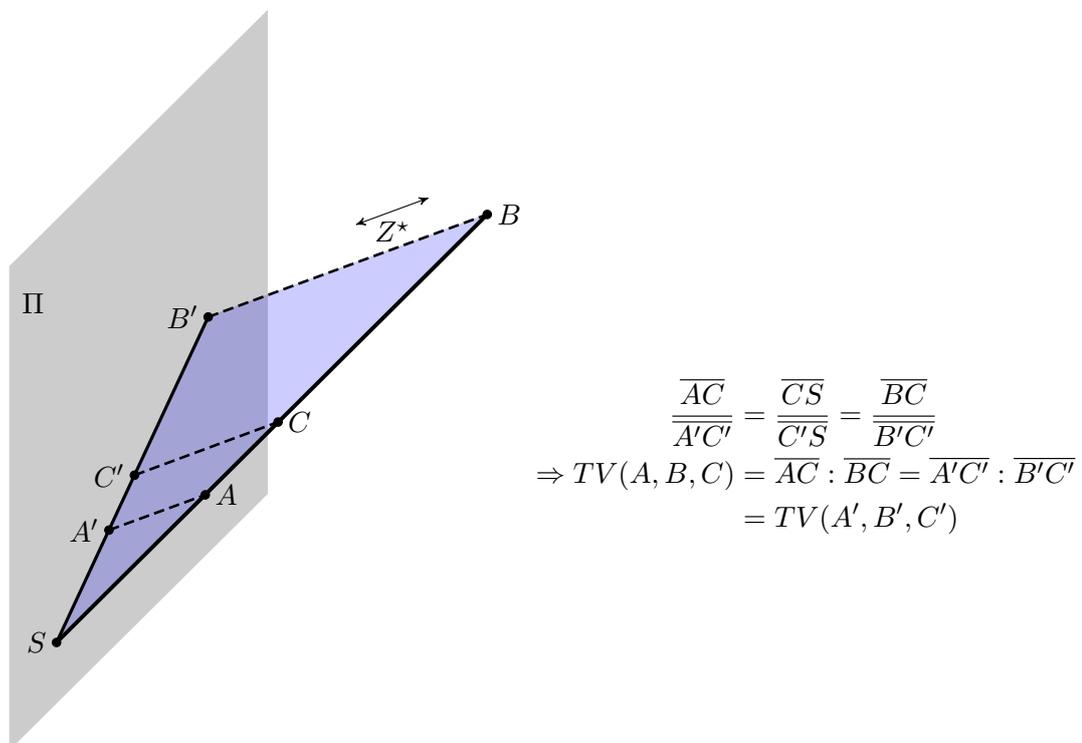


Abb. 3.1.6 Beweisfigur zur Teilverhältnistreue der Parallelprojektion

□

Die Parallelprojektion ist nach dem Satz parallelen- und teilverhältnistreue und folglich nach Satz 2.4.4, S. 38, ebenso doppelverhältnistreue. Aufgrund der Teilverhältnistreue werden insbesondere Mittelpunkte auf Mittelpunkte abgebildet (vgl. Abb. 4.2.2, S. 95).

### 3.2 Vier verschiedene Arten einer Projektion

Wir haben im vorherigen Abschnitt gezeigt, dass die Parallelprojektion zusätzliche Invarianten gegenüber der Zentralprojektion aufweist. Wird zusätzlich die Projektion auf eine Ebene, welche nicht das Projektionszentrum enthält, beschränkt, so wird die Abbildung bijektiv. Neben der Punkt- und Inzidenztreue sind weitere Invarianten zu finden [12] [38, S. 10] [31, S. 3 - 4], wie die folgende Abb. 3.2.1 zeigt.

Objektebene nicht parallel zur Bildebene	Zentralprojektion	doppelverhältnistreue ⇒ Perspektivität
	Parallelprojektion	paralleltreue teilverhältnistreue ⇒ perspektive Affinität
Objektebene parallel zur Bildebene	Zentralprojektion	streckenverhältnistreue winkeltreu ⇒ Ähnlichkeitsabbildung
	Parallelprojektion	längentreue ⇒ Kongruenzabbildung

Abb. 3.2.1 Die Invarianten verschiedener Fälle der Projektion

Die Zentralprojektion mit einer nicht parallelen Objektebene hat von den in der Abbildung genannten Invarianten nur das Doppelverhältnis. Solche Abbildungen werden *Perspektivität* genannt. Sind die Projektionsstrahlen parallel zueinander, so kommt zu der Doppelverhältnistreue auch Parallelen- und Teilverhältnistreue hinzu. Die Abbildung gehört dann zur Gruppe der perspektiven Affinitäten. Weitere Invarianten kommen hinzu, wenn die Objektebene parallel zur Bildebene ausgerichtet wird.

In den nachfolgenden Abbildungen 3.2.2 bis 3.2.5 sind Beispiele für die vier genannten Fälle gegeben. Dreieck bzw. Rechteck liegen dabei in der entsprechenden Objektebene.

Im ersten Beispiel ist die ebene Figur nicht parallel zur Bildebene ausgerichtet und das Projektionszentrum ein gewöhnlicher Punkt. Hier bleibt das Doppelverhältnis die einzige vorgestellte Invariante. Am Rechteck ist deutlich erkennbar, dass die rechten Winkel im Bild nicht erhalten bleiben. Auch die parallelen Geraden  $AD$  und  $BC$  werden auf sich schneidende Geraden abgebildet, auch wenn die Bildstrecken verlängert werden müssen, um den Schnittpunkt zu erkennen. Es gibt allerdings auch Ausnahmen, denn die parallelen Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  werden tatsächlich auf ein paralleles Geradenpaar projiziert. Dies liegt daran, dass diese Strecken parallel zur Bildebene ausgerichtet sind. Wir kommen daher zum nächsten Fall, indem die ebenen Figuren parallel zur Bildebene zentralprojektiv abgebildet werden.

Es entsteht eine Pyramide mit dem Projektionszentrum  $Z$  als Spitze und der Figur als Grundebene. Aufgrund der parallelen Ausrichtung der Ebenen bleiben die Winkel erhalten und über den Strahlensatz lässt sich die Streckenverhältnistreue begründen. Je nachdem, ob die Figur vor oder hinter der Bildebene ist, entspricht die Projektion einer Vergrößerung oder Verkleinerung. Es handelt sich daher um eine zentrische Streckung mit Zentrum  $Z$ .

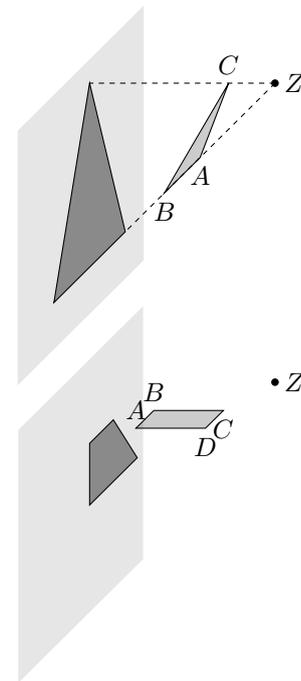


Abb. 3.2.2 Zentralprojektion mit nicht paralleler Objektebene

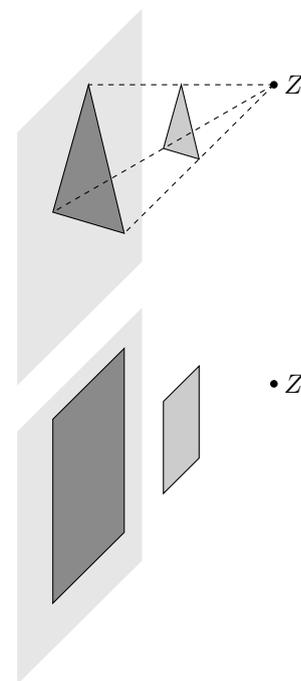


Abb. 3.2.3 Zentralprojektion mit paralleler Objektebene

In den letzten beiden Abbildungen ist das Projektionszentrum ein Fernpunkt, d.h. wir betrachten eine Parallelprojektion mit Richtung  $Z^*$ . Das Rechteck senkrecht zur Bildebene wird dabei auf ein Parallelogramm abgebildet, d.h. die Projektion ist u.a. paralleltreu.

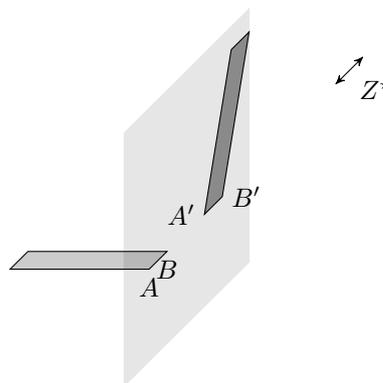


Abb. 3.2.4 Parallelprojektion mit nicht paralleler Objektebene

Im letzten Beispiel sind Dreieck und Rechteck parallel zur Bildebene ausgerichtet. Die Abbildung wird nun auch längentreu, sodass der Körper statt einer Pyramide ein Prisma bildet. Die Projektion wird dabei zu einer Verschiebung entlang der Projektionsrichtung [31, S. 8].

Diese Beispiele sollen zeigen, dass die Projektion sich mit weiteren Abbildungen, welche Teil des Lehrplans sind (vgl. Abb. 6.3.1, S. 237), vernetzen lassen, sodass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, diese selbst zu entdecken. Experimentell lassen sich solche Abbildungen im Unterricht in Form von Schattenbildern auf der Wand leicht nachstellen. Dabei können die ebenen Figuren aus Pappe ausgeschnitten werden. Der Schattenwurf wird dann mithilfe einer Lampe als punktförmige Lichtquelle erzeugt bzw. für die Parallelprojektion mithilfe der Sonne [31, S. 3 bzw. 8].

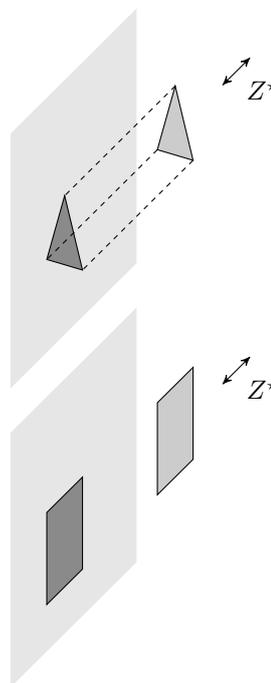


Abb. 3.2.5 Parallelprojektion mit paralleler Objektebene

Wir wollen in einem Kapitel zur Zentralprojektion eine Konstruktionsmethoden vorstellen, welche sog. *Risse* zur eindeutigen Darstellung von Objekten verwendet. Diese entstehen durch eine Dreifafelprojektion. Hierbei wird durch die orthogonale Parallelprojektion ein Objekt auf drei verschiedene Bildebenen abgebildet. Das Ergebnis sind drei Ansichten eines Körpers, welche als Risse bezeichnet werden.

### 3.3 Dreitafelprojektion

Bei der Dreitafelprojektion handelt es sich um eine orthogonale Parallelprojektion, d.h. die Projektionsstrahlen sind parallel und stehen senkrecht zur Bildebene. Die drei Tafeln schneiden sich ähnlich einer Raumecke ebenfalls orthogonal [2]. In Abb. 3.3.1 stellen wir ein Haus in diese Raumecke und führen jeweils eine senkrechte Parallelprojektion auf die Wände aus. Das Haus ist zusammengesetzt aus einem Quader und einem Prisma mit dreieckiger Grundfläche. Damit die Risse unterschiedliche werden bzw. weniger Sonderfälle auftreten, wurde das Haus gedreht, sodass keine der Seitenwände parallel zu den Bildebenen liegt. Zur Reduktion von Symmetrien liegt der Dachfirst bzgl. der Mitte versetzt.

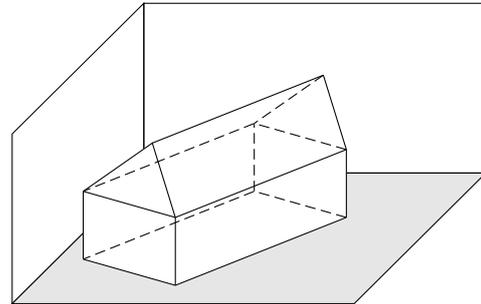


Abb. 3.3.1 Das Haus in der Raumecke

Damit die Risse unterschiedliche werden bzw. weniger Sonderfälle auftreten, wurde das Haus gedreht, sodass keine der Seitenwände parallel zu den Bildebenen liegt. Zur Reduktion von Symmetrien liegt der Dachfirst bzgl. der Mitte versetzt.

Die Bilder der Projektion werden als Grund-, Seiten- und Aufriss bezeichnet. Ausgehend von diesen Rissen lassen sich andere Projektionen konstruieren, welche in den Abschnitten 4.3 *Konstruktionsmethoden* und 5.2 *Axonometrie* vorgestellt werden.

Die Dreitafelprojektion ist nicht nur ein Hilfsmittel zur Konstruktion zentralprojektiver Bilder, sondern dient auch der eindeutigen Darstellung eines Objektes, da die Projektion im Allgemeinen nicht bijektiv ist. Zwei Punkte auf demselben Projektionsstrahl werden auf denselben Bildpunkt projiziert. Die Projektion ist somit nicht umkehrbar, d.h. aus einem Foto lässt sich ein Objekt nicht exakt im Raum rekonstruieren. Es sei denn, es gibt mehrere Fotos aus verschiedenen Richtungen. Die Dreitafelprojektion zeigt ein Objekt in drei unterschiedlichen Ansichten. Anders als eine Fotografie wird hier eine Parallelprojektion verwendet. Sie weist mehr Invarianten auf, selbst wenn die Objektebene nicht parallel zur Bildebene liegt. Es bleiben somit mehr Eigenschaften eines Objektes erhalten. Fallen die Projektionsstrahlen jeweils senkrecht auf die Ebenen, so bleiben auch rechte Winkel erhalten, sofern ein Schenkel parallel zur Bildebene liegt [5, S. 12], wie die folgende Abbildung zeigt.

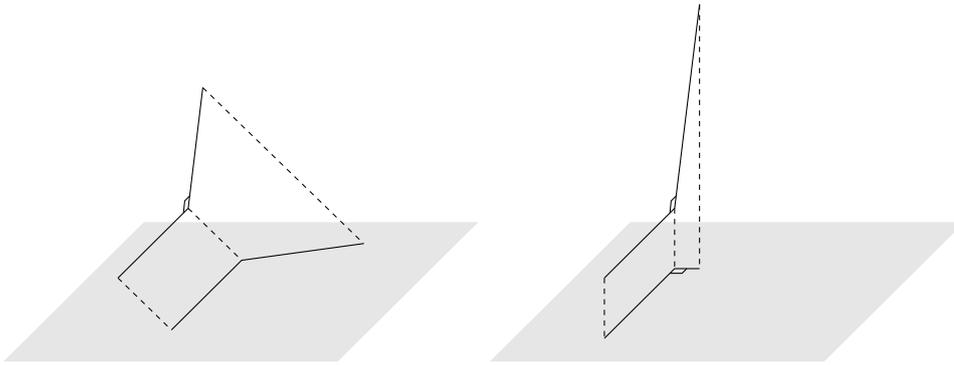
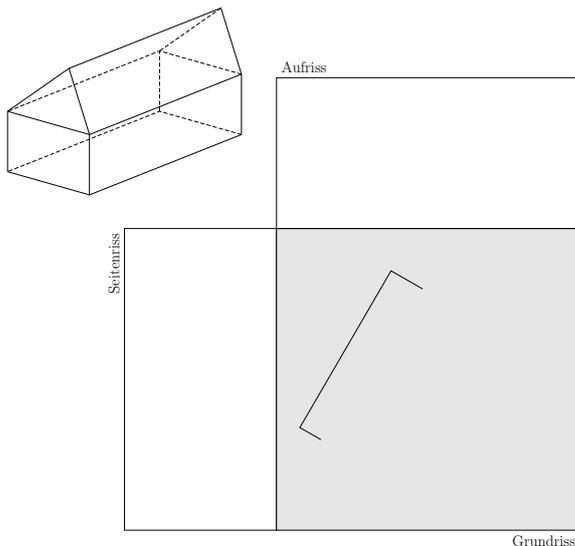


Abb. 3.3.2 Sonderfall der orthogonalen Parallelprojektion, welche den rechten Winkel unverändert lässt.

Wir wollen nun anhand eines Beispiels zeigen, wie systematisch unter Verwendung der Invarianten in Abb. 3.2.1, S. 56, Grund-, Seiten- und Aufriss des Hauses in der Ebene konstruiert werden können.

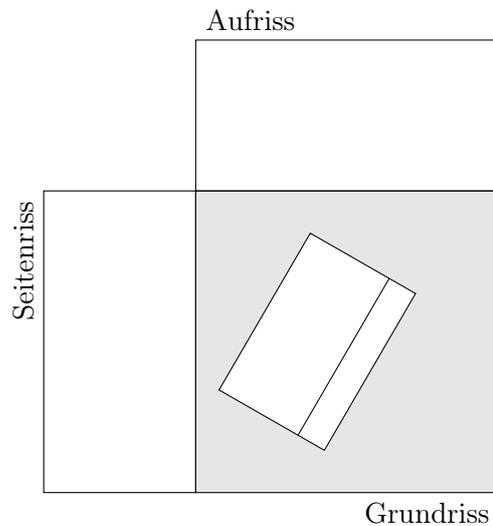
### Aufgabenbeispiel 3.3.1

Ein Haus bestehe aus einem Quader mit dem Maßen  $6 \times 4 \times 2$  LE und einem Prisma mit der Höhe 2 LE. Der Lotfußpunkt der Spitze teile die Kante des Quaders im Verhältnis  $1 : 3$ . Eine Seite des Quaders ist im Grundriss vorgegeben. Zur Vereinfachung entspricht  $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$ .



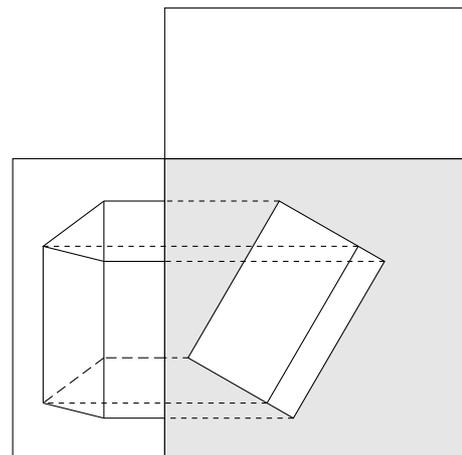
*Lösung:*

Für den Grundriss werden die kurzen Seiten von 4 LE eingezeichnet, sodass sich ein Rechteck ergibt. Alle Kanten, welche orthogonal zur Bildebene sind, fallen mit den Projektionsgeraden zusammen und werden zu einem Punkt. Aufgrund der Teilverhältnistreue liegen die oberen Ecken der Dachkante 3 LE von den Ecken entfernt.



Für den Seitenriss werden ausgehend von den Ecken des Rechtecks senkrecht zur Schnittgerade von Seiten- und Grundriss die Projektionsstrahlen skizziert. Da das Haus auf dem Grundriss steht, entspricht der Schnittpunkt der Projektionsstrahlen mit der Schnittgeraden den unteren Eckpunkten des Hauses.

Die Höhe des Quaders beträgt 2 LE und wird unverzerrt dargestellt, da diese Kanten parallel zum Seitenriss liegen (Kongruenzabbildung).

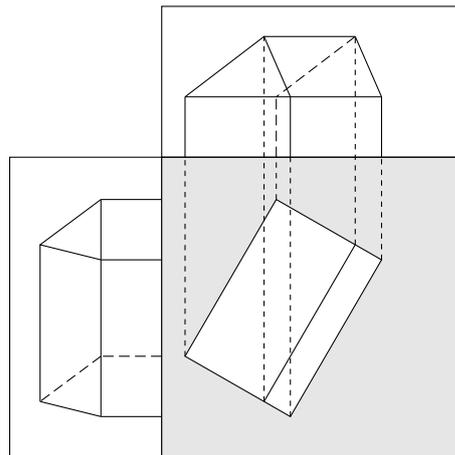


Für das Dach werden die Projektionsstrahlen ausgehend von den Spitzen im Grundriss gezeichnet. Dabei ist das Dach insgesamt 4 LE über dem Boden. Zur besseren Anschauung werden verdeckte Kanten gestrichelt dargestellt.

Die obere Fläche des Quaders schneidet die seitliche Bildebene orthogonal, d.h. sie ist parallel zu den Projektionsstrahlen ausgerichtet. Genauso, wie Kanten, die mit den Projektionsstrahlen zusammenfallen, zu Punkten werden, so werden Ebenen in vergleichbarer Lage auf Geraden projiziert. Weiterhin erhalten wir als Resultat, dass Kanten, welche nicht parallel zur Bildebene liegen, verzerrt abgebildet werden. Der Teilungspunkt der Dachspitze liegt dagegen weiter auf  $1/4$  der unteren Kante, was wiederum ein Beispiel für die Teilverhältnistreue ist.

Auf dieselbe Weise wird auch der Aufriss ausgehend vom Grundriss konstruiert.

Die Projektionsstrahlen werden nun ausgehend von den Eckpunkte des Quaders im Grundriss senkrecht nach oben gezeichnet. Ihr Schnittpunkt mit der unteren Kante der Aufrissebene ist der Lotfußpunkt der senkrechten Kanten des Quaders. Da diese wieder parallel zur Bildebene sind, werden die oberen Ecken des Quaders 2 LE darüber projiziert. Genauso wird mit dem Dach verfahren.



Die Längen im Seitenriss können auch mithilfe einer Winkelhalbierenden auf den Aufriss übertragen werden, wie es in Abb. 3.3.3 angedeutet ist. Die Abbildung fasst noch einmal alle Besonderheiten der Risse aufgrund der Invarianten zusammen.

- Geraden parallel zur Bildebene werden auf kongruente Geraden projiziert.
- Parallelprojektion ist immer paralleltreu.
- Lotfußpunkt der Dachspitze teilt die Kante ebenfalls im Verhältnis 1 : 3, auch wenn die Seiten selbst verzerrt projiziert werden.

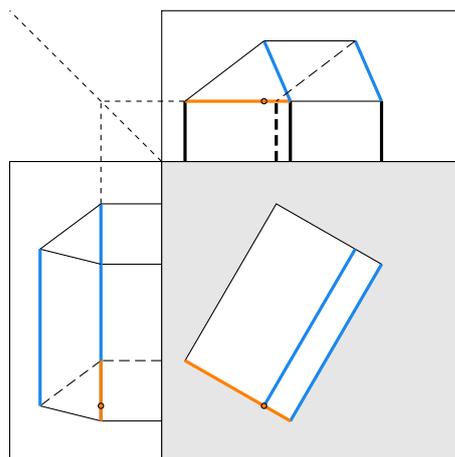


Abb. 3.3.3 Dreitafelprojektion des Hauses in Abb. 3.3.1

Aufgrund der genannten Invarianten ist die Konstruktion von Bildern einer Parallelprojektion einfacher als jene einer Zentralprojektion. Gerade der Wegfall der Teilungsverhältnistreue erfordert einige Tricks, um z.B. ein regelmäßiges Muster, wie einen gefliesten Boden, zu konstruieren. Hier wird stattdessen die Inzidenztreue zur Hilfe genommen. Bspw. lässt sich der Mittelpunkt einer rechteckigen Fläche über den Schnittpunkt der Diagonalen finden. Gleiches gilt dann auch in der Projektion.

### 3.3.1 Aufgabenbeispiele

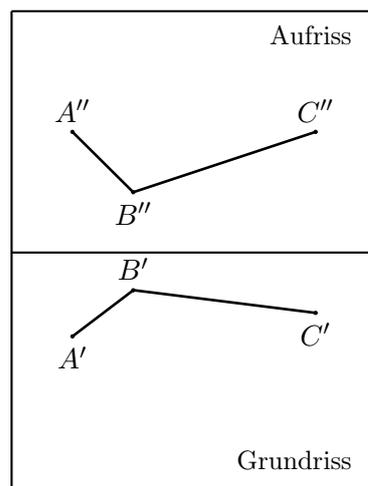
Wir wollen zwei verschiedene Aufgabentypen vorstellen. Zum einen geht es um die Lage eines Objektes im Raum, welche über die gegebenen Risse rekonstruiert wird. Zum anderen um die Rekonstruktion von Längen aus den Rissen, wenn die abgebildete Strecke nicht parallel zur Bildebene ist.

Bei einer Lageaufgabe geht es darum, sich ein Objekt im Raum vorzustellen, wenn nur der Grund- und Aufriss bekannt ist. In dem folgenden Aufgabenbeispiel 3.3.2 sind drei Punkte in den entsprechenden Rissen gegeben. Das Dreieck zeigt dabei mit der Ecke  $B$  in Richtung der Bildebene, wie dem Grundriss entnommen werden kann. Nach dem Aufriss ist die Spitze  $B$  gekippt nach unten. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun einen Punkt  $D$  in den Rissen ergänzen, sodass das resultierende Viereck  $ABCD$  eben ist. Da drei Punkte genau eine Ebene festlegen, kann der Punkt  $D$  nicht beliebig gewählt werden. Im zweiten Teil soll das Viereck ein Parallelogramm werden. Da die Parallelprojektion aber parallelentreu ist, kann Aufgabe b) sogar einfacher als der erste Teil gelöst werden. Die Reihenfolge der beiden Teilaufgaben orientiert sich nicht am Schwierigkeitsgrad, sondern an dem Lösungsweg.

#### Aufgabenbeispiel 3.3.2

Das Bild zeigt den Grund- und Aufriss dreier Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  im Raum.

- Ergänze im Grund- und Aufriss  $D'$  und  $D''$  derart, dass  $ABCD$  ein ebenes Viereck im Raum ergibt.
- Ändere das obige Verfahren derart ab, sodass  $ABCD$  zu einem Parallelogramm wird.



Für die Lösung werden die Diagonalen eines Vierecks verwendet. Im Aufriss verbinden wir  $A''$  mit  $C''$  und oberhalb der Strecke setzen wir  $D''$  derart, dass das Viereck  $A''B''C''D''$  konvex ist. Nun gilt es, den entsprechenden Punkt  $D'$  im Grundriss zu finden. Wir fällen das Lot auf die Schnittgerade der Grund- und Aufrissebene, der sog. *Risskante*, durch  $D''$ . Diese wird als *Ordner* bezeichnet, da sie die Punkte in den entsprechenden Rissen einander zuordnet.

Nun stellt sich die Frage, wo auf dieser Senkrechten sich der Punkt  $D'$  befinden muss, damit im Raum ein ebenes Viereck entstehen kann. Wir verbinden dazu  $B''$  mit  $D''$  und markieren den Schnittpunkt  $M''$  der Diagonalen. Auch hier zeichnen wir den entsprechenden Ordner ein. Dieser schneidet die Strecke  $A'C'$  in  $M'$ , sodass wir die Diagonale durch  $B'$  im Grundriss zeichnen können. Diese schneidet den Ordner von  $D''$  im gesuchten Punkt  $D'$ .

Teil b) lässt sich auf dieselbe Weise lösen, wobei hier  $M''$  als Mittelpunkt der Strecke  $\overline{A''C''}$  gewählt werden muss, da sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren. Da die Parallelprojektion teilverhältnistreu ist und  $M$  der Mittelpunkt des Parallelogrammes im Raum ist, müssen auch  $M'$  und  $M''$  Mittelpunkte der Diagonalen sein. Diese Invariante wird nun zur Lösung des Problems verwendet, d.h. der Abstand zwischen  $B''$  und  $M''$  wird auf dem Strahl  $B''M''$  abgetragen, um  $D''$  zu erhalten. Dann wird  $D'$  analog zu a) ermittelt.

Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung der Paralleltreue. Die Seite  $AB$  des Parallelogrammes im Raum ist parallel zu  $CD$ . Aufgrund der genannten In-

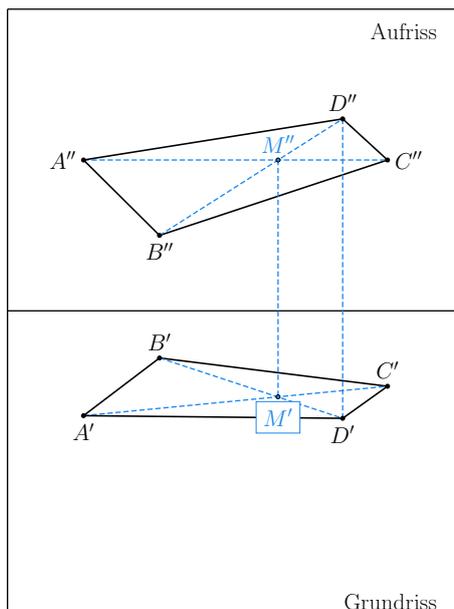


Abb. 3.3.4 Lösung des Aufgabenbeispiels 3.3.2 a)

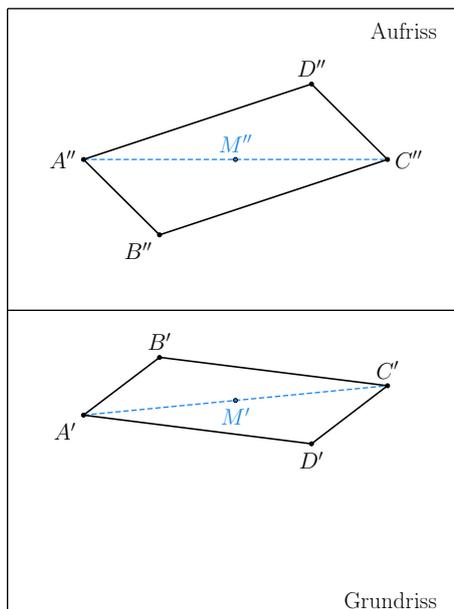


Abb. 3.3.5 Lösung des Aufgabenbeispiels 3.3.2 b)

variante gilt auch  $A''B'' \parallel C''D''$  sowie  $B''C'' \parallel A''D''$ . Wir ziehen also die entsprechenden Parallelen durch  $A''$  und  $C''$ , welche sich in  $D''$  schneiden werden. Dann kann  $D'$  wieder über den Ordner und den Strahl  $B'M'$  gefunden werden oder ebenfalls über den Schnittpunkt der Parallelen durch  $A'$  und  $C'$ .

Anhand des Aufgabenbeispiels lassen sich weitere Varianten entwickeln. So existiert bspw. die Frage, ob das Parallelogramm  $ABCD$  sogar ein Rechteck sein kann. Hier liegt der Fokus auf den Winkeln. Nach Abb. 3.2.1, S. 56 gilt im Allgemeinen nicht die Winkeltreue, d.h. es ist nicht auszuschließen, dass das Parallelogramm  $ABCD$  in der vorherigen Aufgabe kein Rechteck ist. Schülerinnen und Schüler können die entsprechenden Risse in *GeoGebra* nachzeichnen und dann das Parallelogramm im Raum rekonstruieren. Hierbei ist es hilfreich, den Ursprung des Koordinatensystems links der Risskante zu wählen. Dann hat  $P''(x, y)$  im Aufriss die Koordinaten  $(0, x, y)$  in der  $yz$ -Ebene und  $P'(x, y)$  entsprechend  $(-x, y, 0)$  in der  $xy$ -Ebene. Abb. 3.3.6 zeigt die übertragenen Risse.

Da es sich bei der Drei- bzw. Zweitafelprojektion um eine senkrechte Parallelprojektion handelt, kann das ursprüngliche Parallelogramm im Raum durch den Schnittpunkt der entsprechenden Normalen auf die Rissebenen rekonstruiert

werden. Es stellt sich heraus, dass es sich hierbei weder um ein Rechteck noch um eine Raute handelt, denn es gibt weder rechte Winkel noch sind alle Seiten gleich lang.

Falls sich die Schülerinnen und Schüler fragen, ob der Winkel im Riss auch rechtwinklig sein muss, können sie zur Untersuchung dieser Frage die Seite  $\overline{B''C''}$  parallel zur Seite  $\overline{A''D''}$  verschieben, bis sich im blauen Parallelogramm ein rechter Winkel bildet, wie Abb. 3.3.7 zeigt. Es stellt sich heraus, dass aufgrund der Schräglage des blauen Rechtecks die Risse selbst nicht rechtwinklig sein müssen, denn die Paral-

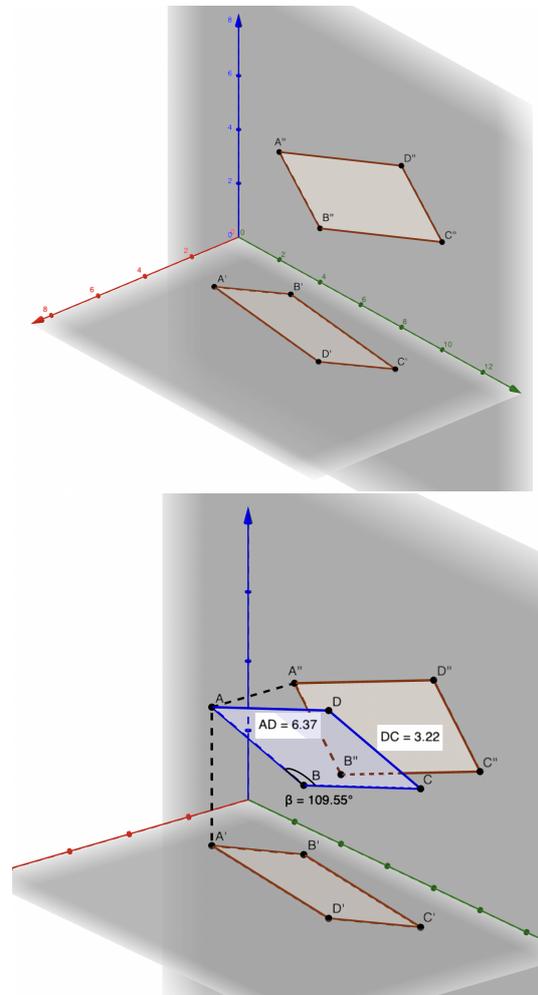


Abb. 3.3.6 Die Risse aus Abb. 3.3.5 übertragen in *GeoGebra*

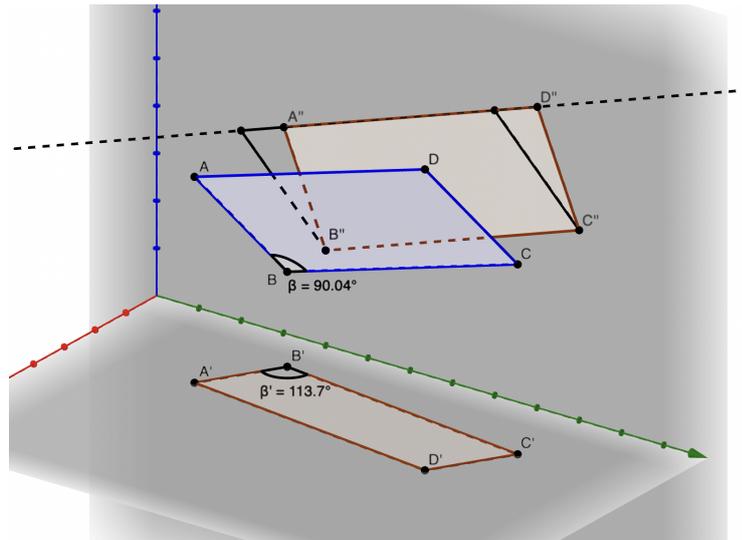


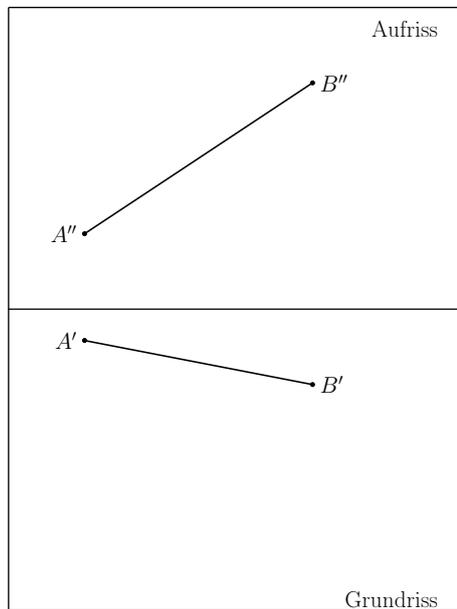
Abb. 3.3.7 Risse eines Rechtecks, welches durch Parallelverschiebung aus einem Parallelogramm entstanden ist.

Parallelprojektion wird erst winkeltreu, wenn Objekt- und Bildebene parallel zueinander sind. Eine Ausnahme gilt bei rechten Winkeln. Diese werden, wie das Beispiel in Abb. 3.3.2 zeigte, auf rechte Winkel projiziert, wenn einer der Schenkel parallel zur Bildebene liegt. Aus den Rissen können wir entnehmen, dass dies nicht der Fall ist, da keine Seite parallel zu den Risskanten liegt.

Stellen wir uns nun vor, wir drehen das blaue Rechteck derart, dass es zur Grundrissebene parallel wird, so wird die Parallelprojektion zur Kongruenzabbildung, sodass sich sowohl Winkel als auch Längen im Grundriss ablesen lassen. Wir kommen zum zweiten Aufgabentyp, in welcher wir durch geeignete Drehungen die wahren Maße von Objekten über ihre Risse ermitteln können. Wie diese Paralleldrehung durchgeführt wird, soll anhand des folgenden Konstruktionsbeispiels gezeigt werden.

**Konstruktionsbeispiel 3.3.1**

Gegeben ist der Grund- und Aufriss einer Strecke  $\overline{AB}$ . Es soll nun durch Drehung von  $\overline{AB}$  im Raum die wahre Länge der Strecke ermittelt werden.



Die Strecke kann im Raum derart gedreht werden, dass sie parallel zu einer der Rissebenen wird. Wir werden sie im folgenden parallel zum Grundriss drehen. Nach dem Aufriss liegt der Punkt  $A$  tiefer als  $B$ . Durch diesen soll die Rotationsachse  $r$  gehen, welche zudem parallel zum Grundriss sein soll. Dann ist  $A$  ein Fixpunkt, sodass sich auch  $A'$  nach der Drehung nicht ändern wird. Dies sind die Voraussetzungen für folgende Konstruktionsschritte:

1. Ziehe Parallele durch  $A''$  zur Risskante.  $\Rightarrow r''$
2. Fülle Lot durch  $B''$  auf Risskante und markiere den Schnittpunkt mit  $r''$ .  $\Rightarrow S''$
3. Zeichne Senkrechte durch  $B'$  zu  $r''$ .
4. Trage den Abstand  $d(B'', S'')$  auf dem Lot aus Schritt 3 ab.  $\Rightarrow B_r$
5. Die Strecke  $\overline{A'B_r}$  ist kongruent zur Strecke  $\overline{AB}$  im Raum.

Nun stellt sich die Frage, warum die o.g. Konstruktion funktioniert und welche Invarianten der orthogonalen Parallelprojektion verwendet werden.

Abb. 3.3.9 zeigt die Risse der Strecke  $\overline{AB}$  sowie ihre Drehung im Raum. Nach Voraussetzung verläuft die Rotationsachse  $r$  durch  $A$  und ist parallel zu  $A'B'$ . Somit ist die Rotationsachse auch parallel zur Grundrissebene, sodass der Aufriss  $r''$  parallel zur Risskante wird. Dies erklärt den ersten Konstruktionsschritt. Eine Drehung im Raum erfolgt auf einem Kreis, welcher in einer Ebene orthogonal zur Drehachse liegt. Wir zeichnen daher in Schritt 3 eine Senkrechte zu  $r'$  durch  $B'$ . Es fehlt noch der Radius des Kreises. Füllen wir das Lot durch  $B$  auf

die Grundrissebene, schneidet diese die Drehachse in  $S$  bzw.  $S'$ , welcher auch  $B'$  ist, da  $r$  und  $\overline{AB}$  nach Konstruktion denselben Grundriss besitzen. Der Radius des Kreises entspricht dem Abstand  $d(B, S)$ . Da die Gerade  $BS$  nach Konstruktion senkrecht zur Grundrissebene ist, ist diese parallel zur Aufrissebene.

Aufgrund der orthogonalen Parallelprojektion ist das Viereck  $BSS''B''$  ein Rechteck. Wir erhalten also den Radius des Kreises, indem wir den Ordner von  $B''$  zeichnen (Schritt 2). Dann gilt  $d(B, S) = d(B'', S'')$ . Da die Drehung eine Kongruenzabbildung ist, müssen wir nur noch den Abstand auf das Lot durch  $B'$  abtragen und wir erhalten  $B_r$ . Mit derselben Begründung ist dann auch  $d(A, B) = d(A', B_r)$ .

Wir sehen in Abb. 3.3.9, dass der Drehwinkel  $90^\circ$  beträgt und durch die Konstruktion wird das Dreieck  $ABS$  parallel zur Grundrissebene gedreht haben. Somit wird die Parallelprojektion zu einer Verschiebung, sodass wir damit die unverzerrte Strecke  $\overline{AB}$  rekonstruieren konnten.

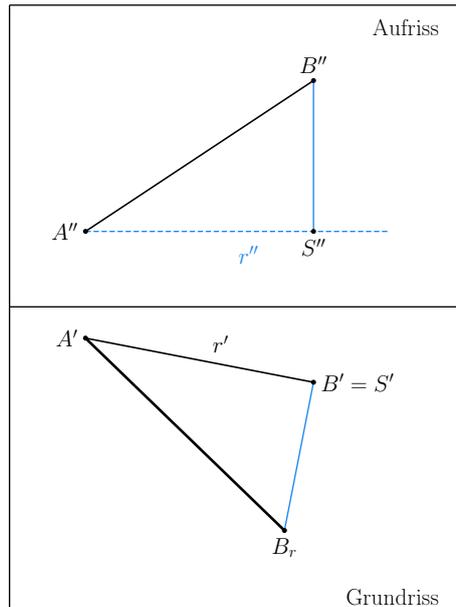


Abb. 3.3.8 Paralleldrehung nach Konstruktionsbsp. 3.3.1

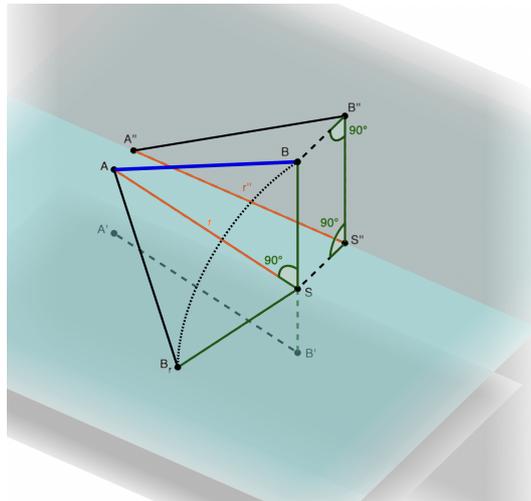
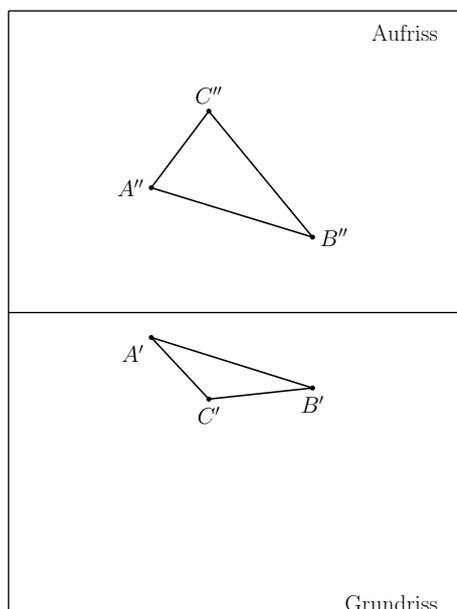


Abb. 3.3.9 Paralleldrehung zur Bestimmung von realen Maßen

Wir erweitern die vorherige Aufgabe und betrachten nun ein Dreieck  $ABC$  im Raum. Wieder sind im Konstruktionsbeispiel 3.3.2 Grund- und Aufriss gegeben und wir wollen nun das gesamte Dreieck derart drehen, dass es wieder parallel zum Grundriss zum Liegen kommt. Hierbei ist das Finden der Rotationsachse nun komplizierter, da durch die Drehung alle drei Seiten parallel zum Grundriss gedreht werden müssen. Wir zeigen daher zwei verschiedene Methoden. Die erste verwendet, wie zuvor beschrieben, eine Rotationsachse, um das Dreieck im Raum parallel zum Grundriss zu drehen. Wir rekonstruieren daher nicht nur die Maße des Dreiecks, sondern das Dreieck an sich. Die zweite Methode knüpft an die vorherige Konstruktion an, d.h. wir rekonstruieren unabhängig voneinander die Seiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  und  $\overline{AC}$ . Es werden dabei drei verschiedene Rotationsachsen verwendet, sodass das Endergebnis im Allgemeinen kein Dreieck mehr sein wird, denn die Seiten erscheinen in beliebiger Richtung in der Grundrissebene. Zur Rekonstruktion des Dreiecks müssen die einzelnen Seiten wieder zu einem zusammengefügt werden. Für Schülerinnen und Schüler kann diese Alternative aber einfacher nachvollziehbar sein, da sie an die vorherige Konstruktionsaufgabe anknüpft.

### Konstruktionsbeispiel 3.3.2

Gegeben ist der Grund- und Aufriss eines Dreiecks  $ABC$  im Raum. Es sollen die Seitenlängen des Dreiecks rekonstruiert werden.



Zuerst müssen wir die Drehachse finden. Der Trick besteht darin, dass wir das Dreieck  $ABC$  in die Grundrissebene drehen, statt nur parallel dazu. Die Rotationsachse muss daher in der Grundrissebene liegen. Wir verlängern die Seiten in den Rissen entsprechend folgender Konstruktionsschritte (Abb. 3.3.10, links):

#### Erster Teil

1. Verlängere die Seiten  $\overline{A''C''}$  und  $\overline{B''C''}$ , bis sie die Risskante  $\Rightarrow R'', S''$  schneiden.
2. Zeichne die Ordner von  $R''$  und  $S''$  ein.
3. Verlängere die Seiten  $\overline{A'C'}$  und  $\overline{C'B'}$ , bis sie die Ordner aus 2.  $\Rightarrow R', S'$  schneiden.

Da die Rotationsachse im Grundriss liegt, gilt auch  $R' = R$  und  $S' = S$ . Abb. 3.3.11 zeigt die Drehung im Raum. Hierbei wird das Dreieck  $R'CS'$  in die Grundrissebene geklappt. Die Seite  $R'S'$  bleibt als Fixpunktgerade erhalten, der Punkt  $C$  dreht sich auf einem Kreis senkrecht zur Rotationsachse. Betrachten wir das Lot  $h$  von  $C$  auf die Gerade  $R'S'$ . Wenn wir die Länge dieser Seite mithilfe der Risse rekonstruieren können, so können wir  $h$  senkrecht zu  $T$  in der Grundrissebene abtragen und erhalten das gedrehte, große Dreieck, dessen Spitze das gesuchte Bild ist. Die Rekonstruktion von  $h$  ist daher der zweite Teil der Konstruktion (Abb. 3.3.10, rechts):

#### Zweiter Teil

1. Zeichne das Lot von  $C''$  auf die Risskante.  $\Rightarrow d$
2. Zeichne eine Parallele zu  $RS$  durch  $C'$  und trage die Länge von  $d$  auf ihr ab.  $\Rightarrow H$
3. Zeichne die Senkrechte zu  $RS$  durch  $C'$ .  $\Rightarrow T$
4. Verbinde die Punkte  $T$  und  $H$ . Ihr Abstand ist die Länge von  $h$ , welche auf der Senkrechten aus 3. abgetragen wird.  $\Rightarrow C$
5. Verbinde  $C$  mit  $R$  und  $S$ .
6. Zeichne die Senkrechte durch  $A'$  und  $B'$  auf  $RS$  ein. Markiere die Schnittpunkte mit  $CR$  und  $CS$ .  $\Rightarrow A, B$

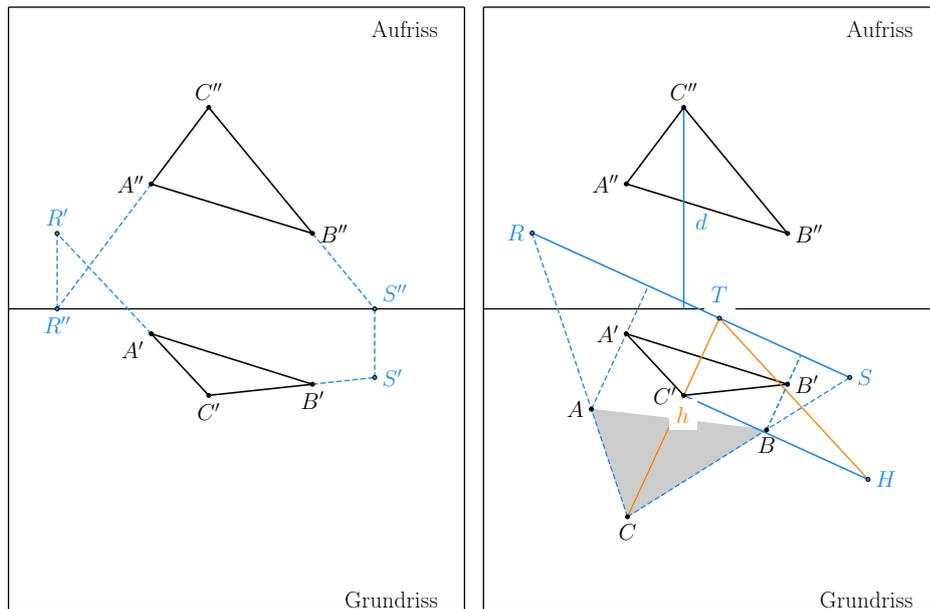


Abb. 3.3.10 Paralleldrehung eines Dreiecks im Raum. Erster Teil der Konstruktion ist links dargestellt, der zweite Teil rechts.

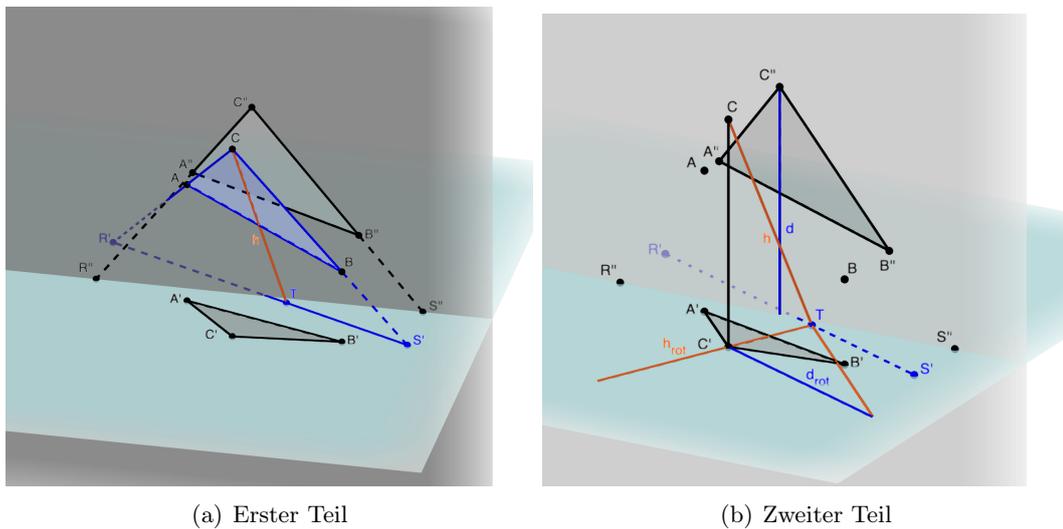


Abb. 3.3.11 Paralleldrehung des Dreiecks in *GeoGebra*, zur Erklärung der Konstruktionsidee

Nun stellt sich die Frage, warum  $d$  parallel zur Rotationsachse durch  $C'$  abgetragen werden muss, damit sich  $h$  ergibt. Hierzu betrachten wir die räumliche Darstellung der Situation in Abb. 3.3.11 (b).

Betrachten wir das Dreieck  $CC'T$  und drehen es  $90^\circ$  um  $C'T$  in die Grundrissebene, so erhalten wir das Dreieck  $HC'T$ . Die Strecke  $CC'$  steht danach senkrecht auf  $C'T$  durch  $C'$ . Dies erklärt die Parallele in Schritt 2. Den Abstand von  $C$  zu  $C'$  können wir dem Aufriss entnehmen. Die Gerade  $CC''$  steht als Projektionsstrahl nach Definition senkrecht zur Aufrissebene, ebenso die Gerade  $CC'$ . Daher ist die Strecke  $\overline{CC'}$  genauso lang wie  $d$ .

Die Ecken  $A$  und  $B$  in der Grundrissebene sind leichter zu finden, denn auch diese werden um einen Kreis orthogonal zu  $RS$  gedreht. Wir zeichnen daher wieder die Senkrechten zu  $RS$  durch  $A'$  und  $B'$  ein. Da nun aber  $C$  bekannt ist, können hier die Schnittpunkte mit den beiden Dreiecksseiten verwendet werden.

Wir kommen abschließend zur alternativen Lösung in Abb. 3.3.12, welche die vorherige Konstruktion verwendet. Statt genau einer Rotationsachse wird für jede Dreiecksseite eine eigene bestimmt.  $r_1''$  ist die Parallele durch  $B''$  zur Risskante. Dann wird von  $A''$  aus das Lot gefällt und die in der Abbildung blau markierte Strecke im Grundriss senkrecht an  $A'$  abgetragen werden, um  $A_{r1}$  zu erhalten. Diese verbunden mit  $B'$  ergibt die wahre Strecke der Dreiecksseite  $\overline{A_{r1}B'}$ . Mit den zwei anderen Seiten wird genauso verfahren. Da nun die einzelnen Seiten im Grundriss kein Dreieck bilden, können die Schülerinnen und Schüler diese mit dem Zirkel abmessen und eine Kopie erstellen.

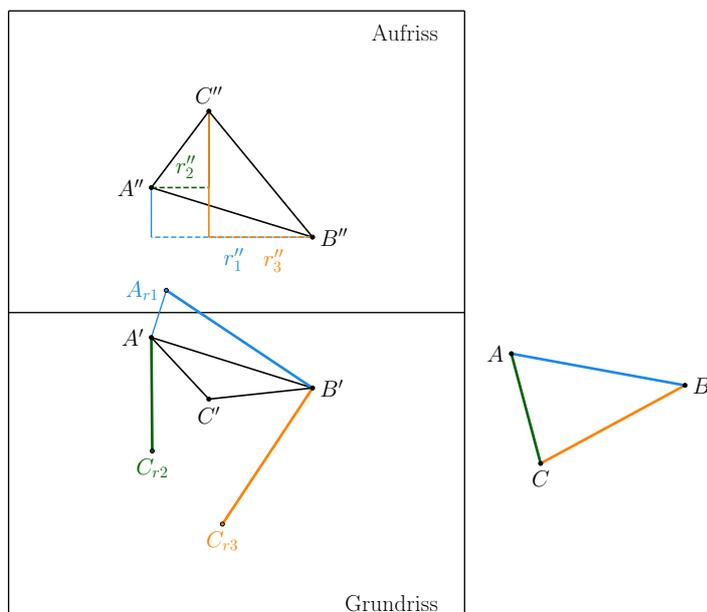


Abb. 3.3.12 Paralleldrehung eines Dreiecks im Raum, alternative Lösung

Wir haben die Dreitafelprojektion besprochen, da sich zentral- und parallelprojektive Bilder aus den Rissen konstruieren lassen. Wir wollen zum Abschluss dieses Kapitels den Satz von Desargues besprechen, welcher der *projektiven Geometrie* zuzuordnen ist, ein Teilgebiet der Mathematik, dessen grundlegenden Axiome wir am Anfang dieser Arbeit vorgestellt hatten (Abs. 2.2, S. 25). Aus diesem Teilgebiet entstammen auch die Fernpunkte und -geraden.

### 3.4 Der Satz von Desargues

Ein bekannter Satz der projektiven Geometrie ist der von Desargues, welcher sich aus unterschiedlichen Blickwinkeln interpretieren und untersuchen lässt.

#### Satz 3.4.1: Satz von Desargues

Gegeben sei ein Punkt  $Z$  in der Ebene und ein Dreieck  $\triangle ABC$ . Ein weiteres Dreieck  $\triangle A'B'C'$  hat seine Eckpunkte auf den Strahlen  $ZA$ ,  $ZB$  und  $ZC$ . Genau dann gilt:

Die Schnittpunkte  $U, V$  und  $W$  mit

$$AB \cap A'B' = \{U\} \quad BC \cap B'C' = \{V\} \quad AC \cap A'C' = \{W\}$$

sind kollinear auf der Geraden  $a$ .

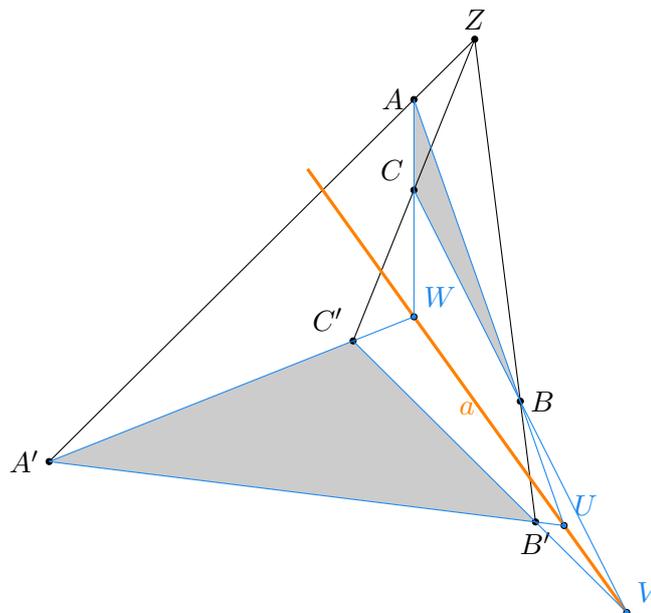


Abb. 3.4.1 Der Satz von Desargues

In der Literatur finden sich unterschiedliche Formulierungen und Beweise [37, 34, 47]. Wird der Satz im Sinne einer zentralprojektiven Abbildung von einer Ebene in eine andere betrachtet, so ist die Gerade  $a$  die Schnittgerade dieser beiden Ebenen. Da sich Gerade und Bildgerade schneiden, ist der Schnittpunkt nach Satz 3.1.2, S. 49, ein Fixpunkt und alle Fixpunkte befinden sich auf dieser Schnittgeraden.

Aus Sicht der projektiven Geometrie sind die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  *zentralperspektiv*, da die Verbindungsgeraden  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  nach der o.g. Voraussetzung sich in dem Punkt  $Z$  schneiden. Die Verbindungsgeraden  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ <sup>1</sup> und  $A'B'$ ,  $A'C'$ ,  $B'C'$  sind *axialperspektiv*, da ihre Schnittpunkte auf einer Geraden liegen [47, S. 38]. Dies war die Zielaussage in der obigen Formulierung.

Die Umkehrung des Satzes gilt ebenso. Wir konstruieren zwei Dreiecke, deren Verlängerungen der Kanten sich in kollinearen Punkten schneiden. Dazu formulieren wir folgendes Aufgabenbeispiel:

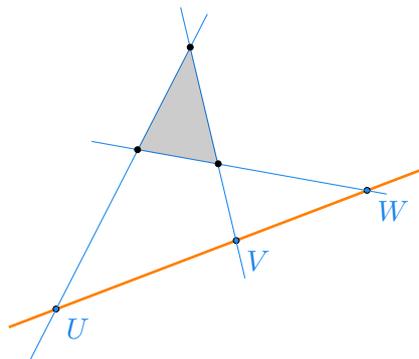
#### Aufgabenbeispiel 3.4.1

Zeichne eine Gerade und markiere darauf drei Punkte mit  $U$ ,  $V$  und  $W$  in beliebiger Reihenfolge. Nun konstruiere zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  derart, dass  $U$  der Schnittpunkt der Geraden  $AB$  und  $A'B'$  ist, sowie  $V$  von  $BC$  und  $B'C'$  bzw.  $W$  von  $AC$  und  $A'C'$  ist.

Zeichne dann die Geraden  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$ . Was stellst du fest?

*Lösung:*

1. Schritt: Wir beginnen mit der Vorgabe und zeichnen die Gerade  $a$  mit den Punkte  $U$ ,  $V$  und  $W$ , wobei nach Aufgabenstellung die Reihenfolge der Punkte auf der Geraden beliebig ist. Wir zeichnen nun drei Geraden durch die Punkte, die nicht kollinear sein dürfen, damit ihre Schnittpunkte ein Dreieck ergeben.



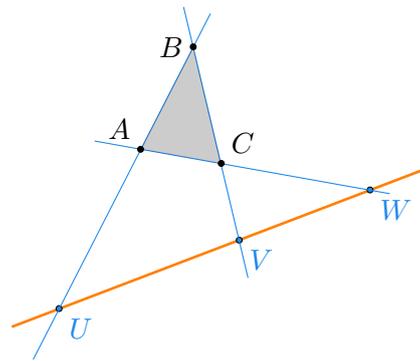
<sup>1</sup>Sie werden in der projektiven Geometrie *Dreieck* genannt und ihre Schnittpunkte bilden das Dreieck  $\triangle ABC$  [47, S. 38]

2. Schritt: Nun müssen wir über die Bezeichnung der Punkte auf der Gerade die Eckpunkte des Dreiecks benennen. Nach der Aufgabenstellung schneiden sich die Geraden wie folgt:

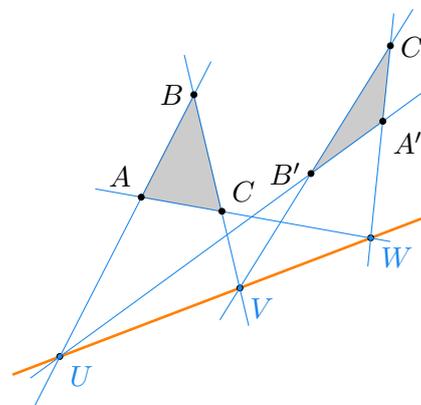
$$U \cap W = \{A\}$$

$$U \cap V = \{B\}$$

$$V \cap W = \{C\}$$

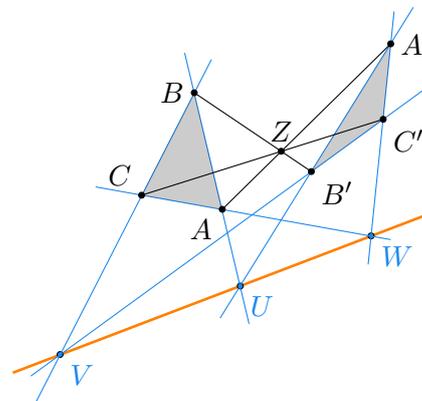
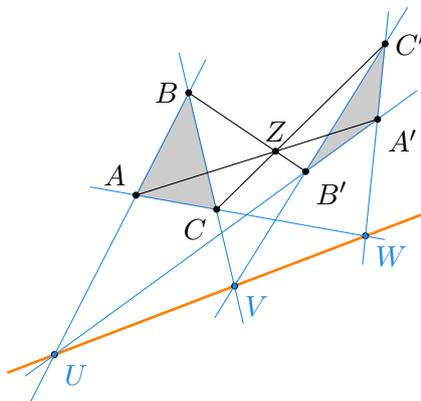


3. Schritt: Wir wiederholen die ersten beiden Schritte, um das zweite Dreieck  $\Delta A'B'C'$  zu konstruieren.



4. Schritt: Nun verbinden wir die Punkte  $A$  mit  $A'$ ,  $B$  mit  $B'$  und  $C$  mit  $C'$ . Wir werden feststellen, dass sich die Geraden in einem Punkt schneiden. Dies ist nach dem vorherigen Satz  $Z$ .

Eine andere Reihenfolge der Benennung der Punkte auf der Affinitätsachse (orange) hat keine Auswirkung auf die Konstruktion. Es ändert sich nur die Benennung der Eckpunkte des Dreiecks. Ihre Verbindungsgeraden dagegen bleiben gleich:



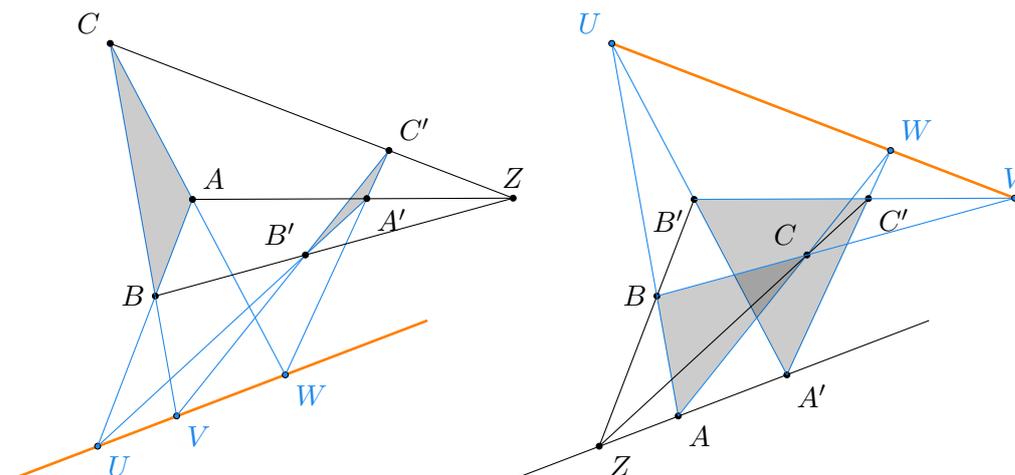


Abb. 3.4.2 Links: Änderung der Lage der Punkte auf der Affinitätsachse (orange). Rechts: Änderung der Rolle von Geraden und Punkten

Verändern wir dagegen die Lage der Punkte auf der Affinitätsachse (orange), so ändern sich auch die Dreiecke und die Lage von  $Z$ . Abb. 3.4.2 (links) zeigt daher ein anderes Ergebnis.

Die Figur im Satz von Desargues weist einige Besonderheiten auf. Sie besteht aus zehn Punkten und zehn Geraden, wobei durch jeden Punkt genau drei Geraden verlaufen und jede Gerade drei Punkte enthält. Wir können sogar in derselben Figur die Rolle der Punkte und Geraden verändern, sodass zwei neue Dreiecke entstehen (Abb. 3.4.2, rechts) [47, S. 40].

Zur Änderung der Rolle wurde als neues Zentrum  $U$  gewählt und in  $Z$  umbenannt. Die Geraden durch  $Z$  sind die Strahlen, welche die Eckpunkte der beiden Dreiecke enthalten müssen.  $B$  wurde nicht verändert. Dann muss der dritte Punkte auf der Geraden  $B'$  sein.  $B$  und  $A$  müssen auf einer Geraden liegen. Somit muss  $V$  in  $A$  umbenannt werden. Der dritte Punkte auf der Geraden  $AB$  muss dann  $U$  sein. Damit haben wir auch die Affinitätsachse gefunden, welche  $U$  enthält.

Wir stellen also fest, dass die Wahl von  $Z$  gleichzeitig auch die Affinitätsachse festlegt. Dies lässt sich allerdings einfach erklären: Die Affinitätsachse enthält drei Punkte, die nicht zu den Dreiecken gehören. Damit fallen die drei Geraden durch  $Z$  weg wie auch die sechs Geraden, welche die Dreiecke bilden. Da die Figur aus insgesamt zehn Geraden besteht, bleibt nur noch eine über, welche die gesuchte Affinitätsachse ist.

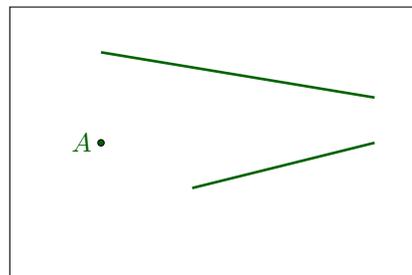
Wir wollen eine weiteres Aufgabenbeispiel zeigen, welcher den Satz von Desargues zur Lösung nutzt. Stellen wir uns vor, wir haben ein rechteckiges Blatt Papier und zwei Geraden, welche sich schneiden. Allerdings liegt der Schnittpunkt  $S$  außerhalb unseres Blattes. Nun wollen wir eine dritte Gerade konstruieren, welche durch  $S$  verläuft.

**Aufgabenbeispiel 3.4.2**

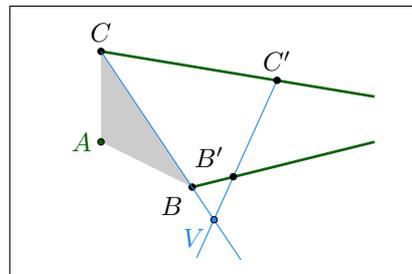
Gegeben ist ein Blatt Papier mit zwei nicht parallelen Geraden. Wähle einen Punkt  $A$  außerhalb der Geraden und konstruiere mithilfe des Satzes von Desargues eine dritte Gerade, welche durch  $A$  und den Schnittpunkt der anderen beiden Geraden verläuft.

*Lösung:*

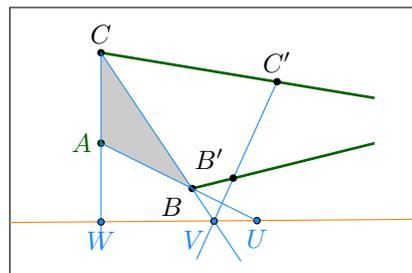
Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht darin, zu entscheiden, welche Rolle die gegebenen Objekte in der Figur zum Satz von Desargues einnehmen. Als Hilfe wurde daher der erste Punkt  $A$  genannt. Durch  $A$  verlaufen genau drei Geraden, d.h. der Schnittpunkt ist entweder  $Z, U$  oder  $W$ . Wir entscheiden uns für  $Z$ . Das Ziel ist also, den Punkt  $A'$  zu konstruieren.



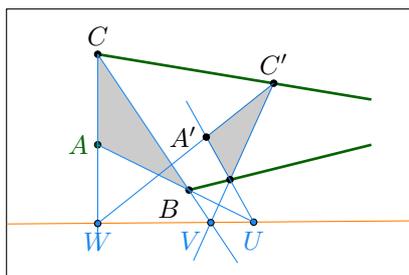
1. Schritt: Wir müssen jeweils zwei Punkte auf den gegebenen Geraden wählen, da jede Gerade genau drei Punkte enthält und  $Z$  schon gesetzt ist. Damit ist ein Dreieck festgelegt.  $BC$  und  $B'C'$  schneiden sich in  $V$ . Wir wählen die Punkte also derart, dass der Schnittpunkt  $V$  auf dem Blatt liegt.



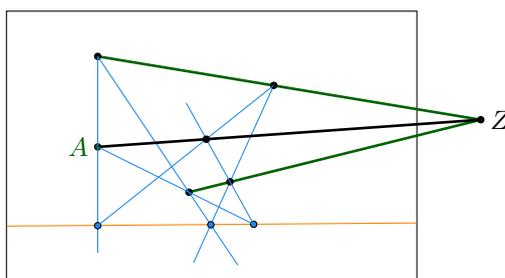
2. Schritt: Wir zeichnen die Verbindungsgerade  $AC$  und die Affinitätsachse durch  $V$  derart, dass sie die erste Gerade auf dem Blatt schneidet. Damit ist  $W$  festgelegt. Ebenso ergibt sich  $U$  durch die Gerade  $AB$ .



3. Schritt: Wir zeichnen die Gerade  $WC'$  und  $UB'$ , welche sich in dem gesuchten Punkt  $A'$  schneiden. Damit ist auch das zweite Dreiecke gefunden.



Zur Kontrolle zeichnen wir die Gerade über das Blatt hinaus. Im Unterricht können die Schülerinnen und Schüler Lineale oder Papierstreifen verwenden, um ihr Ergebnis zu überprüfen.



Der Satz von Desargues lässt sich mit den Axiomen der projektiven Geometrie<sup>2</sup> in der Ebene nicht beweisen bzw. es gibt Ebenen<sup>3</sup>, welche zwar die Axiome erfüllen, aber der Satz von Desargues nicht erfüllt ist [47, S. 41]. Analog verhält es sich mit dem Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie. Er kann aus dem Axiomensystem nicht gefolgert werden und muss explizit dem System hinzugefügt werden. Die sog. *nicht-euklidischen* Geometrien zeichnen sich dadurch aus, dass alle Axiome außer das Parallelenaxiom gültig sind.

Wir betrachten nun die euklidische Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem und wollen eine Richtung des Satzes von Desargues beweisen. Wir verwenden dazu die Methoden aus der analytischen Geometrie im Mathematikunterricht der Oberstufe an Gymnasien und Gesamtschulen. Zum besseren Verständnis soll die Beweisidee erst auf ein Zahlenbeispiel angewendet werden, d.h. Schülerinnen und Schüler entwickeln anhand einer konkreten Situation einen Rechenweg und übertragen diese dann im nächsten Schritt ins Allgemeine. Es wird sich zeigen, dass der zweite Schritt etwas mühselig ist, da einige Umformungen nötig sind.

<sup>2</sup>Das sind die Inzidenzaxiome (G1) und (G2) aus Abs. 2.2, S. 25, und zur Reichhaltigkeit, d.h. jede Gerade inzidiert mit mindestens drei Punkten und es gibt mindestens drei nicht kollineare Punkte. Da wir in der Arbeit aber unendlich viele Punkte und Geraden betrachten, wurden diese Axiome im genannten Abschnitt nicht erwähnt.

<sup>3</sup>sog. *Moulton Ebenen*, in welcher Geraden auch einen „Knick“ haben können.

**Aufgabenbeispiel 3.4.3**

Gegeben sei der Punkt  $Z(5/7)$  und zwei Dreiecke mit den Eckpunkten  $A(4/6)$ ,  $B(5.75/1)$ ,  $C(4/4.5)$  und  $A'(-2/0)$ ,  $B'(6/-1)$ ,  $C'(3/2)$ .

- Zeigen Sie jeweils, dass die Punkte  $Z, A, A'$  sowie  $Z, B, B'$  und  $Z, C, C'$  kollinear sind.
- Bestimmen Sie jeweils die Schnittpunkte  $U, V, W$  der Geraden  $AB$  mit  $A'B'$ ,  $BC$  mit  $B'C'$  und  $AC$  mit  $A'C'$ .
- Zeigen Sie, dass  $U, V$  und  $W$  ebenfalls kollinear sind.

Der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe lässt sich erhöhen, wenn die drei Teilschritte entfernt werden, sodass die Schülerinnen und Schüler sich selbst überlegen müssen, wie sie die Kollinearität der Schnittpunkte durch Berechnungen zeigen können.

*Lösung:*

Für Aufgabe a) gibt es zwei verschiedene Lösungswege. Im Sinne einer Punktprobe kann die Geradengleichung von  $ZA$  in Parameterform erstellt werden und über ein lineares Gleichungssystem der Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  für  $A'$  bestimmt werden:

$$g_{ZA} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 7$$

Eine andere Möglichkeit ist die Aufstellung der Parametergleichung der Geraden  $ZA$  und  $ZA'$ . Sind die Richtungsvektoren  $\vec{r}$  linear abhängig, so müssen die Geraden identisch sein, da sie den Punkt  $Z$  gemeinsam haben:

$$\vec{r}_{ZA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{r}_{ZA'} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_{ZA'} = 7 \cdot \vec{r}_{ZA}$$

Analog ergibt sich die Kollinearität für die beiden anderen Punktreihen.

Für b) werden die entsprechenden Geraden gleichgesetzt, das lineare Gleichungssystem gelöst und mit dem sich ergebenden Parametern der Schnittpunkt bestimmt:

$$\begin{aligned} g_{AB} : \vec{x} = g_{A'B'} : \vec{x} &\Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} 1.75 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{24}{17}, \mu = \frac{18}{17} \\ &\Rightarrow U(6.47 / -1.06) \end{aligned}$$

Analog ergeben sich  $V(7.5/-2.5)$  und  $W(4/2.4)$ . Dass diese drei Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, kann wie in Teil a) überprüft werden:

$$g_{UV} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6.47 \\ -1.06 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1.03 \\ -1.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -2.4$$

Wir wollen nun algebraisch beweisen, dass die Kollinearität von  $U, V$  und  $W$  unabhängig von der Wahl des Dreiecks  $\Delta ABC$  und dessen Bild  $\Delta A'B'C'$  ist. Sei  $\vec{z}$  der Ortsvektor vom Zentrum  $Z$ ,  $\vec{a}$  jener von  $A$  usw. Dann können die Strahlen durch folgende Geradengleichungen beschrieben werden:

$$g_{ZA} : \vec{x} = \vec{z} + \lambda_1(\vec{a} - \vec{z})$$

$$g_{ZB} : \vec{x} = \vec{z} + \lambda_2(\vec{b} - \vec{z})$$

$$g_{ZC} : \vec{x} = \vec{z} + \lambda_3(\vec{c} - \vec{z})$$

Die Parameter  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  seien nun fest gewählt, um die Bildpunkte zu erhalten. Hierbei sei zunächst vorausgesetzt, dass diese paarweise verschieden sind, d.h.  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . Somit gilt:

$$\vec{a}' = \vec{z} + \lambda_1(\vec{a} - \vec{z})$$

$$\vec{b}' = \vec{z} + \lambda_2(\vec{b} - \vec{z})$$

$$\vec{c}' = \vec{z} + \lambda_3(\vec{c} - \vec{z})$$

Wir stellen nun die entsprechende Verbindungsgeraden auf und berechnen den Schnittpunkt  $U$ . Da sich die Geraden nur durch die Wahl des Parameters und des Richtungsvektors unterscheiden, reicht die Berechnung eines Schnittpunktes aus, um analog die anderen folgern zu können.

$$g_{AB} : \vec{x} = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a})$$

$$g_{A'B'} : \vec{x} = \vec{a}' + \mu'(\vec{b}' - \vec{a}')$$

$$= [1 - \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\mu'] \vec{z} + (1 - \mu')\lambda_1 \vec{a} + \mu'\lambda_2 \vec{b}$$

Wie im Rechenbeispiel setzen wir beide Geradengleichungen gleich und sortieren nach links alle Terme mit  $\mu$  und  $\mu'$ :

$$\mu(\vec{a} - \vec{b}) + \mu'[(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{z} - \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}] = (1 - \lambda_1) \vec{z} + (\lambda_1 - 1) \vec{a}$$

Nun führen wir einen Koeffizientenvergleich durch, eine Methode, welche im Unterricht wohl eher unbekannt sein dürfte. Hierzu werden die Koeffizienten der Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{z}$  von der linken und rechten Seite verglichen:

$$(\mu - \mu' \lambda_1) \vec{a} + (-\mu + \mu' \lambda_2) \vec{b} + \mu' (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{z} = (1 - \lambda_1) \vec{z} + (\lambda_1 - 1) \vec{a} \quad (3.4.1)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcl} \mu & - & \mu' \lambda_1 & = & \lambda_1 - 1 \\ - \mu & + & \mu' \lambda_2 & = & 0 \\ \hline & & \mu' (\lambda_2 - \lambda_1) & = & \lambda_1 - 1 \end{array}$$

Aus den Koeffizienten der ersten beiden Vektoren lässt sich für die Parameter  $\mu$  und  $\mu'$  folgern:

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \mu &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}$$

Wird der Koeffizient vor  $\vec{z}$  durch den oberen Parameter  $\mu$  ersetzt, so ergibt sich jener der rechten Seite in Gl. (3.4.1), sodass die Probe erfolgreich ist. Der Schnittpunkt  $U$  ergibt sich somit durch Einsetzen des Parameters  $\mu$  in die Geradengleichung von  $g_{AB}$ . Anhand des sich ergebenden Musters können die anderen Schnittpunkte direkt gefolgert werden.

$$\vec{u} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \vec{b} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \vec{a} \quad (3.4.2)$$

$$\vec{v} = \frac{\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \vec{c} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \vec{b} \quad (3.4.3)$$

$$\vec{w} = \frac{\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \vec{a} - \frac{\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} \vec{c} \quad (3.4.4)$$

Für den letzten Schritt wird eine Gerade durch die ersten beiden Schnittpunkte gelegt und überprüft, ob der dritte Schnittpunkt Bestandteil jener Punktmenge ist.

$$\begin{aligned} g_{UV} : \vec{x} &= \vec{u} + \alpha (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \alpha \frac{\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \vec{c} \\ &\quad + \left[ (1 - \alpha) \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \alpha \frac{\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \right] \vec{b} \\ &\quad - (1 - \alpha) \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \vec{a} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Zur Bestimmung von  $\alpha$  wird der Koeffizient in Gl. (3.4.4) von  $\vec{c}$  mit jenem in Gl. (3.4.5) gleichgesetzt. Hierbei kann mit  $\lambda_3 \neq 0$  gekürzt werden:

$$\alpha = \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - 1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)}$$

Zuletzt wird dieser Parameter in Gl. (3.4.5) für die anderen beiden Vektoren eingesetzt:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1) - (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - 1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)} \\ &= \frac{\lambda_3 \lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)} \\ &= \frac{\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1 - \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)} \\ &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - 1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)} \end{aligned}$$

Koeffizient von  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} -(1 - \alpha) \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} &= -\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - 1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)} \frac{\lambda_1(\lambda_2 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_1(\lambda_3 - 1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)} \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Punkt  $W$  in Gl. (3.4.4) zeigt, dass die Koeffizienten von  $\vec{a}$  übereinstimmen. Analog würden wir für den Koeffizienten von  $\vec{b}$  vorgehen. Da dies wieder nur über Umformungen erfolgt, wird dieser Teil ausgelassen. Somit haben wir algebraisch gezeigt, dass der Satz von Desargues bis auf wenige Ausnahmen gültig ist. Diese wollen wir nun diskutieren.

In den Ortsvektoren der Schnittpunkte nach Gl. (3.4.3) - (3.4.4) wird jeweils durch die Differenz der Parameter dividiert, weshalb vorausgesetzt wurde, dass diese Werte paarweise verschieden sind. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Abb. 3.4.1 ändert, wenn bspw.  $\lambda_1 = \lambda_2$  gilt. Betrachten wir Gl. (3.4.1) und setzen entsprechend ein, so erhalten wir:

$$(\mu - \mu' \lambda_1) \vec{a} + (-\mu + \mu' \lambda_1) \vec{b} = (1 - \lambda_1) \vec{z} + (\lambda_1 - 1) \vec{a}$$

Da der Koeffizient für  $\vec{z}$  null ist, kann die rechte Seite durch keine Wahl von  $\mu$  und  $\mu'$  erfüllt werden. Wir nehmen dazu das Aufgabenbeispiel her und berechnen die Punkte  $A'$  und  $B'$  neu, wobei wir  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  setzen und folgende Koordinaten erhalten:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0.75 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Abb. 3.4.3 zeigt, dass sich eine zentrische Streckung an  $Z$  mit Streckfaktor  $\lambda_1 = 2$  ergibt. Dies können Schülerinnen und Schüler anhand des Rechenbeispiels nachvollziehen, in dem sie die Richtungsvektoren miteinander vergleichen:

$$\vec{r}_{A'B'} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1.75 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{r}_{B'C'} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1.75 \\ 3.5 \end{pmatrix} = 2 \vec{r}_{BC}$$

$$\vec{r}_{A'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} = 2 \vec{r}_{AC}$$

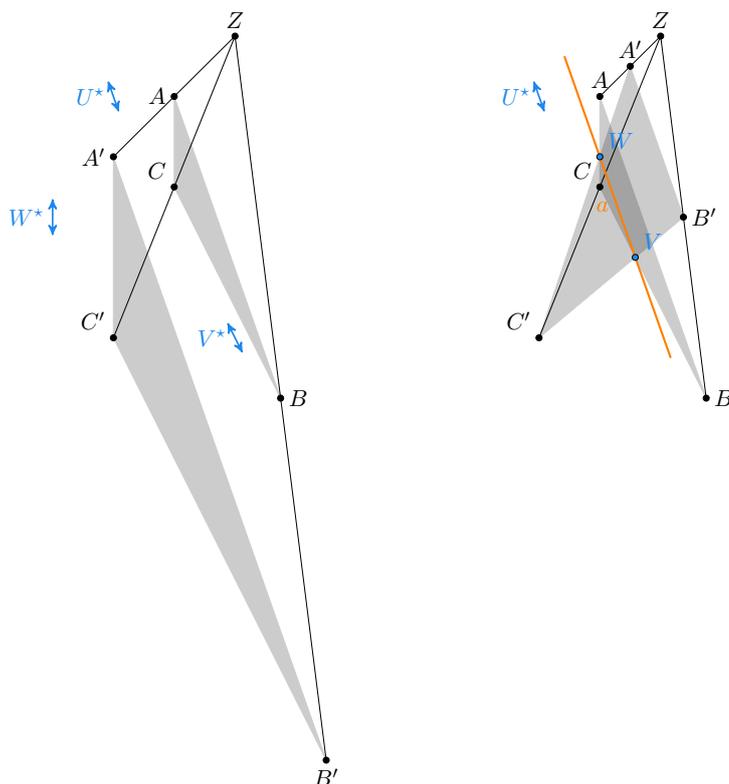


Abb. 3.4.3 Sonderfall des Satzes von Desargues mit  $\lambda_1 = \lambda_2$  ist.  
Links:  $\lambda_1 = 2$ , rechts:  $\lambda_1 = 0.5$

Für  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$  ergibt sich eine andere Situation. Hier sind zwar die Richtungsvektoren  $\vec{r}_{AB}$  und  $\vec{r}_{A'B'}$  linear abhängig, die beiden anderen Geradenpaare dagegen schneiden sich. Schauen wir uns dies wieder allgemein an und berechnen die Richtungsvektoren  $\vec{r}_{AB}$  und  $\vec{r}_{A'B'}$  für  $\lambda_1 = \lambda_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{z} + \lambda_1 (\vec{a} - \vec{z}) \text{ und } \vec{b}' = \vec{z} + \lambda_1 (\vec{b} - \vec{z}) \\ &\Downarrow \\ \vec{r}_{AB} &= \vec{b} - \vec{a} \text{ und } \vec{r}_{A'B'} = \lambda_1 (\vec{b} - \vec{z} - \vec{a} + \vec{z}) = \lambda_1 (\vec{b} - \vec{a}) \end{aligned}$$

Damit ist ebenfalls gezeigt, dass die Geraden  $g_{AB}$  und  $g_{A'B'}$  parallel sind, ihr Schnittpunkt ist daher der Fernpunkt  $U^*$ . Wir sehen in der Abb. 3.4.3 (rechts) sogar, dass auch dieser Fernpunkt auf der Geraden  $a$  liegt, da diese parallel zu  $AB$  verläuft.

Wegen  $\overline{ZC'} = 2 \overline{ZC}$  liegt für  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  in Abb. 3.4.3 (links) sogar eine zentrische Streckung vor, sodass die Dreiecksseiten jeweils zu ihrem Bild parallel sind. Die Schnittpunkte sind allesamt Fernpunkte, sodass die Gerade zur Ferngeraden  $a^*$  wird. Ein letzter Sonderfall bleibt für  $\lambda_i = 1$ , d.h. wenn eine der Dreiecksecken ein Fixpunkt ist. Sei bspw.  $\lambda_1 = 1$ , sodass  $A = A'$  gilt. Für  $\lambda_1 = \lambda_2$  wäre die obige Gleichung (3.4.1), S. 81, zur Berechnung von  $\mu$  und  $\mu'$  wieder lösbar, da somit auch der Term  $1 - \lambda_1$  wegfällt. Die Geraden  $AB$  und  $A'B'$  schneiden sich dann in  $A$ , sodass  $A = U$  gilt. Dann schneiden sich auch  $AC$  und  $A'C'$  in  $A$ , sodass insgesamt sogar  $A = A' = U = W$  vorliegt.

Kommen wir zurück zu dem Beweis des Satzes von Desargues. Wir haben gesehen, dass der algebraische Beweis für den Unterricht aufgrund der komplizierten Umformungen nicht sinnvoll ist. Hier ist von den Schülerinnen und Schüler weniger Verständnis gefragt als Konzentrationsfähigkeit und Umformungsgeschick. Eine alternative Beweisidee wird von *Liebscher* bzw. *Stolzenburg* genannt [34, S. 19] [47, S. 37].

Wir interpretieren dazu das Dreieck  $\Delta ABC$  als Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze  $Z$  (Abb. 3.4.4). Das zweite Dreieck  $\Delta A'B'C'$  ergibt sich als Schnitt einer weiteren Ebene mit der Pyramide. Im Sinne einer Zentralprojektion liegt die Grundfläche in der Objektebene (grün) und geschnitten wird mit der Bildebene (blau). Beide Ebenen schneiden sich in der Geraden  $a$ . Sind jene parallel, so wird der Schnitt zur Ferngeraden. Da diese Gerade sowohl in der Objekt- als auch in der Bildebene liegt, ist jeder Punkt von  $a$  ein Fixpunkt.

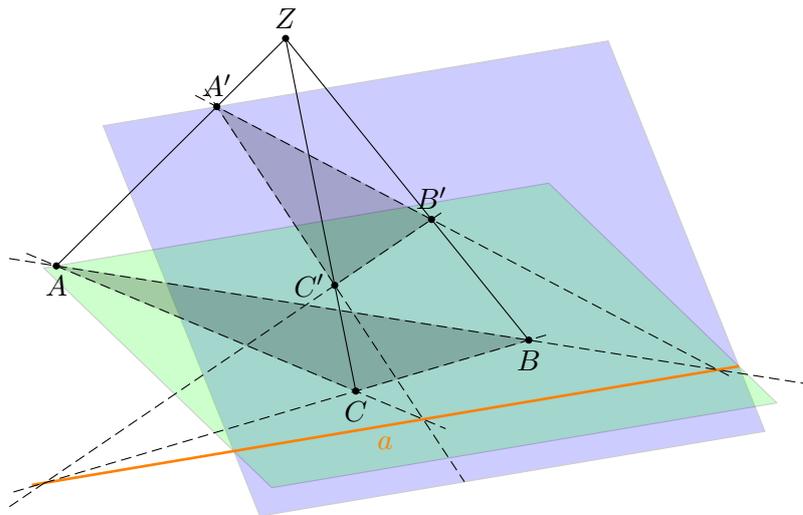


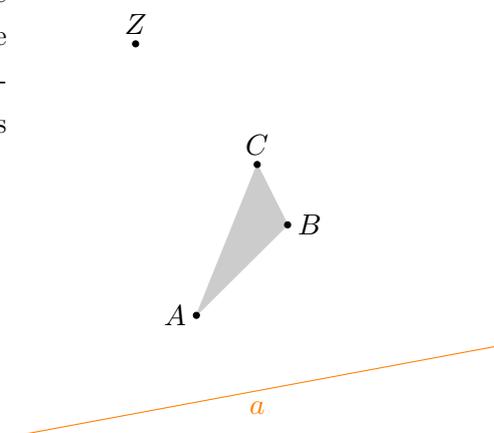
Abb. 3.4.4 Der Satz von Desargues interpretiert als Zentralprojektion

Die Gerade  $AB$  liegt in der Objektebene, die Gerade  $A'B'$  in der Bildebene und nach Satz 3.1.2, S. 49, schneiden sie sich in einem Fixpunkt. Demnach muss dieser auf  $a$  liegen, sodass alle Schnittpunkte der entsprechenden Geraden durch die Eckpunkte der Dreiecke auf dieser Fixpunktgeraden liegen müssen. Die Figur zum Satz von Desargues entsteht durch Projektion dieser Pyramide in eine Ebene. Da diese inzidenttreu ist, bleiben die Schnittpunkte zwischen den Geraden erhalten.

Wir kommen nun zu weiteren Aufgaben, welche für den Einsatz im Unterricht geeignet erscheinen und mithilfe des Satzes von Desargues gelöst werden können.

#### Aufgabenbeispiel 3.4.4

Gegeben ist der Punkt  $Z$ , die Gerade  $a$  und das Dreieck  $\triangle ABC$ . Konstruiere das Bilddreieck  $\triangle A'B'C'$  unter Verwendung des Satzes von Desargues. Gibt es nur eine Lösung?



*Lösung:*

Wir wissen, dass die Bildpunkte auf den jeweiligen Strahlen durch die Eckpunkte liegen. Weiterhin wissen wir, dass nach dem Satz von Desargues die Geraden durch die Dreiecksseiten die Gerade  $a$  in den Punkten  $U, V, W$  schneidet. Wir fügen daher entsprechende Geraden (schwarz) in die Zeichnung ein.

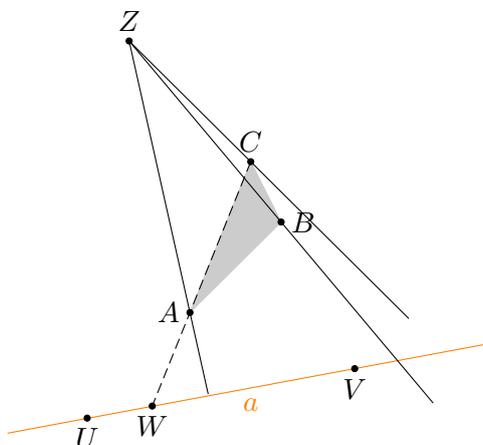


Abb. 3.4.5 Erster Lösungsschritt von Aufgabenbsp. 3.4.4

Wir fragen uns nun, ob die Abbildung durch  $Z$  und  $a$  eindeutig definiert ist und fügen einen beliebigen Bildpunkt  $A'$  (blau) auf der Geraden  $ZA$  ein. Folglich können wir  $B'$  finden, indem wir eine Gerade durch  $A'$  und  $U$  legen. Der Schnittpunkt mit  $ZB$  ist  $B'$ . Genauso finden wir auch  $C'$  mithilfe von  $V$ . Wir stellen fest, dass auch die Geraden  $AC$  und  $A'C'$  sich in  $W$  schneiden. Kann das Zufall sein?

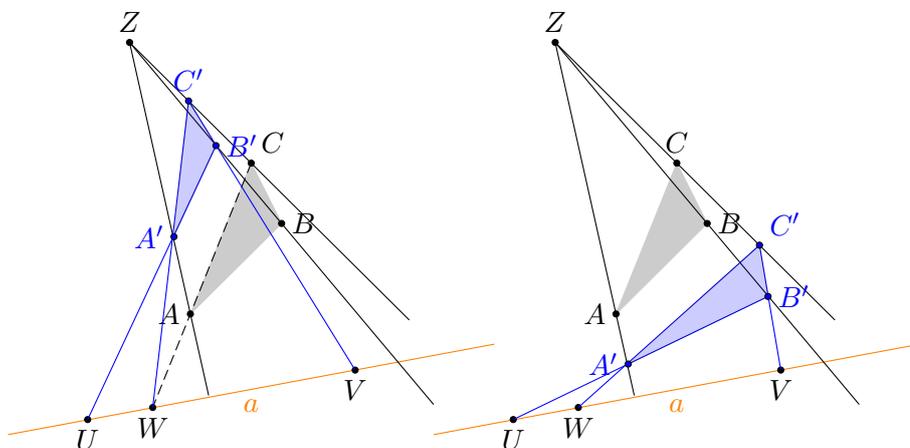


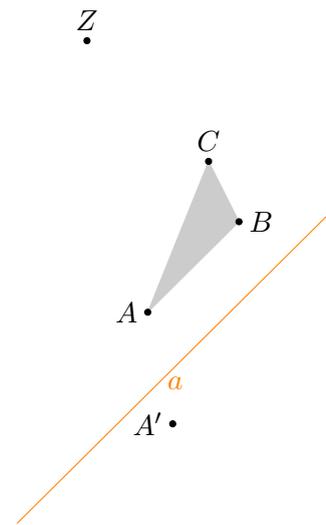
Abb. 3.4.6 Mögliche Lösungen von Aufgabenbsp. 3.4.4

Wir zeichnen die Figur erneut und fügen den Punkt  $A'$  an einer anderen Stelle auf dem Strahl  $ZA$  ein. Wir erhalten ein ganz anderes Bilddreieck, die Bedingungen bleiben aber erfüllt. Demnach führt die Angabe von  $Z$  und  $a$  nicht zu einer eindeutigen Abbildung. Wir haben im Beweis schon erwähnt, dass die Beweisfigur als eine Projektion einer Zentralprojektion in eine Ebene angesehen werden kann. Hierbei fallen Objekt- und Bildebene zusammen. D.h. die beiden Beispiele sind Zentralprojektionen

mit demselben Zentrum und derselben Objektebene. Sie unterscheiden sich aber in der Wahl der Bildebene bzw. der Schnittebene der schiefen Pyramide in Abb. 3.4.4. Einzige Bedingung ist, dass die Bildebene die Gerade  $a$  enthält. Die verschiedenen Bilddreiecke  $A'B'C'$  entstehen daher, wenn in der Abbildung die blaue Bildebene um die Achse  $a$  gedreht wird.

#### Aufgabenbeispiel 3.4.5

Gegeben ist der Punkt  $Z$ , die Gerade  $a$  und das Dreieck  $\triangle ABC$  sowie der Bildpunkt  $A'$ . Konstruiere das Bilddreieck  $\triangle A'B'C'$  unter Verwendung des Satzes von Desargues. Achte dabei auf die besondere Lage des Dreiecks zur Geraden. Findest du einen Punkt  $A'$ , sodass  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  ähnlich zueinander sind?



*Lösung:*

Der Hinweis ist in der Aufgabenstellung schon gegeben. Die Dreiecksseite  $\overline{AB}$  liegt parallel zur Geraden  $a$ , sodass der Schnittpunkt  $U$  ein Fernpunkt ist. Wir müssen daher durch  $A'$  eine Parallele zu  $a$  ziehen. Die anderen Dreiecksseiten erhalten wir wie zuvor. Für den zweiten Teil müssen sich die Schülerinnen und Schüler überlegen, woran sie erkennen können, dass zwei Dreiecke ähnlich zueinander sind oder sich an die Winkeltreue der zentrischen Streckung erinnern. Dies hat zur Folge, dass auch  $BC \parallel B'C'$  und  $AC \parallel A'C'$  gilt. Ihre Schnittpunkte werden zu Fernpunkten und die Gerade  $a$  verschwindet und

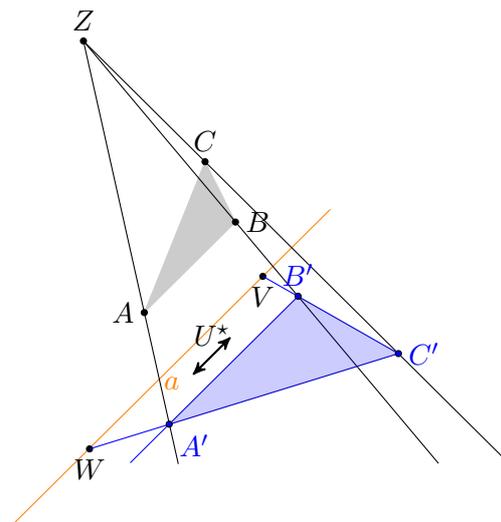


Abb. 3.4.7 Lösungen zu Aufgabenbsp. 3.4.5

wird zur Ferngeraden. Da laut Aufgabenstellung aber  $a$  eine gewöhnliche Gerade ist, existiert kein Punkt  $A'$  auf  $ZA$ , sodass beide Dreiecke zueinander ähnlich werden. Was ebenfalls von den Schülerinnen und Schüler beobachtet werden kann, ist, dass sich die Orientierung des Bilddreiecks umkehrt, wenn  $A'$  auf der anderen Halbebene, welche durch  $a$  entsteht, liegt als  $A$ .

### Aufgabenbeispiel 3.4.6

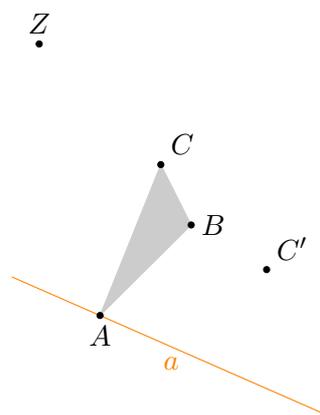
Wir haben gesehen, dass eine Dreiecksseite parallel zur Geraden  $a$  sein kann. Ist es auch möglich, dass genau zwei Seiten parallel zu  $a$  sind?

*Lösung:*

Hier können die Schülerinnen und Schüler verschieden argumentieren. Ist o.B.d.A.  $AB \parallel a$  sowie  $a \parallel BC$ , dann ist aufgrund der Transitivität der Parallel-Relation auch  $AB \parallel BC$ . Demnach ist  $ABC$  kein Dreieck mit gewöhnlichen Punkten. Eine andere Möglichkeit ist die Argumentation über Fernpunkte. Ist  $AB \parallel a$ , dann ist der Schnittpunkt  $U^*$ . Ebenso existiert  $V^*$ . Da nach den Axiomen der projektiven Ebene zwei Punkte genau eine Gerade festlegen, wird  $a$  zur Ferngeraden  $a^*$ . Dann muss auch der dritte Punkte ein Fernpunkt sein, sodass auch  $AC \parallel a$  gilt.

### Aufgabenbeispiel 3.4.7

Gegeben ist der Punkt  $Z$ , die Gerade  $a$  und das Dreieck  $\triangle ABC$  sowie  $C'$ .  
Wo liegt  $A'$ ? Konstruiere das Bilddreieck  $\triangle A'B'C'$ .







## Kapitel 4

# Die Zentralprojektion

Wir haben in den vorherigen Kapiteln einige Grundlagen zur Projektion besprochen und wollen dieses Wissen nun nutzen, um die Methoden zur Konstruktion zentralprojektiver Bilder mathematisch zu hinterfragen, d.h. wir legen nun fest, dass das Projektionszentrum ein gewöhnlicher Punkt und kein Fernpunkt ist.

Im ersten Abschnitt gehen wir der Frage nach, wo uns die Zentralprojektion in der Umwelt bzw. im Alltag begegnet und wie sich in Fotos einige ihrer Besonderheiten wiederfinden lassen. Dies ist vor allem für Schülerinnen und Schüler spannend, da sie zum einen sich mit Mathematik in der Umwelt befassen können und zum anderen digitale Medien zum fotografieren passender Beispiele nutzen können.

Nach einer Erläuterung der Vor- und Nachteile der Bilder einer Zentralprojektion wird auf verschiedene Konstruktionsmethoden eingegangen und dabei erläutert, welche Invarianten bzw. Eigenschaften der Abbildung verwendet werden.

Da die Zentralprojektion nicht nur mit analytischen Methoden aus der Oberstufe an Gymnasien und Gesamtschulen dargestellt werden soll, wird im Anschluss die Theorie aus der Sicht der projektiven Geometrie betrachtet. Hierzu wird als Einstieg die Projektion zwischen zwei Geraden untersucht und einige Aufgabenbeispiele für den Unterricht gegeben. Darauf aufbauend wird die Zentralprojektion vom Raum in die Ebene mithilfe homogener Koordinaten motiviert, welche u.a. in der Computergrafik verwendet werden. Als Anwendung dazu wurde in der Programmiersprache *Processing* Funktionen geschrieben, welche es ermöglichen, Anaglyphenbilder von einfachen Objekten wie Würfel, Quader oder Pyramiden zu erstellen. Dies soll einerseits eine Möglichkeit bieten, fachübergreifend zu unterrichten und andererseits den Schülerinnen und Schülern in Zeiten der Digitalisierung einen Einblick in eine Programmiersprache ermöglichen.

## 4.1 Zentralprojektion in der Umwelt

In den aktuellen Kernlehrplänen zum Mathematikunterricht werden die drei Grunderfahrungen nach *H. Winter* (1996) genannt. So steht im Abschnitt *Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts* im Kernlehrplan zur Sekundarstufe I NRW (KMK, 2007) geschrieben:

Schülerinnen und Schüler sollen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

- Erscheinungen aus Natur, Gesellschaft und Kultur mithilfe der Mathematik wahrnehmen und verstehen (Mathematik als Anwendung),
- [...]

Die Beschäftigung mit der Zentralprojektion folgt diesem Ansatz, denn der Sehvorgang an sich entspricht dieser Abbildung. Die nebenstehenden Fotografien zeigen Situationen, in welcher die besonderen Eigenschaften der Zentral- und Parallelprojektion hervortreten, möglicherweise aber nicht jedem bewusst sind, da sie der Normalität angehören. Wir wissen, dass in der Realität ein Zaun immer dieselbe Höhe hat und nicht in der Ferne schmaler wird, obwohl unser Auge dies so wahrnimmt. Dass gerade Objekte wie Gleise, Zaunkanten oder Fahrzeugspuren im aufgeweichten Erdboden einem Fluchtpunkt entgegenstreben und sich scheinbar am Horizont schneiden, scheint auf den ersten Blick nicht verwunderlich. Wir wissen aber auch gleichzeitig, dass es sich um Parallelen handelt, d.h. diese Geraden haben in der Realität immer denselben Abstand. Dennoch wundert sich niemand über diesen scheinbaren Widerspruch.

Möglicherweise aufgrund der gleichzeitigen Raumerfahrung, denn wir schauen in der Ferne nicht auf eine Wand oder ein Foto. Allerdings ist eine Fotografie gleichfalls eine Zentralprojektion des Raumes in



Abb. 4.1.1 Mit einer Kamera lassen sich zentralprojektive Bilder erzeugen.

eine Ebene. Der Tiefeneindruck geht dabei verloren, denn die Projektion erfolgt anhand eines Zentrums, unsere Sicht auf die Welt dagegen über zwei. Obwohl die Augen relativ nahe beieinander stehen, ist die Projektion des uns umgebenden Raumes auf die Netzhaut leicht verschieden. Unser Gehirn vermag diese Bilder derart übereinander zu legen, dass wir einen Eindruck von Tiefe erfahren. Mit einigen Tricks lassen sich die Augen täuschen, sodass auch ein flaches Bild räumlich wirkt, wie bei dem Rot-Grün-Verfahren, welches im Abschnitt 7.1 näher erläutert wird. Die Projektionen beider Augen sind auf einem Bild gegeben, allerdings das eine rot, das andere grün. Mit einer Rot-Grün-Brille in umgekehrter Reihenfolge lässt sich jeweils ein Bild herausfiltern, während das andere durch die Überlagerung der Komplementärfarben schwarz wird. Die Augen sehen somit ihr passendes Bild und unser Gehirn sorgt wieder für den räumlichen Eindruck. Nachteil dieser Methode ist, dass die resultierenden Bilder in Graustufen vorliegen.

Im Kunstunterricht wird die *Ein-Fluchtpunkt-* bzw. *Übereck-Perspektive* gelehrt (Lehrplan NRW Gym, Jgst. 7 - 9, 2011 sowie Ges 7 - 10, 2012). Oftmals werden Häuserreihen gezeichnet oder Gebäude mit Türmen und Treppen. Bei Letzteren gibt es eine Besonderheit bzgl. der Lage des Fluchtpunktes. Dieser wird normalerweise auf den Horizont gezeichnet. Ist die Ebene aber gekippt und nicht mehr parallel zum Boden, wie es bei Treppen der Fall ist, so verschiebt sich der Fluchtpunkt senkrecht nach oben oder unten. Abb. 4.1.2 zeigt ein Foto zweier Treppen, wo die grünen Linien sich in Fluchtpunkten außerhalb des Fotos schneiden. Die orangen Linien sind Bilder von Geraden, welche parallel zum Boden verlaufen. Ihr Fluchtpunkt liegt daher auf dem Horizont. Die Fluchtpunkte der Treppen liegen ober- und unterhalb dieser blauen Geraden.

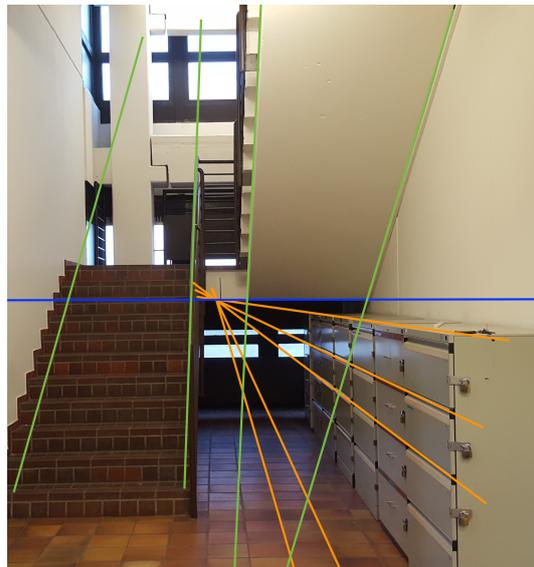


Abb. 4.1.2 Treppe mit vertikal verschobenen Fluchtpunkten

Die Konstruktionsmethoden werden im Abschnitt 4.3, S. 96, vorgestellt und aus Sicht der Mathematik erläutert. Im Kunstunterricht werden solche Methoden gelehrt und angewendet. Allerdings ohne die Begründung, weshalb sie funktionieren.



Abb. 4.1.3 Die Schatten sind bei einer Lampe zentralprojektiv (links), bei der Sonne dagegen parallelprojektiv (rechts).

Auch in Form von Schattenbildern begegnet uns die Projektion im Alltag [31, S. 4]. So sind die Schatten der Zaunpfosten auf dem mittleren Foto in Abb. 4.1.1 ebenfalls parallel, obwohl das Sonnenlicht von der Seite kommt. Würden wir die Sonne durch eine Laterne seitlich neben dem Zaun ersetzen, so wären die Schatten der Pfosten nicht mehr parallel. Sie würden strahlenförmig von der Lichtquelle davon streben. Da eine Laterne eine punktförmige Lichtquelle darstellt, handelt es sich bei den Schatten um das Bild einer Zentralprojektion mit der Lichtquelle als Zentrum und dem Boden als Bildebene. Die Sonne ist ebenfalls punktförmig, allerdings können die Strahlen aufgrund der extremen Entfernung zur Erde als parallel angesehen werden, sodass der Spezialfall der Parallelprojektion eintritt, welche in Kap. 5 besprochen wird. Ein weiteres Beispiel zeigt Abb. 4.1.3. Während bei Sonnenlicht der Schattenwurf der vertikalen Streben des Mülleimers parallel bleiben, streben sie links im Schein der Lampe auseinander. Der Fluchtpunkt liegt dabei senkrecht unterhalb der Lampe, denn sie ist das Projektionszentrum und der Boden die Bildebene.

## 4.2 Eigenschaften der Bilder

Da die Zentralprojektion dem natürlichen Sehprozess nahe kommt, wirken die Bilder realitätsnah [31, S. 4]. Abb. 4.2.1 zeigt ein Haus mit einem Prisma als Dach, links abgebildet durch die Parallelprojektion, rechts durch die Zentralprojektion. Da erstere parallelentreu (s. Abb. 3.2.1, S. 56) ist, ist sofort erkennbar, dass das Haus aus einem Quader und einem Prisma aufgebaut ist. Die Zentralprojektion ist im Fall von Geraden parallel zur Bildebene parallelentreu. Dies ist daher nur bei den Höhenlinien der Fall. Alle anderen Geraden eines Parallelbüschels schneiden sich im Fluchtpunkt. Aufgrund des abnehmenden Abstandes entsteht der Eindruck von Tiefe, weshalb zentralprojektive Bilder realistischer wirken. Dagegen werden Längen und Winkel verzerrt. So sind gegenüberliegende Kanten des Quaders gleich lang. Während links

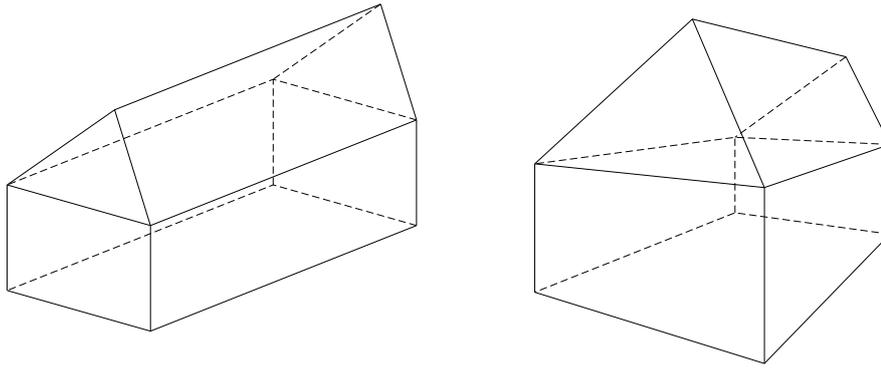


Abb. 4.2.1 Ein Haus, links in Parallelprojektion und rechts in Zentralprojektion

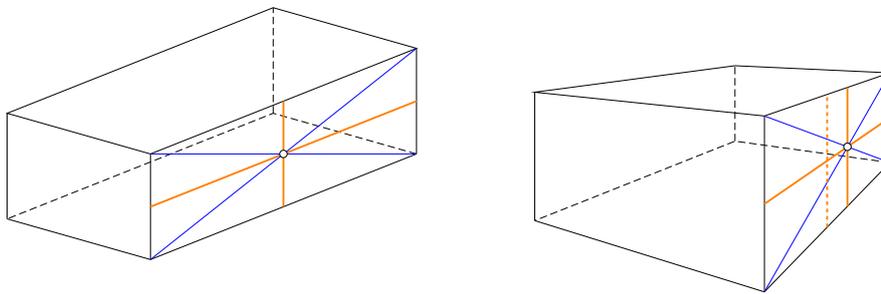


Abb. 4.2.2 Aufgrund der Teilverhältnistreue ist das Finden von Mittelpunkte bei parallelprojektiven Bildern einfacher als bei zentralprojektiven.

im Bild zwar die Längen sich ändern, diese aber dennoch untereinander gleich sind, so ist im rechten Bild die obere Kante des Quaders kürzer als die untere.

Aufgrund der Parallelen- und Teilverhältnistreue lassen sich parallelprojektive Bilder leichter konstruieren. Die Orthogonale durch die Dachspitze des Prismas teilt die Kanten des Quaders im Verhältnis 1:3, welches im linken Bild von Abb. 4.2.1 trotz veränderter Kantenlängen erhalten bleibt. Im rechten zentralprojektiven Bild ist dies nicht mehr der Fall.

Abb. 4.2.2 zeigt die Konstruktion des Mittelpunktes auf der Seitenfläche des Quaders. In beiden Fällen lässt sich der Mittelpunkt über den Schnittpunkt der beiden Diagonalen (blau) finden, da diese sich in einem Rechteck dort schneiden. Hier gilt die Inzidenztreue. Dagegen lässt sich im linken Bild der Mittelpunkt zusätzlich über den Schnittpunkt der Mittellinien (orange) finden. Dies ist rechts nicht mehr möglich, denn das Bild der Mittellinie ist in Richtung des Fluchtpunktes verschoben.

### 4.3 Konstruktionsmethoden

Mithilfe von Fotoapparaten lassen sich zentralprojektive Bilder leicht erzeugen, so dass Schülerinnen und Schüler selbst einige interessante Eigenschaften anhand von Fotografien entdecken können. Eine Aufgabe dazu kann wie folgt aussehen:

#### Aufgabenbeispiel 4.3.1

Mache mit deiner Handykamera oder mit einem Fotoapparat Fotos vom Schulflur, dem Treppenhaus oder anderen Orten nahe des Klassenzimmers, welche Objekte mit parallelen Kanten enthalten, wie die Treppenstufen, Säulen, Fliesen usw. Nachdem deine Fotos gedruckt wurden, nehme Lineal und Bleistift und mache folgendes:

- a) Was fällt dir auf, wenn du dir die Treppenstufen anschaust oder alle anderen Kanten, welche ursprünglich parallel waren?
- b) Verlängere die besonderen Kanten aus a) im Bild. Was fällt dir auf?

Mit den eigenen Fotos sollen die Schülerinnen und Schüler anhand der Leitfragen entdecken, dass sich die ursprünglich parallelen Kanten im Foto schneiden, wenn sie verlängert werden, und insbesondere kopunktal sind. Im Falle der Treppen finden sich auch parallele Geradenbüschel, welche sich nicht in einem Punkt des Horizontes schneiden, da die Ebene nicht parallel zum Boden verläuft. Diese Untersuchung bietet zwei Möglichkeiten der Weiterführung. Zum einen lassen sich diese Beobachtungen mathematisch über die Zentralprojektion begründen, entweder über die Konstruktion der Sehstrahlen mithilfe von *GeoGebra* oder mit Mitteln der analytischen Geometrie aus der Sekundarstufe II, welche in einem nachfolgenden Abschnitt erläutert wird. Andererseits bietet dies auch eine Motivation sich mit Konstruktionsmethoden aus dem Kunstunterricht auseinanderzusetzen.

In Abb. 4.3.1 sind einige Fotografien, in denen besonders gut Eigenschaften der Zentralprojektion von den Schülerinnen und Schüler untersucht werden können. Lange Flure flüchten besonders extrem im Fluchtpunkt, wie die blauen Linien in den Fotos zeigen. Wir wissen, dass der Flur überall gleich breit ist, d.h. sowohl die Kanten im Boden als auch an der Decke sind parallel zueinander. Doch auf den Fotos schneiden sie sich im Fluchtpunkt. Auch die Oberkanten der Türen sind parallel zum Boden ausgerichtet, denn niemand würde schräge Türen erwarten. Im Bild schneiden sich die Verbindungsgeraden im selben Fluchtpunkt. Dagegen sind die orange markierten Lampen parallel zur Bildebene ausgerichtet. Ihre Projektionen schneiden sich nicht in einem gewöhnlichen Punkt, sie werden ebenfalls auf parallele Geraden abgebildet.

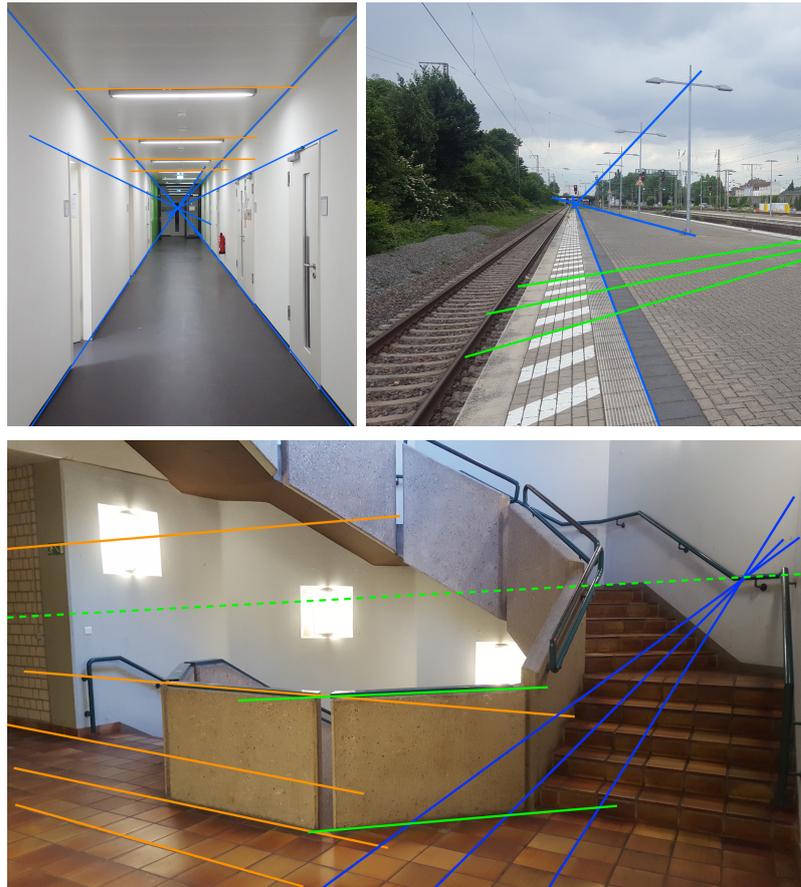


Abb. 4.3.1 Bahnsteige und lange Flure bieten besonders gute Motive, um sich mit der Zentralprojektion auseinander zu setzen.

Kommen wir zu den Fotografien vom Bahnsteig und der Wendeltreppe. Am Bahnsteig ist wieder der Fluchtpunkt aufgrund der langen Strecken deutlich hervorgehoben. Der Abstand und die Höhe der Lampenmasten werden in der Projektion kleiner, je weiter weg sie sich von dem Betrachter befinden. Die weißen Markierungen am Bahnsteigrand sind ebenfalls parallel, sie haben aber eine andere Ausrichtung als die Gleise. Ihre Bilder schneiden sich daher in einem anderen Fluchtpunkt, wie die grünen Markierungen zeigen. Die Verbindungsgerade der Fluchtpunkte ist der Horizont. Hält der Betrachter die Kamera parallel zum Boden, sollte der Horizont auch parallel zum unteren Bildrand verlaufen.

Dies ist bei der Wendeltreppe im dritten Foto nicht der Fall, wie an der grünen gestrichelten Markierung erkennbar ist. Die Wendeltreppe weist parallele Geraden in verschiedenen Richtungen auf, sodass wir mit den Fluchtpunkten des blauen und orangen Parallelbüschels den Horizont finden können. Die grünen Linien sind parallel zum Betrachter ausgerichtet, daher liegen sie auch parallel zum Horizont.

Nun haben wir die Lage der Geraden besprochen, aber was passiert mit metrischen Größen wie Längen und Winkeln? Die Türen des Flurs in Abb. 4.3.2 sind in Wirklichkeit rechtwinklig, in der Projektion dagegen nicht. Die Winkel werden also durch die Abbildung verzerrt. Wir würden erwarten, dass die Türen allesamt gleich groß sein sollten. Im Bild werden sie kleiner, je weiter weg sie sich vom Betrachter befinden. Somit werden auch Längen verändert.

Mithilfe eines Lineals können Schülerinnen und Schüler erkunden, wie sich Abstände durch die Projektion verändern. Hierfür wurde mit dem frei verfügbaren Programm *ImageJ* Längen innerhalb der Bilder bzgl. einer frei definierten Skala bestimmt. Wir markieren eine beliebige Strecke und ordnen dieser die Länge 10 zu. Das Programm kennt die zugehörige Anzahl an Pixeln dieser Strecke, sodass hierdurch eine Skala festgelegt wird. Dann wurden weitere Strecken markiert und von dem Programm anhand dieser Skala gemessen.

Mit dem Lineal lässt sich zeigen, dass bei paralleler Lage des Lineals zum Fotoapparat die Abstände äquidistant bleiben. Ordnen wir dem Abstand zwischen drei bzw. zwei Zentimeter Markierungen die Länge 10 zu, so ergibt sich nahezu derselbe Wert an einer anderen Stelle auf dem Lineal. Demnach ist das Streckenverhältnis zwischen der wahren Strecke und der auf dem Foto gleich geblieben. Dieses Beispiel hat somit erfolgreich gezeigt, dass die Projektion bei paralleler Ausrichtung der Strecke zur Bildebene streckenverhältnistreu ist.

Wird das Lineal schräg zum Fotoapparat gelegt, verkleinern sich die Abstände der Markierungen für 1 cm, je weiter sie nach hinten liegen. Wir können dagegen zeigen, dass das Doppelverhältnis gültig ist. Wir legen wieder mit *ImageJ* eine willkürliche Skala fest, indem wir der Bildstrecke zwischen den Markierungen für 0 und 4 cm die Länge 10 zuordnen. Nach der Definition des Doppelverhältnisses (Def. 2.3.2, S. 30) benötigen wir eine Strecke  $\overline{AB}$  sowie zwei Teilungspunkte  $C$  und  $D$ . Wir legen  $A$  an die Markierung für 0 cm sowie  $B$  an 9,  $C$  an 4 und  $D$  an 6. Somit ergeben sich folgende Länge für Strecke und Bildstrecke:

$d(A, C) = 4 \text{ cm}$	$d(C, B) = 5 \text{ cm}$	$TV(A, B, C) = 0,80$
$d(A', C') = 10$	$d(C', B') = 10,32$	$TV(A', B', C') \approx 0,97$
$d(A, D) = 6 \text{ cm}$	$d(D, B) = 3$	$TV(A, B, D) = 2$
$d(A', D') = 14,36$	$d(D', B') = 5,96$	$TV(A', B', D') \approx 2,41$

Aus den Teilverhältnissen ergeben sich dann folgende Doppelverhältnisse:

$$DV(A, B, C, D) \approx 0,82 \quad DV(A', B', C', D') \approx 0,83.$$

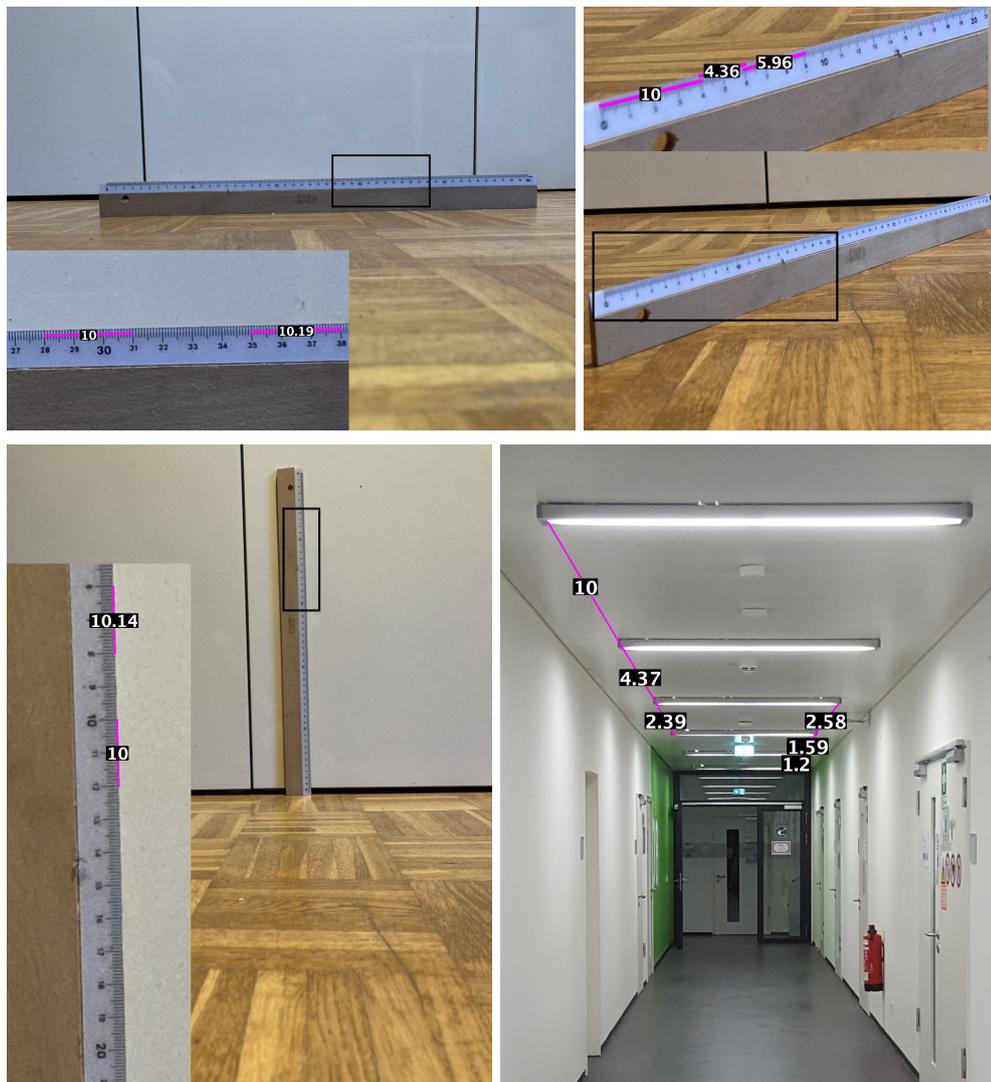


Abb. 4.3.2 Mit einem Lineal können Schülerinnen und Schüler erkunden, wie sich Längen durch das Fotografieren verändern.

Das Doppelverhältnis ist für die Strecke und ihre Bildstrecke bis auf einen Rundungsfehler identisch. Wir betrachten noch einmal den Flur in Abb. 4.3.2. Da auf dem Foto kein Lineal zum Messen der ursprünglichen Strecken abgebildet wurde, nehmen wir als Beispiel die Deckenleuchten. Wir müssen nicht den exakten Abstand zwischen den Leuchten kennen, da wir für das Doppelverhältnis zuvor das Teilverhältnis bestimmen müssen. Wir gehen davon aus, dass die Leuchten in dem öffentlichen Gebäude entlang des Flures im gleichen Abstand  $a$  angebracht wurden:

$d(A, C) = a$	$d(C, B) = 2a$	$TV(A, B, C) = 0,5$
$d(A', C') = 10$	$d(C', B') = 6.76$	$TV(A', B', C') \approx 1,48$
$d(A, D) = 2a$	$d(D, B) = a$	$TV(A, B, D) = 2$
$d(A', D') = 14,37$	$d(D', B') = 2.39$	$TV(A', B', D') \approx 6,01$
$\Rightarrow DV(A, B, C, D) = 0,25$		$DV(A', B', C', D') \approx 0,25$

Es wurden noch die Bildstrecken der Leuchten am Ende des Flures vermessen, um zu zeigen, dass das Doppelverhältnis auch an anderen Stellen in Abb. 4.3.2 erhalten bleibt:

$d(A, C) = a$	$d(C, B) = 2a$	$TV(A, B, C) = 0,5$
$d(A', C') = 2,58$	$d(C', B') = 2.79$	$TV(A', B', C') \approx 0,92$
$d(A, D) = 2a$	$d(D, B) = a$	$TV(A, B, D) = 2$
$d(A', D') = 4,17$	$d(D', B') = 1.20$	$TV(A', B', D') \approx 3,48$
$\Rightarrow DV(A, B, C, D) = 0,25$		$DV(A', B', C', D') \approx 0,26$

Das letzte Foto zeigt quadratische Blöcke als Sitzgelegenheiten auf einem Vorplatz (Abb. 4.3.4). Die quadratischen Kacheln des Bodens bieten ebenfalls Möglichkeiten, das Doppelverhältnis zwischen realem Raum und der Projektion zu untersuchen. Es dient ähnlich eines Koordinatensystems auch zur Orientierung. So sind alle drei Blöcke Quader mit quadratischer Grundfläche und parallel zum Fotoapparat orientiert. Die Tiefenlinien flüchten im Fluchtpunkt auf dem Horizont.



Abb. 4.3.3 Quader auf einem Vorplatz

Tiefenlinien flüchten im Fluchtpunkt auf dem Horizont.

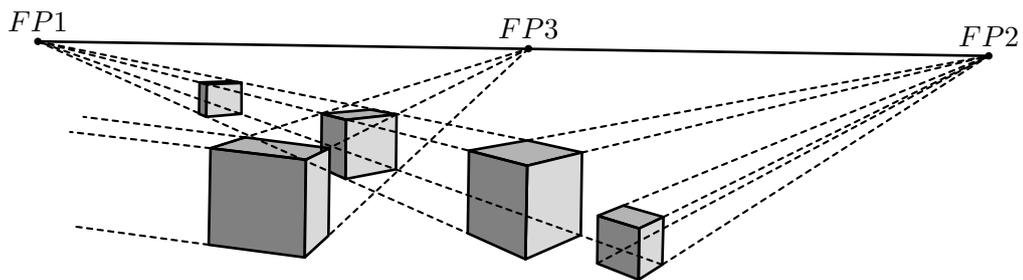
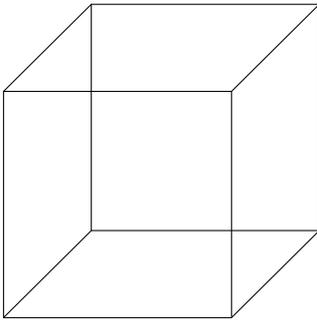


Abb. 4.3.4 Konstruktion der Zwei-Punkt-Perspektive bzw. Übereck-Perspektive

Unterschiedlich orientierte Würfel sind Beispiele, wie sie auch in Zeichenbüchern vorkommen. Abb. 4.3.4 zeigt eine solche Szene. Bis auf eine Ausnahme sind alle Würfel um  $45^\circ$  gedreht, denn eine der Diagonalen ist parallel zum Horizont ausgerichtet. Aber woran lässt sich erkennen, dass hier Würfel abgebildet sind? Die Fluchtpunkte  $FP1$  und  $FP2$  sind gleich weit vom Hauptpunkt entfernt, welcher hier mit  $FP3$  zusammen fällt. Demnach ist die Grundfläche der Quader quadratisch. Ob auch die Höhe gleich ist, lässt sich aus dem Abbild nicht sagen, da der Abstand des Beobachters zur Bildebene nicht gegeben ist. Die Objekte lassen sich somit nicht in die Bildebene entlang der Tiefenlinien verschieben, wo Längen auf sich selbst abgebildet werden.

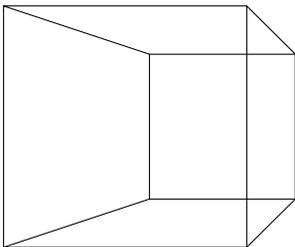
Im Kunstunterricht werden Szenen oftmals nicht aus Objekten mit gegebenen Maßen konstruiert. Stattdessen wird erst die Lage des Horizontes festgelegt und dann ein oder zwei Fluchtpunkte, um bspw. eine Häuserreihe zu konstruieren. Die Maße der Häuser ist dabei nicht nötig. Wir werden in folgenden Konstruktionsverfahren vorstellen, welche Objekte anhand des Grund- bzw. Aufrisses auf eine Bildebene projizieren, deren Abstand zum Betrachter bekannt ist. Zuvor soll aber noch an einigen Fotografien gezeigt werden, welche Auswirkungen die Lage des Horizontes bzw. die Anzahl der Fluchtpunkte auf das Bild der Szene hat.

### 4.3.1 Fluchtpunktperspektive und Horizontlage



Im Kunstunterricht wird die Konstruktion von Gebäuden oder Häuserreihen mithilfe der Fluchtpunktperspektive gelehrt, welches direkt in der Bildebene ausgeführt wird. Zuerst wird die Lage des Horizontes mit einer Linie parallel zum Blattrand festgelegt, dann ein oder zwei Fluchtpunkte hierauf markiert und mithilfe von Quadern und Prismen die Szene konstruiert. Wir wollen im folgenden einige Beispiele anschauen, welche Auswirkungen die Anzahl der Fluchtpunkte sowie die Lage des Horizontes auf die entstehenden Bilder haben.

Als Beispiel betrachten wir den obigen Würfel, welcher hier zur besseren Darstellung der Maße in Parallelprojektion abgebildet ist. Zu jedem Beispiel gibt es ein Foto von demselben Gebäude, welches mit entsprechender Ausrichtung der Kamera erzeugt wurde.

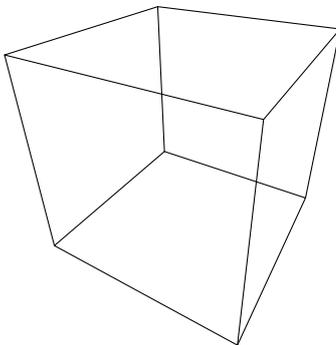
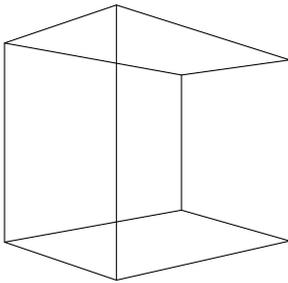


**Ein Fluchtpunkt:** Die vordere Seite des Würfels ist parallel zur Bildebene ausgerichtet und der Boden liegt auf der Objektebene. Somit liegen nur die nach hinten flüchtenden Kanten nicht parallel zur Bildebene, sodass diese sich in einem Fluchtpunkt schneiden, welcher auf dem Horizont liegt. Dieser war auf halber Höhe des Würfels ausgerichtet.



Schülerinnen und Schüler können diese Situation z.B. mit einer Handykamera nachstellen, wie das Beispiel eines Kircheneinganges zeigt. Die Kamera ist parallel zu den Stufen sowie senkrecht zum

Boden ausgerichtet. Der Fluchtpunkt liegt in der Bildmitte, in der Zeichnung dagegen ist er seitlich nach rechts verschoben.

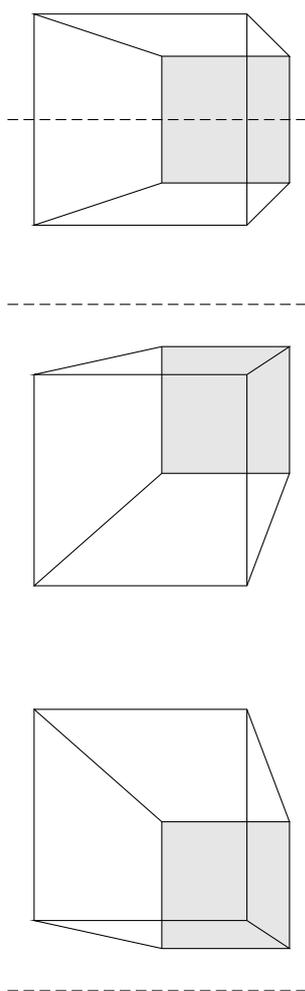


**Zwei Fluchtpunkte:** Der Würfel ist nun um die senkrechte Mittelachse verdreht, sodass die Vorderseite nicht mehr parallel zur Bildebene ausgerichtet ist. Somit flüchtet eine weitere Schar paralleler Geraden in einem zweiten Fluchtpunkt auf der anderen Seite des Hauptpunktes. Der Horizont liegt weiterhin mittig.

Im Realbeispiel ist die Ecke der Kirche fotografiert, wobei die Kamera nun auch verdreht ist. Da wir die Kirche als Objekt nicht verdrehen können, wird stattdessen die Bildebene bewegt. Anhand der Fensterreihe sind die beiden verschiedenen Fluchtpunkte erkennbar.

**Drei Fluchtpunkte:** Nun wird der Würfel noch gegenüber des Bodens verkippt, indem bspw. die vordere Ecke nach unten gedreht wird. Für eine bessere Ansicht liegt der Horizont nun oberhalb des Würfels. Nun ist auch die dritte Kantenschar nicht mehr parallel, sodass wir nun die maximale Anzahl an Fluchtpunkten erreicht haben. Dieser liegt allerdings nicht mehr auf dem Horizont, da die vertikalen Kanten nicht in derselben oder parallelen Ebene liegen, wie die ersten beiden Scharen von Kanten.

Ausgehend von der vorherigen Ausrichtung der Kamera auf die Ecke des Kirchturmes drehen wir nun die Kamera nach oben. Der Horizont verschiebt sich nach unten, da wir nun zum Turm aufschauen.



Wie in den vorherigen Fotos schon angesprochen, bestimmt die Lage des Horizontes die Höhe des Zentrums über der Objektebene, bspw. die Augenhöhe des Betrachters. Die nebenstehenden Beispiele zeigen wieder den Würfel, die graue Fläche entspricht der Rückseite.

Im ersten Beispiel schauen wir auf den Boden aber unter die Decke, d.h. der Horizont liegt mittig vom Würfel. Wir bezeichnen dies als *Normalperspektive*.

Beim mittleren Würfel sehen wir nun die obere Seite der Deckenfläche. Die Position des Betrachters hat sich erhöht, sodass der Horizont nun oberhalb des Würfels liegt. Dies wird als *Vogelperspektive* bezeichnet.

Beim letzten Würfel sehen wir wieder die Unterseite der Decke, aber ebenso auch die Unterseite des Bodens. Der Horizont liegt nun viel tiefer als bei der Normalansicht, sodass wir hier von einer *Froschperspektive* sprechen.

Abb. 4.3.5 Ein Würfel aus verschiedenen Ansichten

Der Vorteil der Fluchtpunktkonstruktionen ist, dass die Schülerinnen und Schüler im Kunstunterricht nur die Lage des Horizontes auf der Bildfläche und die Anzahl der Fluchtpunkte festlegen müssen, um eine Szene aus einfachen geometrischen Körpern zu zeichnen.<sup>1</sup> Nachteil dieser Methode ist, dass keine genauen Maße von Objekten verwendet werden. Der zuvor dargestellte Würfel erscheint aufgrund der Verzerrung durch die Projektion wie ein Quader, sodass das ursprüngliche Objekt auch ein Quader hätte sein können. Die Zentralprojektion wird somit im Kunstunterricht rein als künstlerisches Bildmittel verwendet, um räumliche Situationen möglichst reali-

<sup>1</sup>In den Kernlehrplänen für Gymnasium und Gesamtschulen in NRW wird die Perspektive nur vage angesprochen. So wird für die Sekundarstufe I die Beschäftigung mit der Linearperspektive festgelegt [23, S. 22] während in der Oberstufe nur noch von *raumillusionären Bildmitteln* gesprochen wird [26, S. 19]. Nur im Lehrplan zur Sekundarstufe I am Gymnasium finden sich noch Begriffe wie *Ein-Fluchtpunkt-Perspektive* und *Über-Eck-Perspektive* [21, S. 23], mit welcher die Verwendung von zwei Fluchtpunkten gemeint ist.

tätsnah auf dem Blatt darstellen zu können. Es geht weniger um den theoretischen Hintergrund oder zur Abbildung von konkreten Objekten mit vorgegebenen Maßen. Demnach werden Fluchtpunkte von Schülerinnen und Schüler eher intuitiv verwendet, die Lage von zwei Fluchtpunkten auf dem Horizont wird nach Gefühl gesetzt, sodass die Ecken von Häusern nicht zu flach und nicht zu spitz erscheinen.

Wir wollen im folgenden Abschnitt eine Konstruktionsmethode vorstellen, bei welcher die Maße und Lage von Objekten zur Bildebene im Grundriss sowie ihre Höhe im Aufriss vorgegeben werden. Mithilfe der Invarianten und der Fluchtpunkte als Bild von Fernpunkten wird dann die Projektion sukzessive in der Bildebene aufgebaut.

### 4.3.2 Konstruktionsmethoden mit Grund- und Aufriss

Wir kommen nun zu einigen Methoden, wie sich zentralprojektive Bilder von einfachen Objekten, wie Würfel, Quader oder Pyramide, konstruieren lassen [43]. Wir benötigen dafür den Grundriss der Objekte. Für die Höhe wird eine Linie im Aufriss gezeigt. Diese Information kann aber auch in den Aufgabentext geschrieben werden, ebenso die Lage des Horizontes bzgl. der Risskante, welche auch als *Bildspur* bezeichnet wird.

Wir werden die Strecke  $\overline{AB}$  in folgender Lage abbilden:

- i) im Grundriss, in beliebiger Richtung liegend
- ii) senkrecht zur Bildebene, in beliebiger Höhe
- iii) parallel zur Bildebene, in beliebiger Höhe
- iv) senkrecht zum Grundriss, auf ihr stehend mit angegebener Höhe

und in Bezug auf die Eigenschaften der zentralprojektiven Abbildung erläutern.

Abb. 4.3.6 zeigt die Konstruktion der Strecke  $\overline{AB}$  im Grundriss.  $Z$  ist dabei das Projektionszentrum,  $Z'$  befindet sich senkrecht dazu in der Grundrissebene.  $H$  ist der Hauptpunkt und liegt ebenfalls senkrecht zum Zentrum, allerdings in der Bildebene, welche die Grundrissebene nach Vereinbarung orthogonal schneiden soll. Demnach liegt der Hauptpunkt auf dem Horizont.  $H$  im Grundriss ist  $H'$ , welcher sich auf der Schnittgeraden, der Bildspur, von Bild- und Grundrissebene befindet.

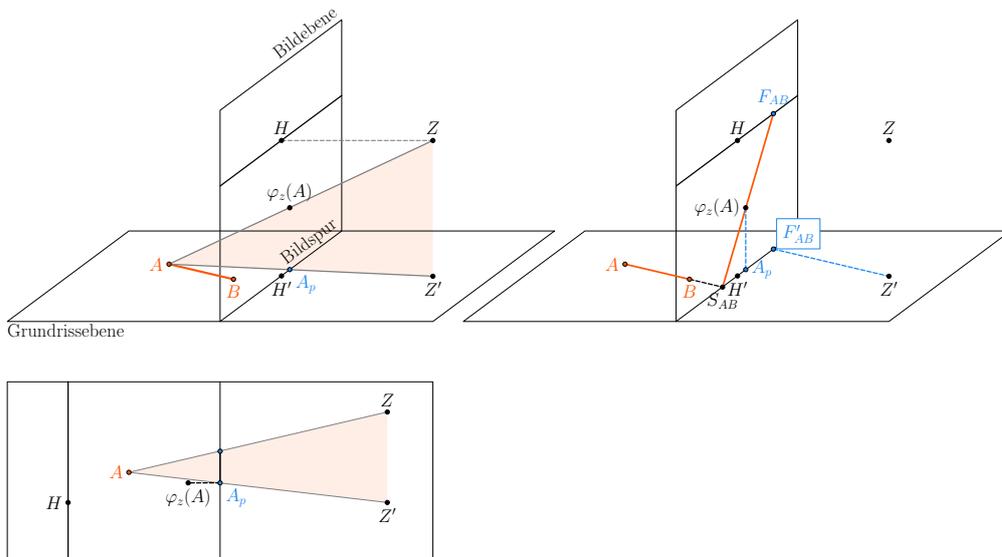


Abb. 4.3.6 Konstruktion des zentralprojektiven Bild einer Strecke im Grundriss

Der Projektionsstrahl von  $A$  schneidet die Bildebene in  $\varphi_z(A)$ , dem Bild von  $A$ . Nehmen wir neben dem Projektionsstrahl auch die Verbindungslinie von  $A$  und  $Z'$  hinzu, so ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck, welches in der Abbildung orange markiert ist. Dabei schneidet  $AZ'$ , der Projektionsstrahl im Grundriss, die Bildspur in  $A_p$ , welche senkrecht unterhalb von  $\varphi_z(A)$  liegt.

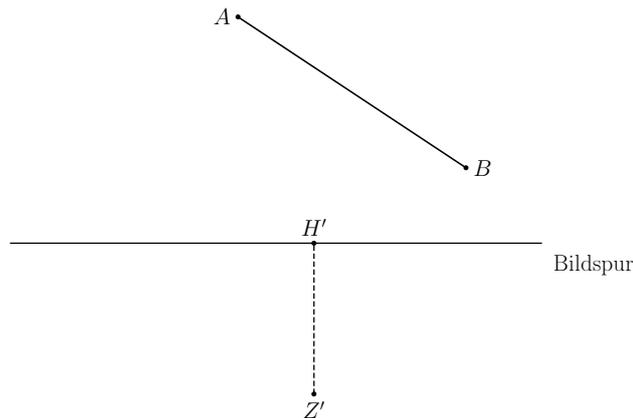
Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, das Bild von  $A$  ohne die 3D Darstellung zu konstruieren. Wir stellen uns vor, dass die Bildebene nach links in die Grundrissebene geklappt wird, sodass wir nun innerhalb einer Ebene konstruieren können. Die erste Möglichkeit liegt darin, das orange markierte Dreieck seitlich über  $AZ'$  in die Grundrissebene zu drehen. Dann liefert die Verbindungslinie  $ZA'$  den Schnittpunkt  $A_p$ , über welchen dann senkrecht der Abstand  $d(A_p, \varphi_z(A))$  abgetragen werden muss. Dieser Abstand ergibt sich über den Schnittpunkt  $ZA$  mit der Bildspur. Dies ist unterhalb der linken Abbildung skizziert. Dies entspricht auch der Funktionsweise des Perspektographen von *J. H. Lambert*, welcher im Abschnitt 8.1 vorgestellt wird.

Rechts in der Abb. 4.3.6 liegt die Konstruktion in der 3D Darstellung vor, welche für *i)* nachfolgend erläutert wird. Dies entspricht der zweiten Möglichkeit, das Bild von  $A$  zu konstruieren. Hierbei muss die Strecke  $\overline{Z'Z}$  nicht in die Grundrissebene gedreht werden. Die Strecke  $\overline{AB}$  wird erweitert, bis sie die Bildspur in  $S_{AB}$  schneidet. Dann wird ihr Fluchtpunkt  $F_{AB}$  ermittelt und mit  $S_{AB}$  verbunden, sodass das Bild der Geraden  $AB$  entsteht. Nun wird  $A$  mit  $Z'$  verbunden und in dem Schnittpunkt  $A_p$  mit der Bildspur die Senkrechte auf dieser errichtet. Diese schneidet die Bildgerade in  $\varphi_z(A)$ . Die Konstruktion verschiedener Lagen der Strecke  $\overline{AB}$  wird nun schrittweise erläutert.

**Konstruktionsmethode 4.3.1**

Gegeben ist eine Strecke  $\overline{AB}$  im Grundriss in allgemeiner Lage und der Fußpunkt  $Z'$  des Projektionszentrums  $Z$ . Es soll das zentralprojektive Bild der Strecke konstruiert werden, wobei der Hauptpunkt  $H$  5 cm über der Grundrissebene liegt.

Grundriss



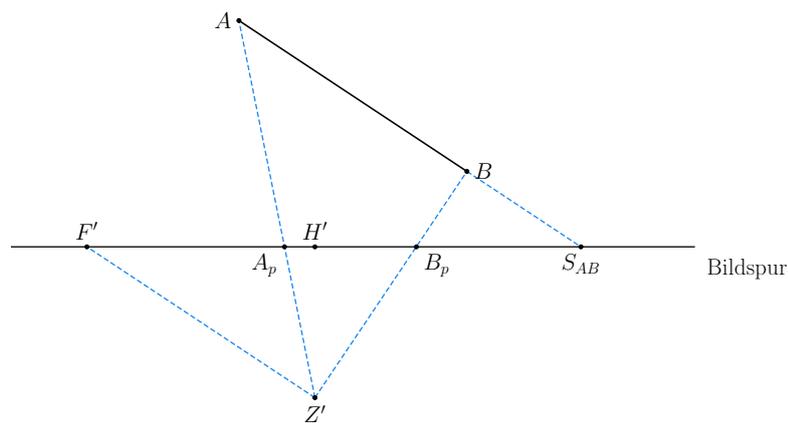
Zuerst wird die Bildgerade durch die Punkte  $\varphi_z(A)$  und  $\varphi_z(B)$  konstruiert und dann anschließend die Bildstrecke. Wir gehen dabei in Abb. 4.3.7 wie folgt vor:

1. Verlängere im Grundriss die Strecke über  $B$  hinaus, bis sie die Bildspur schneidet.  $\Rightarrow S_{AB}$
2. Zeichne die Parallele durch  $Z'$  zu  $AB$ , bis sie die Bildspur schneidet  $\Rightarrow F'$
3. Verbinde  $Z'$  jeweils mit  $A$  und  $B$  und markiere die Schnittpunkte mit der Bildspur.  $\Rightarrow A_p, B_p$
4. Messe die Abstände der o.g. Schnittpunkte zu  $H'$  und übertrage diese in der Bildebene auf die Bildspur. Ausgenommen sei  $F'$ , welcher auf den Horizont übertragen wird.  $\Rightarrow F$
5. Verbinde in der Bildebene  $S_{AB}$  mit  $F$  und erhalte so die Bildgerade. Füle jeweils durch  $A_p$  und  $B_p$  das Lot auf die Bildspur und markiere die Schnittpunkte mit der Bildgeraden  $\Rightarrow \varphi_z(A), \varphi_z(B)$

Um die Bildgerade zu konstruieren, nutzen wir aus, dass nach Satz 3.1.2, S. 49, jeder Schnittpunkt eines Objektes mit der Bildebene zu einem Fixpunkt führt. Daher ist auch  $S_{AB}$  ein Fixpunkt, sodass wir einen Punkt der Bildgerade konstruieren können.

Für den zweiten Punkt nutzen wir den Fluchtpunkt von  $AB$  aus, welcher nach Satz 3.1.3, S. 49, dem Bild des Fernpunktes entspricht, welcher die Richtung der Geraden  $AB$  bestimmt. Wir können den Fernpunkt selbst nicht zeichnen, wir wissen aber, dass alle Gerade parallel zu  $AB$  diesen Fernpunkt gemeinsam haben. Die Parallele durch  $Z$  ist auch eine Parallele durch  $Z'$ , sodass wir hier den Lotfußpunkt  $F'$  von  $F$  konstruieren können. Damit haben wir das Bild von  $AB$ . Aufgrund der Inzidenztreue liegen die Bilder von  $A$  und  $B$  auf der Bildgeraden. Um die entsprechenden Ordner zu finden, zeichnen wir in den Grundriss die Risse der Projektionsstrahlen, indem wir  $Z'$  mit den Urbildpunkten verbinden und übertragen diese auf die Kopie der Bildspur im unteren Teil der Abb. 4.3.7.

Grundriss



Bildebene

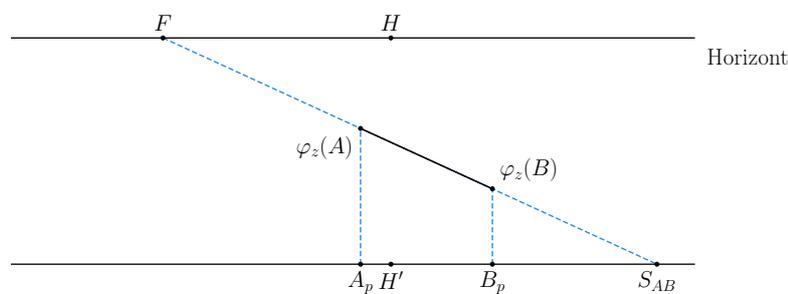


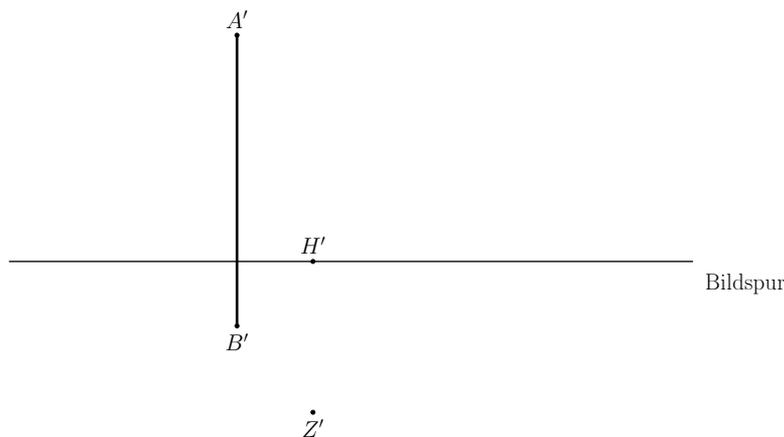
Abb. 4.3.7 Lösung zur Konstruktionsmethode 4.3.1

Wir kommen zum Fall *ii*), d.h. die Strecke durchstößt nun senkrecht die Bildebene.

### Konstruktionsmethode 4.3.2

Gegeben ist eine Strecke  $\overline{AB}$ , welche senkrecht zur Bildebene ist. Ihr Grundriss ist  $\overline{A'B'}$ , der Fußpunkt des Projektionszentrum ist  $Z'$ . Es soll das zentralprojekti-  
ve Bild der Strecke konstruiert werden, wobei der Hauptpunkt  $H$  5 cm über  
der Grundrissebene liegt.

Grundriss



Die Konstruktion folgt nach denselben Schritten wie im Fall *i*). Der Sonderfall hier zeichnet sich dadurch aus, dass die Parallele durch  $Z'$  zu  $A'B'$  die Bildspur im Grundriss  $H'$  des Hauptpunktes schneidet, wie Abb. 4.3.8 zeigt. D.h. der zweite Schritt entfällt, da wir in diesem Fall den Fluchtpunkt schon kennen. Es entfällt auch der erste Schritt, da die Strecke  $\overline{A'B'}$  die Bildspur schneidet.

Wir wissen, dass die Richtung der ursprünglichen Geraden den Fluchtpunkt bestimmt. Falls diese senkrecht zur Bildebene verläuft, so ist der Hauptpunkt  $H$  der Fluchtpunkt. Nun betrachten wir einen zur Bildebene parallele Strecke.

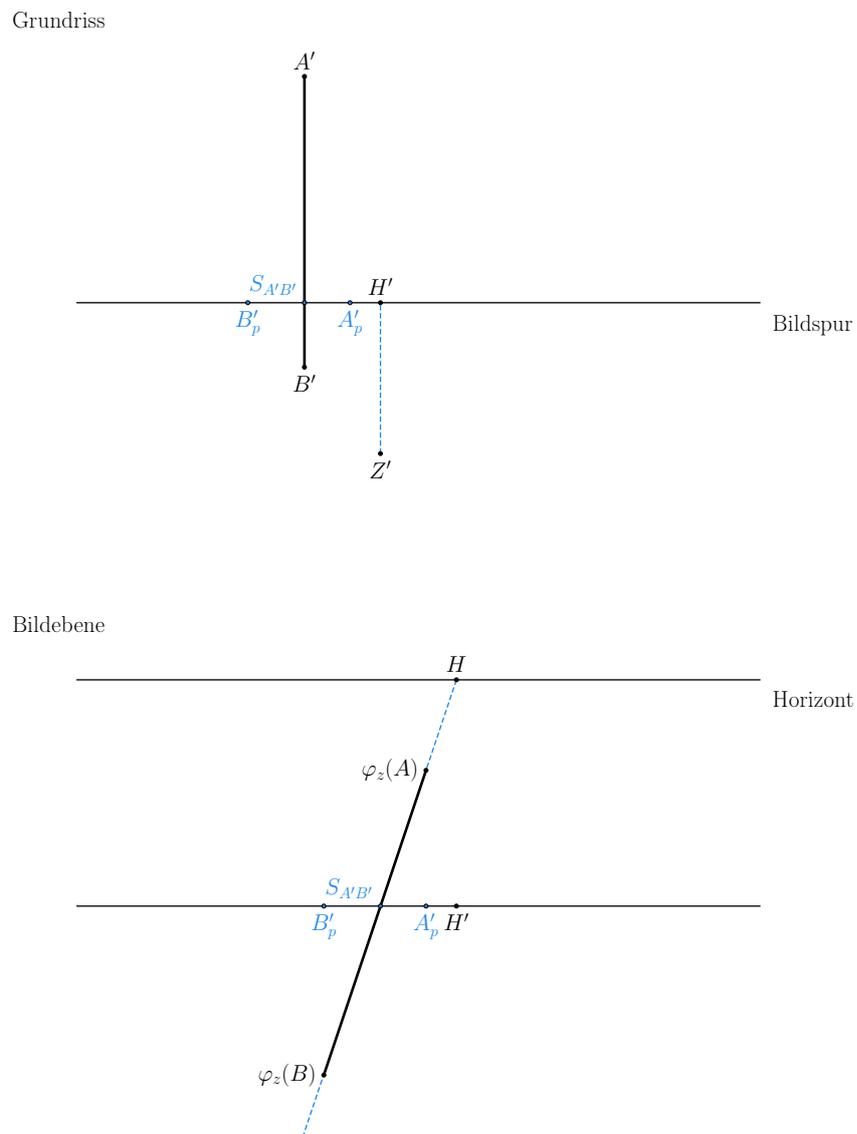
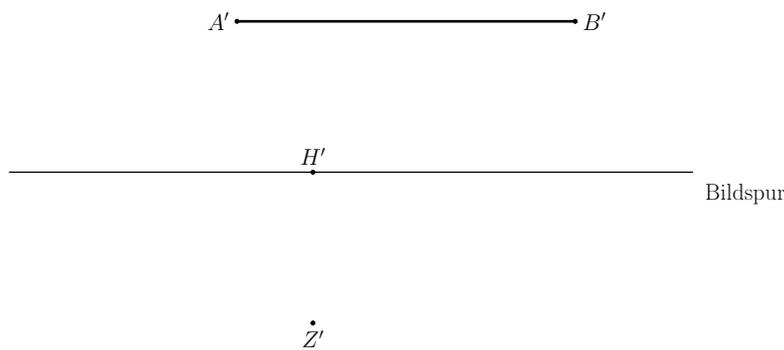


Abb. 4.3.8 Lösung zur Konstruktionsmethode 4.3.2

**Konstruktionsmethode 4.3.3**

Gegeben ist eine Strecke  $\overline{AB}$ , welche parallel zur Bildebene ist. Ihr Grundriss ist  $\overline{A'B'}$ , der Fußpunkt des Projektionszentrums ist  $Z'$ . Es soll das zentralprojektive Bild der Strecke konstruiert werden, wobei der Hauptpunkt  $H$  5 cm über der Grundrissebene liegt.

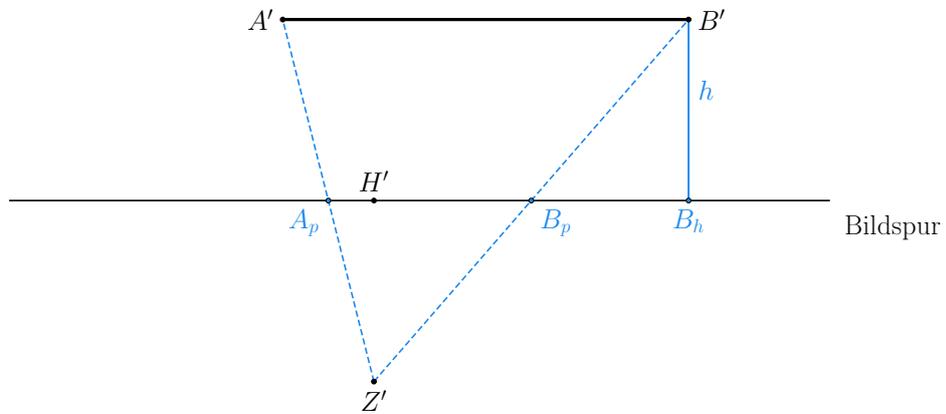
Grundriss



Würden wir eine Parallele durch  $Z'$  zu  $A'B'$  ziehen, so ist diese auch parallel zur Bildspur. Der Schnittpunkt ist nun derselbe Fernpunkt wie von  $A'B'$ . Demnach ist auch die Bildgerade parallel zur Bildebene. Wir wissen allerdings nicht, in welcher Höhe sich diese über der Grundrissebene befindet und nutzen daher eine Hilfsstrecke  $h$ . Abb. 4.3.9 zeigt die Lösung nach folgenden Schritten:

1. Fülle das Lot durch  $B'$  auf die Bildspur und markiere den Schnittpunkt mit ihr.  $\Rightarrow h, B_h$
2. Verbinde  $Z'$  jeweils mit  $A$  und  $B$  und markiere die Schnittpunkte mit der Bildspur.  $\Rightarrow A_p, B_p$
3. Messe die Abstände der o.g. Schnittpunkte zu  $H'$  und übertrage diese in der Bildebene auf die Bildspur.
4. Verbinde in der Bildebene  $B_h$  mit  $H$  und erhalte so die Bildgerade von  $h$ .  $\Rightarrow HB_h$
5. Fülle das Lot durch  $B_h$  und markiere den Schnittpunkt mit  $HB_h$ .  $\Rightarrow \varphi_z(B)$
6. Zeichne die Parallele durch  $\varphi_z(B)$  zum Horizont sowie das Lot durch  $A_p$  auf die Bildspur.  $\Rightarrow \varphi_z(A)$

Grundriss



Bildebene

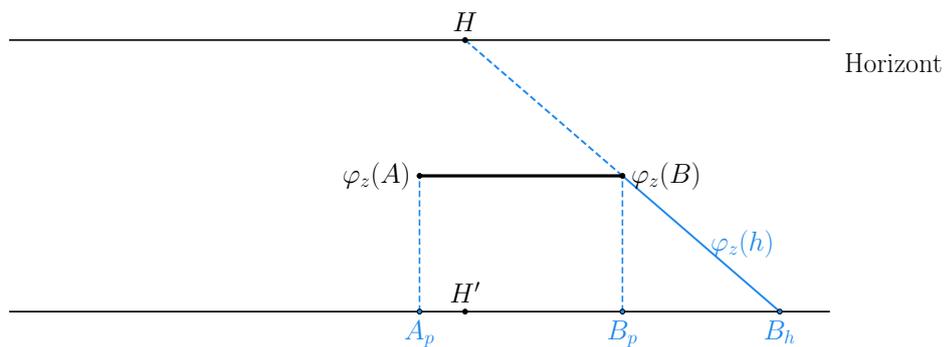


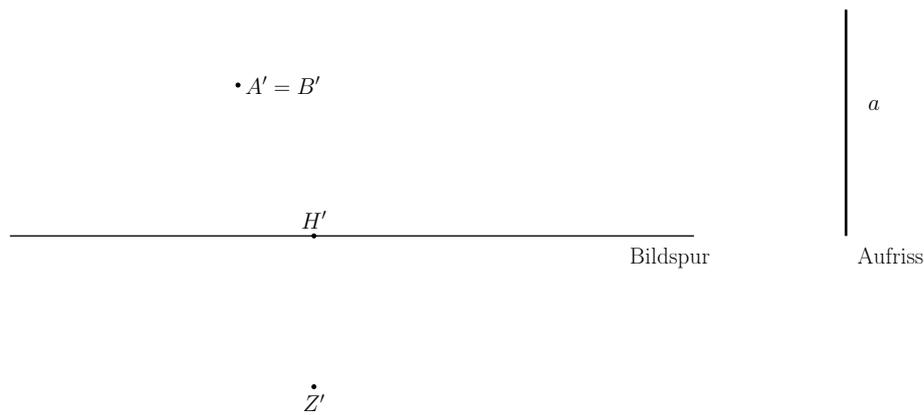
Abb. 4.3.9 Lösung zur Konstruktionsmethode 4.3.3

Mithilfe der vorherigen Methoden lässt sich die senkrechte Strecke  $h$  konstruieren und über die Projektionsstrahlen von  $A'$  und  $B'$  lassen sich die Endpunkte der Bildstrecke von  $A$  und  $B$  finden.

### Konstruktionsmethode 4.3.4

Gegeben ist eine Strecke  $\overline{AB}$ , welche senkrecht zur Objektebene ist. Ihr Grundriss ist daher ein Punkt mit  $A' = B'$ . Die Höhe der Strecke muss daher dem Aufriss entnommen werden. Der Fußpunkt des Projektionszentrums ist  $Z'$ . Es soll das zentralprojektive Bild der Strecke konstruiert werden, wobei der Hauptpunkt  $H$  5 cm über der Grundrissebene liegt.

Grundriss



Wir kommen zur letzten Grundkonstruktion, wo die Strecke nun senkrecht zur Grundriss- bzw. Objektebene steht. Somit befindet sie sich in einer zur Bildebene parallelen Ebene. Hier tritt der Sonderfall bei der Auflistung der Invarianten in Abb. 3.2.1, S. 56, ein. Die Zentralprojektion wird zur Ähnlichkeitsabbildung, d.h. Gerade und Bildgerade sind zueinander parallel. Abb. 4.3.10 zeigt die Lösung nach folgenden Schritten:

1. Fülle das Lot durch  $A'$  auf die Bildspur und markiere den Schnittpunkt mit ihr.  $\Rightarrow h, A_h$
2. Verbinde  $Z'$  mit  $A'$  und markiere die Schnittpunkte mit der Bildspur.  $\Rightarrow A_p$
3. Messe die Abstände der o.g. Schnittpunkte zu  $H'$  und übertrage diese in der Bildebene auf die Bildspur.
4. Verbinde in der Bildebene  $A_h$  mit  $H$  und erhalte so die Bildgerade von  $h$ .  $\Rightarrow HA_h$
5. Fülle das Lot durch  $A_h$  und trage die Länge  $a$  im Aufriss ab. Verbinde den oberen Endpunkt von  $a$  mit  $H$ .
6. Fülle das Lot durch  $A_p$ . Diese schneidet die Strecken aus 4. und 5. in den Endpunkten der Bildstrecke  $\Rightarrow \varphi_z(A), \varphi_z(B)$

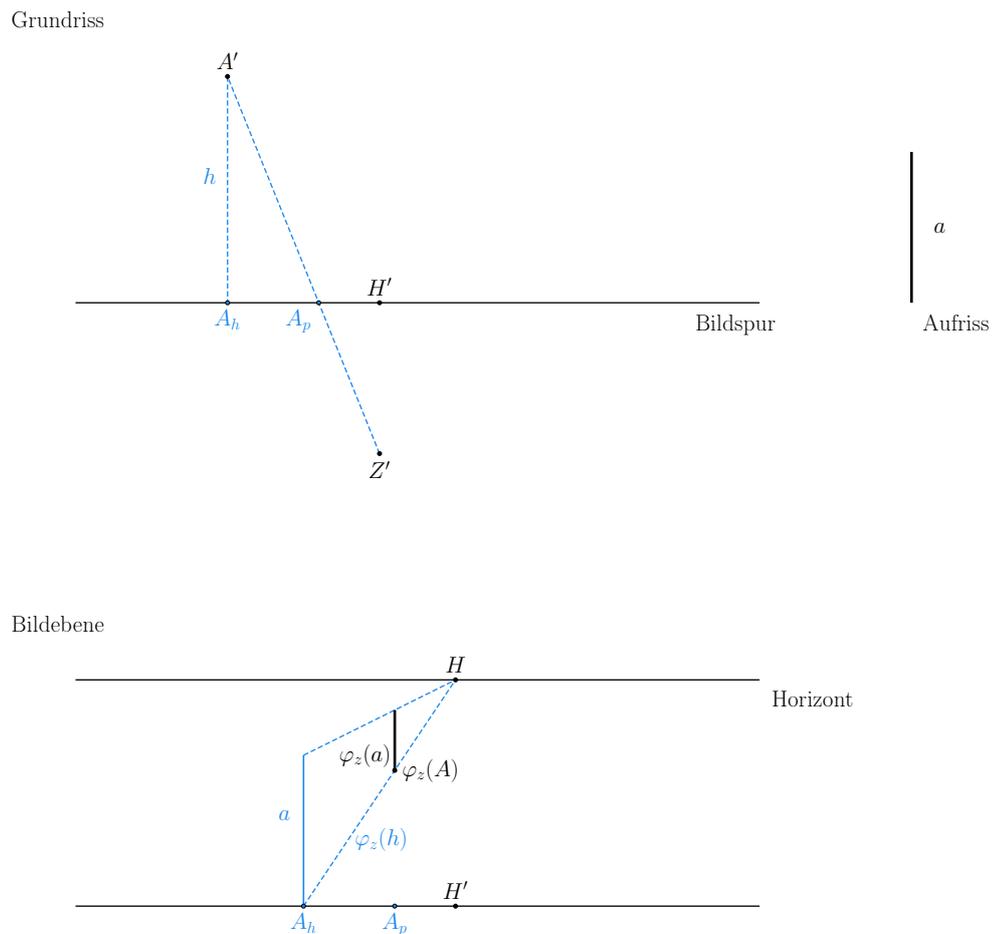


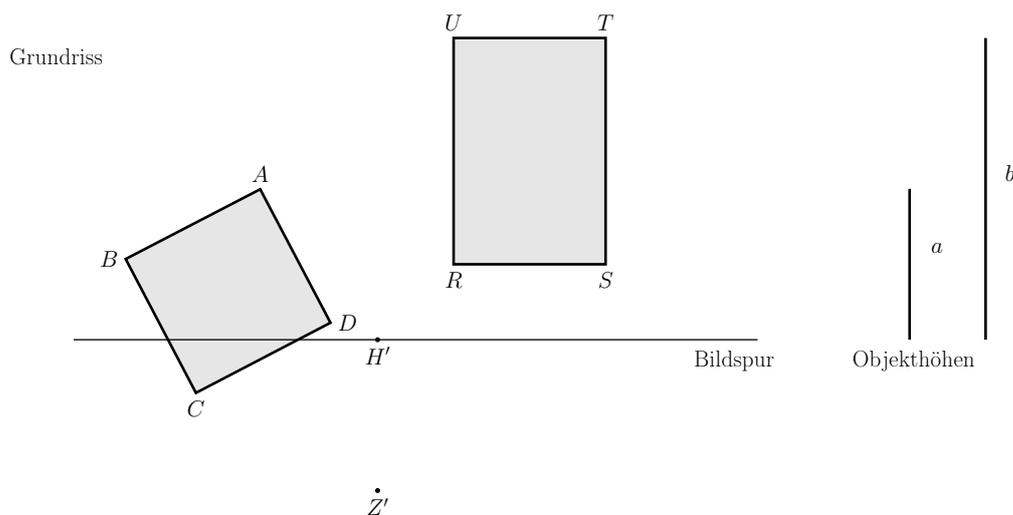
Abb. 4.3.10 Lösung zur Konstruktionsmethode 4.3.4

Wir wissen, dass jedes Objekt in der Bildebene sich nicht verändert, d.h.  $a$  wird an  $A_h$  in wahrer Größe abgebildet. Je weiter weg sich das Objekt von der Bildebene befindet, umso kleiner wird es. Das Dreieck mit der Spitze  $H$  und der Grundseite  $a$  ist Teil des Bildes einer Ebene, welche  $a$  enthält und senkrecht die Bildebene schneidet. Wir ziehen gedanklich die Strecke  $a$  soweit nach „hinten“ zum Horizont, bis sie über  $A_p$  steht, da dieser Punkt die Position der Bildstrecke angibt.

Dies waren die vier Grundkonstruktionen, mit welchen sich einfache, mathematische Grundkörper über den Grundriss und die Höhe darstellen lassen.  $Z'$  bestimmt dabei den Fußpunkt des Projektionszentrums und stellt die Position des Beobachters dar. Der Abstand der Bildspur zum Horizont entspricht der Höhe des Augenpunktes über der Objektebene. Wir zeigen im folgenden ein Beispiel eines gedrehten Würfels und eines parallel zur Bildebene ausgerichteten Quaders. Mit dieser Anordnung kommen alle zuvor genannten Methoden zum Einsatz.

### Konstruktionsbeispiel 4.3.1

Gegeben ist ein Würfel und ein Quader im Grundriss, sowie der Fußpunkt  $Z'$  des Projektionszentrums. Die Höhen der Objekte können der Skizze entnommen werden. Mithilfe der Grundkonstruktionen soll das zentralprojektive Bild der beiden Körper erstellt werden. Das Projektionszentrum liegt dabei wieder 5 cm oberhalb der Objektebene.



Wir konstruieren die Projektionen der Körper in mehreren Schritten:

1. Boden des Würfels
2. Vervollständigung des Würfels
3. Boden des Quaders
4. Vervollständigung des Quaders

Abb. 4.3.11 - 4.3.14 zeigt die einzelnen Ergebnisse der o.g. Schritte. Wir beginnen jeweils mit den Grundflächen und konstruieren dann die Deckflächen mithilfe der Senkrechten durch die Eckpunkte der Grundflächen. Da der Würfel um die senkrechte Achse gedreht ist, existieren zwei Fluchtpunkte, welche über die Parallelen durch  $Z'$  zu den entsprechenden Seitenkanten ermittelt werden. Wir benötigen nun nicht alle Fixpunkte  $S$  bzw. Schnittpunkte der Projektionsstrahlen.  $S_{BC}$  und  $S_{CD}$  liefert uns schon der Grundriss,  $S_{AB}$  muss ergänzt werden. Wir verbinden  $F_{AB}$  mit  $S_{AB}$  und  $S_{CD}$  sowie  $F_{AD}$  mit  $S_{BC}$ . Diese schneidet die ersten beiden Strahlen in  $\varphi_z(B)$  und  $\varphi_z(C)$ . Mit  $A_p$  erhalten wir das Bild von  $A$  und können den fehlenden Strahl durch  $F_{AD}$  ergänzen, womit wir  $\varphi_z(D)$  finden. Damit kennen wir die Grundfläche des Würfels.

Wir tragen im zweiten Schritt die Höhe  $a$  an  $S_{BC}$  und  $S_{CD}$  ab. Wie zuvor zur Konstruktionsmethode 4.3.4 beschrieben, wird  $a$  genau dann auf sich selbst abgebildet, wenn sie in der Bildebene liegt. Liegt sie auf der zum Projektionszentrum abgewandten Seite der Bildebene, so ist das Bild von  $a$  kleiner, im anderen Fall wird es größer. Daher ist die Kante über  $\varphi_z(C)$  länger als über  $\varphi_z(B)$  (vgl. Abb. 4.3.15). Wir verbinden die Fluchtpunkte mit den Endpunkten der eingetragenen Höhen. Die Strahlen schneiden sich in  $\varphi_z(G)$ . Dann zeichnen wir die Seitenkanten über  $\varphi_z(B)$  und  $\varphi_z(D)$  an, deren Endpunkte  $\varphi_z(F)$  bzw.  $\varphi_z(H)$  auf den Strecken  $\overline{F_{AD}\varphi_z(G)}$  bzw.  $\overline{F_{AB}\varphi_z(G)}$  liegen. Ergänzen wir die zweiten, oberen Strahlen durch die Fluchtpunkte, so schneiden diese sich in  $\varphi_z(E)$ . Damit ist das Bild des Würfels konstruiert.

Wir kommen zum Boden des Quaders. Der Fluchtpunkt der Geraden  $UR$  und  $TS$  ist der Hauptpunkt  $H$ , während die Geraden  $UT$  und  $RS$  auf Parallelen projiziert werden. Auch hier gibt es wieder verschiedene Wege, denn nicht alle Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit der Bildebene bzw. Fixpunkte werden benötigt. Mit  $R_p, S_p$  und  $h$  wird die Kante durch  $\varphi_z(R)$  und  $\varphi_z(S)$  nach der Konstruktionsmethode 4.3.9 erstellt und die Endpunkte mit  $H$  verbunden. Mit  $U_p$  lässt sich  $\varphi_z(U)$  finden, durch welche die zweite Parallele gezogen wird, um  $\varphi_z(T)$  zu erhalten. Damit ist die Bodenfläche fertig.

Im letzten Schritt wird die Deckfläche ergänzt. Wir tragen an  $S_{TS}$  die Höhe  $b$  aus der Aufgabenstellung ab und verbinden den Endpunkt wieder mit  $H$ . Wir ziehen an  $\varphi_z(S)$  bzw.  $\varphi_z(T)$  die Kante hoch und erhalten  $\varphi_z(W)$  bzw.  $\varphi_z(X)$ . Wir ziehen die Parallele zur Bildspur durch  $\varphi_z(W)$  und  $\varphi_z(X)$  und ziehen an  $\varphi_z(R)$  und  $\varphi_z(U)$  die Kanten hoch. Die Geraden schneiden sich dann in  $\varphi_z(V)$  und  $\varphi_z(Y)$ , sodass wir alle oberen Eckpunkte erhalten haben. Abb. 4.3.15 zeigt das Endergebnis mit angedeuteter Bildspur und Horizontlinie.

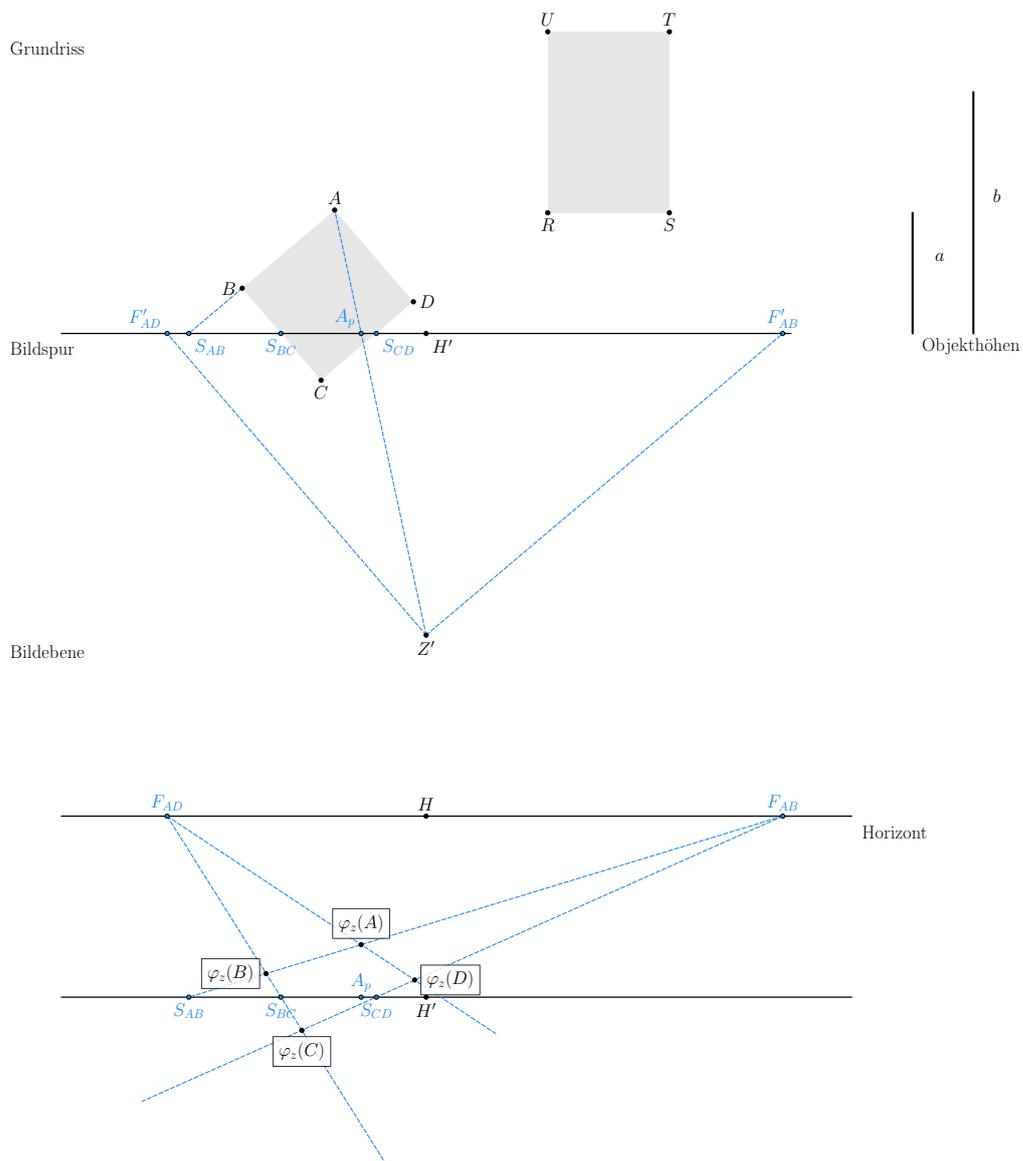


Abb. 4.3.11 Lösung des Konstruktionsbeispiels 4.3.1, 1. Schritt

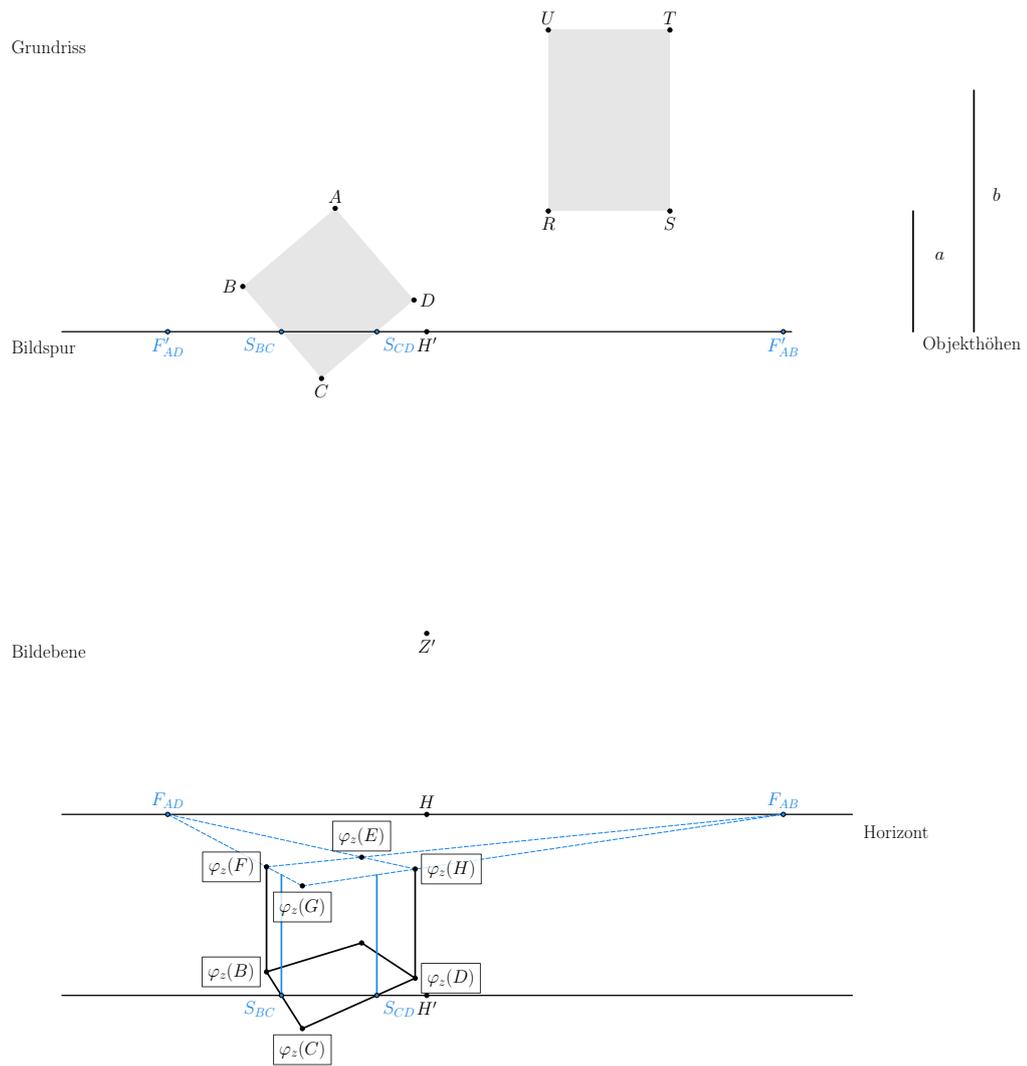


Abb. 4.3.12 Lösung des Konstruktionsbeispiels 4.3.1, 2. Schritt

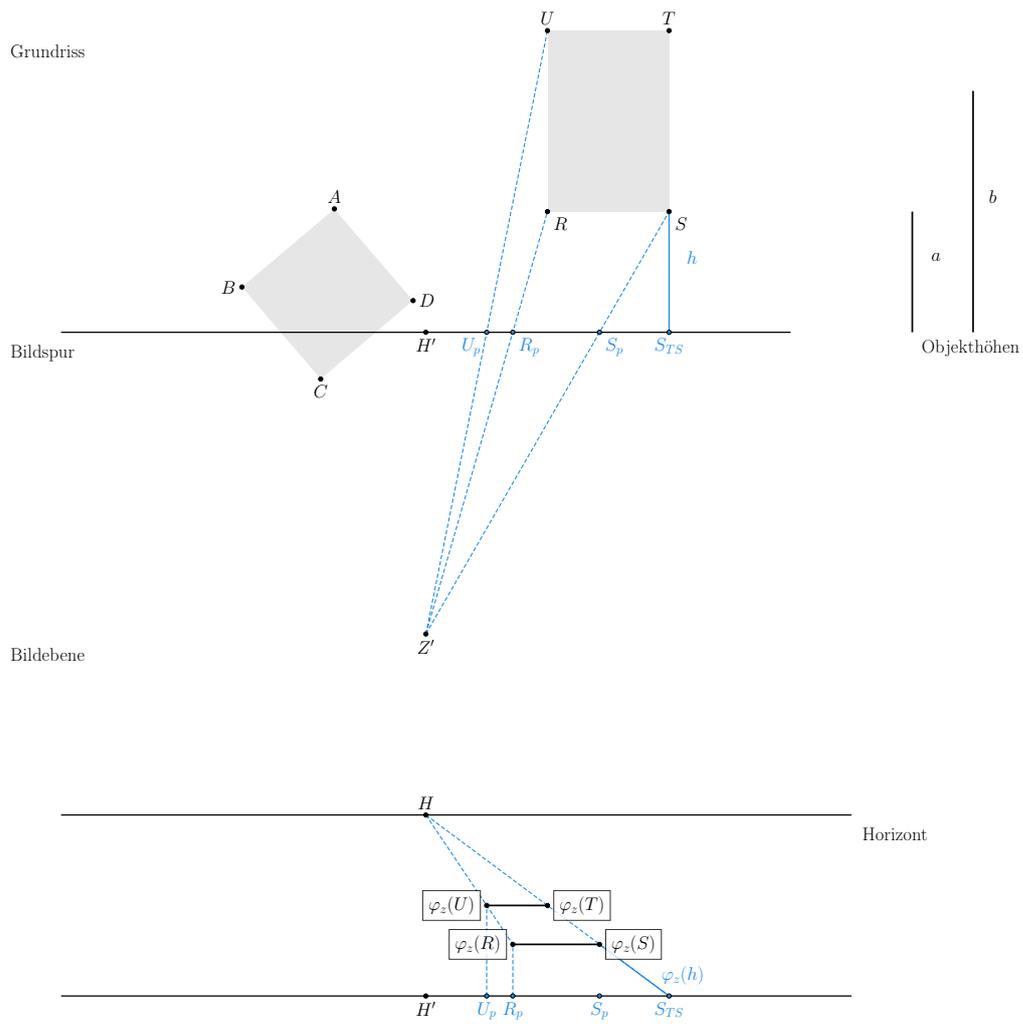


Abb. 4.3.13 Lösung des Konstruktionsbeispiels 4.3.1, 3. Schritt

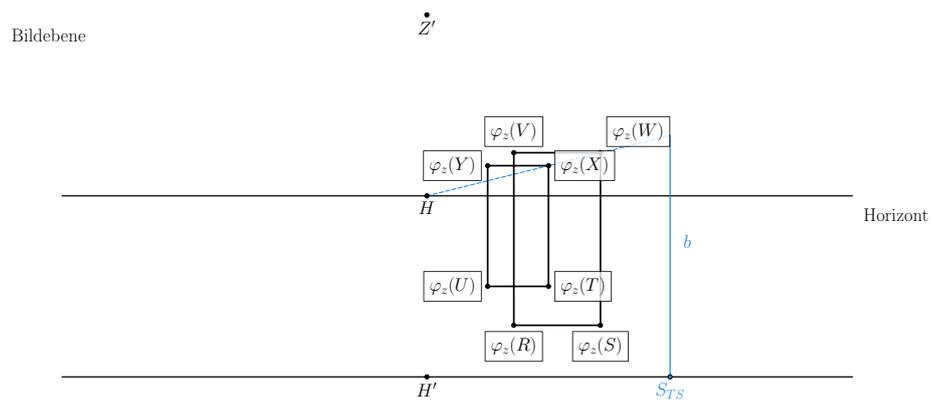
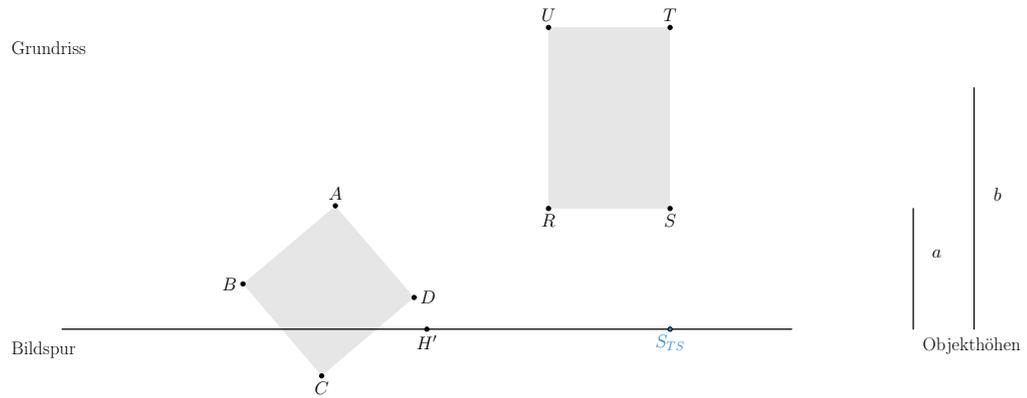


Abb. 4.3.14 Lösung des Konstruktionsbeispiels 4.3.1, 4. Schritt

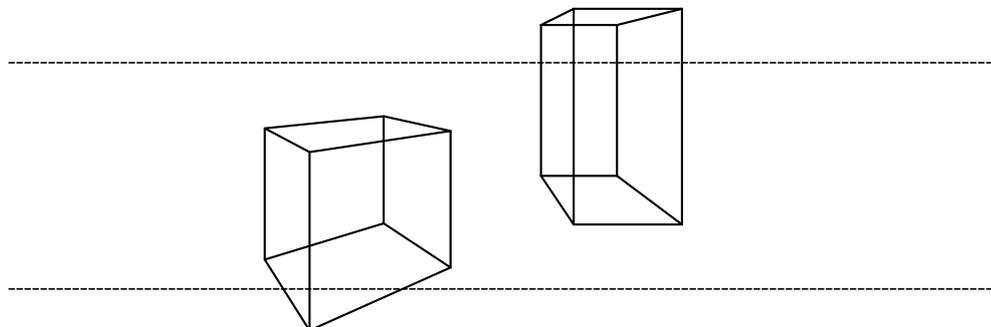


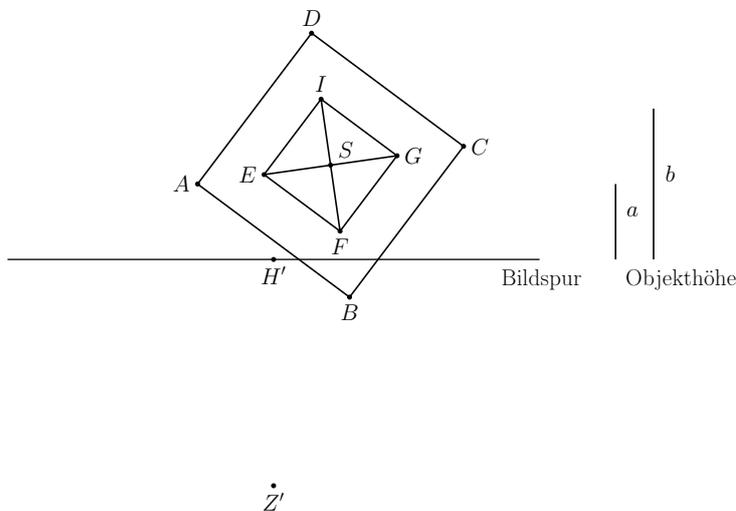
Abb. 4.3.15 Projektion von Würfel und Quader im Konstruktionsbeispiel 4.3.1

Wir kommen nun zu weiteren Aufgabenbeispielen, aus denen sich neue Fragestellungen für den Unterricht ergeben können. Zum einen haben wir in den Lösungen gesehen, dass es verschiedene Wege geben kann, einen Quader bzw. Würfel zu konstruieren, denn nicht alle Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit der Bildspur wurden benötigt oder nicht alle Seiten mussten im Grundriss bis zur Bildspur verlängert werden. Je nach Lage der Objekte im Grundriss kann ein Fluchtpunkt nicht mehr gezeichnet werden, da der Schnittpunkt der Parallelen durch  $Z'$  mit der Bildspur außerhalb des Blattes liegt. Dann müssen andere Alternativen genutzt werden. Im folgenden Beispiel besteht das Objekt aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche, auf welchem eine Pyramide steht. Für die Konstruktion nutzen wir die Diagonalen im Quadrat.

### Konstruktionsbeispiel 4.3.2

Gegeben ist ein Quader, auf welcher eine quadratische Pyramide aufliegt, im Grundriss, sowie der Fußpunkt  $Z'$  des Projektionszentrums. Der Quader hat die Höhe  $a$  und der Abstand vom Boden zur Spitze  $S$  beträgt  $b$ . Mithilfe der Grundkonstruktionen soll das zentralprojektive Bild erstellt werden. Das Projektionszentrum liegt dabei wieder 5 cm oberhalb der Objektebene.

Grundriss



Wir konstruieren zuerst die quadratische Grundfläche des Quaders. Je nach Lage der Objekte zur Bildebene kann es passieren, dass die Parallele zu einer Kante durch das Projektionszentrum  $Z'$  die Bildspur weit entfernt vom Hauptpunkt  $H'$  schneidet, sodass der Schnittpunkt nicht mehr auf dem Zeichenblatt liegt. Als Alternative nutzen wir den Fluchtpunkt der Geraden  $IF$ . Sie verläuft deutlich steiler, sodass der Fluchtpunkt  $F'_{IF}$  nahe bei  $H'$  liegt.

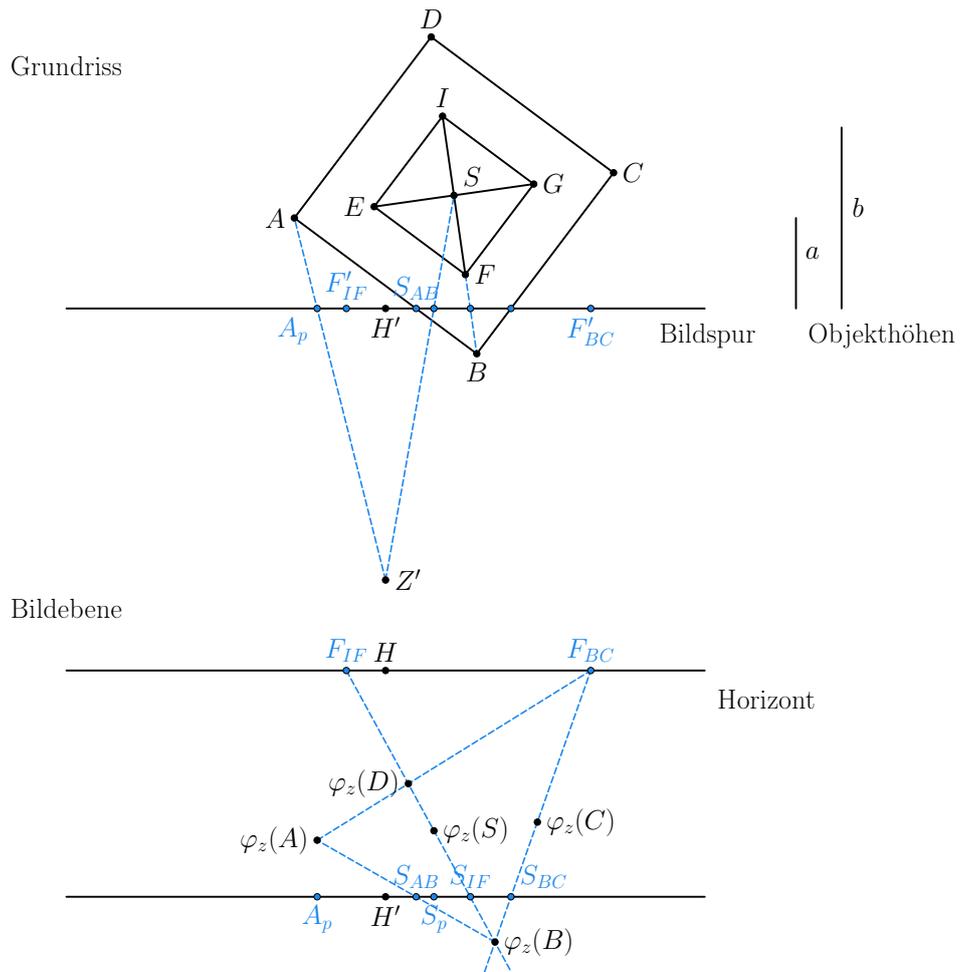


Abb. 4.3.16 Konstruktion der Grundfläche des Würfels im Beispiel 4.3.2

Die restliche Konstruktion in Abb. 4.3.16 orientiert sich an den vorher besprochenen Methoden 4.3.1 - 4.3.4. Im zweiten Schritt nutzen wir die Objekthöhe  $a$ , um den Quader zu vervollständigen. In Abb. 4.3.17 entsprechen die blauen Linien der Strecke  $a$ .

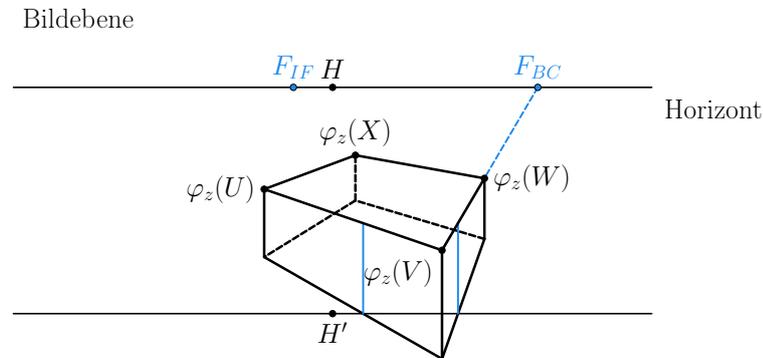


Abb. 4.3.17 Der fertige Quaders des Beispiels 4.3.2

Als dritten Schritt verbinden wir in Abb. 4.3.18 die Bilder von  $I$  und  $F$  bzw.  $E$  und  $G$ , denn senkrecht über dem Schnittpunkt muss das Bild der Pyramidenspitze liegen. Wir nutzen also hier wieder die Inzidenztreue der Projektion aus. Die Höhe der Spitze finden wir mithilfe der Objekthöhe  $b$ . Damit haben wir das gesamte Bild konstruiert, welche in Abb. 4.3.19 dargestellt ist. Hierbei entspricht die obere Linie dem Horizont und die untere der Bildspur.

Betrachten wir einmal die Lösung in Abb. 4.3.19. Es fällt auf, dass die vordere Spitze stark verzerrt wirkt. Das projektive Bild wird beeinflusst durch die Lage des Projektionszentrums und der Bildebene, welche weiterhin senkrecht zur Objektebene liegen soll. Denn diese bestimmen die Lage der Fluchtpunkte bzw. des Horizontes, wie wir im Abschnitt 4.3.1 schon untersucht hatten. Wie können wir daher vorhersagen, ob das Endergebnis verzerrt wirkt? Warum entsteht überhaupt dieser Eindruck, wenn doch die Zentralprojekte wirklichkeitsnahe Bilder ermöglichen soll? Die Zentralprojektion ist ein vereinfachtes Modell des menschlichen Sehens. Die erste Vereinfachung ist die Reduktion von zwei auf ein Projektionszentrum. Dadurch verringert sich der dreidimensionale Eindruck. Die Verzerrung entsteht durch breite Blickwinkel, denn das Bildfeld des menschlichen Auges ist begrenzt.

Wir benötigen daher ein Hilfsmittel als Orientierung, ob die Lage von Bildspur und Zentrum geeignete Bilder erzeugt. In der Literatur finden wir hierzu den sog. *Distanzkreis*, welcher im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

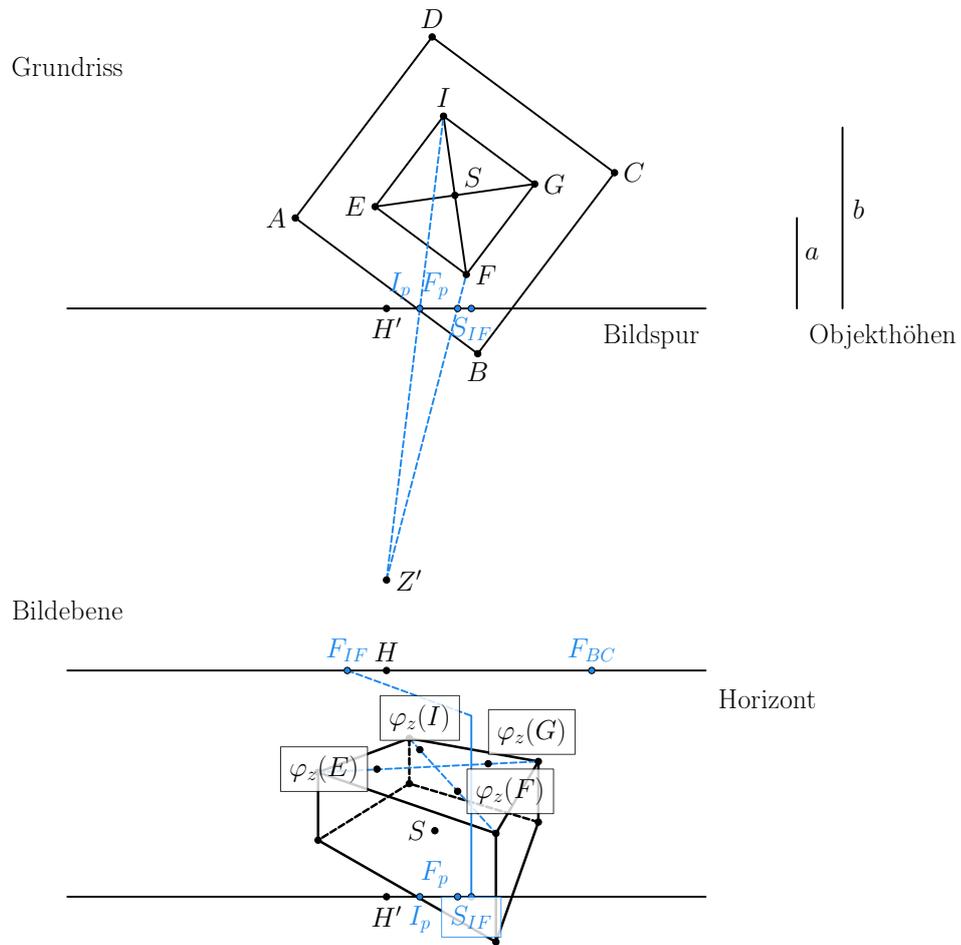


Abb. 4.3.18 Konstruktion des Bildes der Spitze  $S$  des Beispiels 4.3.2

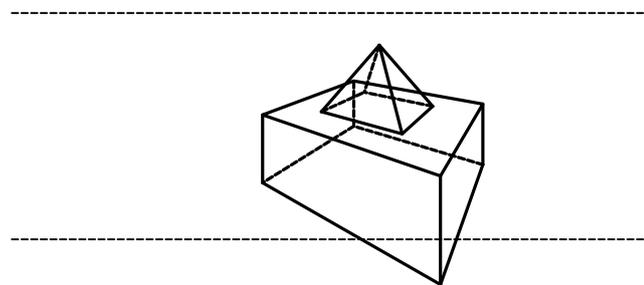


Abb. 4.3.19 Das zentralprojektive des Quaders und der Pyramide des Beispiels 4.3.2

### 4.3.3 Distanzkreis

Wir betrachten einmal den Quader im letzten Beispiel 4.3.2. Abb. 4.3.20 zeigt das Bild und den entsprechenden Distanzkreis, dessen Mittelpunkt der Hauptpunkt  $H$  ist. Der Radius entspricht der Entfernung des Betrachters zur Bildebene, d.h. dem Abstand von  $Z'$  zu  $H'$ .

Objekte innerhalb des Distanzkreises werden perspektivisch unverzerrt dargestellt. Die Ecke des Quaders liegt außerhalb. Wir überlegen daher im Folgenden, welche Möglichkeiten es gibt, den Distanzkreis zu verändern, in dem der Mittelpunkt verschoben oder der Radius des Kreises vergrößert wird.

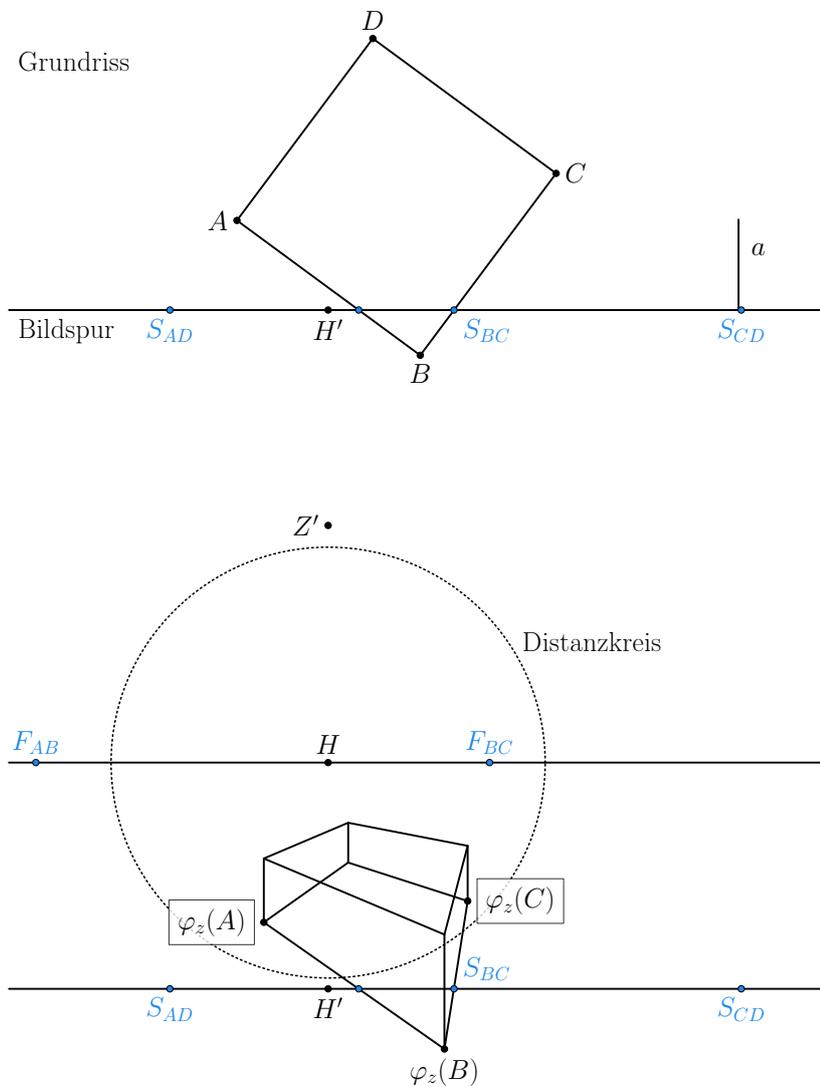


Abb. 4.3.20 Die Projektion des Quaders liegt teilweise außerhalb des Distanzkreises

Wir stellen uns vor, der Betrachter würde sich auf den Boden setzen, d.h. sein Abstand zur Bildebene bleibt gleich, allerdings verschiebt sich der Horizont nach unten, da nun das Projektionszentrum näher an der Objektebene liegt. Der Radius des Distanzkreises bleibt gleich, aber der Mittelpunkt verschiebt sich in Richtung der Bildspur. Abb. 4.3.21 zeigt nun, dass der Würfel innerhalb des Kreises liegt und die vordere Spitze nicht mehr verzerrt wirkt.

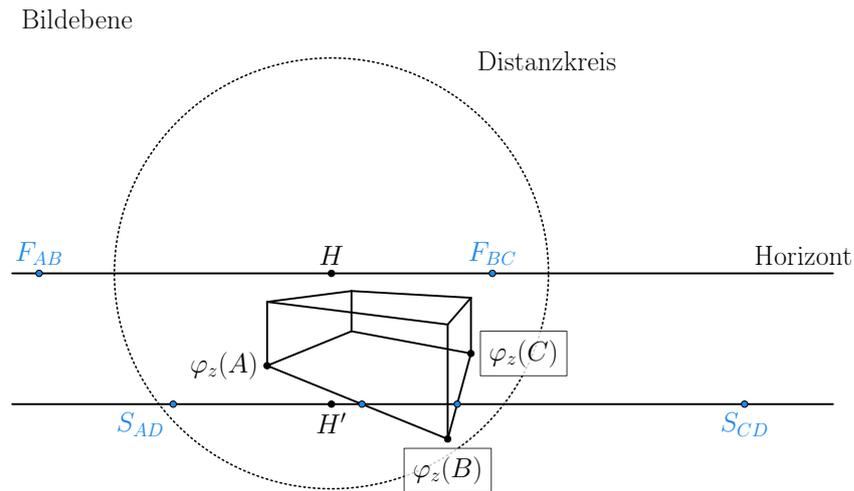


Abb. 4.3.21 Verringerung des Abstandes von Projektionszentrum und Objektebene

Gehen wir zurück zur Ausgangssituation, d.h. unser Betrachter steht wieder. Wir ändern nun die Lage der Bildebene bzw. drehen den Quader senkrecht zur Objektebene. Nun verschieben sich die Fluchtpunkte entlang des Horizontes. Wir sehen in Abb. 4.3.22, dass dadurch das Bild des Würfels wieder in den Distanzkreis rückt und der Eindruck der Verzerrung vermindert wird.

Als dritte Möglichkeit entfernen wir in Abb. 4.3.23 den Betrachter von der Bildebene. Hierdurch vergrößert sich der Distanzkreis und die Fluchtpunkte entfernen sich vom Hauptpunkt. Der Winkel in der vorderen Spitze vergrößert sich dadurch. Betrachten wir einmal die markierten Winkel bei  $Z'$  im Grundriss. Dieser ergibt sich, wenn wir die äußersten Punkte im Grundriss mit  $Z'$  verbinden. Je kleiner dieser Winkel, umso eher liegt auch das Bild im Distanzkreis. Nach der Literatur sollte dieser kleiner als  $40^\circ$  sein [2]. Somit lässt sich vor der Konstruktion abschätzen, ob das Bild im Distanzkreis liegt und somit unverzerrt dargestellt wird.

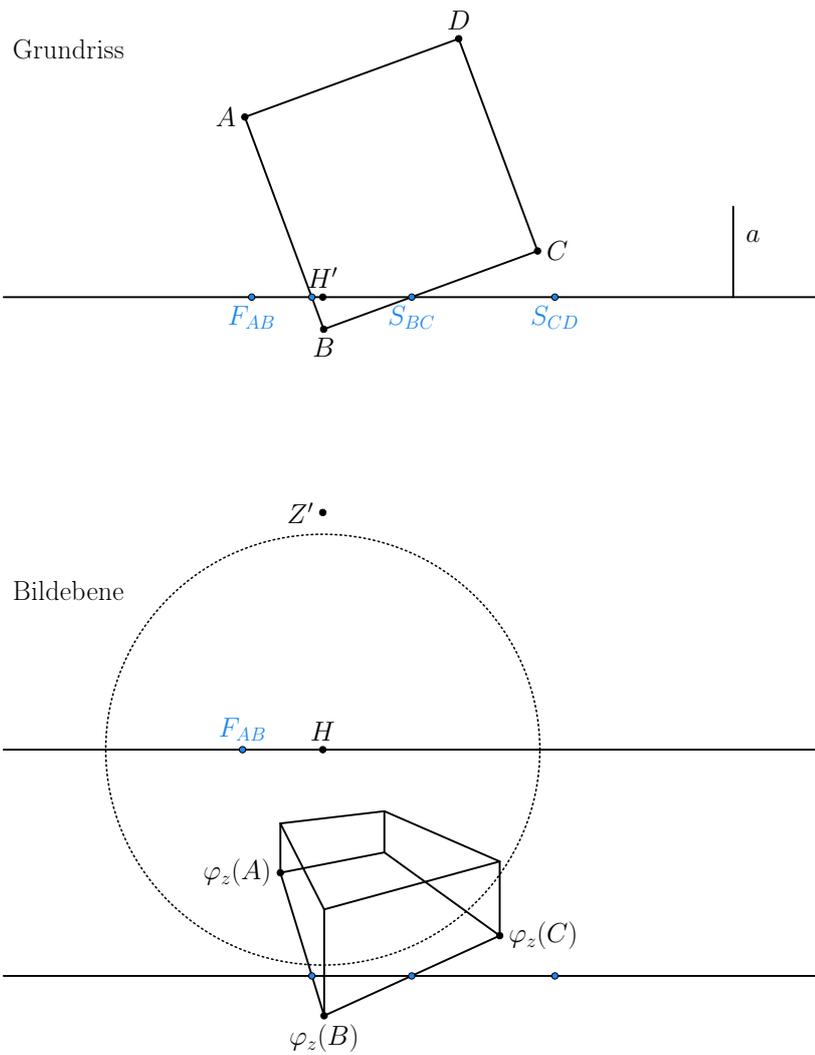


Abb. 4.3.22 Drehung des Quaders bzw. Änderung der Lage der Bildebene

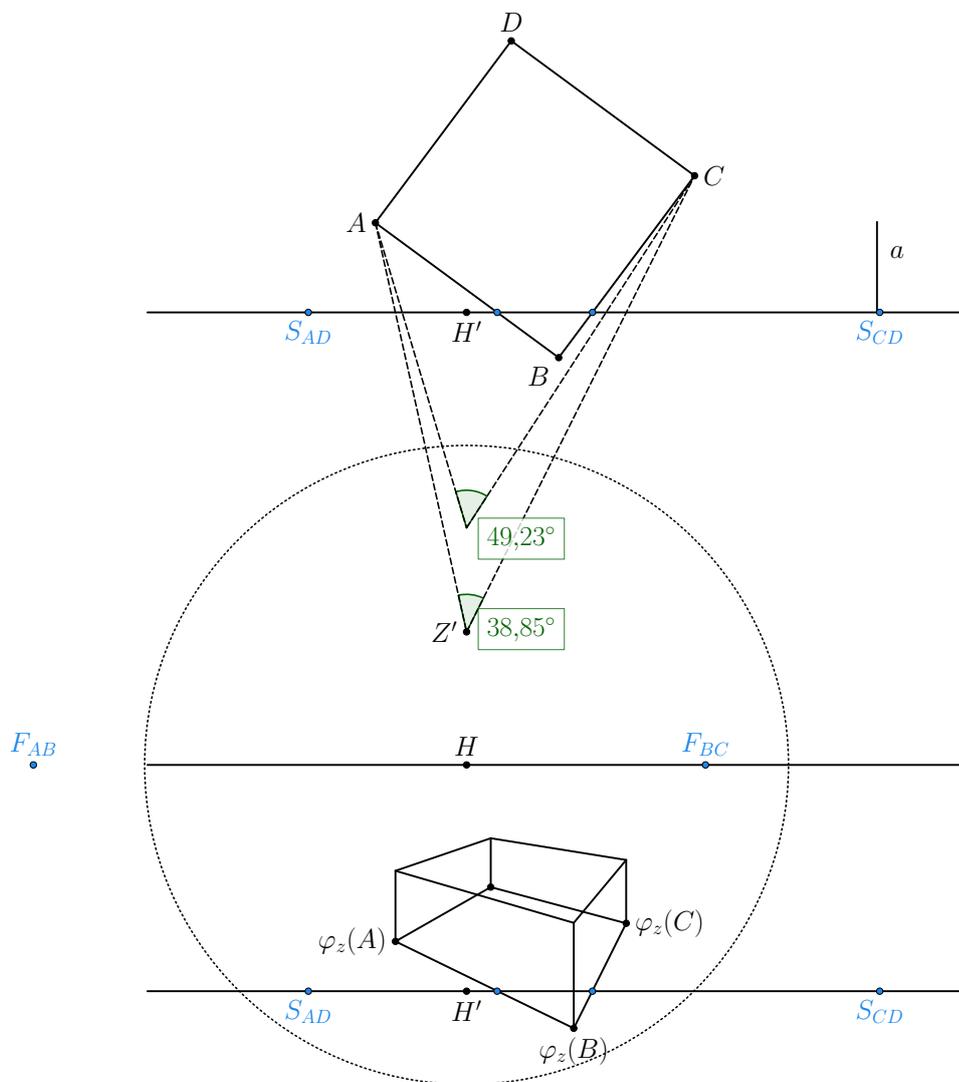
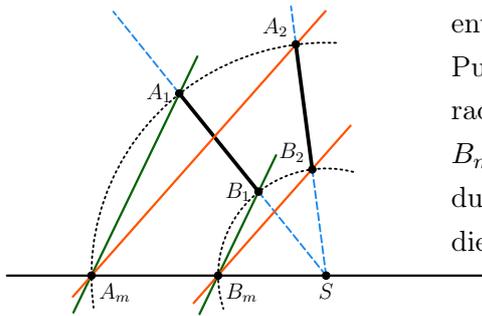


Abb. 4.3.23 Entfernung des Betrachters von der Bildebene führt zu einem größeren Distanzkreis

### 4.3.4 Messpunktverfahren

Wir kommen nun zu einem alternativen Verfahren, um das Bild einer Strecke  $\overline{AB}$  im Grundriss zu erstellen. Mithilfe des sog. *Messpunktverfahrens* [43, S. 43] lassen sich Strecken auf der Grundlinie bzw. dem Bildriss perspektivisch richtig verzerrt auf eine andere Gerade abbilden. Nach der Erläuterung der Methode konstruieren wir als Beispiel das Bild einer Treppe.

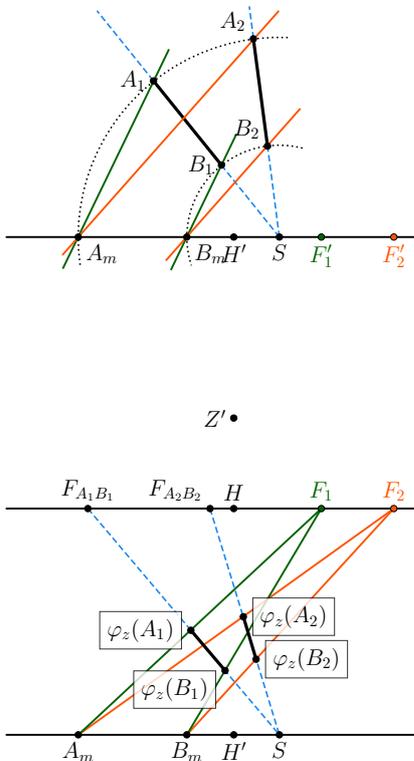


Die nebenstehende Abbildung zeigt zwei kongruente Strecken  $\overline{A_1B_1}$  und  $\overline{A_2B_2}$ , welche um den Punkt  $S$  gedreht sind. Sie liegen daher auf Geraden mit verschiedenen Fernpunkten.  $A_m$  und  $B_m$  werden *Messpunkte* genannt und entstehen durch die Abtragung der Streckenendpunkte auf die Bildspur. Aufgrund der Radien gilt

$$\overline{SA_m} = \overline{SA_1} \quad , \quad \overline{SB_m} = \overline{SB_1},$$

Abb. 4.3.24 Das Messpunktverfahren

sodass die Dreiecke  $\triangle SB_1B_m$  und  $\triangle SA_1A_m$  ähnlich zueinander sind. Demnach sind die grün markierten Geraden  $A_1A_m$  und  $B_1B_m$  parallel zueinander. Analog lässt sich die Parallelität von  $A_2A_m$  und  $B_2B_m$  beweisen.



Durch die Drehung der Strecke ändert sich die Richtung der parallelen Geradenpaare bzw. ihr Fluchtpunkt. Die Projektionen der Strecken lassen sich somit über Schnittpunkte der Geraden durch  $S, A_m, B_m$  und den entsprechenden Fluchtpunkten ermitteln, wie Abb. 4.3.25 zeigt.

Die Risse aller Fluchtpunkte ergeben sich wieder als Schnitt der Bildspur mit der entsprechenden Parallelen durch  $Z'$ . Diese werden auf den Horizont im unteren Bild übertragen. Die Schnittpunkte der Urbilder mit der Bildspur sind  $S$  und die Messpunkte. Damit können die vier Bildgeraden konstruiert werden. Die Schnittpunkte entsprechen den Bildern von  $A_1, B_1, A_2$  und  $B_2$ .

Dies zeigt noch keinen Vorteil gegenüber dem vorherigen Verfahren (Konstruktionsmethode 4.3.7, S. 108). Statt dem Lot durch  $A_1$  und  $B_1$  werden andere Geraden verwendet, dessen Fluchtpunkte noch ermittelt werden müssen, welches eher einen Nachteil bedeutet.

Abb. 4.3.25 Konstruktion mit dem Messpunktverfahren

Das Messpunktverfahren ist vor allem dann vorteilhaft, wenn auf einer Geraden äquidistante Abschnitte projiziert werden sollen, wie es bspw. bei Treppenstufen oder einem gefliesten Boden der Fall ist. Dann müssen die Endpunkte der Strecken wie  $A_1$  oder  $B_1$  nicht mit dem Zirkel abgetragen werden. Stattdessen kann ab dem Schnittpunkt der Urbildgeraden mit der Bildspur der feste Abstand fortlaufend angezeichnet werden.

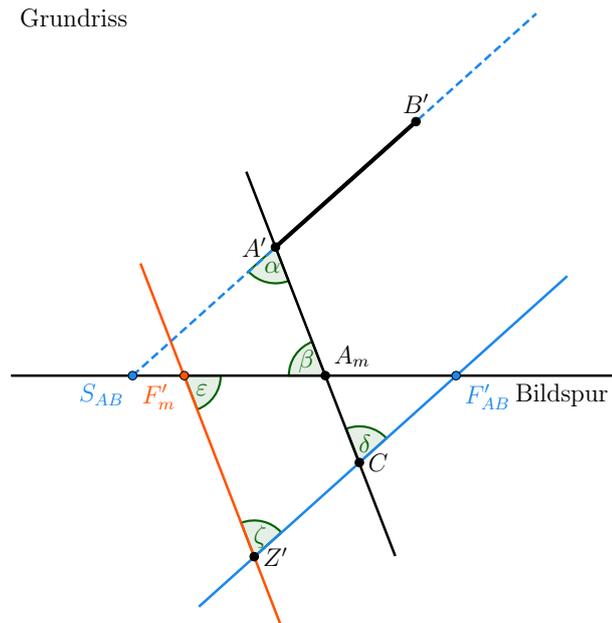


Abb. 4.3.26 Das Dreieck  $\Delta Z'F'_{AB}F'_m$  ist gleichschenkelig.

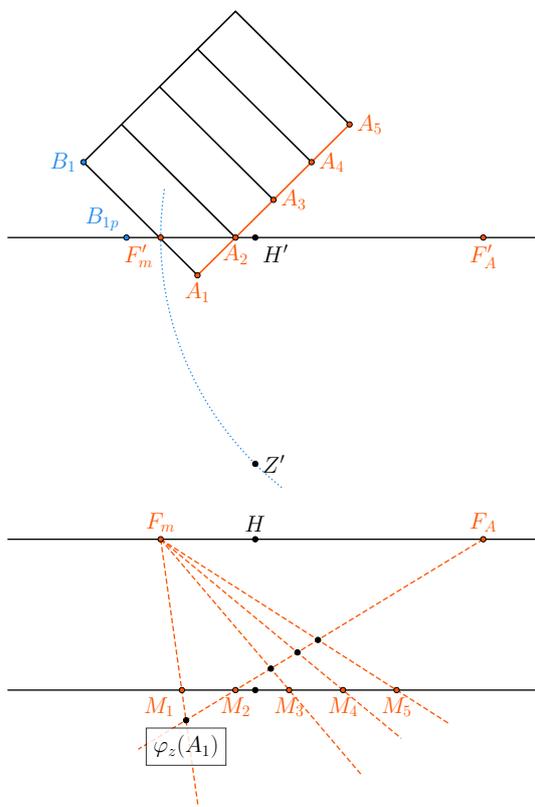
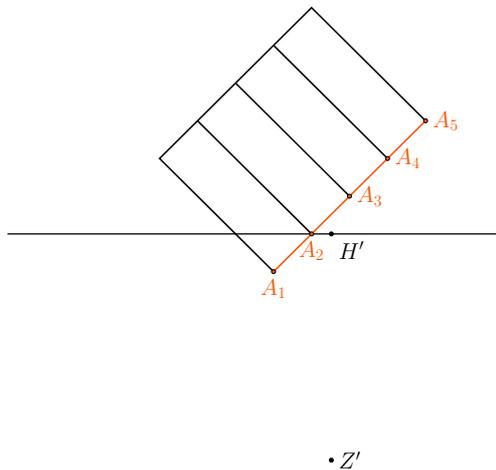
Die obige Abbildung zeigt den Grundriss der Strecke  $\overline{A'B'}$ .  $S_{AB}$  ergibt sich durch die Verlängerung der Strecke bis zur Bildspur und der Messpunkt  $A_m$  durch das Abtragen des Abstandes von  $S_{AB}$  zu  $A'$ . Somit liegt wegen  $\overline{S_{AB}A_m} = \overline{S_{AB}A'}$  ein gleichschenkliges Dreieck vor und die Basiswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  sind gleich groß. Wir wollen zeigen, dass dies für alle in der Abbildung eingezeichneten Winkel gilt, insbesondere  $\varepsilon = \zeta$ , da somit das Dreieck  $\Delta Z'F'_{AB}F'_m$  gleichschenkelig ist und sich  $F'_m$  durch die Abtragung der Strecke  $\overline{F'_{AB}Z'}$  ergibt.

Wegen  $Z'F'_m \parallel A'C$  gilt für die Wechselwinkel  $\beta = \varepsilon$ . Da auch  $S_{AB}A' \parallel Z'C$  gilt analog  $\alpha = \delta = \zeta$ . Die Basiswinkel  $\varepsilon$  und  $\zeta$  sind somit gleich groß und damit ist auch  $\overline{F'_{AB}F'_m} = \overline{F'_{AB}Z'}$ . Die Parallele durch  $Z'$  von  $A'A_m$  muss somit nicht mehr konstruiert werden.

Das Messpunktverfahren wird im folgenden für die Konstruktion des Bildes einer Treppe verwendet.

### Konstruktionsbeispiel 4.3.3

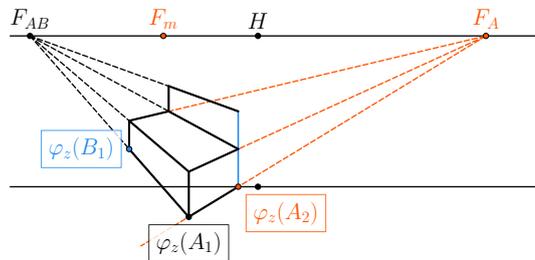
Gegeben ist der Grundriss einer Treppe, deren Stufenhöhe 0,8 cm beträgt. Mit Hilfe des Messpunktverfahren soll das zentralprojektive Bild erstellt werden. Der Horizont liegt 4 cm oberhalb der Objektebene.



**1. Schritt:** Die Messpunkte werden auf die Bildspur übertragen. Es ist  $A_2 = M_2$  und die Stufentiefe ist konstant, sodass von  $M_2$  aus der Abstand  $d(A_1, A_2)$  an  $M_2$  in beide Richtungen auf der Bildspur abgetragen werden kann, um die Messpunkte  $M_1$  bis  $M_5$  zu erhalten. Der Riss des Fluchtpunktes  $F_A$  ergibt sich wieder aus der Parallelen zur Stufenkante  $\overline{A_1A_5}$  durch  $Z'$ . Für  $F'_m$  wird mit dem Zirkel ein Kreis um  $F'_A$  mit dem Radius  $d(F'_A, Z')$  gezeichnet, bis dieser die Bildspur schneidet. Um die Breite der Stufe zu erhalten wird  $B_1$  mit  $Z'$  verbunden, sodass wir das Abbild der Projektionsgeraden durch  $B_1$  im Grundriss erhalten. Den Schnitt mit der Bildspur nennen wir daher  $B_{1p}$ .

Wir verbinden nach Übertragung der beiden Fluchtpunkte auf den Horizont die Messpunkte entsprechend mit jenen

und erhalten die Projektion der vorderen Stufenkanten sowie der seitlichen Kante  $\overline{A_1A_5}$ . Der Schnittpunkt beider Kanten entspricht  $\varphi_z(A_1)$ . Im zweiten Schritt wird die Höhe der Stufen ermittelt.



**2. Schritt:** Wir ziehen das Lot zur Bildspur durch  $B_{1p}$  und erhalten  $\varphi_z(B_1)$ . Für den Fluchtpunkt  $F_{AB}$  legen wir die Gerade durch  $\varphi_z(A_1)$  und  $\varphi_z(B_1)$ . Von  $M_2 = \varphi_z(A_2)$  aus wird die doppelte Stufenhöhe senkrecht abgetragen, da die Strecke in der Bildebene liegt und daher auf sich selbst abgebildet wird. Wir markieren die Mitte, legen durch diesen

Punkt und  $F_A$  eine Gerade, welche die Senkrechte auf der Bildspur über  $\varphi_z(A_1)$  schneidet, sodass wir die vordere, obere Ecke der ersten Stufe gefunden haben. Wir verbinden diesen mit  $F_{AB}$ , welche das Lot durch  $\varphi_z(B_1)$  schneidet, sodass wir auch die hintere, obere Ecke konstruiert haben. So lässt sich schrittweise jede Stufe konstruieren. Das Ergebnis zeigt die folgende Abbildung. Da die Treppenstufen dieselbe Tiefe aufweisen, konnten die Messpunkte leicht auf der Bildspur abgetragen werden.

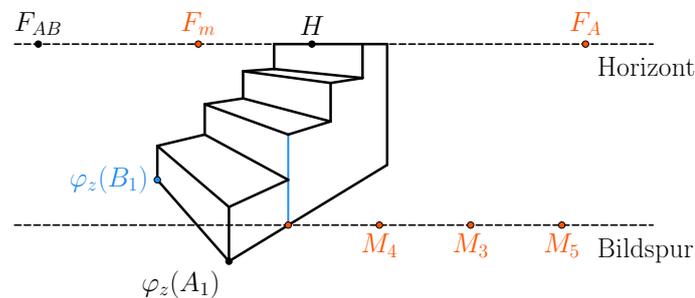


Abb. 4.3.27 Das zentralprojektive Bild der Treppe

Mit dem Messpunkteverfahren können äquidistante Strecken projiziert werden. Somit lässt sich auch ein Koordinatensystem konstruieren, welches zentralprojektiv abgebildet wird, mit dessen Hilfe sich Projektionen einfacher Körper direkt zeichnen lassen. Die folgende Abb. 4.3.28 zeigt ein Beispiel. In der oberen linken Ecke liegt die  $xy$ -Ebene vor, wobei die Bilder von  $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$  mithilfe der Messpunkte  $M_1, M_2, \dots, M_5$  konstruiert wurden. Die Bildebene liegt parallel zur  $yz$ -Ebene, d.h.  $H$  ist der Fluchtpunkt. Das Lot über  $S$  auf der Bildspur liegt in der Bildebene, die Abstände werden durch die Projektion somit nicht verändert, sodass sich das Gitter in der  $yz$ -Ebene durch die Verbindung mit  $H$  leicht konstruieren lässt.

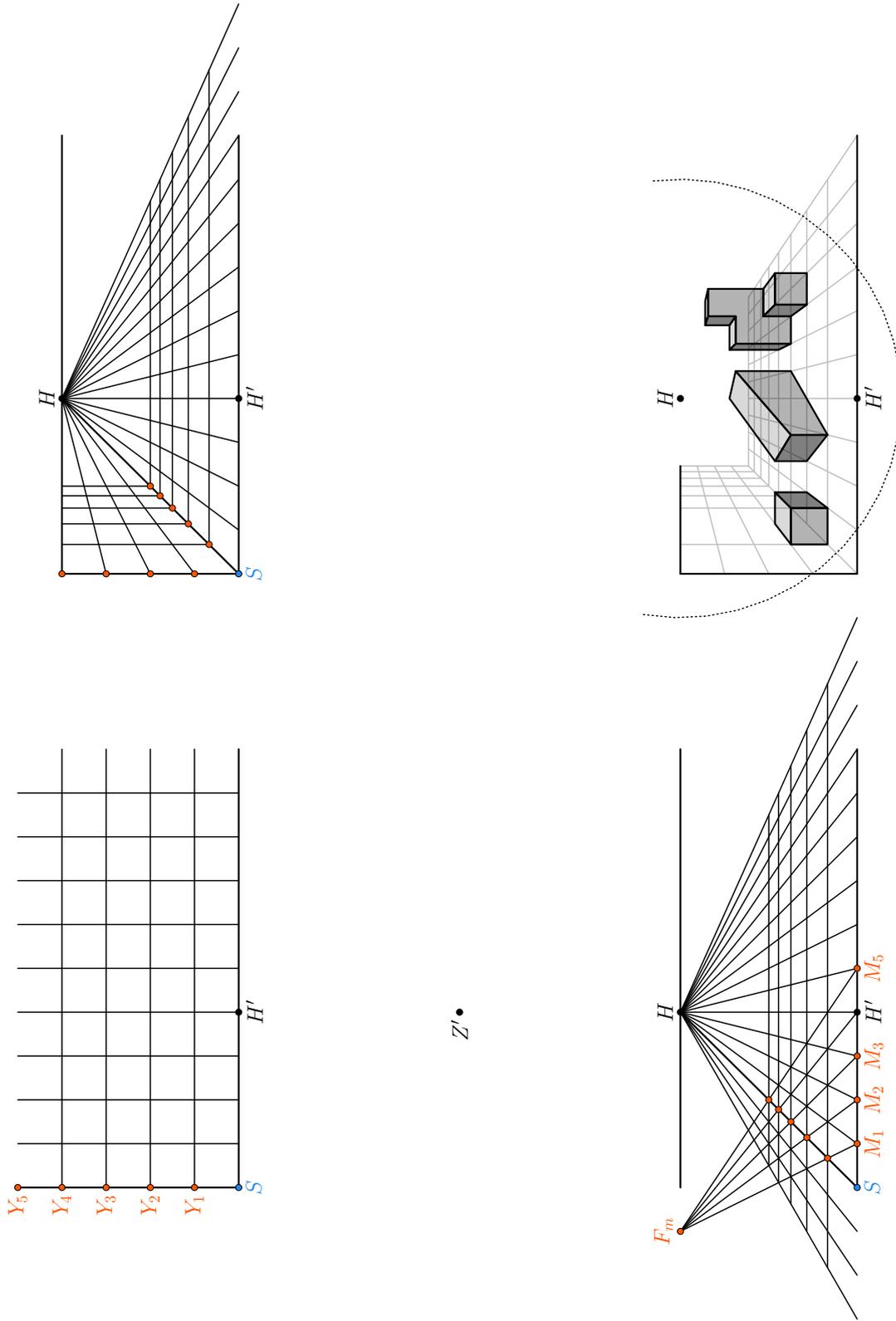
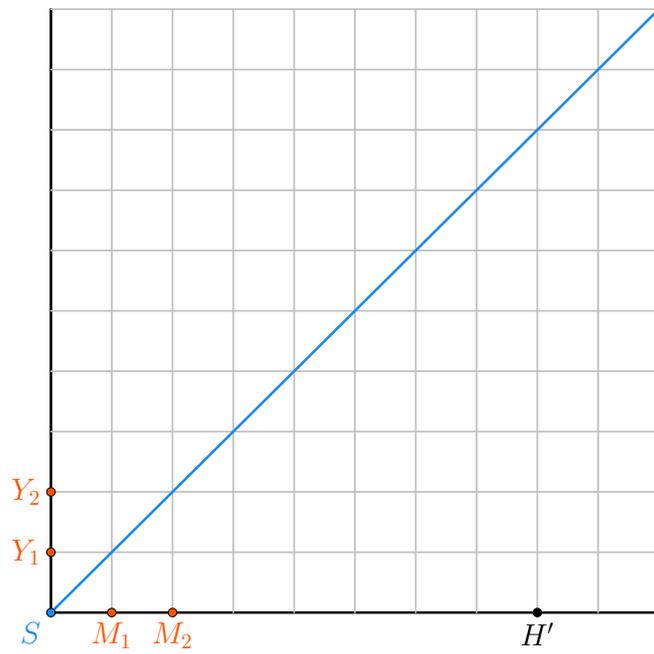


Abb. 4.3.28 Konstruktion eines zentralprojektiven Koordinatensystems

---

Die Projektion eines regelmäßigen Gitters lässt sich auch über den Schnittpunkt einer Diagonalen mit den Tiefenlinien erzeugen, denn für jede Projektion gilt die Inzidenztreue. So reichen zwei Messpunkte aus, um die Projektion der Diagonalen zu konstruieren, mit welcher sich das Gitter in der  $xy$ -Ebene abbilden lässt. Diese Alternative zeigt die folgende Abbildung.



•  $Z'$

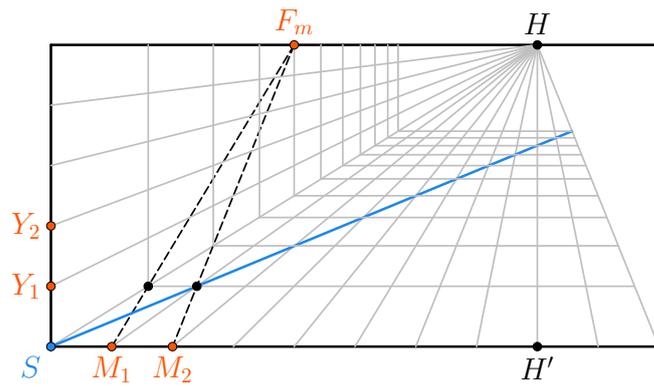


Abb. 4.3.29 Konstruktion des regelmäßigen Gitters über die Diagonale, welche mit einem Messpunkt konstruiert wurde.

Das letzte Beispiel in Abb. 4.3.30 zeigt ein gedrehtes Koordinatensystem. Nun fällt der Fluchtpunkt nicht mit dem Hauptpunkt zusammen, da die Parallelen zur  $y$ -Achse nicht mehr senkrecht auf der Bildebene stehen. Es kommt ein zweiter Fluchtpunkt hinzu. Die Fluchtpunkte beider Hauptachsen werden über die Parallele durch  $Z'$  ermittelt. Der Schnittpunkt der Bilder ergibt den ersten Bildpunkt der blauen Diagonalen. Die Punkte  $X_1, X_2, \dots$  auf der grünen Achse werden um  $S_2$  auf die Bildspur gedreht, sodass die Messpunkte  $M_1, M_2, \dots$  entstehen. Mit ihnen lassen sich im Sinne des Messpunktverfahrens die Tiefenlinien konstruieren. Die horizontalen Linien, also die Bilder der Parallelen zur  $x$ -Achse, entstehen über die blaue Diagonale. Hierbei ist  $S_1$  ein Fixpunkt. Wir verbinden diesen mit  $F_x$  und erhalten ein Bild einer der Horizontalen. Diese schneidet die Tiefenlinie zu  $\varphi_z(X_3)$  auf der blauen Diagonalen. Aufgrund der Inzidenztreue ist ein zweiter Bildpunkt der Diagonalen gefunden, sodass diese vollständig gezeichnet werden kann. Sie schneidet alle anderen Tiefenlinien, sodass auch die Horizontalen über die Verbindung mit  $F_Y$  ergänzt werden können. Damit ist die Projektion der  $xy$ -Ebene fertig.

Die  $z$ -Achse sei weiterhin parallel zur Bildebene. Das Lot auf die Bildspur in  $S_1$  ist eine Fixgerade, d.h. die Einheitsabschnitte auf der Achse können übernommen werden. Werden diese mit  $F_Y$  verbunden, entsteht ein Teil des Gitters der  $yz$ -Ebene. Die fehlenden Geraden sind die Lote über  $\varphi_z(Y_1), \varphi_z(Y_2), \dots$ , denn ihre Urbilder sind parallel zur Bildebene, d.h. der dritte Fluchtpunkt ist weiterhin ein Fernpunkt.

Mit dem Gitter lassen sich nun wieder Objekte wie in einem Koordinatensystem einzeichnen, um direkt das zentralprojektive Bild zu erhalten. Dieses Vorgehen ist ähnlich zur Axonometrie im Abschnitt 5.2, S. 210. Hier reichte es allerdings aus, das Dreibein als Verbildlichung der Basis des dreidimensionalen Raumes, parallelprojektiv abzubilden. Alle weiteren Linien des Gitters ergaben sich aus der Parallelen- bzw. Teilverhältnistreue. Diese Invarianten gelten nicht bei der Zentralprojektion, sodass hier das Gitter mithilfe der Fluchtpunkte vollständig gezeichnet werden muss. Wir wollen daher zum Abschluss der Konstruktionen ein weiteres Verfahren, welches zur Zeit der Renaissance entwickelt wurde, vorstellen.

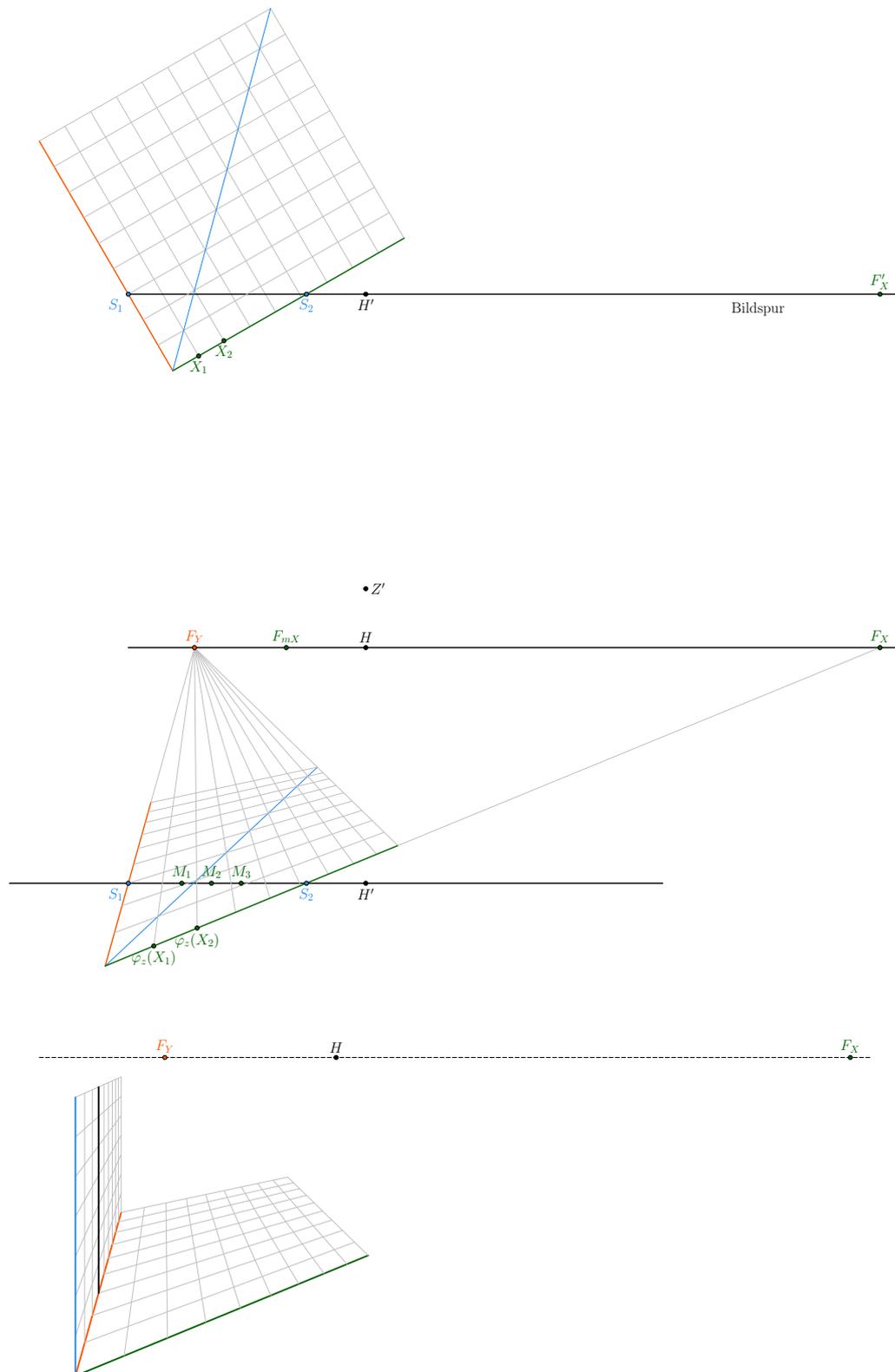


Abb. 4.3.30 Zentralprojektion eines um die  $z$ -Achse gedrehtes Koordinatensystems mit dem Messpunktverfahren

### 4.3.5 Einschneideverfahren nach P. della Francesca

Die zuvor vorgestellten Konstruktionsmethoden benötigen nur den Grundriss eines Objektes so wie einige Höhenangaben. Ein älteres Verfahren, welches auf *P. della Francesca* (1416 - 1492) zurückzuführen ist [13, S. 172] und in verschiedenen Büchern zur Konstruktion zentralprojektiver Bilder zu finden ist ([48, S. 17], [33, S. 228], [30, S. 21]), benötigt neben dem Grundriss auch den Aufriss. Sie wird teilweise auch als Durchstoßmethode bezeichnet, da wir den Durchstoßpunkt des Projektionsstrahls mit der Bildebene aus den Rissen konstruieren. Wir betrachten nochmal die Skizze in Abb. 4.3.6, S. 106. Die Gerade  $Z'A$  schneidet die Bildspur in  $A_p$ . Die Idee des Koordinatensystems kam erst nach der Renaissance, sodass P. della Francesca keins benutzen konnte und stattdessen den Abstand von  $A_p$  zu einem festen Punkt auf der Risskante messen und in die Bildebene übertragen musste. In der heutigen Zeit können wir dagegen in der Schule ein zweidimensionales Koordinatensystem nutzen, wobei der Ursprung beliebig auf der Risskante liegt. So entspricht  $A_p$  der  $x$ -Koordinate. Analog erhalten wir über den Aufriss die  $y$ -Koordinate.

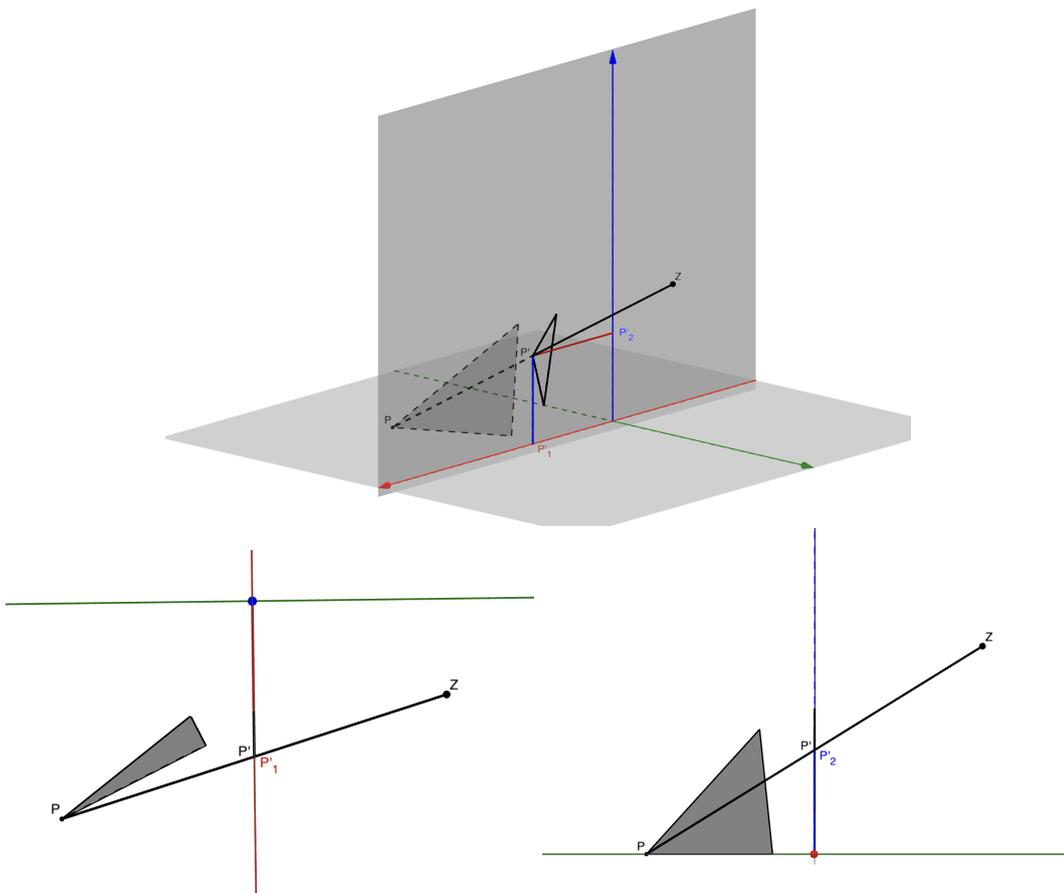


Abb. 4.3.31 Ein schräg im Raum liegendes Dreieck wird auch die  $xz$ -Ebene projiziert. Das Projektionszentrum ist der Punkt  $Z$ . Die unteren Bilder zeigen den Grundriss (links) und Aufriss (rechts).

Schülerinnen und Schüler können dies mithilfe der 3D Ansicht von *GeoGebra* leicht einsehen. Wir zeichnen ein ebenes Dreieck, dessen eine Kante auf der  $xy$ -Ebene steht, die Spitze dagegen versetzt, sodass es gegenüber der Bildebene, welche der  $xz$ -Ebene entspricht, verkippt ist. Dies hat zur Folge, dass der Grundriss ebenfalls ein Dreieck ergibt und keine Linie. Wir zeichnen nun die Strahlen von  $Z$  zu den Ecken des Dreiecks und markieren die Schnittpunkte mit der Bildebene, um das Bilddreieck zu erhalten. Betrachten wir den Punkt  $P$  und sein Bildpunkt  $P'$ , von welchem wir aus parallele Geraden zu der roten bzw. blauen Achse ziehen und die Schnittpunkte mit  $P_1$  und  $P_2$  bezeichnen. Dies sind die Koordinaten von  $P'$ , wenn wir die rote und blaue Achse als 2D Koordinatensystem der Bildebene interpretieren. Schauen wir nun von oben entgegengesetzt zur blauen  $z$ -Achse auf die Szene, so ergibt sich  $P_1$  als Schnittpunkt vom Grundriss des Projektionsstrahls mit der roten Achse. Schauen wir von der Seite auf die Szene entgegengesetzt zur roten  $x$ -Achse. Hier ergibt sich  $P_2$  als Schnittpunkt des Projektionsstrahls im Aufriss mit der blauen Achse. Somit lassen sich beide Koordinaten der Bildpunkte ermitteln.

Wir übertragen die Szene in die Ebene, wie die untere Abbildung zeigt. Da wir die dreidimensionalen Koordinaten des Dreiecks kennen, lassen sich die entsprechenden Risse hieraus ableiten. Wir legen dazu die blaue  $z$ -Achse auf die positive Halbgerade der  $y_E$ -Achse der Ebene sowie die rote  $x$ -Achse auf die negative. Die grüne  $y$ -Achse liegt auf der  $x_E$ -Achse der Ebene. Ist  $P(x, y, z)$  der Punkt im Raum, so

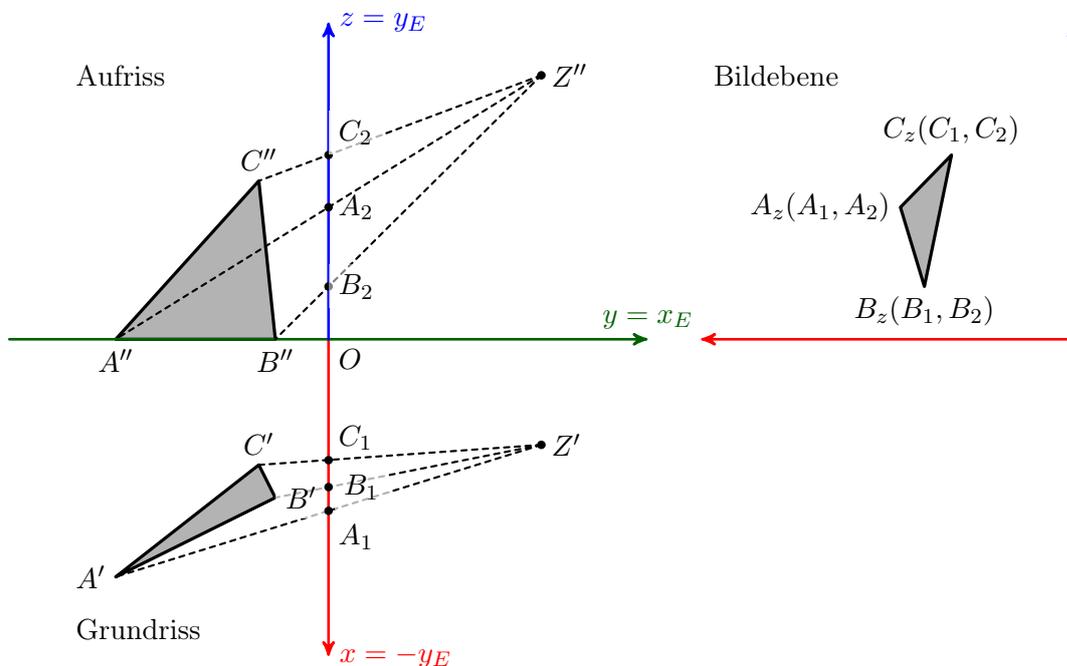


Abb. 4.3.32 Konstruktion der Projektion des Dreiecks in der Ebene mithilfe der Risse.

ergibt sich  $P'(y, -x)$  für den Grundriss und  $P''(y, z)$  für den Aufriss. Wir ergänzen in den Rissen die Projektionsstrahlen, markieren die entsprechenden Schnittpunkte, übertragen diese in das Koordinatensystem der Bildebene und erhalten das Bilddreieck.

Diese Konstruktionsmethode kann im Unterricht als Einstieg genutzt werden, da im dreidimensionalen Modell leicht einsehbar ist, warum diese Methode funktioniert. Außer dem Verständnis für Koordinatensysteme ist hierbei kein weiteres Vorwissen nötig. Sie ist allerdings auch etwas aufwändig, da für jeden Bildpunkt zwei Schnittpunkte konstruiert werden müssen und sie nutzt keine der besonderen Eigenschaften einer Zentralprojektion wie bspw. Fluchtpunkte im Gegensatz zu den vorherigen Methoden.

Wir kommen nun zu einer Möglichkeit, wie die Zentralprojektion in der Oberstufe behandelt werden kann, in dem wir ein räumliches, kartesisches Koordinatensystem verwenden, um Geraden und Punkte nun analytisch zu beschreiben. Statt Bildpunkte zu konstruieren, wollen wir nun Formeln herleiten, um diese zu berechnen.

## 4.4 Analytische Betrachtung der Zentralprojektion

In der Sekundarstufe II ist im Lehrplan (NRW, Sekundarstufe II, Stand 2014) ein vorgesehener Themenbereich die analytische Geometrie. Hierbei werden Punkte, Geraden und Ebenen im Raum unter Verwendung des kartesischen Koordinatensystems algebraisch beschrieben und mithilfe von Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  Berechnungen mit diesen durchgeführt. So ist u.a. die Beschreibung von Ebenen  $E$  und Geraden  $g$  mithilfe von Parametergleichungen der Form

$$\begin{aligned} g : \vec{x} &= \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \\ E : \vec{x} &= \vec{p} + \lambda_1 \cdot \vec{q} + \lambda_2 \cdot \vec{r} \quad \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

bzw. bei Ersterem auch mit Koordinatengleichungen der Form

$$E : n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = k$$

Teil des Lehrplans. Dabei ist  $\vec{a}$  ein Ortsvektor auf den Punkt  $A$ , welcher Teil der Geraden ist, sowie  $\vec{b}$  ein Vektor, welcher die Richtung der Geraden beschreibt. Im Falle der Ebene existieren zwei Richtungsvektoren  $\vec{q}$  und  $\vec{r}$ , welche linear unabhängig sein müssen. Ist dies nicht erfüllt, beschreibt die Parametergleichung stattdessen eine Gerade. Der Vektor  $\vec{p}$  ist ein Ortsvektor mit Endpunkt  $P$ , welcher in der Ebene  $E$  liegt. In der Koordinatengleichung sind die reellen Zahlen  $x_i$  die Einträge im Ortsvektor  $\vec{x}$ , welcher Teil der Ebene  $E$  ist. Die reellen Zahlen  $n_i$  sind die Einträge

des Normalenvektors  $\vec{n}$ , welcher senkrecht zur Ebene liegt. Das Skalarprodukt von  $\vec{x}$  und  $\vec{n}$  ist  $k$ . Da  $P = (p_1 / p_2 / p_3)$  in  $E$  liegt, so muss  $\vec{p} \cdot \vec{n} = k$  gelten.

Neben der Beschreibung von Geraden und Ebenen durch Gleichungen ist auch die Berechnung des Schnittpunktes einer Geraden  $g$  mit einer Ebene  $E$ , sofern  $g \nparallel E$  ist, im Lehrplan vorgegeben. Somit sind alle Voraussetzungen für eine vektorielle Betrachtung der Zentralprojektion in der Oberstufe erfüllt, wie wir nachfolgend an einem Beispiel zeigen werden. Die Achsen des Koordinatensystems seien mit  $x_1, x_2$  und  $x_3$  bezeichnet. Zur Vereinfachung sei festgelegt, dass die Bildebene  $\Pi$  der  $x_1x_3$ -Ebene entspricht, d.h. ihre Koordinatenform ist

$$\Pi : x_2 = 0 \Leftrightarrow \Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}.$$

Wir werden später noch zeigen (Abb. 4.4.6, S. 155), warum trotz festgelegter Bildebene allgemeine Aussagen zur Zentralprojektion möglich sind. D.h. es reicht aus, Eigenschaften der Zentralprojektion für beliebige Geraden und Punkte unter beliebigen Projektionszentren  $Z$  mit der o.g. Bildebene zu beweisen. Die folgenden Beispiele sind schulnah ausgearbeitet, sodass diese auch im Unterricht verwendet werden können. Als Einstieg berechnen wir den Bildpunkt eines konkreten Punktes anhand einer gegebenen Zentralprojektion.

#### Aufgabenbeispiel 4.4.1

Gegeben sei eine Zentralprojektion mit Projektionszentrum  $Z(3 / 4 / 5)$  und der Bildebene  $\Pi : x_2 = 0$ . Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes  $P'$ , auf welchen der Punkt  $P(4 / 2 / 4)$  projiziert wird.

*Lösung:*

- (1) Aufstellung der Geradengleichung  $g$  mit  $Z, P \in g$ :

$$g_P : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Bestimmung des Schnittpunktes  $P'$  mit der Bildebene  $\Pi$ :

$$x_2 = 4 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2.$$

$\lambda$  in  $g_P$  eingesetzt ergibt dann die Koordinaten des Bildpunktes:  $P'(5 / 0 / 3)$ .

Als visuelle Unterstützung können die Schülerinnen und Schüler die Situation (z.B. mit *GeoGebra*) im Koordinatensystem darstellen. Abb. 4.4.1 zeigt neben der Projektion von  $P$  auf  $P'$  auch die eines zweiten Punktes  $Q$ . Der Rechenweg zur Ermittlung des Bildpunktes lässt sich in zwei Schritten gliedern. Zuerst wird die Parametergleichung der Projektionsgeraden durch den Punkt und das Projektionszentrum aufgestellt. Wir verwenden dabei  $Z$  für den Ortsvektor. Die Differenz der Ortsvektoren von  $Z$  und  $P$  ergibt den Richtungsvektor. Im zweiten Schritt setzen wir  $g_P$  in die Koordinatengleichung der Bildebene ein und erhalten  $\lambda$ . Wir wollen folgende Eigenschaften der Zentralprojektion nachprüfen:

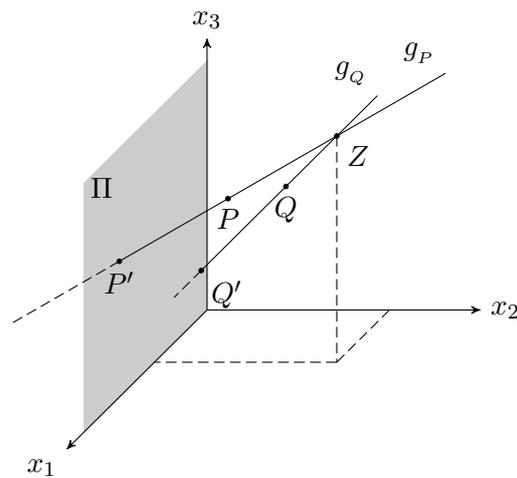


Abb. 4.4.1 Die Zentralprojektion von  $P$  und  $Q$ .

#### Satz 4.4.1

Die Zentralprojektion hat folgende Eigenschaften (vgl. [47, S. 191]):

- i) Die Zentralprojektion ist inzidenttreu, d.h. alle Punkte  $P$  einer Geraden  $g$  werden auf Bildpunkte  $P' \in g'$  abgebildet, wobei  $g'$  die Bildgerade von  $g$  ist. Schneiden sich zwei Geraden  $g$  und  $h$  in einem Punkt  $S$ , dann schneiden sich  $g'$  und  $h'$  in dem Punkt  $S'$ .
- ii) Parallele Geraden, welche nicht parallel zur Bildebene verlaufen, werden auf Geraden abgebildet, welche sich in einem gewöhnlichen Punkt, dem *Fluchtpunkt* schneiden. Da sich alle Parallelbüschel in einem Fernpunkt schneiden, ist wegen der Inzidenttreue der entsprechende Fluchtpunkt das Bild des Fernpunktes (Abb. 4.4.7, S. 156).
- iii) Die Bilder von Parallelbüschel unterschiedlicher Richtungen schneiden sich in unterschiedlichen Fluchtpunkten. Liegen alle Parallelbüschel in einer bzw. in paarweise parallelen Ebenen, so liegen alle Fluchtpunkte auf einer Geraden (Abb. 4.4.8, S. 159).

Wir wollen zunächst die Eigenschaften (i) - (iii) erst mithilfe von Beispielen untersuchen und dann für beliebige Geraden zeigen. Das Zentrum und die Projektionsebene seien mit  $Z(3/4/5)$  und  $\Pi : x_2 = 0$  festgelegt.

#### 4.4.1 (i) Inzidenztreue der Projektion

Die Projektion einer Geraden erfolgt nach der Definition der Zentralprojektion punktweise (Def. 3.1.1, S. 46). Da nach den Axiomen in Kap. 2.2, S. 25, eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt wird, lässt sich die Bildgerade  $g'$  über die Bilder zweier verschiedener Punkte  $P \in g$  und  $Q \in g$  bestimmen. Als Beispiel der Inzidenztreue wird das Bild eines dritten Punktes  $R \in g$  bestimmt und geprüft, ob ebenfalls  $R' \in g'$  gilt.

##### Aufgabenbeispiel 4.4.2

Betrachten Sie die Zentralprojektion mit  $Z(3/4/5)$  auf die Bildebene  $\Pi : x_2 = 0$ . Gegeben seien folgende Punkte, welcher auf der Geraden  $g$  liegen:

$$P(1/1/5) \quad Q(2/2/4) \quad R(2,5/2,5/3,5) .$$

Bestimmen Sie die Bildpunkte  $P', Q', R'$  und zeigen Sie, dass diese ebenfalls auf einer Geraden liegen.

*Lösung:*

Die Bildpunkte werden wie im vorherigen Aufgabenbeispiel 4.4.1 ermittelt. Das Ergebnis ist

$$P' \left( \frac{1}{3} / 0 / 5 \right) \quad Q' (1 / 0 / 3) \quad R' \left( \frac{5}{3} / 0 / 1 \right) .$$

Mit den ersten beiden Bildpunkten bestimmen wir nun die Parametergleichung der Verbindungsgeraden  $g_{P'Q'}$ :

$$g_{P'Q'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Wir setzen den Ortsvektor von  $R'$  in die Geradengleichung ein, und zeigen, dass ein Wert für  $\mu$  existiert:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

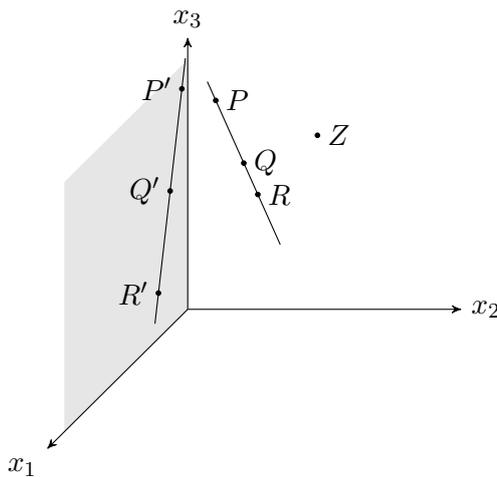


Abb. 4.4.2 Das Bild einer Geraden wird punktwise bestimmt, da die Zentralprojektion inzidenztreu ist.

Demnach sind die Bildpunkte kollinear und wir nennen die Verbindungsgerade  $g_{P'Q'}$  die Bildgerade  $g'$ . Abb. 4.4.2 veranschaulicht das Ergebnis. Wir führen eine erste Verallgemeinerung ein, indem wir den dritten Punkt  $R$  variabel halten und zeigen, dass für jeden Punkt  $R \in g$  auch  $R' \in g'$  gilt:

Damit  $R$  ein Punkt von  $g$  ist, muss dieser von der Form

$$R(1 + \lambda / 1 + \lambda / 5 - \lambda) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

sein. Wir bestimmen davon wieder den Bildpunkt über den Schnitt der Projektionsgeraden und der Bildebene:

- (1) Aufstellung der Geradengleichung  $p$  mit  $Z, R \in p$ :

$$p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \left[ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 + \lambda \\ 5 - \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \lambda - 2 \\ \lambda - 3 \\ -\lambda \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

- (2) Bestimmung des Schnittpunktes  $R'$  mit der Bildebene II:

$$x_2 = 4 + \mu(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{4}{3 - \lambda}.$$

Für  $\lambda = 3$  existiert kein Schnittpunkt, da in diesem Fall die Projektionsgerade parallel zur Bildebene liegt. Wir setzen daher im folgenden  $\lambda \neq 3$  voraus.  $\mu$  in  $p$  eingesetzt ergibt dann die Koordinaten des Bildpunktes  $R'$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{4}{3 - \lambda} \begin{pmatrix} \lambda - 2 \\ \lambda - 3 \\ -\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{3 - \lambda} \begin{pmatrix} 3(3 - \lambda) + 4(\lambda - 2) \\ 4(3 - \lambda) + 4(\lambda - 3) \\ 5(3 - \lambda) - 4\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{3 - \lambda} \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 0 \\ 15 - 9\lambda \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun, dass die Bildpunkte  $R'$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  in  $g'$  liegen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3-\lambda} \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 0 \\ 15-9\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3-\lambda} \begin{pmatrix} \lambda+1 - \frac{1}{3}(3-\lambda) \\ 0 \\ 15-9\lambda - 5(3-\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda}{3-\lambda} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\lambda}{3-\lambda} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\lambda}{3-\lambda} \end{aligned}$$

Wir können für jeden Wert von  $\lambda \neq 3$  den Parameter  $\alpha$  bestimmen. Somit liegen alle Bildpunkte  $R'$  auf der Geraden  $g'$ . Im Fall  $\lambda = 3$  wird der Punkt  $R$  auf einen Fernpunkt abgebildet, da die Projektionsgerade parallel zur Bildebene wird. Aus euklidischer Sicht hat  $R$  dann keinen Bildpunkt, da die Projektionsgerade die Bildebene in keinem gewöhnlichen Punkt schneidet. Man spricht daher auch von einer *Verschwindungsebene*, welche durch  $Z$  parallel zur Bildebene liegt. Die Projektionsgeraden aller Punkte dieser Ebene liegen parallel zur Bildebene, sodass ihre Bildpunkte „verschwinden“.

Die Herangehensweise der ersten Verallgemeinerung entspricht der Punktprobe im Zahlenbeispiel. Eine andere Betrachtungsweise wäre, die Bildpunkte  $R'$  als Gerade in Parameterform darzustellen, um zu zeigen, dass diese mit der Bildgeraden  $g'$  identisch ist:

$$\begin{aligned} h : \vec{x} &= \frac{1}{3-\lambda} \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 0 \\ 15-9\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{3-\lambda} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(3-\lambda) + \frac{4}{3}\lambda \\ 0 \\ 5(3-\lambda) - 4\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2\lambda}{3-\lambda} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= g' : \vec{x} \quad \text{mit } \mu = \frac{2\lambda}{3-\lambda} \end{aligned}$$

Das Beispiel zeigt, dass das Bild der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch die Projektion zweier beliebiger Punkte dieser Geraden ermittelt werden konnte. Wir verallgemeinern nun weiter und zeigen, dass dies mit jeder beliebigen Geraden möglich ist. Sei nun

$$g : \vec{x} = \vec{o} + \lambda \cdot \vec{r} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

mit Ortsvektor  $\vec{o}$  und Richtungsvektor  $\vec{r}$ . Das Projektionszentrum ist wieder  $Z(3/4/5)$  und die Bildebene  $\Pi : x_2 = 0$ . Jeder Punkt auf  $g$  hat nun folgende Form:

$$P \in g \Leftrightarrow P(o_1 + \lambda r_1 / o_2 + \lambda r_2 / o_3 + \lambda r_3). \quad (4.4.1)$$

Wir bestimmen wieder das Bild von  $P'$  mithilfe der Projektionsgeraden durch  $Z$  als Schnittpunkt mit der Bildebene:

(1) Projektionsgerade:

$$p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} o_1 + \lambda r_1 - 3 \\ o_2 + \lambda r_2 - 4 \\ o_3 + \lambda r_3 - 5 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.4.2)$$

Anmerkung: Hier liegt eine Geradenschar vor, welche eine Ebene bildet, die  $Z$  und  $g$  enthält, sofern  $Z \notin g$ , da sonst  $\vec{r}$  und  $\vec{o} - \vec{z}$  linear abhängig wären. Auf diese Projektionsebene wird später noch eingegangen.

(2) Schnittpunkt

$$x_2 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{4}{4 - (o_2 + \lambda r_2)} \quad (4.4.3)$$

Durch Einsetzen von  $\mu$  in  $p$  erhalten wir folgende Bildpunkte:

$$P' \left( \frac{4(o_1 + \lambda r_1) - 3(o_2 + \lambda r_2)}{4 - (o_2 + \lambda r_2)} / 0 / \frac{4(o_3 + \lambda r_3) - 5(o_2 + \lambda r_2)}{4 - (o_2 + \lambda r_2)} \right) \quad (4.4.4)$$

Nun ergibt sich die Frage, ob sich  $P'$  mit dem Parameter  $\lambda$  als Geradengleichung umschreiben lässt, um somit zu zeigen, dass alle Bildpunkte auf einer Geraden liegen. Hierfür können im Schulunterricht dynamische Geometrieprogramme wie *GeoGebra* für erste Untersuchungen herangezogen werden, da sie es ermöglichen, die hergeleiteten algebraischen Ausdrücke zu veranschaulichen.

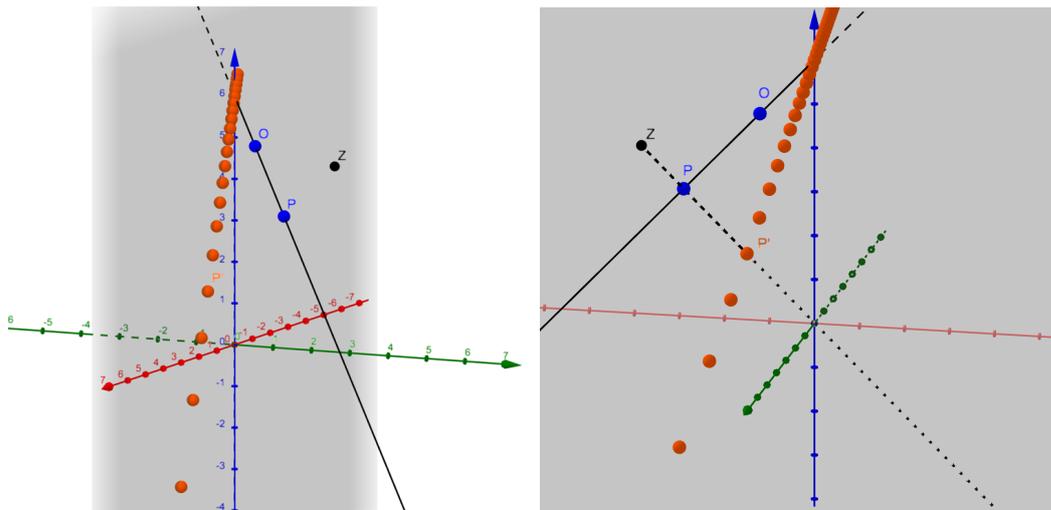


Abb. 4.4.3 Mithilfe *GeoGebra* können Schülerinnen und Schüler sehen, dass die Punkte  $P'$  Gl.(4.4.4) auf einer Geraden liegen, und die Punkte  $P, P'$  und  $Z$  ebenfalls kollinear sind.

Die Abb. 4.4.3 zeigen, dass die Punkte  $P'$  kollinear sind. Hierfür wurde für den Parameter  $\lambda$  in *GeoGebra* ein Schieberegler definiert. Mit den Punkten  $O$  und  $P$  wurde eine beliebige Gerade aufgestellt und die entsprechenden Koordinaten  $o_1, o_2, o_3$  und  $r_1, r_2, r_3$  in die Gl. (4.4.4) eingesetzt. Wir bewegen nun den Schieberegler und lassen uns von *GeoGebra* die Spur von  $P'$  zeigen. Dieses Experiment können Schülerinnen und Schüler mit anderen Geraden durchführen, indem sie die Lage der Punkte  $P$  und  $O$  verändern.

Wie können wir nun aus Gl.(4.4.4) die Bildgerade in Parameterform gewinnen? Zwei Werte für den Parameter  $\lambda$  einsetzen und dann aus den beiden Punkten die Gleichung über Orts- und Richtungsvektor zu bestimmen, würde zu unhandlichen Termen führen.

Wir gehen stattdessen einen Schritt zurück und formen Gl.(4.4.3) nach  $\mu \cdot \lambda$  um und setzen diese in Gl.(4.4.2) der Projektionsgeraden  $p$  ein. Dies hat den Vorteil, dass der Parameter sich dann leichter separieren lässt, um Orts- und Richtungsvektor zu erhalten:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{4}{4 - (o_2 + \lambda r_2)} \Leftrightarrow \mu(4 - o_2) - \mu\lambda r_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \mu\lambda = \frac{\mu(4 - o_2) - 4}{r_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} o_1 - 3 \\ o_2 - 4 \\ o_3 - 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow h : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} o_1 - 3 \\ o_2 - 4 \\ o_3 - 5 \end{pmatrix} + \frac{\mu(4 - o_2) - 4}{r_2} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 - \frac{4r_1}{r_2} \\ 0 \\ 5 - \frac{4r_3}{r_2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} o_1 - 3 + (4 - o_2)\frac{r_1}{r_2} \\ 0 \\ o_3 - 5 + (4 - o_2)\frac{r_3}{r_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir wollen dieses Ergebnis mit dem ersten Zahlenbeispiel kontrollieren. Wir haben berechnet, dass die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf die Bildgerade

$$g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

projiziert wird. Zur Kontrolle setzen wir nun die Koordinaten des Orts- und Richtungsvektors von  $g$  in die hergeleitete Formel für die Bildgerade  $h$  ein:

$$\begin{aligned}
h : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 - \frac{4 \cdot 1}{1} \\ 0 \\ 5 - \frac{4 \cdot (-1)}{1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 - 3 + (4 - 1)\frac{1}{1} \\ 0 \\ 5 - 5 + (4 - 1)\frac{-1}{1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir überprüfen, ob  $h$  und  $g'$  identisch sind:

(1) Lineare Abhängigkeit der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Geraden sind parallel}$$

(2) Punktprobe mithilfe der Ortsvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1/0/9) \in g'$$

Da die Geraden parallel sind und einen Punkt gemeinsam haben, sind  $h$  und  $g'$  identisch. Zusammenfassend haben wir nun folgendes gezeigt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \Rightarrow g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 - \frac{4r_1}{r_2} \\ 0 \\ 5 - \frac{4r_3}{r_2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} o_1 - 3 + (4 - o_2) \frac{r_1}{r_2} \\ 0 \\ o_3 - 5 + (4 - o_2) \frac{r_3}{r_2} \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

Dies geschah durch punktweise Abbildung der Geraden  $g$  und der Inzidenztreue, d.h.  $P \in g \Rightarrow P' \in g'$ .

Mithilfe von *GeoGebra* können Schülerinnen und Schüler aber auch zwei Sonderfälle beobachten, welche in Abb. 4.4.4 dargestellt sind:

- (1) Für  $r_2 = 0$  kann  $g'$  nach Gl. (4.4.5) nicht berechnet werden. Dennoch existiert die Gerade, welche sogar parallel zu  $g$  ist.
- (2) Jede Gerade, welche das Projektionszentrum  $Z$  enthält, aber nicht parallel zur Bildebene ist, wird auf einen Punkt abgebildet.

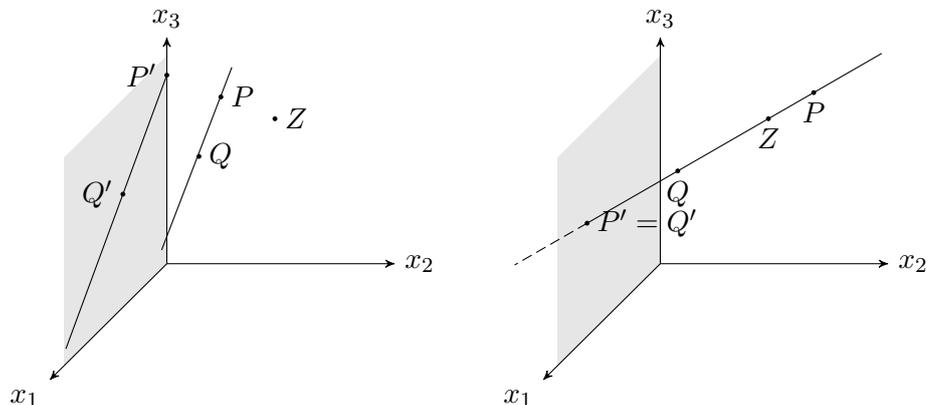


Abb. 4.4.4 Beispiele für die beiden Sonderfälle, welche bei der Zentralprojektion von Geraden auftreten können.

Für den Fall, dass  $r_2 = 0$  ist, kann Gl.(4.4.3), S. 147, nicht auf  $\lambda\mu$  umgeformt werden. Stattdessen setzen wir den Wert in die allgemeine Gleichung (4.4.4) der Bildpunkte ein und zeigen wieder, dass alle Bildpunkte auf einer Geraden liegen, welche sogar parallel zur Urbildgeraden ist, da ihre Richtungsvektoren übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
r_2 = 0 &\Rightarrow P' \left( \frac{4(o_1 + \lambda r_1) - 3o_2}{4 - o_2} / 0 / \frac{4(o_3 + \lambda r_3) - 5o_2}{4 - o_2} \right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{4 - o_2} \begin{pmatrix} 4o_1 - 3o_2 \\ 0 \\ 4o_3 - 5o_2 \end{pmatrix} + \frac{4\lambda}{4 - o_2} \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ r_3 \end{pmatrix} = g' : \vec{x} \\
&\Rightarrow g \parallel g'
\end{aligned}$$

Wir kommen zum zweiten Sonderfall, bei der die Gerade mit ihrer Projektionsgerade zusammenfällt, dadurch, dass das Projektionszentrum in ihr enthalten ist. Was anschaulich leicht einzusehen ist, sollte auch durch die allgemeine Formel der Bildpunkte herzuleiten sein.

Damit  $(3 / 4 / 5) \in g$  erfüllt ist, ist es am einfachsten, über  $Z$  den Ortsvektor der Geraden zu bestimmen, d.h.  $o_1 = 3$ ,  $o_2 = 4$  und  $o_3 = 5$ . Dann gilt für  $P'$  folgendes:

$$\begin{aligned}
&P' \left( \frac{4(3 + \lambda r_1) - 3(4 + \lambda r_2)}{4 - (4 + \lambda r_2)} / 0 / \frac{4(5 + \lambda r_3) - 5(4 + \lambda r_2)}{4 - (4 + \lambda r_2)} \right) \\
&\Rightarrow P' \left( \frac{4\lambda r_1 - 3\lambda r_2}{-\lambda r_2} / 0 / \frac{4\lambda r_3 - 5\lambda r_2}{-\lambda r_2} \right) \\
&\Rightarrow P' \left( 3 - \frac{4}{r_2} r_1 / 0 / 5 - \frac{4}{r_2} r_3 \right)
\end{aligned}$$

$P'$  enthält keinen Parameter mehr und jeder Punkt der Geraden wird auf diesen projiziert. Dasselbe Resultat ergibt sich wenn die entsprechenden Werte in die allgemeine Geradengleichung (4.4.5) eingesetzt werden. Der Richtungsvektor wird dann identisch zum Nullvektor.

Wir verallgemeinern weiter, indem zusätzlich zur Geraden  $g$  nun auch das Projektionszentrum  $Z$  variabel ist. Wir haben somit folgende Situation:

Gegeben:

$$\begin{aligned}
g : \vec{x} &= \vec{o} + \lambda \vec{r} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\
Z(z_1 / z_2 / z_3) &\text{ mit } Z \notin g \\
\Pi : x_2 &= 0
\end{aligned}$$

Hier kann genauso wie zuvor vorgefahren werden, wobei die Zahlen 3, 4 und 5 durch  $z_1$ ,  $z_2$  und  $z_3$  ersetzt werden.

#### 4.4.2 Formeln für die Bilder einer Zentralprojektion

Die Untersuchung der Inzidentreue führte zu einer allgemeinen Formel für die Bilder von Punkten bzw. Geraden unter einer Zentralprojektion mit Zentrum  $Z$  und der Bildebene  $\Pi : x_2 = 0$ . Zur Bestimmung der Bildgeraden  $g'$  nutzen wir die Projektionsebene  $\Pi_g$ . Alle Projektionsgeraden, die entstehen, wenn Punkte der Geraden mit dem Projektionszentrum verbunden werden, liegen in einer Ebene  $\Pi_g$ , welche durch  $Z$  und  $g$  eindeutig festgelegt wird. Der Schnitt dieser Ebene mit der Bildebene ergibt die Bildgerade  $g'$ , wie Abb. 4.4.5 zeigt.

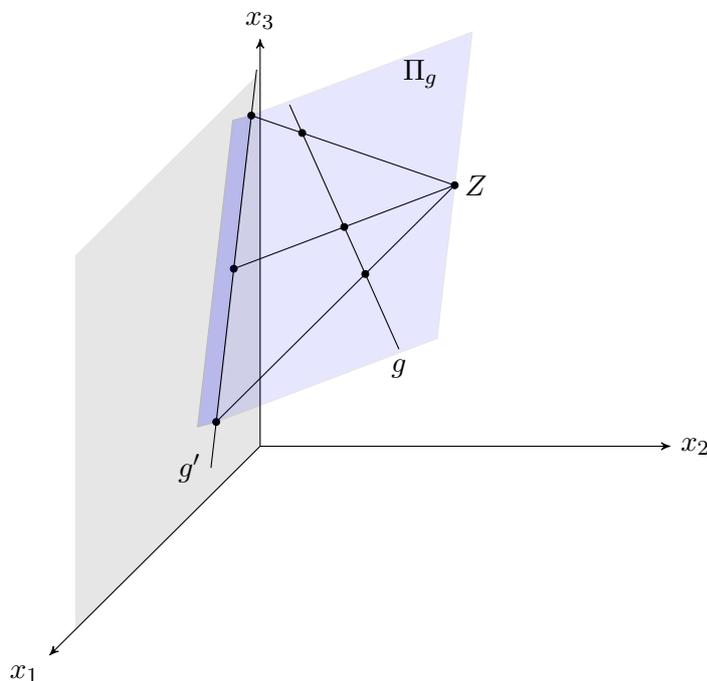


Abb. 4.4.5 Bestimmung der Bildgeraden über den Schnitt zweier Ebenen.

Mit den o.g. Informationen lässt sich die Parametergleichung der Ebene  $\Pi_g$  aufstellen und der Schnitt mit der Bildebene  $\Pi$  bestimmen:

$$\Pi_g : \vec{x} = \vec{z} + \lambda \vec{r} + \mu(\vec{o} - \vec{z}), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

Schnittgerade:

$$x_2 = z_2 + \lambda r_2 + \mu(o_2 - z_2) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mu(z_2 - o_2) - z_2}{r_2}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{\mu(z_2 - o_2) - z_2}{r_2} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} o_1 - z_1 \\ o_2 - z_2 \\ o_3 - z_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow g' : \vec{x} &= \begin{pmatrix} z_1 - a r_1 \\ 0 \\ z_3 - a r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b r_1 + o_1 - z_1 \\ 0 \\ b r_3 + o_3 - z_3 \end{pmatrix} \\ & \text{mit } a = \frac{z_2}{r_2}, b = \frac{z_2 - o_2}{r_2} \end{aligned}$$

Auch hier bietet sich wieder die Möglichkeit für Schülerinnen und Schüler, das Zahlenbeispiel aus den vorherigen Aufgaben zur Überprüfung einzusetzen. Gleichfalls lässt sich auch eine allgemeine Formel für die Bilder eines Punktes  $P(p_1/p_2/p_3)$  mit  $p_2 \neq z_2$  herleiten:

$$(1) \text{ Projektionsgerade: } p : \vec{x} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} p_1 - z_1 \\ p_2 - z_2 \\ p_3 - z_3 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

(2) Schnitt mit der Bildebene:

$$\begin{aligned} x_2 = z_2 + \mu(p_2 - z_2) = 0 &\Rightarrow \mu = \frac{z_2}{z_2 - p_2} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{z_2}{z_2 - p_2} \begin{pmatrix} p_1 - z_1 \\ p_2 - z_2 \\ p_3 - z_3 \end{pmatrix} &\Rightarrow P' \left( \frac{z_2 p_1 - z_1 p_2}{z_2 - p_2} / 0 / \frac{z_2 p_3 - z_3 p_2}{z_2 - p_2} \right) \end{aligned}$$

Die Formel entspricht der Gl. (4.4.4), S. 147, mit  $z_1 = 3, z_2 = 4, z_3 = 5$  und  $p_i = o_i + \lambda \cdot r_i$ .

Abschließend fassen wir die Formeln im folgenden Satz noch einmal zusammen, da sie für die Untersuchung weiterer Eigenschaften der Zentralprojektion noch benötigt werden.

### Satz 4.4.2: Abbildungsgleichungen

Sei  $\Pi : x_2 = 0$  die Bildebene und  $Z(z_1/z_2/z_3) \notin \Pi$  das Projektionszentrum. Dann gelten folgende Formeln für die Bilder von Punkten bzw. Geraden einer Zentralprojektion:

i)  $P(p_1/p_2/p_3)$  mit  $p_2 \neq z_2$

$$\varphi_z(P) \left( \frac{z_2 p_1 - z_1 p_2}{z_2 - p_2} / 0 / \frac{z_2 p_3 - z_3 p_2}{z_2 - p_2} \right)$$

Ist  $p_2 = z_2$ , so ist die Projektionsgerade parallel zur Bildebene und das Bild von  $P$  ist ein Fernpunkt, dessen Koordinaten erstmal nicht berechnet werden können.

ii)  $g \not\parallel \Pi$  mit  $Z \notin g$  und  $g : \vec{x} = \vec{o} + \lambda \vec{r}$

$$\varphi_z(g) : \vec{x} = \begin{pmatrix} z_1 - a r_1 \\ 0 \\ z_3 - a r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b r_1 + o_1 - z_1 \\ 0 \\ b r_3 + o_3 - z_3 \end{pmatrix}$$

mit  $a = \frac{z_2}{r_2}, b = \frac{z_2 - o_2}{r_2}$

iii)  $g \parallel \Pi, Z \notin g$

$$\varphi_z(g) : \vec{x} = \frac{1}{z_2 - o_2} \begin{pmatrix} z_2 o_1 - z_1 o_2 \\ 0 \\ z_2 o_3 - z_3 o_2 \end{pmatrix} + \mu \frac{z_2}{z_2 - o_2} \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

iv)  $g$  mit  $Z \in g$

Die Gerade wird zu einer Projektionsgeraden, wodurch  $\vec{o} - \vec{z}$  der Nullvektor wird. Das Bild der Geraden ist der Schnittpunkt  $S$  der Geraden mit der Bildebene bzw. der Ortsvektor von  $g'$  aus (ii):

$$\varphi_z(S) (z_1 - a r_1 / 0 / z_3 - a r_3) \quad \text{mit } a = \frac{z_2}{r_2}$$

Nun stellt sich die Frage, warum es ausreicht, die Bildebene festzulegen und nur das Projektionszentrum zu variieren, um dennoch allgemeine Aussagen für beliebige Bildebenen mit  $Z \notin \Pi$  treffen zu können. Durch eine Transformation, d.h. eine bijektive Abbildung im Raum lässt sich jede beliebige Bildebene auf  $\Pi : x_2 = 0$  abbilden. Wir verschieben den Schnittpunkt der Bildebene mit der  $x_1$ - oder  $x_3$ -Achse in den Ursprung und drehen dann mithilfe von Rotationsmatrizen geeignet um die entsprechenden Hauptachsen. Existiert kein Schnittpunkt mit den genannten Achsen, so ist die Ebene parallel zur gewünschten Bildebene und es reicht eine Translation aus.

In beiden Fällen handelt es sich um bijektive Abbildungen bzw. ihre Verkettungen, sodass die Komposition wieder bijektiv ist. Ein Beispiel zeigt die Abb. 4.4.6.

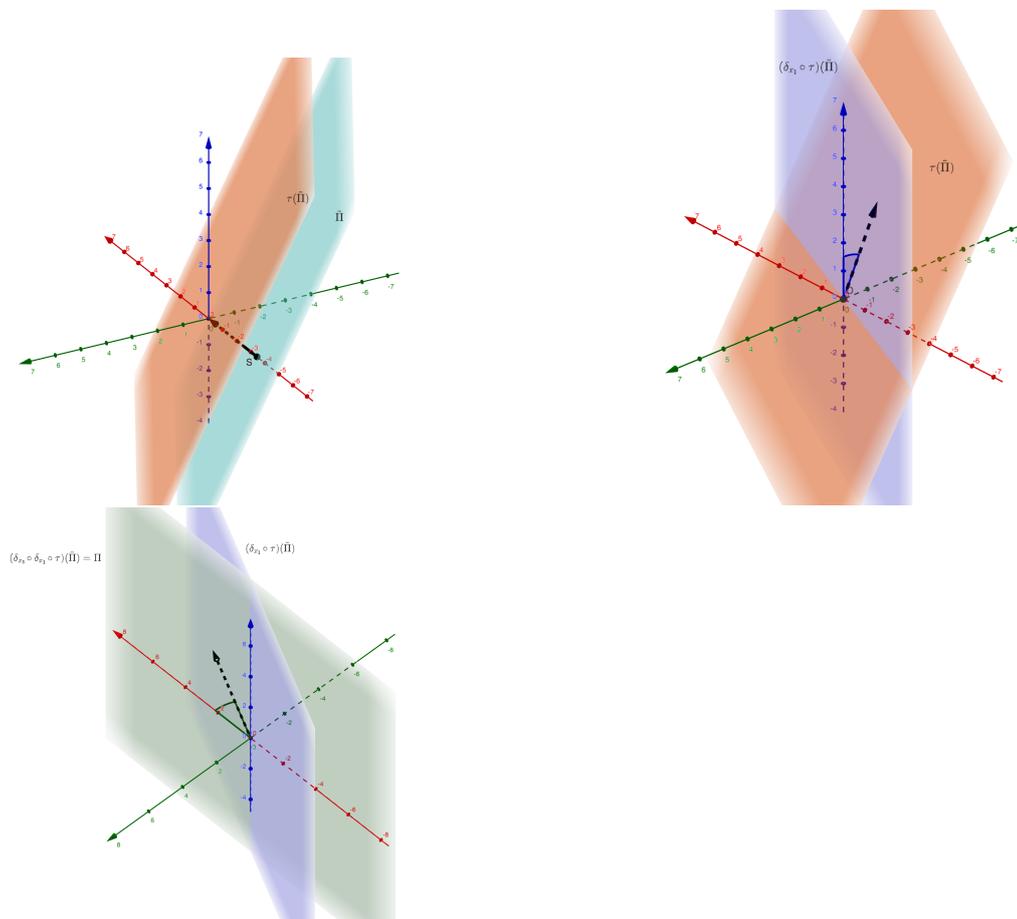


Abb. 4.4.6 Wir verschieben um den Gegenvektor des Ortsvektors des Schnittpunktes  $S$  mit der roten  $x_1$ -Achse und erhalten die Ebene  $\tau(\tilde{\Pi})$ . Dann wird der Winkel zu der blauen  $x_3$ -Achse berechnet und die Ebene entsprechend um die  $x_1$ -Achse gedreht. Genauso wird anschließend bei der Drehung um die  $x_3$ -Achse vorgegangen, sodass als Ergebnis die Bildebene  $\Pi : x_2 = 0$  erhalten wird.

### 4.4.3 (ii) Parallele Geraden und Fluchtpunkte

In Satz 3.1.3 auf Seite 49 wurde mithilfe der Inzidenztreue gezeigt, dass der Fluchtpunkt das Bild eines Fernpunktes ist. Wir wollen nun eine Formel zur Berechnung der Koordinaten herleiten. Die Abb. 4.4.7 zeigt, dass lediglich die Richtung der parallelen Geraden für die Lage des Fluchtpunktes entscheidend ist, nicht aber die Ebene, zu welcher die Gerade gehört.

Für den Einsatz im Schulunterricht wollen wir zuerst mit einem Zahlenbeispiel das Problem erkunden. Wir betrachten dazu drei parallele Geradenpaare, welche in Abb. 4.4.7 dargestellt sind. Dabei ist  $F$  der Fluchtpunkt auf der Geraden  $h$ , dem Horizont. In der folgenden Aufgabenstellung entsprechen  $g_1$  und  $g_2$  den grünen Geraden in der unteren Ebene, während  $h_1, h_2$  in schwarz und  $k_1, k_2$  in blau dargestellt sind.

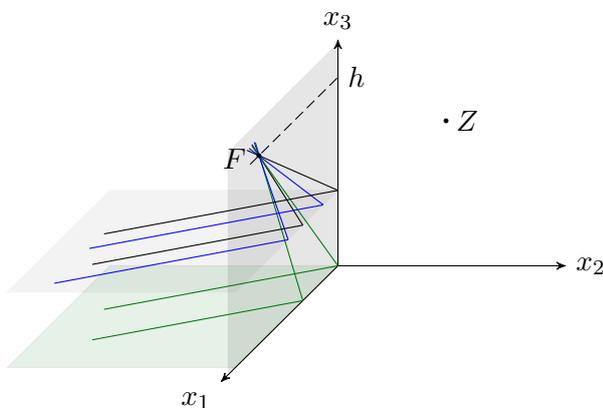


Abb. 4.4.7 Die Bilder von Geraden gleicher Richtung schneiden sich im Fluchtpunkt.

#### Aufgabenbeispiel 4.4.3

Gegeben sind folgenden Geraden, welche untereinander parallel sind.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Bilder der Geraden unter der Zentralprojektion mit Zentrum  $Z(3/4/5)$  auf die Ebene  $\Pi : x_2 = 0$  und zeigen Sie, dass alle Bilder denselben Schnittpunkt besitzen.

*Lösung:*

Wir erhalten mit der Formel in Satz 4.4.2 folgende Bildgeraden:

$$\begin{aligned}\varphi_z(g_1) : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} & \varphi_z(g_2) : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \varphi_z(h_1) : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} & \varphi_z(h_2) : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \varphi_z(k_1) : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} & \varphi_z(k_2) : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Geraden ist leicht zu finden. Der Fluchtpunkt ist  $F(5/0/5)$ . Dass alle Geraden denselben Ortsvektor besitzen, erscheint zunächst ungewöhnlich. Dies liegt allerdings nicht an dem Zahlenbeispiel. Nach der Formel in Satz 4.4.2 ist der Ortsvektor der Bildgeraden abhängig von den Koordinaten des Zentrums und dem Richtungsvektor der Geraden. Das Ergebnis ändert sich daher nicht, wenn die parallelen Geraden identische Richtungsvektoren besitzen. In dem Beispiel treten allerdings auch Richtungsvektoren auf, welche gemäß der linearen Abhängigkeit Vielfache voneinander sind und dennoch ergibt sich derselbe Ortsvektor. Dies lässt sich jedoch leicht erklären:

$$g \parallel h \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{r}_g = k \cdot \vec{r}_h \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 - \frac{z_2}{k r_2} \cdot k r_1 \\ 0 \\ z_3 - \frac{z_2}{k r_2} \cdot k r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - \frac{z_2}{r_2} \cdot r_1 \\ 0 \\ z_3 - \frac{z_2}{r_2} \cdot r_3 \end{pmatrix}$$

Der Faktor  $k \neq 0$  verschwindet, sodass beide Geraden  $g$  und  $h$  denselben Ortsvektor besitzen. Wir haben somit auch allgemein bewiesen, dass der Fluchtpunkt sich wie folgt bestimmen lässt:

#### **Satz 4.4.3: Der Fluchtpunkt**

Sei  $Z$  das Projektionszentrum. Ein Parallelenbüschel habe Richtungsvektoren, welche linear abhängig zu einem Vektor  $\vec{r}$  sind. Dann schneiden sich die Bildgeraden mit  $r_2 \neq 0$  in einem gewöhnlichen Punkt  $F$  mit

$$F(z_1 - a \cdot r_1 / 0 / z_3 - a \cdot r_3) \text{ mit } a = \frac{z_2}{r_2}$$

Es gibt einen Sonderfall: der Fluchtpunkt ist selbst wieder ein Fernpunkt. Dies ist der Fall, wenn  $r_2 = 0$  ist und  $a$  nicht berechnet werden kann. Dann ist das Geradenbündel parallel zur Bildebene sowie zu ihren Bildgeraden, wie in Satz 4.4.2 schon thematisiert wurde. Demnach gilt

$$\varphi_z(R^*) = R^*$$

Der Fernpunkt  $R^*$  des Parallelbündels ist also ein Fixpunkt, was mit der Aussage übereinstimmt, dass sich Gerade und Bildgerade immer in einem Fixpunkt schneiden (Satz 3.1.2, S. 49).

Wir haben die Koordinaten des Fluchtpunktes damit begründet, dass der Ortsvektor in der Formel für die Bildgerade nach Satz 4.4.2 nur abhängig vom Richtungsvektor der ursprünglichen Geraden  $g$  ist und demnach alle Bildgeraden eines Parallelbündels diesen Punkt gemeinsam haben. Es muss sich daher um den Fluchtpunkt handeln. Es gibt noch einen weiteren Ansatz. Wir wissen nach Satz 3.1.3, dass sich der Fluchtpunkt als Schnittpunkt der Parallelen zur Geraden  $g$  durch das Projektionszentrum mit der Bildebene ergibt. Sei also wieder  $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)^\top$  der Richtungsvektor des Parallelbündels und  $Z(z_1, z_2, z_3)$  die Koordinaten des Projektionszentrums. Dann ergibt sich folgender Bildpunkt:

$$(1) \text{ Projektionsgerade: } p : \vec{x} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(2) Schnitt mit der Bildebene:

$$x_2 = z_2 + \mu r_2 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-z_2}{r_2} := -a$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(z_1 - a \cdot r_1 / 0 / z_3 - a \cdot r_3)$$

Wir erhalten dieselbe Formel aus dem o.g. Satz 4.4.3.

#### 4.4.4 (iii) Fluchtpunkte liegen auf dem Horizont

Auch hier können wieder zum Einstieg Zahlenbeispiele im Unterricht verwendet werden, worauf nun aber verzichtet und stattdessen das Beispiel in der Abbildung 4.4.8 herangezogen wird. Dargestellt sind parallele Geradenpaare unterschiedlicher Richtungen, welche nicht  $Z$  enthalten, damit ihre Bilder wieder Geraden sind. Da die Lage der Fernpunkte vom Richtungsvektor der Geraden bestimmt wird, ergeben unterschiedliche Richtungen auch verschiedene Fluchtpunkte, welche sogar kollinear sind, wenn die Geradenbüschel in parallelen Ebenen liegen. Diesen Fall wollen wir nun untersuchen.

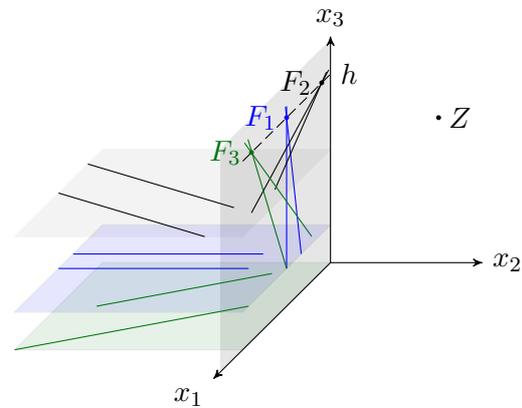
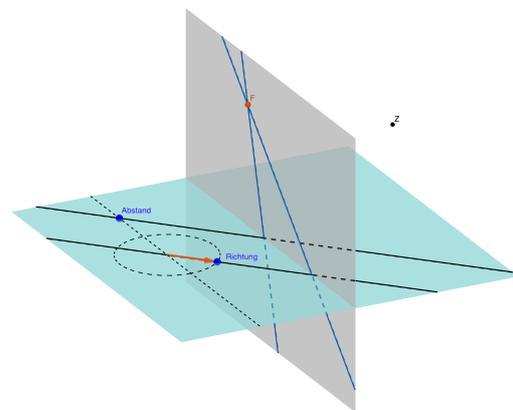
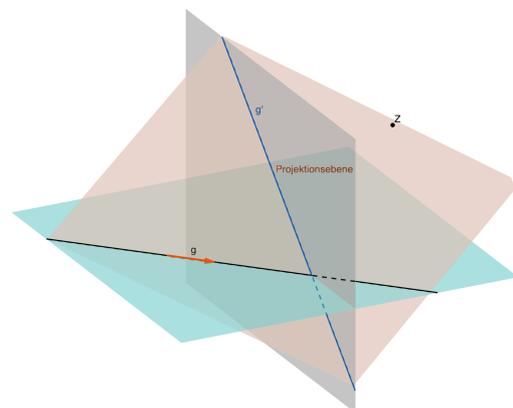


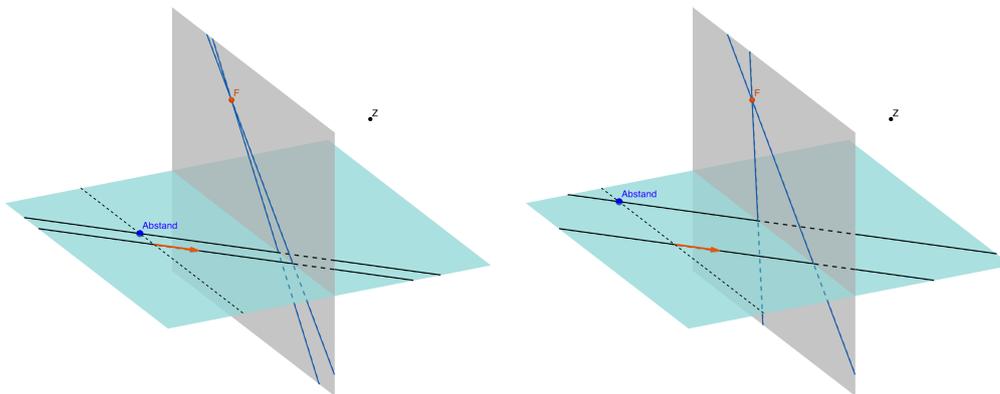
Abb. 4.4.8 Fluchtpunkte von Geraden in parallelen Ebenen sind kollinear.

Zum Einstieg bilden wir die Situation in *GeoGebra* ab. In der nebenstehenden Abbildung ist blau die Ebene, welche die schwarzen Geraden enthält. Die Richtung der Geraden lässt sich durch Verschiebung des Punktes auf dem Kreis ändern, wie auch der Abstand zwischen den beiden Geraden. Zur blauen Ebene senkrecht liegt die graue Bildebene, welche die Bildgeraden enthält. Ihr Schnittpunkt ist der orange Punkt  $F$ , welcher den Fluchtpunkt darstellt.



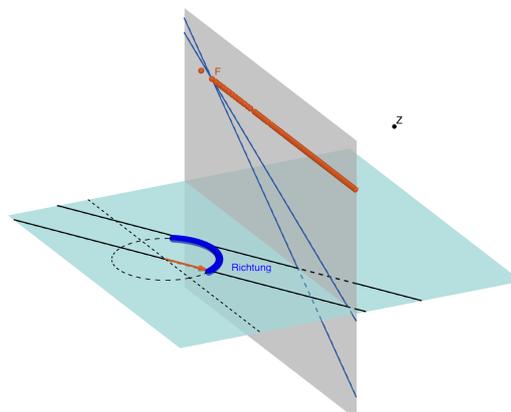
Die Bildgerade lässt sich auf zwei Arten konstruieren. Entweder wir wählen zwei verschiedene Punkte auf der Geraden, bestimmen über die Projektionsstrahlen die Bilder und verbinden diese. Hier dagegen wurde die Projektionsebene verwendet, welche durch  $Z$  und die Gerade  $g$  definiert wird. Die Schnittgerade ist das Bild von  $g$ .



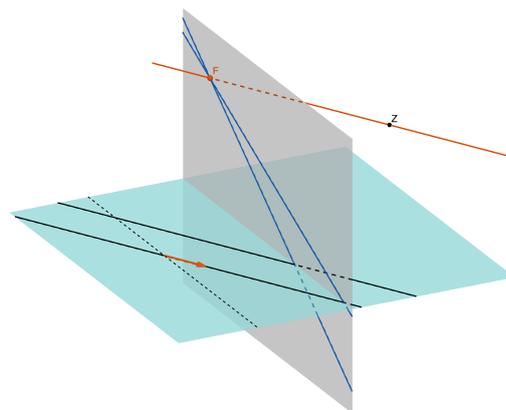


In diesem *GeoGebra* Arbeitsblatt können sich Schülerinnen und Schüler davon überzeugen, dass nur die Richtung der Gerade einen Einfluss auf die Lage des Fluchpunktes hat. Wird nur der Abstand verändert, so ändert sich auch eine der Bildgeraden, aber ihr Schnittpunkt bleibt gleich, wie die obigen Beispiele zeigen.

Wir ändern nun die Richtung der Geraden und lassen uns die Spur des Fluchpunktes anzeigen. Es zeigt sich, dass der Fluchpunkt auf einer Geraden liegt, welche parallel zur blauen Objektebene liegt.



Dies lässt sich leicht einsehen, wenn bekannt ist, wie der Fluchpunkt konstruiert wird, ohne den Schnittpunkt der Bildgeraden zu verwenden. Wir haben zuvor schon erläutert, dass der Fluchpunkt das Bild des Fernpunktes des parallelen Geradenbüschels ist. Die Projektionsgerade ist also die Parallele durch  $Z$ , welche die Bildebene im Fluchpunkt  $F$  durchstößt. Diese Parallele liegt in der Ebene, welche parallel zur blauen Ebene ist und durch  $Z$  verläuft.  $F$  liegt auf der Schnittgeraden.



Wir wollen nun mithilfe der hergeleiteten Formel einige Besonderheiten des Fluchtpunktes untersuchen. Die Gerade mit dem Richtungsvektor  $\vec{r} = (0, r_2, 0)^\top$  steht senkrecht zur Bildebene. Dann ist der Fluchtpunkt nach der Formel in Satz 4.4.3

$$H(z_1 / 0 / z_3) .$$

Dieser Punkt wird auch *Hauptpunkt*  $H$  genannt, da dieser der Lotfußpunkt des Projektionszentrum ist. Wir betrachten nun ein weiteres Geradenbündel, welche in einer Ebene liegt, die die Bildebene senkrecht schneidet. Für die Richtungsvektoren gilt dann  $\vec{r} = (r_1, r_2, 0)^\top$ , was wir wieder in die Formel für den Fluchtpunkt einsetzen:

$$\begin{pmatrix} z_1 - z_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{r_1 \cdot z_2}{r_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es ergibt sich eine Geradengleichung mit dem Parameter  $\frac{r_1 \cdot z_2}{r_2}$  und dem Richtungsvektor  $(1, 0, 0)^\top$ . Dies war die horizontale Gerade in dem vorherigen Beispiel, auf welcher  $F$  lag. Sie verläuft auch parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene, wie auch die ursprünglichen Geraden. Was passiert nun, wenn wir die Ebene, in welcher die Geraden liegen, verkippen?

Die Abbildung 4.4.9 zeigt, dass der Horizont die Schnittgerade der Bildebene mit derjenigen Ebene ist, welche das Projektionszentrum enthält und parallel zu den Ebenen ist, welche die Geradenbündel enthalten.

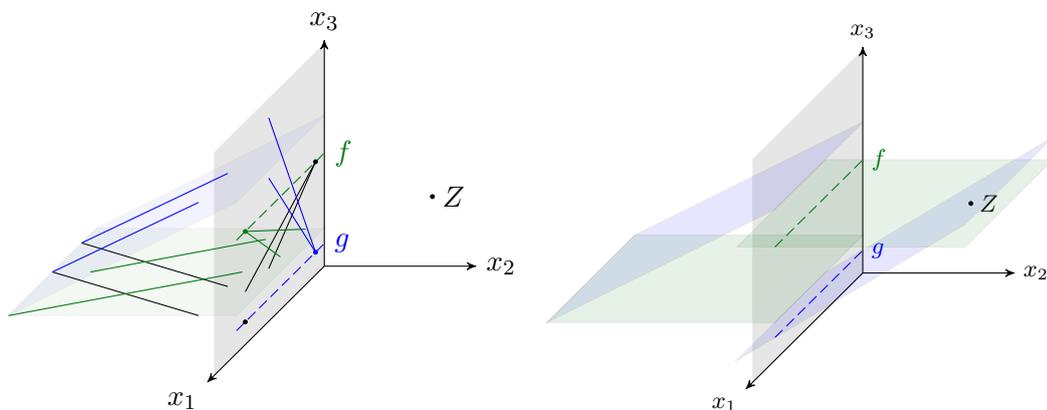


Abb. 4.4.9 Der Horizont ergibt sich aus dem Schnitt der zur Objektebene parallelen Ebene durch  $Z$  mit der Bildebene.

Wir haben nun in den vorherigen drei Abschnitten die Eigenschaften der Zentralprojektion aus Satz 4.4.1, S. 143, mithilfe der Methoden bzw. den Kenntnissen untersucht und bewiesen, welche im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II an Gymnasien und Gesamtschulen in NRW laut Lehrplan von 2014 obligatorisch sind. Unter Verwendung von *GeoGebra* und Zahlenbeispielen können Schülerinnen und Schüler anhand von konkreten Situationen selbstständig Eigenschaften untersuchen und Vermutungen aufstellen, welche sie dann mit ihren Kenntnissen zur analytischen Geometrie aus dem Unterricht begründen können.

Wir verlassen nun den Bereich der analytischen Geometrie und betrachten die Zentralprojektion aus Sicht der projektiven Geometrie.

## 4.5 Perspektive Abbildungen

Die *projektive Geometrie* ist uns schon bei der Einführung der Fernpunkte sowie im Satz von Desargues begegnet. Wie im Abschnitt 2.2 erläutert, schneiden sich zwei verschiedene Geraden ohne Ausnahme. Parallele Geraden schneiden sich dann in einem unendlich weit entfernten Punkt, dem *Fernpunkt*. Wir haben in den vorherigen Abschnitten gezeigt, dass sich Bildpunkte mit Methoden der analytischen Geometrie berechnen lassen, sofern die ursprünglichen Punkte des Objektes sich mit Koordinaten beschreiben lassen. Aber was ist nun mit den Koordinaten der Fernpunkte? Wir haben gezeigt, dass der Fluchtpunkt das Bild eines Fernpunktes ist und die Bilder einer Folge von äquidistanten Punkten auf einer Geraden zum Fluchtpunkt der Bildgeraden konvergieren. Zur Vereinfachung isolieren wir nun Gerade und Bildgerade, d.h. wir betrachten eine Projektion zwischen zwei Geraden, welche in der projektive Geometrie als *perspektive Abbildungen* bezeichnet werden [47, S. 59].

In Abb. 4.5.1 sind die Punkte auf der Urbildgeraden  $P_{-1}$  bis  $P_4$  äquidistant. Ihre Bilder dagegen sind es nicht. Wie zuvor analytisch gezeigt, ist der Fluchtpunkt  $F$  das Bild des Fernpunktes der parallelen Geraden in der blauen Ebene. Dieser scheint ein Häufungspunkt der Folge der Bildpunkte  $P'_i$  zu sein.  $P_v$  hat keinen gewöhnlichen Punkt als Bild, da die zugehörige Projektionsgerade in der grün hervorgehobenen Ebene liegt, welche parallel zur Bildebene verläuft.  $P_v$  liegt in der *Verswindungsebene*. Gehen wir über diesen Punkt hinaus, so erscheinen die Bildpunkte nun oberhalb des Fluchtpunktes und nähern sich auf der linken Halbgeraden an  $F$  an.

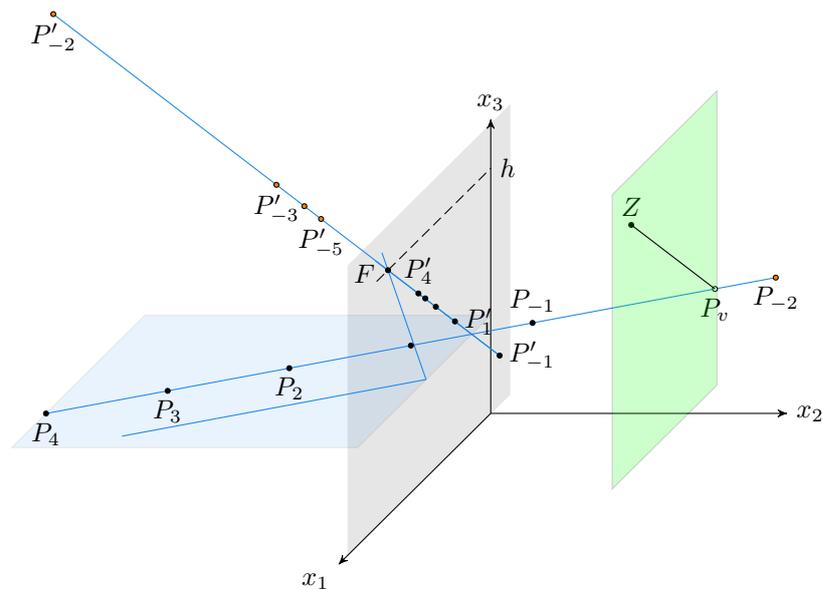


Abb. 4.5.1 Punktfolge auf einer Geraden

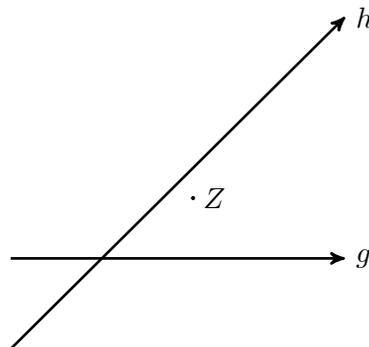
Wir wollen im folgenden diskutieren, wie die Projektion zwischen zwei Geraden im Schulunterricht umgesetzt werden kann. Dieses Thema kann auch anschließend zu den Fotografien in den Abschnitten 4.1 bis 4.3 im Unterricht behandelt werden, denn es ist einfacher die Zentralprojektion zwischen zwei Geraden auf ihre Eigenschaften zu untersuchen als vom Raum in die Ebene, da im ersten Fall alle Zeichnungen zweidimensional sind. Dies sollte die Veranschaulichung und Vorstellung seitens der Schülerinnen und Schüler erleichtern.

#### 4.5.1 Projektion zwischen zwei Geraden

Wir betrachten nun eine Zentralprojektion zwischen zwei Geraden  $g$  und  $h$ , welche sich schneiden, und legen das Projektionszentrum  $Z$  fest. Auf  $g$  markieren wir einen Punkt  $P$ . Um das Bild zu konstruieren, zeichnen wir die Verbindungsgerade  $PZ$ , welche die Gerade  $h$  schneiden wird, sofern sie nicht parallel zu dieser ist. Diesen Sonderfall betrachten wir später. Der Schnittpunkt ist der Bildpunkt  $P'$ . Für erste Beobachtungen können Schülerinnen und Schüler folgende Aufgabe bearbeiten. Nach dem ersten Beispiel können sie dann andere Geraden verwenden, um zu überprüfen, dass die festgestellten Eigenschaften tatsächlich unabhängig von der Lage der Geraden sind.

##### Aufgabenbeispiel 4.5.1

Führe folgende Konstruktion durch und beantworte die anschließenden Fragen.



1. Nenne den Schnittpunkt der beiden Geraden  $P_0$  und zeichne davon ausgehend auf  $g$  alle 1 cm eine Markierung und bezeichne diese mit  $P_1, P_2, P_3, \dots$  usw.
2. Zeichne nun jeweils Geraden durch  $Z$  und den Punkten auf  $g$ . Wenn es einen Schnittpunkt mit der Geraden  $h$  gibt, dann markiere diesen mit  $P'$  und der entsprechenden Nummer des Punktes auf  $g$ .

3. Durch diese Konstruktion bilden sich Paare von Punkten zwischen den Geraden. Wir sagen nun, dass den Punkten auf  $g$  entsprechende Punkte auf  $h$  zugeordnet werden.

Schaue dir die gebildeten Paare von Punkten an. Findest du auf die Fragen eine Antwort?

- Du hast die Punkte auf  $g$  jeweils im gleichen Abstand gezeichnet. Was fällt dir bei den Punkten auf  $h$  auf? Beschreibe ihre Lage.
- Es gibt einen Punkt auf  $g$ , welcher keinem Punkt auf  $h$  zugeordnet werden kann. Kannst du ihn finden? Welche besondere Eigenschaft hat die entsprechende Verbindungsgerade durch  $Z$ ?
- Findest du Punkte auf  $h$ , welche keinem Punkt auf  $g$  zugeordnet werden können?
- Du hast die Punkte auf  $g$  durchnummeriert. Vergleiche nun mit der Nummerierung der Punkte auf  $h$ . Was fällt dir auf?

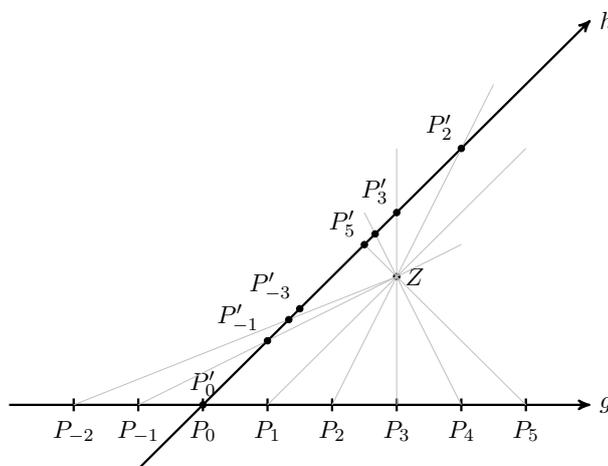


Abb. 4.5.2 Das Ergebnis der Aufgabe 4.5.1

Abb. 4.5.2 zeigt das Ergebnis nach der Konstruktion in drei Schritten. Mit Abb. 4.5.3 wollen wir die Aufgabenteile  $a) - d)$  erläutern. Den Schülerinnen und Schülern sollte auffallen, dass die Abstände benachbarter Punkte unterschiedlich sind, obwohl die Urbildpunkte äquidistant sind. Nähere Betrachtungen sollten ergeben, dass die Punkte in einem Bereich immer näher zusammenrücken.

Die Fragen  $b)$  und  $c)$  thematisieren Verschwindungs- und Fluchtpunkt. Hier wäre folgender logischer Schluss seitens der Schülerinnen und Schüler wünschenswert:

Damit es keinen Punkt auf  $h$  gibt, darf die Verbindungsgerade durch  $Z$  die Gerade  $h$  nicht schneiden. Demnach handelt es sich um eine Parallele zu  $h$  durch  $Z$ . Ihr Schnittpunkt mit  $g$  ergibt den gesuchten Punkt  $P_v$  (im Beispiel  $P_1$ ). Gleiches gilt umgekehrt für  $g$ , wodurch sich der Fluchtpunkt  $F$  finden lässt.

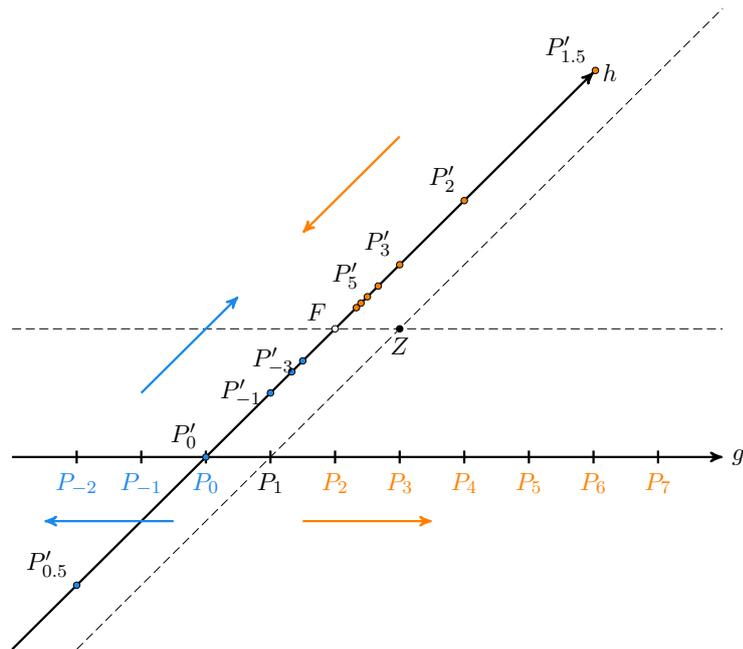


Abb. 4.5.3 Besonderheiten der Punktfolge in Aufgabe 4.5.1

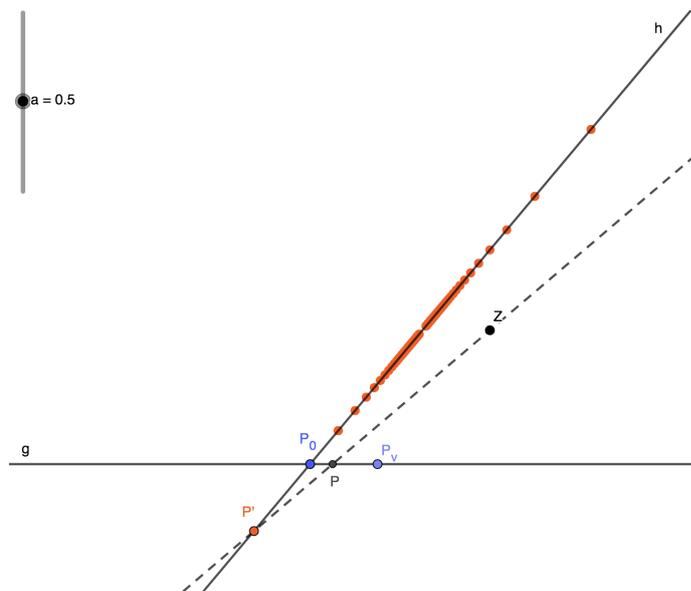


Abb. 4.5.4 Projektion zwischen zwei Geraden in GeoGebra

Zusammen mit der Beobachtung aus a) lässt sich nun vermuten, dass die Punktfolge auf  $h$  sich  $F$  annähert. Hierzu kann wieder *GeoGebra* verwendet werden (Abb. 4.5.4). Mithilfe des Schiebereglers lässt sich der Punkt  $P$  äquidistant auf  $g$  verschieben.

Im Aufgabenteil *d*) geht es um die Reihenfolge der Punkte. Wie der Fluchtpunkt hat auch der Verschwindungspunkt  $P_v$  eine besondere Bedeutung. Durch die Nummerierung bekommen die Geraden eine Richtung zugewiesen. Die Bildpunkte aller Punkte nach dem Verschwindungspunkt (in Abb. 4.5.3 orange markiert) liegen oberhalb von  $F$ . Gehen wir von  $P_v = P_1$  nach  $P_2, P_3$  usw., wird der Abstand zwischen den zugeordneten Punkten  $P'_1, P'_2, P'_3$  usw. immer kleiner, während sie sich dem Punkt  $F$  nähern. Betrachtet man dagegen die Punkte auf  $g$  vor  $P_v$  erscheinen die Bildpunkte unterhalb von  $F$  (im Bild blau markiert).

Im nächsten Beispiel variieren wir die Position von  $Z$ , denn in der ersten Aufgabe lag dieser im spitzen Winkelfeld der Geraden  $g$  und  $h$ .

### Aufgabenbeispiel 4.5.2

Verschiebe nun den Punkt  $Z$  auf die andere Seite von  $h$ , sodass der Punkt in dem größeren Feld zwischen den Geraden  $g$  und  $h$  liegt.

1. Konstruiere erst die beiden Punkte  $F$  und  $P_v$ , welche keinen zugeordneten Punkt besitzen.
2. Markiere nun in gleichen Abständen Punkte auf  $g$  welche vor und nach  $P_v$  liegen und konstruiere die jeweils zugeordneten Punkte auf  $h$ .
3. Vergleiche nun mit deiner Konstruktion aus Aufgabe 4.5.1. Gibt es Unterschiede? Wenn ja, kannst du diese beschreiben?

Wie in Abb. 4.5.5 erkennbar, führte die Verschiebung von  $Z$  qualitativ zu einer Vertauschung der Punktfolgen auf  $h$ . Nun wird die untere Halbgerade bzgl.  $F$  von den orangenen Punkten besetzt, statt wie zuvor die obere. Alle anderen Eigenschaften bleiben erhalten.

Wir wollen nun im nächsten Schritt die Punkte nicht mehr durch Konstruktion finden, sondern berechnen können. Hierfür erhalten die beiden Geraden, wie die Achsen eines Koordinatensystems, eine Richtung und eine identische Skala, z.B. kann als Längeneinheit 1 cm gewählt werden. Der Schnittpunkt der Geraden  $P_0$  ist der Ursprung. Wir wollen nun den Ort von  $P'$ , dem Bildpunkt von  $P$ , finden, in dem wir den Abstand  $y = d(P_0, P')$  berechnen. Den Abstand von  $P$  zum Ursprung nennen wir  $x$  (Abb. 4.5.6).

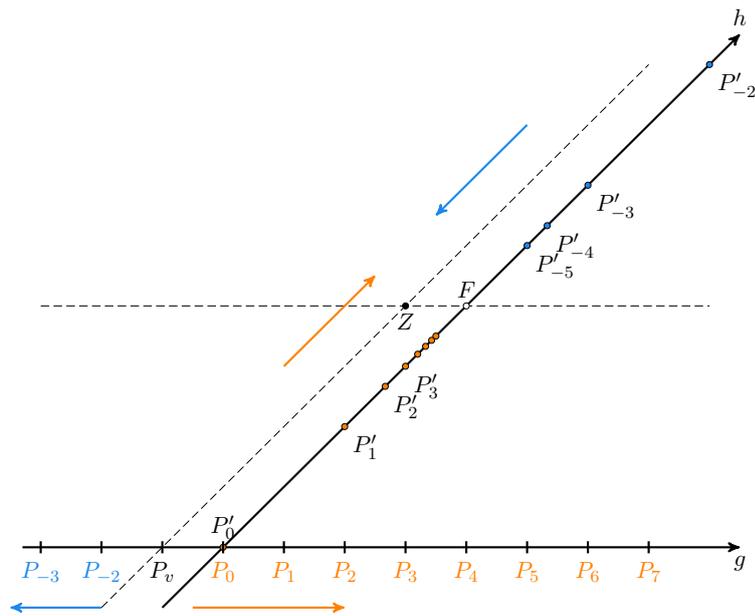


Abb. 4.5.5 Besonderheiten der Punktfolge in Beispiel 4.5.2, wenn die Reihenfolge von  $h$  und  $Z$  vertauscht wird.

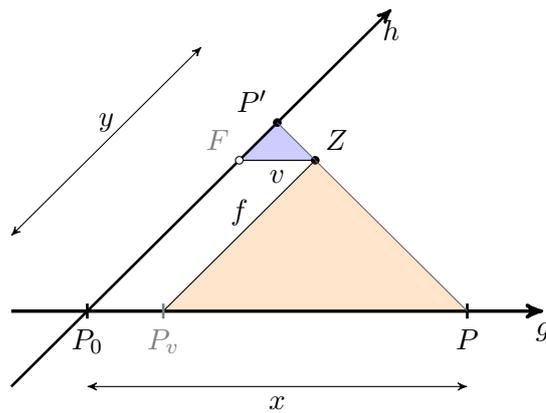


Abb. 4.5.6 Die Dreiecke sind ähnlich zueinander, sodass der Strahlensatz verwendet werden kann, um  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  zu berechnen.

Wir wollen auch die Position des Projektionszentrums  $Z$  unter der Angabe von Abständen definieren. Hierzu ziehen wir durch  $Z$  die Parallelen zu  $h$  und  $g$ , welche die Geraden in den Punkten  $F$  und  $P_v$  schneiden. Den Abstand von  $F$  zum Ursprung bezeichnen wir mit  $f$  und den von  $P_v$  mit  $v$ . Nun wollen wir den Abstand  $y$  mit den bekannten Längen  $f, v$  und  $x$  berechnen.

Die Dreiecke  $\triangle P_0PP'$ ,  $\triangle P_vPZ$  sowie  $\triangle FZP'$  in Abb. 4.5.6 sind ähnlich zueinander, da wir zeigen können, dass sie in allen drei Winkeln übereinstimmen:

Die Geraden  $ZP_v$  und  $h$  sind nach Konstruktion parallel zueinander. Demnach handelt es sich bei den Winkeln bei  $P_0$  und  $P_v$  um gleich große Stufenwinkel. Gleiches gilt auch für die Stufenwinkel bei  $P'$  und  $Z$ . Somit sind die beiden größeren Dreiecke zueinander ähnlich, da sie beide den Winkel bei  $P$  besitzen. Mit derselben Argumentation ist auch das kleinste Dreieck zum größten ähnlich, da  $g$  nach Konstruktion parallel zur Geraden  $ZF$  ist.

Mithilfe des ersten Strahlensatzes (Satz 2.5.2, S. 41) lässt sich folgende Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  herleiten:

$$\frac{y-f}{f} = \frac{v}{x-v} \Leftrightarrow y = \frac{fv}{x-v} + f = \frac{fx}{x-v}$$

Wir können somit folgenden Satz formulieren ([4], S. 5-9):

**Satz 4.5.1**

Gegeben seien zwei Geraden  $g$  und  $h$ , mit Schnittpunkt  $O$  und einer festgelegten Orientierung, sodass sie ein Koordinatensystem bilden. Weiterhin sei ein Punkt  $Z \notin h, g$  gewählt (s. Abb. 4.5.6). Hat der Punkt  $P \in g$  die Koordinate  $x$ , so hat sein zugeordneter Punkt  $P' \in h$  die Koordinate  $y$  mit:

$$y = f \cdot \frac{x}{x-v}$$

Dabei ergeben sich die Längen  $f$  und  $v$  aus der Lage von  $Z$ .

Mithilfe der Gleichung lassen sich nun auch die o.g. Eigenschaften der Punktfolge  $P'_i$  untersuchen.

Wir wollen aber zuvor noch zwei besondere Lagen von  $Z$  besprechen. Im o.g. Satz wurde unterbunden, dass  $Z$  auf  $h$  liegt, da sonst  $v = 0$  wäre,  $Z = F$  und das blaue Dreieck nicht existent. Wenn  $Z \in h$ , so würde jeder Punkt  $P \in g$  auf  $Z$  abgebildet werden, da nach Konstruktion jede Verbindungsgerade  $Z$  enthält und der Schnittpunkt mit  $h$  immer  $Z$  ist. Gleiches zeigt auch die Formel. Für  $v = 0$  ist  $y = f$  für alle  $x \neq 0$ . Für  $x = 0$  ist die Gleichung nicht definiert. In Abb. 4.5.6 ist erkennbar, dass in diesem Fall  $ZP_0 = h$  wäre, d.h. das Bild von  $P_0$  ist eine Gerade.

Liegt dagegen  $Z$  auf  $g$ , so ist  $f = 0$ ,  $Z = P_v$  und das orange Dreieck verschwindet. Dann fallen alle Verbindungsgerade  $ZP$  mit  $g$  zusammen, sodass alle Punkte auf den Schnittpunkt  $P_0$  projiziert würden. Ebenso wäre  $y = 0$  für alle  $x \neq v$ . Für  $x = v$  ist die Gleichung nicht definiert. Es gäbe wegen  $Z = P_v$  keine Verbindungsgerade.

Wir legen daher fest, dass  $Z$  außerhalb der Geraden liegt und untersuchen nun die Punktfolge der Bilder auf  $h$ , falls  $|x|$  gegen unendlich strebt:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-v} \cdot f = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{v}{x}} \cdot f = \frac{1}{1-0} \cdot f = f$$

Ohne den Grenzwert direkt zu verwenden, wäre im Unterricht auch folgende Argumentation möglich: Wenn  $x$  eine sehr große Zahl ist, also  $x \gg v$ , dann ist  $x - v \approx x$  und demnach  $\frac{x}{x-v} \approx 1$ , wodurch auch gezeigt ist, dass  $y$  gegen  $f$  strebt und die Punktfolge gegen  $F$ . Diese Argumentation ist dabei unabhängig vom Vorzeichen, da sie auch für  $|x|$  gilt.

Wir haben weiterhin in den vorherigen Abbildungen gesehen, dass die Abstände benachbarter Punkte abnahmen, je größer  $x$  wurde, zumindest für  $x \in \mathbb{N}$ . Seien daher  $P_n$  und  $P_{n+1}$  zwei solcher Punkte mit einer natürlichen Zahl  $n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |P_n - P_{n+1}| &= \left| \frac{n}{n-v}f - \frac{n+1}{n+1-v}f \right| \\ &= \left| \frac{v}{(n-v)(n+1-v)} \right| \cdot |f| \\ &= \left| \frac{v}{n^2 + n - 2vn - v} \right| \cdot |f| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n - P_{n+1}| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{v}{n^2}}{1 + \frac{1-2v}{n} - \frac{v}{n^2}} \right| \cdot |f| \\ &= \left| \frac{0}{1+0-0} \right| \cdot |f| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Selbige Argumentation gilt auch für die andere Halbgerade, d.h. für alle Punkte welche entgegen der Orientierung sich von  $P_0$  entfernen und negative Werte für  $x$  aufweisen. Hier gilt ebenso

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} |P_n - P_{n+1}| = 0.$$

### 4.5.2 Perspektive Abbildungen

Die Konstruktion im vorherigen Kapitel ergibt eine punktweise Abbildung zwischen zwei sich schneidende Geraden. Wir wollen daher diskutieren, unter welchen Bedingungen die Gleichung aus Satz 4.5.1 eine wohldefinierte Abbildung ergibt, welche Invarianten existieren und wie sie mithilfe von homogenen Koordinaten in eine lineare Abbildung überführt werden kann, um auch Fernpunkten Koordinaten zuweisen zu können.

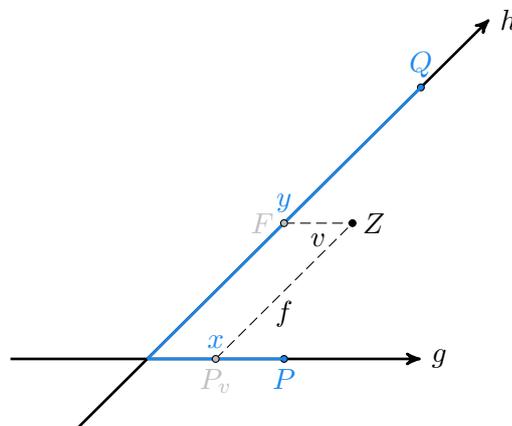
#### Definition 4.5.2: Perspektive Abbildung

Zwischen zwei sich schneidende Strahlen  $g$  und  $h$  existiert eine Abbildung  $\varphi_z : g \setminus \{P_v\} \rightarrow h \setminus \{F\}$ , mit dem Punkt  $Z \notin g, h$  als Projektionszentrum. Die Geraden bilden ein Koordinatensystem, wobei die Lage der Punkte  $P \in g$  über die Koordinate  $x$  definiert wird, wie auch die Lage von  $Q \in h$  über die Koordinate  $y$ .

Es liegt eine *perspektive Abbildung* vor, wenn für  $\varphi_z(P) = Q$  gilt:

$$y = \frac{x \cdot f}{x - v}$$

Die Parameter  $f$  und  $v$  ergeben sich aus der Lage von  $Z$ .



Der Punkt  $P_v$  muss ausgeschlossen werden, da die Verbindungsgerade mit  $Z$  keinen Schnittpunkt mit  $h$  hat. Dem Punkt kann daher kein gewöhnlicher Punkt auf  $h$  zugeordnet werden. Aufgrund der Definition einer Abbildung (Def. 2.4.1, S. 35) muss er in der Definitionsmenge ausgeschlossen werden. Soll zusätzlich erreicht werden, dass die perspektive Abbildung surjektiv ist, so muss der Punkt  $F$  aus der Zielmenge entfernt werden, da auch hier die Verbindungsgerade mit  $Z$  die Gerade  $g$  nicht schneidet.  $F$  hat daher keinen gewöhnlichen Punkt als Urbild. Hier folgt nun eine

weitere Erklärung unter Beachtung der Koordinaten  $x$  und  $y$  [4, S. 17]:

Der Punkt  $P_v$  hat die Koordinaten  $x = v$ , was eine Division durch 0 zur Folge hat. Die Koordinate  $y$  kann daher nicht berechnet werden. Zur Überprüfung der Surjektivität, wird die Gleichung in Def. 4.5.2 nach  $x$  umgestellt:

$$y = \frac{x f}{x - v} \Rightarrow y x - y v = x f \Rightarrow x = \frac{y v}{y - f} \quad (4.5.1)$$

Da der Punkt  $F$  die Koordinate  $y = f$  hat, würde sich wieder eine Division durch 0 ergeben. Warum  $Z$  nicht auf den Strahlen liegen darf, lässt sich damit erklären, dass die Zuordnung der Punkte aufgrund der Wohldefiniertheit eindeutig sein muss, d.h. es darf kein Paar von Punkten geben, welches dieselben Bilder hat. Es muss daher ausgeschlossen werden, dass in der Koordinatengleichung der Zähler ein Vielfaches des Nenners für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{v\}$  ist. Angenommen dies ist der Fall mit  $\lambda \neq 0$ . Dann folgt mithilfe des Koeffizientenvergleichs:

$$\begin{aligned} \lambda(x - v) = x f &\Rightarrow \lambda x - \lambda v = f x \\ &\Rightarrow \lambda = f \wedge \lambda \cdot v = 0 \\ &\Rightarrow f \cdot v = 0 \\ &\Rightarrow f = 0 \vee v = 0 \\ &\Rightarrow Z \in g \vee Z \in h \end{aligned}$$

Die Negation der obigen Folgerung ergibt, dass  $Z$  nicht auf den Geraden  $g$  und  $h$  liegen darf

$$Z \notin g \wedge Z \notin h \Rightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x - v) = x f \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{v\}$$

Mit  $v = 0$  oder  $f = 0$  ist  $Z = F$  bzw.  $Z = P_v$ . Im ersten Fall würden alle Punkte von  $g$  (außer der Ursprung) auf  $F$  abgebildet werden, im anderen Fall auf den Schnittpunkt der Geraden. Denn es gilt  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{v\}$ :

$$\begin{aligned} v = 0 &\Rightarrow y = \frac{x f}{x} = \begin{cases} f & , x \neq 0 \\ \text{unbestimmt} & , x = 0 \end{cases} \\ f = 0 &\Rightarrow y = \frac{0}{x - v} = 0 \end{aligned}$$

Mit den genannten Einschränkungen hat die Abbildung folgende Eigenschaften:

**Satz 4.5.3**

Für die Abbildung  $\varphi_z : g \setminus \{P_v\} \rightarrow h \setminus \{F\}$  mit  $Z \notin g, h$  gilt:

- i) Sie ist bijektiv mit der Umkehrabbildung  $\varphi_z^{-1} : h \setminus \{F\} \rightarrow g \setminus \{P_v\}$ . Nach Gl. (4.5.1) können die Koordinaten der Punkte wie folgt bestimmt werden:

$$x = \frac{y \cdot v}{y - f}$$

- ii) Sie ist invariant bzgl. des Doppel- aber nicht des Teilverhältnisses.  
 iii) Sie ist nicht linear.

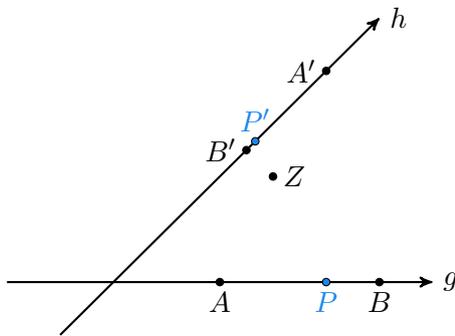


Abb. 4.5.7 Das Teilverhältnis bleibt nicht erhalten.

*i)* wurde schon bewiesen. Beim *ii)* geht es um die Invarianten der geometrischen Abbildung. Wir betrachten hierzu drei beliebige Punkte auf  $g$  und das entsprechende Teilverhältnis der Strecken nach der Def. 2.3.1, S. 28. Der Punkt  $P$  ist Teilungspunkt der Strecke  $\overline{AB}$  in der Abb. 4.5.7. Der Abstand zwischen  $A$  und  $P$  beträgt 2 LE bzw. 1 LE für  $P$  und  $B$ . Also ist  $TV(A, B, P) = \frac{2}{1} = 2$ . Misst man dagegen die Längen der Bildstrecken, so ist  $TV(A', B', P') \approx \frac{1,89}{0,24} = 7,9$ , also nicht invariant. Dies hat u.a. zur

Folge, dass Mittelpunkte von Strecken nach der Projektion keine mehr sein müssen, was die Konstruktion zentralprojektiver Bilder erschwert. Dies ist einer der Unterschiede zwischen Zentral- und Parallelprojektion.

Wir zeigen nun allgemein, dass das Teilverhältnis nicht erhalten bleibt [4, S. 11]. Sei  $x_P$  der Abstand des Punktes  $P$  vom Schnittpunkt der beiden Geraden. Dann gilt:

$$TV(A, B, P) = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P}$$

Mithilfe der Abbildungsgleichung in Def. 4.5.2 können nun die Strecken der Bilder bestimmt werden:

$$y_{A'} - y_{P'} = \frac{x_A f}{x_A - v} - \frac{x_P f}{x_P - v} = \frac{f v}{x_P - v} \frac{x_P - x_A}{x_A - v}$$

$$y_{P'} - y_{B'} = \frac{x_P f}{x_P - v} - \frac{x_B f}{x_B - v} = \frac{f v}{x_P - v} \frac{x_B - x_P}{x_B - v}$$

Der Vorfaktor ist bei beiden Differenzen derselbe, sodass dieser im Teilverhältnis verschwindet:

$$\begin{aligned} TV(A', B', P') &= \frac{x_P - x_A}{x_A - v} : \frac{x_B - x_P}{x_B - v} = \frac{x_B - v}{x_A - v} \cdot \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{x_B - v}{x_A - v} \cdot TV(A, B, P) \\ &\Rightarrow TV(A', B', P') : TV(A, B, P) = \frac{x_B - v}{x_A - v} \end{aligned}$$

Hier ist nun einsehbar, dass die Teilverhältnisse sich um einen Faktor unterscheiden, welcher allerdings nur von den Endpunkten  $A$  und  $B$  abhängig ist.

Würden wir also einen zweiten Teilungspunkt  $Q$  zwischen den beiden Endpunkten hinzufügen, und das Verhältnis der Teilverhältnisse bilden, so würde sich auch dieser Faktor heraus kürzen. Dies ist das Doppelverhältnis  $DV(A, B, P, Q)$  nach Def. 2.3.2, S. 30. Allgemein gilt also in Abb. 4.5.8:

$$\begin{aligned} DV(A, B, P, Q) : DV(A', B', P', Q') &= \frac{TV(A, B, P)}{TV(A, B, Q)} : \frac{TV(A', B', P')}{TV(A', B', Q')} \\ &= \frac{TV(A, B, P)}{TV(A', B', P')} \cdot \frac{TV(A', B', Q')}{TV(A, B, Q)} \\ &= \frac{x_A - v}{x_B - v} \cdot \frac{x_B - v}{x_A - v} = 1 \\ &\Rightarrow DV(A, B, P, Q) = DV(A', B', P', Q') \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass das Doppelverhältnis eine Invariante der projektiven Abbildung bzgl. der Längen von Strecken ist.

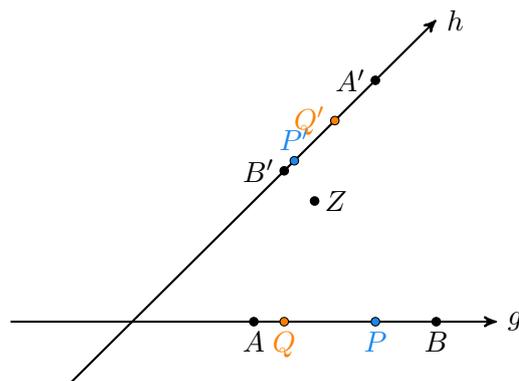


Abb. 4.5.8 Das Doppelverhältnis bleibt erhalten.

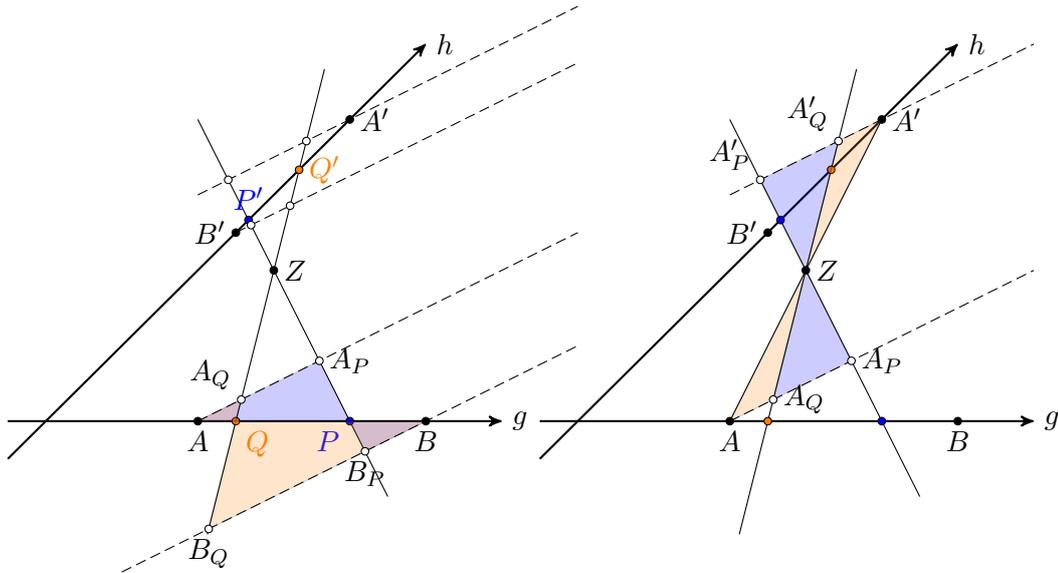


Abb. 4.5.9 Alternativer Beweis des Doppelverhältnisses

Es gibt einen alternativen Beweis von *Haack* (1969) [18, S. 55]. Dieser nutzt den Strahlensatz und kommt ohne die Abbildungsgleichung aus. Es werden durch die Punkte  $A, B, A'$  und  $B'$  parallele Geraden mit beliebiger Richtung gezeichnet. Die Projektionsstrahlen von  $P$  und  $Q$  werden soweit verlängert, dass sie die Parallelen schneiden (Abb. 4.5.9). Dabei ist  $A_P$  der Schnittpunkt der Parallelen durch  $A$  mit dem Projektionsstrahl durch  $P$ . Die anderen sieben Punkte werden analog benannt. Aufgrund der Parallelen entstehen Strahlensatzfiguren. Auf der linken Seite der Abbildung sind diese mit Streckzentrum  $P$  und  $Q$  hervorgehoben. Zwei weitere existieren mit den Zentren  $P'$  und  $Q'$ , welche zur besseren Übersicht nicht dargestellt sind.

Nach dem ersten Strahlensatz in 2.5.2, S. 41, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AA_P}}{\overline{BB_P}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = TV(A, B, P) & \frac{\overline{AA_Q}}{\overline{BB_Q}} &= \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = TV(A, B, Q) \\ \frac{\overline{A'A'_P}}{\overline{B'B'_P}} &= \frac{\overline{A'P'}}{\overline{B'P'}} = TV(A', B', P') & \frac{\overline{A'A'_Q}}{\overline{B'B'_Q}} &= \frac{\overline{A'Q'}}{\overline{B'Q'}} = TV(A', B', Q') \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass das Doppelverhältnis unverändert bleibt und unser Zwischenergebnis ist:

$$DV(A, B, P, Q) = TV(A, B, P) : TV(A, B, Q) = \frac{\overline{AA_P} \cdot \overline{BB_Q}}{\overline{AA_Q} \cdot \overline{BB_P}} \quad (4.5.2)$$

$$DV(A', B', P', Q') = TV(A', B', P') : TV(A', B', Q') = \frac{\overline{A'A'_P} \cdot \overline{B'B'_Q}}{\overline{A'A'_Q} \cdot \overline{B'B'_P}} \quad (4.5.3)$$

Die Faktoren im Nenner wurden absichtlich vertauscht, denn wir wenden wieder den Strahlensatz an, um zu zeigen, dass

$$\frac{\overline{AA_P}}{\overline{AA_Q}} = \frac{\overline{A'A'_P}}{\overline{A'A'_Q}} \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\overline{BB_Q}}{\overline{BB_P}} = \frac{\overline{B'B'_Q}}{\overline{B'B'_P}} \quad (4.5.5)$$

Wir benötigen dafür die markierten Strahlensatzfiguren in Abb. 4.5.9, rechte Seite. Es gilt:

$$\frac{\overline{AA_P}}{\overline{A'A'_P}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AA_Q}}{\overline{A'A'_Q}} \quad (4.5.6)$$

Analog gilt dies auch für die Strecken, welche durch die Parallelen durch  $B$  und  $B'$  entstehen. Der besseren Übersicht wurden diese in der Abbildung vernachlässigt, wie auch die entsprechende Strahlensatzfigur mit Zentrum  $Z$ . Durch Umformung von Gl. (4.5.6) erhalten wir Gl. (4.5.4) und somit auch das unveränderte Doppelverhältnis in Gl. (4.5.2).

### 4.5.3 Homogene Koordinaten

Es bleibt noch die Einführung von homogenen Koordinaten zu motivieren. Hierfür zeigen wir den letzten Punkt im Satz 4.5.3 aus dem vorherigen Abschnitt. Die Abbildung ist nicht linear, denn sie erfüllt nicht die Bedingung bzgl. der Multiplikation mit einem Skalar. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann gilt:

$$\varphi_z(\alpha \cdot x) = \frac{\alpha x f}{\alpha x - v} \neq \alpha \frac{x f}{x - v} = \alpha \cdot \varphi_z(x)$$

Ausnahmen sind  $\alpha \in \{0, 1\}$ , da der Ursprung ein Fixpunkt ist, d.h.  $\varphi_z(0) = 0$ . Lineare Abbildungen haben den Vorteil, dass die Bildpunkte durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation berechnet werden können. Weiterhin ist noch das Problem, dass die Fernpunkte durch die jetzigen Koordinaten nicht erfasst werden können. Das Bild von  $P_v$  ist ein Fernpunkt wie auch das Urbild von  $F$ . Daher mussten  $v$  und  $f$  in der perspektiven Abbildung zur Erhaltung der Bijektivität ausgeschlossen werden.

Mithilfe von sog. homogenen Koordinaten lassen sich auch die Fernpunkte angeben. Wir ersetzen den Abstand  $x$  bzw.  $y$  vom Schnittpunkt der Geraden durch die Verhältnisse  $x = \frac{x_h}{x_0}$  bzw.  $y = \frac{y_h}{y_0}$ , wobei  $x_0, y_0 \neq 0$  ist. Die Abbildungsgleichung ändert

sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} y = \frac{x \cdot f}{x - v} &\Rightarrow \frac{y_h}{y_0} = \frac{\frac{x_h}{x_0} \cdot f}{\frac{x_h}{x_0} - v} = \frac{x_h \cdot f}{x_h - v \cdot x_0} \\ &\Rightarrow \frac{x_h - v \cdot x_0}{y_0} = \frac{x_h \cdot f}{y_h} := \mu \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Durch diese Umformung werden aus einer Abbildungsgleichung zwei Verhältnisse, welche  $\mu$  entsprechen. Bild und Urbild müssen daher folgendes Gleichungssystem erfüllen, welches sich nun als Matrix-Vektorprodukt schreiben lässt:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_h f = \mu y_h \\ x_h - v x_0 = \mu y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_h \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu y_h \\ \mu y_0 \end{pmatrix} \quad (4.5.8)$$

Durch die Ersetzung von reellen Zahlen durch geeignete Vektoren (s. Abb. 4.5.10) erhalten wir eine lineare Abbildung, allerdings ist noch unklar, wie  $\mu$  bestimmt werden kann.

Da  $y$  dem Verhältnis von  $y_h$  zu  $y_0$  entspricht, ist es nicht nötig, den gemeinsamen Faktor  $\mu \neq 0$  zu kennen. Bei  $\mu = 0$  muss nach Gl. (4.5.7)  $x_h = 0$  und wegen  $x_0 \neq 0$  dann auch  $x = 0$  sein. Dies ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, d.h. ein Fixpunkt, welcher später noch besprochen wird. Wir können daher die Gl. (4.5.8) wie folgt vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_h \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_h \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (4.5.9)$$

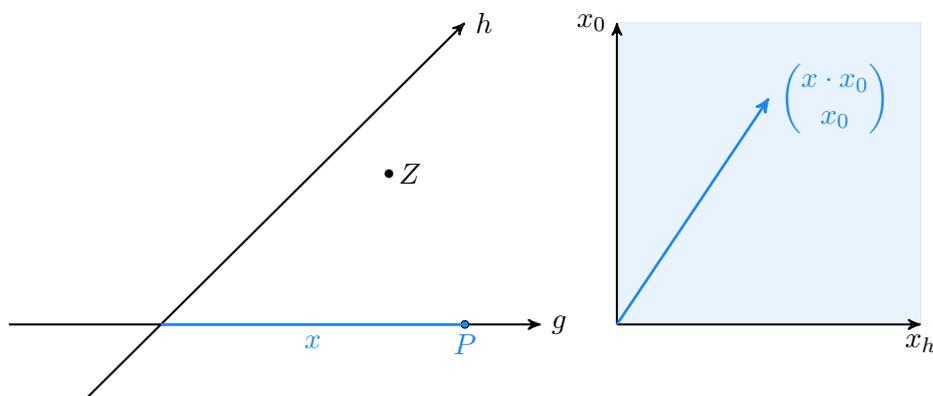


Abb. 4.5.10 Den Abständen  $x$  der Punkte auf  $g$  zum Schnittpunkt entsprechen nun Vektoren in der  $x_0, x_h$ -Ebene.

Wie muss  $x_0$  bestimmt werden, damit der richtige Vektor sich als Bild ergibt? Wir betrachten dazu folgendes Beispiel mit  $x_0 = 2$  und bestimmen  $\varphi_z(3)$ . Nach Def. 4.5.2 gilt:

$$\varphi_z(3) = \frac{3f}{3-v}$$

Mithilfe der linearen Abbildungsgleichung erhalten wir folgenden Vektor:

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6f \\ 6-2v \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{6f}{6-2v} = \frac{3f}{3-v}$$

Es ergibt sich tatsächlich das richtige Bild. Für  $x_0 \neq 0$  erhalten wir immer das entsprechende Bild, denn:

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 x f \\ x_0 x - x_0 v \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{x_0 x f}{x_0 x - x_0 v} = \frac{x f}{x - v}$$

Letztendlich steckt hier die Gl. (4.5.7) mit  $x_h = x \cdot x_0$  dahinter. Was ist nun mit den Fernpunkten?  $x = v$  hat als Bild einen Fernpunkt, dessen homogene Koordinaten nun bestimmt werden können:

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 v f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $y_0 = 0$  wird der Fernpunkt der Geraden  $h$  erfasst, dabei ist die erste Koordinate beliebig, sofern sie nicht null entspricht. Dies lässt vermuten, dass mit  $x_0 = 0$  der Fernpunkt von  $g$  erfasst wird. Dieser ist das Urbild des Fluchtpunktes  $F$ , was nun überprüft wird, wobei die erste Koordinate beliebig mit  $a \neq 0$  sein darf:

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a f \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{a f}{a} = f$$

Es bleibt noch der Fall  $x = 0$ , da hieraus  $\mu = 0$  folgt. Auch dies stellt in der linearen Abbildung kein Problem dar:

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_0 v \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$$

Wie erwartet, liegt hier ein Fixpunkt vor.

Wir können nun abschließend folgenden Satz formulieren:

**Satz 4.5.4**

Zwischen zwei sich schneidenden Strahlen  $g$  und  $h$  existiert eine lineare Abbildung  $\varphi_z : E_{x_0, x_h} \rightarrow E_{y_0, y_h}$  mit

$$\begin{pmatrix} x_h \\ x_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_h \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_h \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Das Projektionszentrum  $Z$  wird dabei mit  $f$  und  $v$  wie im Satz 4.5.2 festgelegt. Ist die zweite Koordinate von null verschieden, so entspricht dies gewöhnlichen Punkten auf  $g$  bzw.  $h$ . In anderem Fall sind es die Fernpunkte der Geraden.

## 4.6 Zentralprojektion in der Computergrafik

Das vorherige Kapitel beschrieb eine Einführung der homogenen Koordinaten. Die Motivation bestand darin, die Abbildungsgleichung in eine lineare zu überführen bzw. um Fernpunkten Koordinaten zuzuordnen. Eine Frage bleibt allerdings offen: worin liegt der Vorteil, die Zentralprojektion zu einer linearen Abbildung umschreiben? Der Satz 4.4.2, S. 154, lieferte schon Formeln, um die Bilder von Punkten und Geraden berechnen zu können. Also warum daher die Mühe machen, homogene Koordinaten zu verwenden?

Homogene Koordinaten und Zentralprojektionen werden beispielsweise in der Computergrafik (vgl. [36], Kap. 7, S. 202ff) verwendet, wenn es darum geht, naturgetreue, dreidimensionale Bilder auf dem zweidimensionalen Bildschirm zu generieren. Das Auge des Betrachters oder die virtuelle Kamera liegt im Projektionszentrum. Die gedachte Kamera muss sich nun durch eine virtuell erschaffene Szene bewegen. Dadurch ändern sich das Projektionszentrum sowie die Bildebene in relativ kurzer Zeit, wenn man sich bspw. vorstellt, die Person würde in einem Spiel durch einen möblierten Raum laufen. Die Projektionen müssen daher schnell erzeugt werden, um fließende Bewegungen zu ermöglichen [36, S. 2].

Hierbei ist es praktisch, wenn die Verkettung mehrerer Abbildungen, wie Verschiebung oder Drehung, einfach berechnet werden können. Lineare Abbildungen haben nun den Vorteil, dass sie als Matrix-Vektor-Produkt geschrieben werden können und ihre Verkettung führt zu einer Multiplikation ihrer Matrizen. D.h. statt jede Abbildung nacheinander auszuführen, reicht die Multiplikation aller Koordinaten der Objekte in einer Szene mit nur einer Matrix aus. Die heutigen Grafikkarten sind auf Vektor- und Matrizenoperationen optimiert [36, S. 7].

Im Folgenden werden lineare Abbildungen erst allgemein besprochen, dann geht es um Drehung und Verschiebungen und zum Schluss um die Generierung zentralprojektiver Abbildungen. Dies ist auch ein denkbar gut zugänglicher Ablauf für den Mathematikunterricht in der Oberstufe. Mit der Computergrafik als Einstieg können Schülerinnen und Schüler an das Thema lineare Abbildungen herangeführt werden und diese sogar mittels leicht zugänglichen und kostenlosen Programmiersprachen wie *Python* oder *Processing* an einfachen Objekten ausprobieren. Konkrete Beispiele mit *Processing* werden in Kapitel 7 thematisiert.

#### 4.6.1 Lineare Abbildungen

##### Definition 4.6.1

Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) heißt *linear*, wenn für alle  $a, b \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt [10, S. 256]:

- i)  $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- ii)  $f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$

Die Definition ist hier spezieller gefasst, da der reelle Vektorraum, wie er auch in der Schule verwendet wird, im Fokus liegt. Wie wirkt sich nun diese Definition auf geometrische Abbildungen im Raum bzw. in der Ebene aus?

Zum einen wird der Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}^n$  immer aus sich selbst abgebildet, denn:

$$f(a) = f(a + 0) = f(a) + f(0) \Rightarrow f(a) - f(a) = f(0) \Rightarrow 0 = f(0) \forall a \in \mathbb{R}^n$$

Zum anderen bleibt das Teilungsverhältnis invariant, denn:

$$\begin{aligned} \text{Sei } p_1 = \lambda \cdot p_2 \text{ mit } p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} &\Rightarrow f(p_1) = f(\lambda \cdot p_2) = \lambda \cdot f(p_2) \\ &\Rightarrow \frac{|p_1|}{|p_2|} = |\lambda| = \frac{|f(p_1)|}{|f(p_2)|} \end{aligned}$$

Nur falls der Nullpunkt in der Bildebene liegt, ist er bei der Zentralprojektion ein Fixpunkt. Demnach ist die erste Bedingung bei beliebigen Bildebenen nicht immer erfüllt und ebenso wurde zuvor schon gezeigt, dass das Teilungsverhältnis keine Invariante ist. Demnach ist es nicht notwendig im Unterricht die allgemeine Definition linearer Abbildungen zu verwenden. Die geometrische Interpretation ist für Schülerinnen und Schüler leichter zugänglich.

Die Rechengesetze der Matrizenmultiplikation sind derart definiert, dass sich jede li-

neare Abbildung mit einer Abbildungsmatrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ausdrücken lässt [10, S. 257]:

$$x \mapsto f(x) = M \cdot x$$

Der Vorteil linearer Abbildungen liegt nun darin, dass die Verkettung mehrerer solcher ebenfalls wieder eine lineare Abbildung ist:

$$\text{Sei } f(x) = A \cdot x \text{ und } g(x) = B \cdot x \Rightarrow (g \circ f)(x) = B \cdot (A \cdot x) = (A \cdot B) x$$

Um die Zentralprojektion eines Quaders an einer bestimmten Stelle im Raum zu erzeugen, gehen wir von einem Einheitswürfel aus und führen folgende Operationen durch:

1. Skalierung des Einheitswürfels auf die Größe des Quaders
2. Drehen und Verschieben des Quaders an die gewünschte Position
3. Projektion der Szene

Die ersten beiden Schritte zeigt Abb. 4.6.1. Wir multiplizieren die Matrizen aller drei Abbildungen und führen erst dann die Matrix-Vektor-Multiplikation mit allen Eckpunkten des Quaders aus.

Im folgenden Abschnitt werden zwei lineare Transformationen besprochen und gezeigt, dass die Linearität auch mit homogenen Koordinaten erhalten bleibt. Dann zeigen wir, wie die Translation durch homogene Koordinaten linear wird.

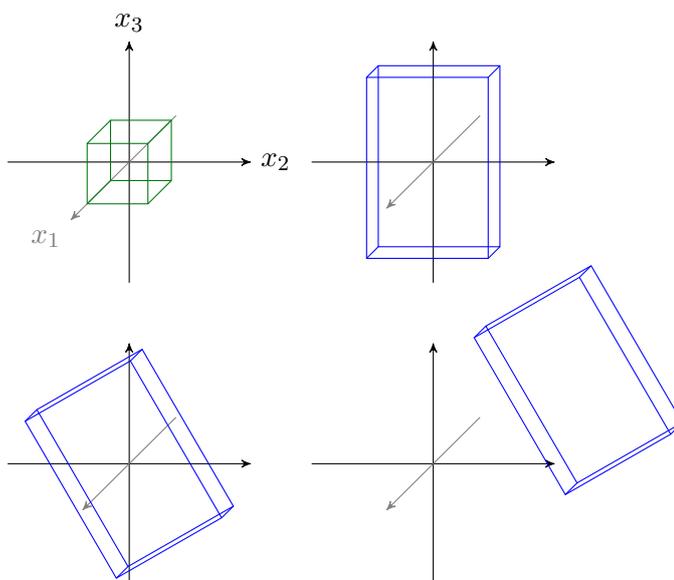


Abb. 4.6.1 Skalierung, Drehung und Verschiebung eines Quaders ausgehend von dem Einheitswürfel

### 4.6.2 Skalierung, Drehung und Translationen

Wie in dem vorherigen Beispiel soll es darum gehen, eine Szene aus Grundbausteinen zu generieren. Aus dem Würfel entsteht durch Skalierung ein Quader und mithilfe des Prismas oder der Pyramide einfache Häuser wie in Abb. 4.6.3. In Abb. 4.6.2 stehen beide Körper auf einer quadratischen Fläche mit Kantenlänge 1. In der Flächenmitte liegt der Ursprung. Die Spitzen sind mittig und haben ebenfalls eine Höhe von 1. Der Würfel mit Kantenlänge 1 ist anders als in Abb. 4.6.1 um 0.5 nach oben verschoben, sodass der Mittelpunkt des Bodens im Ursprung liegt. Dies erleichtert die Vorstellung, wenn Objekte verschoben werden, da nun alle Grundbausteine auf der  $x_1 - x_2$ -Ebene liegen, was den Boden der Szene darstellen soll. Im Folgenden wird nun besprochen, wie mithilfe von Skalierung, Drehung und Verschiebung die Häuserszene in Abb. 4.6.3 entstanden ist.

Mithilfe der Skalierungsmatrix werden die drei Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

welche den Grundkörper aufspannen und somit die Länge, Breite und Höhe definieren, verkürzt oder verlängert (Abb. 4.6.4). Es ist leicht nachvollziehbar, dass der Nullpunkt auf sich selbst abgebildet wird. Ebenso verbirgt sich hinter der Skalierung eine zentrische Streckung, d.h. auch das Teilverhältnis bleibt invariant. Wir können daher von einer linearen Abbildung ausgehen. Wir suchen also eine Matrix, welche die o.g. Vektoren wie folgt abbildet:

$$M_{\text{scale}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_{\text{scale}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_{\text{scale}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

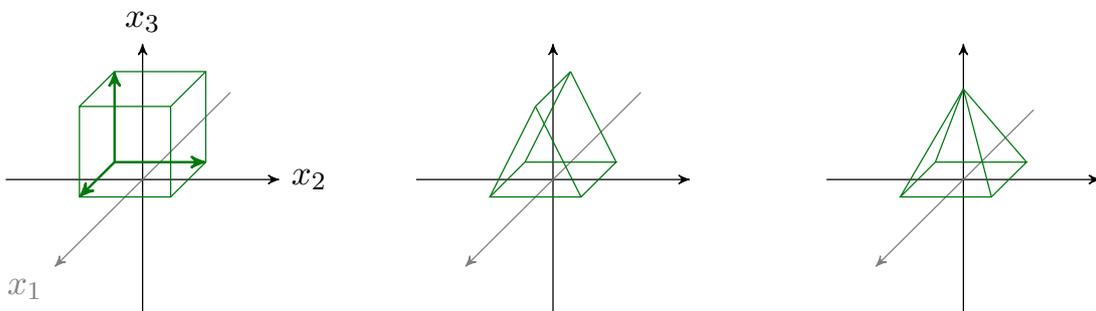


Abb. 4.6.2 Grundbausteine: Würfel, Prisma und Pyramide mit Kantenlänge bzw. Körperhöhe 1

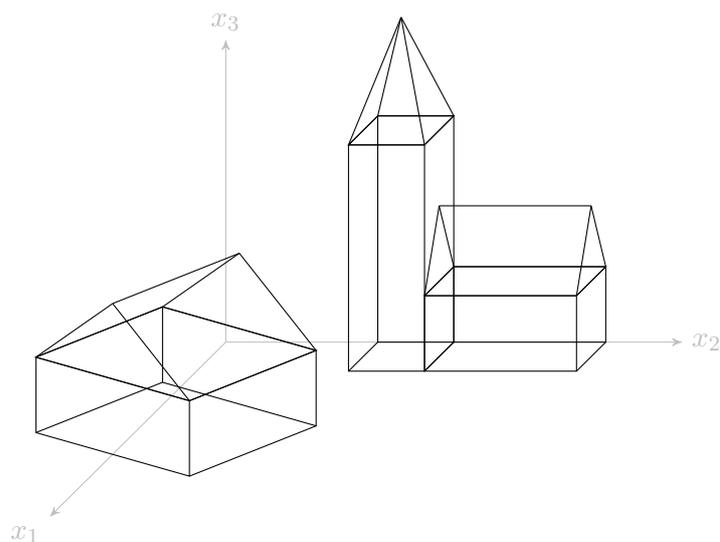


Abb. 4.6.3 Eine aus den Grundelementen aufgebaute Szene von Gebäuden.

Mit den drei Bildern der Basisvektoren des  $\mathbb{R}^3$  ist die Abbildungsmatrix festgelegt. Wir nutzen dazu die Eigenschaften einer linearen Abbildung in Def. 4.6.1. Sei  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  beliebig. Dieser lässt sich dann als Linearkombination der Basisvektoren schreiben, sodass sich folgendes Bild ergibt:

$$\begin{aligned}
 p &= p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow f(p) &= p_1 f(e_1) + p_2 f(e_2) + p_3 f(e_3) \\
 &= p_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot p = M_{\text{scale}} \cdot p
 \end{aligned}$$

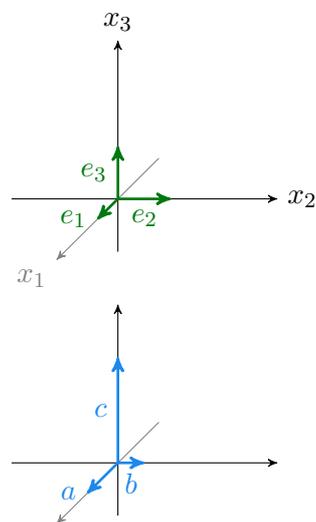


Abb. 4.6.4 Skalierung

In Abb. 4.6.3 wurde das linke Haus um  $30^\circ$  im Uhrzeigersinn bzgl. der  $x_3$ -Achse gedreht, bevor es verschoben wurde. Wir betrachten zunächst die Drehung in der Ebene um den Ursprung und gehen dann auf die Rotation im Raum bzgl. der drei Koordinatenachsen ein. Um die Abbildungsmatrix wie oben herzuleiten, benötigen wir die Bilder der Basisvektoren des  $\mathbb{R}^2$ . Gemäß der Abb. 4.6.5 ergibt sich über die Bilder folgende Abbildungsmatrix:

$$\begin{aligned} M_{\text{rot}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \\ M_{\text{rot}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \Rightarrow M_{\text{rot}} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei der Drehung im Raum um den Ursprung wird in der Ebene gedreht, zu welcher die Koordinatenachse die Normale ist. Die Achse selbst ist dabei eine Fixpunktgerade, d.h. bei einer Drehung um die  $x_3$ -Achse bleibt der Basisvektor  $e_3$  erhalten (Abb. 4.6.6). So ergeben sich folgende Matrizen:

$$\begin{aligned} M_{\text{rot},x_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ M_{\text{rot},x_2} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ M_{\text{rot},x_3} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

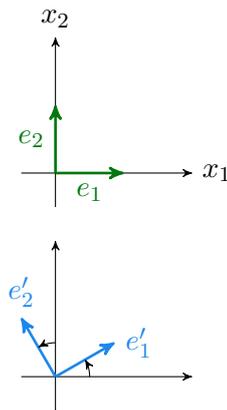
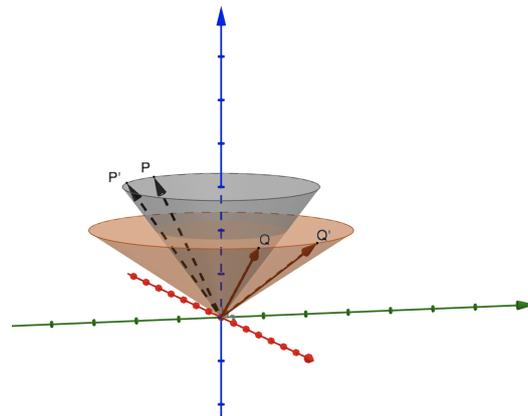


Abb. 4.6.5 Drehung

Abb. 4.6.6 Drehung um die  $x_3$ -Achse

Der Drehsinn ist dabei entgegen des Uhrzeigersinns.

Zum Abschluss thematisieren wir die Translation um den Verschiebungsvektor  $v$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \end{pmatrix}.$$

Es ist offensichtlich, dass dies keine lineare Abbildung ist, da der Koordinatensprung ebenfalls verschoben wird. Hier müssen nun homogene Koordinaten verwendet werden, d.h. wir fügen noch eine vierte Koordinate hinzu, wobei  $t \neq 0$  für gewöhnliche Punkte gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} t \cdot x_1 \\ t \cdot x_2 \\ t \cdot x_3 \\ t \end{bmatrix}.$$

Zur besseren Unterscheidung werden homogene Koordinaten in eckige Klammern gesetzt. Die Matrix

$$M_{\text{trans}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt die Verschiebung um den Vektor  $v$ , denn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t x_1 \\ t x_2 \\ t x_3 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t x_1 + t v_1 \\ t x_2 + t v_2 \\ t x_3 + t v_3 \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \end{pmatrix} \text{ für } t \neq 0$$

Wir haben nun alle drei Abbildungsmatrizen  $M_{\text{scale}}$ ,  $M_{\text{rot}}$  und  $M_{\text{trans}}$  vorgestellt, mit welcher die Häuserszene in Abb. 4.6.3 aus den Grundobjekten erstellt wurde. Statt nacheinander mit den jeweiligen Matrizen die Eckpunkte abzubilden, soll die verkettete Abbildung mit nur einer Matrix ausgeführt werden. Wir müssen daher auch die beiden vorherigen Matrizen um eine Dimension erweitern, damit wir diese miteinander multiplizieren können. Um den linken gedrehten Quader in Abb. 4.6.3 zu erhalten, wird folgende Matrix auf die Eckpunkte des Einheitswürfels angewendet:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-30) & -\sin(-30) & 0 & 0 \\ \sin(-30) & \cos(-30) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} 1.732 & 1.5 & 0 & 3 \\ -1 & 2.598 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Abbildungen erfolgen von rechts nach links, d.h. zuerst wird der Würfel zum Quader skaliert, dann im Uhrzeigersinn  $30^\circ$  um die  $x_3$ -Achse gedreht und zum Schluss verschoben, sodass der Mittelpunkt des Bodens bei  $(3 / 0.5 / 0)$  ist. Wir können zusammenfassend Folgendes festhalten:

#### Satz 4.6.2

Lineare Abbildungen im Raum sind durch folgende Matrizen in homogenen Koordinaten möglich:

Skalierung mit  $a, b, c$ :

$$M_{\text{scale}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Drehung um  $\alpha$  im Raum:

$$M_{\text{rot}, x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{rot},x_2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\text{rot},x_3} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translation um Vektor  $\vec{v}$ :

$$M_{\text{trans}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die homogenen Koordinaten wurden in diesem Kapitel rein algebraisch verwendet. Wir wollen im nächsten Abschnitt nun geometrisch interpretieren, was beim Teilen durch die letzte Koordinate passiert. Für die Veranschaulichung müssen wir die Dimension um 1 reduzieren, d.h. wir betrachten im Folgenden Punkte  $(x / y)$  einer Ebene und interpretieren ihre homogene Darstellung  $[xt / yt / t]$ .

### 4.6.3 Das homogene Koordinatensystem

Wir wollen nun den Bezug zur Informatik herstellen und zeigen, wie homogene Koordinaten in der Computergrafik verwendet werden, um zentralprojektive Bilder mithilfe der Matrix-Vektor-Multiplikation berechnen zu können. In Kapitel 7 im dritten Teil dieser Arbeit wird dazu eigens entwickelter Quellcode in der Programmiersprache *Processing* für die Verwendung im Schulunterricht vorgestellt.

Wir benennen die Achsen im Folgenden in  $x, y$  und  $z$  um und drehen das Koordinatensystem, sodass die  $y$ -Achse senkrecht steht. Sei  $P_h(x_h / y_h / z_h)$  mit  $z_h \neq 0$  ein Punkt in einer Ebene parallel zur  $xy$ -Ebene durch  $(0 / 0 / z_h)$  (Abb. 4.6.7). In der Computergrafik befindet sich das Projektionszentrum im Ursprung und der Bildschirm entspricht der grauen Ebene. Daher wurde das Koordinatensystem gedreht, damit die  $xy$ -Ebene senkrecht steht.

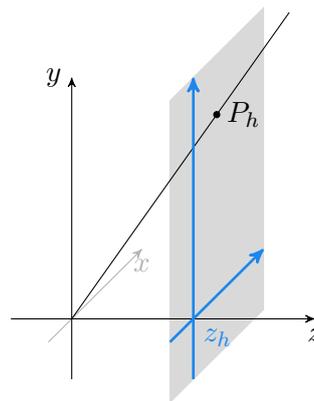


Abb. 4.6.7 Ursprungsgerade durch  $P_h$

Die Ursprungsgerade durch den Punkt  $P_h$  in Abb. 4.6.7 hat folgende Parametergleichung:

$$g : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} .$$

Dadurch wird  $P_h$  zum Schnittpunkt der Ebene  $E : z = z_h$  und der Ursprungsgeraden  $g$ . Stellen wir uns nun vor, die Ebene  $E$  enthielte ein eigenes, zweidimensionales Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu denen des Raumes sind. Und sein Ursprung liege in dem Schnittpunkt der Ebene  $E$  mit der  $z$ -Achse, also in  $[0 / 0 / z_h]$ . In Abb. 4.6.8 sind zwei solcher Ebenen bei  $z_h = 1$  und  $z_h = 3$  markiert. Beide werden von der Ursprungsgeraden  $g$  durchstoßen. Für  $z_h = 3$  sei  $P_h$  der Durchstoßpunkt.

Wir wollen nun, dass jeder Schnittpunkt der Ursprungsgeraden  $P_h$  dieselben Koordinaten im entsprechenden blauen Koordinatensystem hat, unabhängig davon, welchen Wert  $z_h$  annimmt. Wir skalieren daher die Basisvektoren der blauen Koordinatensysteme in Abb. 4.6.8 mit  $z_h$ . Wir betrachten dazu den Punkt  $P_h$  in der Abbildung, welcher die Koordinaten  $[3 / 1.5 / 3]$  hat. Die entsprechende Ursprungsgerade schneidet die Ebene durch  $z = 1$  in den Koordinaten  $[1 / 0.5 / 1]$ . Schauen wir uns das orange markierte Einheitsquadrat in den entsprechenden Ebenen an, so stellen wir

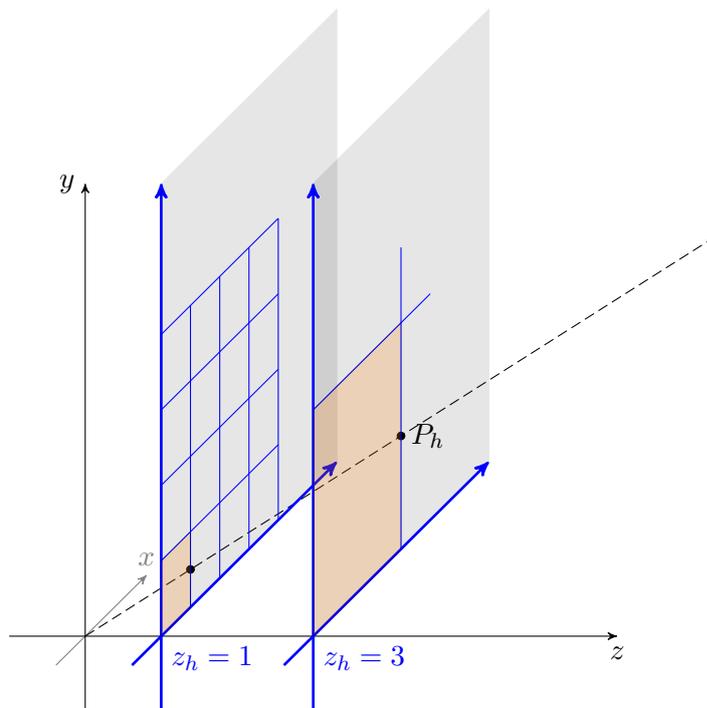


Abb. 4.6.8 Die blauen Koordinatensysteme skalieren nun je nach Lage von  $z_h$  unterschiedlich.

fest, dass sich die beiden Punkte in Bezug auf das blaue Koordinatensystem am gleichen Ort befinden. Die Koordinaten bezüglich der blauen Systeme sind in beiden Fällen  $(1 / 0.5)$ . Wir verallgemeinern dies:

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{bmatrix} \mapsto \left( \frac{x_h}{z_h} / \frac{y_h}{z_h} \right). \quad (4.6.1)$$

Die Punkte in der Ebene entsprechend daher Ursprungsgeraden im Raum, d.h. die homogenen Koordinaten eines gewöhnlichen Punktes sind nicht eindeutig. Da sie aber auf Ursprungsgeraden liegen müssen, ändert sich das Verhältnis zwischen den Koordinaten nicht.

Wir können also jedem Punkt im euklidischen Raum eine Gerade im vierdimensionalen Raum zuordnen. Je weiter die graue Ebene zum Ursprung verschoben wird, um kleiner wird das in Abb. 4.6.8 orange markierte Einheitsquadrat. Für  $z_h = 0$  existieren keine Basisvektoren bzw. anschaulich betrachtet, werden alle Punkte im Raum dem Ursprung zugeordnet, da sich alle Geraden hier schneiden. Folglich ist die Berechnung des Verhältnisses im Falle  $z_h = 0$  sowohl arithmetisch wie auch anschaulich nicht möglich.

Wir können durch jeden Punkt im euklidischen Raum außerhalb des Ursprungs eine Ursprungsgerade zeichnen. Für die Zentralprojektion reicht aber der euklidische Raum nicht aus, denn wir haben gezeigt, dass dann jeder Fluchtpunkt keinen Urbildpunkt mehr hat. Um die Lücke zu schließen, wurden die Fernpunkte aus der projektiven Geometrie dem euklidischen Raum hinzugefügt. Wir wollen nun erläutern, warum homogene Koordinaten mit  $z_h = 0$  Fernpunkte beschreiben.

Schülerinnen und Schüler könnten nun sagen, wenn wir durch Werte nahe Null teilen, so wird der Quotient größer, d.h. der entsprechende Punkt ist unendlich weit entfernt vom Ursprung. Eine solche Erklärung findet sich auch in der Literatur zur Computergrafik [36, S. 207]. Ist dies aber eine sinnvolle Erklärung? Es ist richtig, dass die Koordinaten eines Punktes, welcher auf einer Geraden dem Fernpunkt entgegen strebt, größere Werte annehmen muss, da auch der Abstand zum Ursprung divergiert. Was allerdings mit diesem Argument verloren geht, ist die Information, dass ein Fernpunkt die Richtung einer Geraden beschreibt. Unabhängig von  $x_h \neq 0$  und  $y_h \neq 0$  divergiert ihr Quotient mit  $z_h = 0$ . Unendlich ist zwar keine Zahl, könnte bei Schülerinnen und Schüler dennoch zu der Fehlvorstellung führen, dass es dann nur einen Fernpunkt gibt.

Betrachten wir die Situation einmal mit Vektoren. Für  $z_h \neq 0$  ist  $\left( \frac{x_h}{z_h}, \frac{y_h}{z_h} \right)^T$  der Ortsvektor des gewöhnlichen Punktes  $\left( \frac{x_h}{z_h} / \frac{y_h}{z_h} \right)$ . Die Richtung einer Geraden wird durch den Richtungsvektor beschrieben. Wir wollen anschaulich zeigen, dass für  $z_h = 0$  der

Vektor  $(x_h, y_h)^T$  die Richtung beschreibt, für welche auch der Fernpunkt  $[x_h / y_h / 0]$  steht.

Abb. 4.6.9 zeigt eine Gerade, welche von den Punkten

$$A = [a_1 / a_2 / z_1] \text{ und } B = [b_1 / b_2 / z_1]$$

definiert wird, und in der zu  $xy$  parallelen Ebene mit  $z = z_1$  liegt. Die Richtung der Geraden kann durch ihre Steigung bestimmt werden oder vektoriell mit

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = F^* .$$

Aufgrund der Differenz hebt sich die letzte Koordinate immer auf, sodass das Ergebnis auch als Punkt in der  $xy$ -Ebene interpretiert werden kann. Zeichnen wir durch  $F^*$  die Ursprungsgerade, so ist diese parallel zur Geraden  $AB$ , d.h. sie schneiden sich in demselben Fernpunkt. Mit  $z_h = 0$  die Fernpunkte zu definieren, ist daher eine konsistente Erweiterung der homogenen Koordinaten von gewöhnlichen Punkten. Wir stellen aber auch fest, dass die homogenen Koordinaten eines Fernpunktes nicht eindeutig sind. Analog zu den Vektoren gilt:

$$\begin{bmatrix} d_1 - c_1 \\ d_2 - c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.6.2)$$

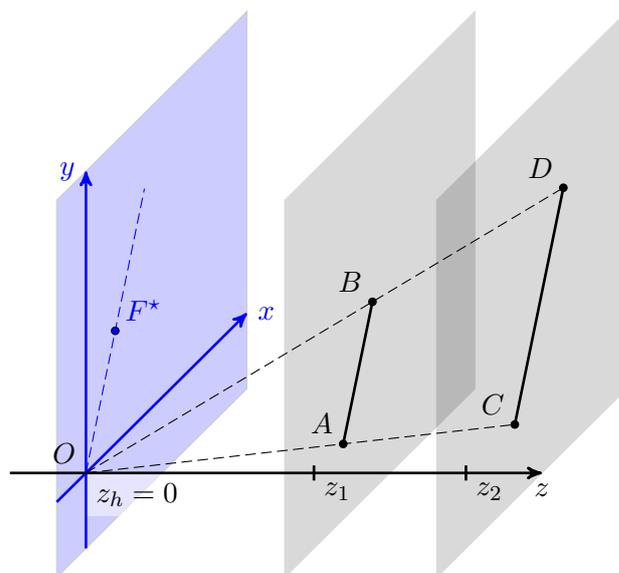


Abb. 4.6.9 Der Fernpunkt einer Geraden liegt in der blauen Ebene

Wir zeichnen dazu in Abb. 4.6.9 die Ursprungsgeraden durch die Punkte  $A$  und  $B$  und schneiden diese mit der Ebene  $z = z_2$ . Wir erhalten die Gerade  $CD$  mit

$$C = [c_1 / c_2 / z_2] \text{ und } D = [d_1 / d_2 / z_2],$$

welche ebenfalls parallel zu  $AB$  aufgrund der besonderen Lage der Ebenen ist. Den Beweis liefert der Strahlensatz. Aufgrund der Ursprungsgeraden gilt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ z_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ z_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda z_1 = z_2 = \mu z_1 \\ &\Rightarrow (z_1 \neq 0) \lambda = \mu \end{aligned}$$

Die Strecke  $\overline{CD}$  ist somit das Bild von  $\overline{AB}$  bei einer zentrischen Streckung mit Zentrum  $O$  und dem Faktor  $\lambda$ . Dann gilt auch

$$d_1 - c_1 = \lambda b_1 - \lambda a_1 = \lambda (b_1 - a_1),$$

sodass wir Gl. (4.6.2) daraus folgern können. Der Fernpunkt  $F^*$  liegt daher auf einer Ursprungsgeraden in der  $xy$ -Ebene.

Zum Abschluss des Kapitels werden einige Aufgabenbeispiele für den Einsatz im Unterricht besprochen. Als Einstieg soll im ersten Beispiel die Transformation von dem homogenen Koordinatensystem in die euklidische Ebene nach Gl. (4.6.1) geübt werden.

#### Aufgabenbeispiel 4.6.1

Bestimme wie im Beispiel zu den folgenden homogenen Koordinaten den entsprechenden gewöhnlichen Punkt in der euklidischen Ebene.

	a)	b)	c)	d)
homogen	$[3 / 4 / 2]$	$[3 / 6 / 3]$	$[2 / 2 / 0.5]$	$[3 / 4 / 1]$
euklidisch	$(1.5 / 2)$			

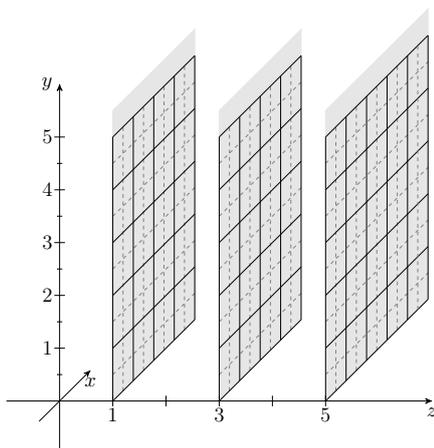
Die Lösung ist  $(1 / 2)$ ,  $(4 / 4)$  und  $(3 / 4)$ , da wir nur durch die letzte Koordinate teilen müssen.

Im zweiten Beispiel geht es um die Verknüpfung der algebraischen Darstellung mit der visuellen Bedeutung. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich an die veränderte Orientierung des Koordinatensystems gewöhnen und ihnen sollte dabei bewusst werden, dass jeder Punkt der euklidischen Ebene durch verschiedene Punkte im homogenen Koordinatensystem repräsentiert werden.

### Aufgabenbeispiel 4.6.2

- a) Zeichne die folgenden Punkte in das abgebildete 3D Koordinatensystem ein. Die markierten Ebenen dienen dabei als Hilfe. Entscheide anhand des Bildes, welche homogenen Punkte denselben Punkt in der euklidischen Ebene repräsentieren.

$$A = [0.5 / 1 / 1] \quad B = [1.5 / 1.5 / 3] \quad C = [1.5 / 3 / 3] \quad D = [2.5 / 2.5 / 5]$$



- b) Die Punkte  $A$  bis  $D$  entsprechen zwei verschiedenen Punkten in der euklidischen Ebene. Finde jeweils zwei weitere Darstellungen im homogenen Koordinatensystem. Wie kannst du die Lösung im Bild ablesen?

Für die Lösung der Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler die Ursprungsgeraden einzeichnen (Abb. 4.6.10). Liegen die Punkt auf derselben Geraden, so beschreiben sie denselben Punkt in der euklidischen Ebene. Über die Schnittpunkte mit den anderen Ebenen lassen sich weitere Darstellungen finden, um damit Teil b) zu erfüllen. Die Koordinaten lassen sich allerdings nicht ohne Einschränkungen vom Bild ablesen, sodass die Schülerinnen und Schüler auch auf das konstante Verhältnis der Koordinaten zurückgreifen sollten. Die Lösung ist  $E = [0.5 / 0.5 / 1]$  und  $F = [2.5 / 5 / 5]$ .

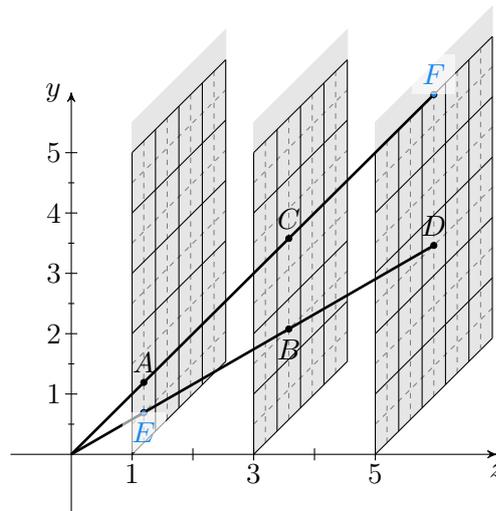


Abb. 4.6.10 Lösung des Aufgabenbeispiels 4.6.2

In der kommenden Aufgabe soll wieder aus den homogenen Koordinaten der entsprechende Punkt abgelesen werden. Hinzu kommen nun die Fernpunkte.

### Aufgabenbeispiel 4.6.3

- a) Die homogenen Koordinaten beschreiben verschiedene Punkte in der euklidischen Ebene. Gebe für einen gewöhnlichen Punkt die Koordinaten in der Form  $(x / y)$  an. Handelt es sich um einen Fernpunkt, dann gib die Richtung als vollständig gekürzten Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  an.

A	B	C	D	E	F
$[4 / 2 / 2]$	$[2 / 2 / 0]$	$[5 / 2 / 1]$	$[3 / 2 / 0]$	$[4.5 / 1.5 / 3]$	$[3 / 2 / 0.5]$
$(2 / 1)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$				

- b) Welche der homogenen Koordinaten in der Liste beschreiben denselben Punkt wie in a)? Gebe den entsprechenden Punkt mit  $A$  bis  $F$  an.

$[2.5 / 1 / 0.5]$	$[0, 3 / 0, 3 / 0]$	$[1.5 / 1 / 0.25]$	$[2 / 1 / 1]$
$C$			

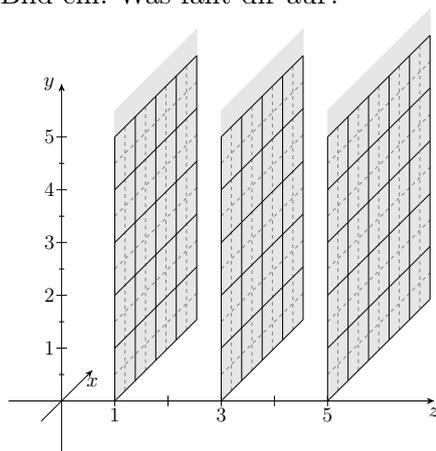
In a) sind  $B$  und  $D$  Fernpunkte, da die letzte Koordinate 0 ist. Hinter  $D$  verbirgt sich der Vektor  $(3/2)^T$  und die anderen Punkte sind  $C(5/2)$ ,  $E(1.5/0.5)$  sowie  $F(6/4)$ . Die Lösung zu b) ist

$[2.5 / 1 / 0.5]$	$[0.3 / 0.3 / 0]$	$[1.5 / 1 / 0.25]$	$[2 / 1 / 1]$
$C$	$B$	$F$	$A$

Wir kommen zum Abschluss nun zu einer Aufgabe, welche die Translation in der Ebene thematisiert. Mithilfe von Beispielen und Beobachtungen sollen die Schülerinnen und Schüler an die Translationsmatrix im homogenen Koordinatensystem herangeführt werden.

#### Aufgabenbeispiel 4.6.4

- a) Gegeben ist der Punkt  $(0.5 / 0)$ , welcher um den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$  verschoben werden soll. Welche Koordinaten hat der verschobene Punkt? Welche homogenen Koordinaten ergeben sich jeweils für beide Punkte mit  $z = 1$ ,  $z = 3$  und  $z = 5$ ? Um welchen Vektor wurden die Punkte im homogenen Koordinatensystem jeweils verschoben?
- b) Zeichne die Punkte sowie die Verschiebungsvektoren aus a) in folgendes Bild ein. Was fällt dir auf?



- c) Wir wollen nun deine Vermutungen aus b) mit einem anderen Zahlenbeispiel prüfen. Gegeben ist der Punkt  $(4/3)$  und der Verschiebungsvektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Bestimme wieder den verschobenen Punkt in der euklidischen Ebene sowie die homogenen Koordinaten mit  $z = 1$ ,  $z = 3$  und  $z = 5$  mit den entsprechenden Verschiebungsvektoren. Bestätigen sich deine Vermutungen aus b)?

- d) Wir verallgemeinern nun die Ergebnisse. Gegeben ist der Punkt  $(x / y)$  und der Verschiebungsvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ . Was sind die homogenen Koordinaten des Punktes vor und nach der Verschiebung für  $z = 1$  und  $z = 3$ ? Kannst du eine  $3 \times 3$  Matrix erstellen, welche mit dem homogenen Punkt multipliziert den verschobenen Punkt ergibt? Liegt für  $z = 1$  und  $z = 3$  dieselbe Matrix vor? Was passiert, wenn wir eine beliebige Ebene mit  $z = t, t \neq 0$  verwenden?

Die folgende Tabelle zeigt die Lösung von a).

Urbild	$(0.5 / 0)$	$[0.5 / 0 / 1]$	$[1.5 / 0 / 3]$	$[2.5 / 0 / 5]$
Verschiebungsvektor	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Bild	$(1 / 1)$	$[1 / 1 / 1]$	$[3 / 3 / 3]$	$[5 / 5 / 5]$

Es sollte auffallen, dass die letzte Koordinate des Verschiebungsvektors 0 ist. Die Richtung ist dabei dieselbe, denn das Verhältnis zwischen der ersten und zweiten Koordinate bleibt gleich. Die letzte homogene Koordinate des Urbildpunktes bestimmt dabei den Faktor, um welcher der Verschiebungsvektor verlängert wird. Was die Schülerinnen und Schüler hier anhand der Zahlen beobachten können, soll in Teil b) geometrisch veranschaulicht werden. Das Zahlenbeispiel in a) wurde dabei so gewählt, dass die Schülerinnen und Schüler das beigefügte Koordinatensystem verwenden können. Die Abb. 4.6.11 zeigt das Ergebnis:

Der Punkt  $P$  wird nach  $P'$  verschoben. Wegen  $z = 1$  entspricht die markierte Ebene auch der euklidischen. Je weiter weg sich die graue Ebene vom Ursprung befindet, um so länger wird der Verschiebungsvektor, allerdings bleibt die Richtung erhalten. Zeichnen wir durch die Bildpunkte eine Parallele zur Ursprungsgeraden von  $P$ , so schneidet diese die  $xy$ -Ebene in den blau markierten Punkten. Diese entsprechen den

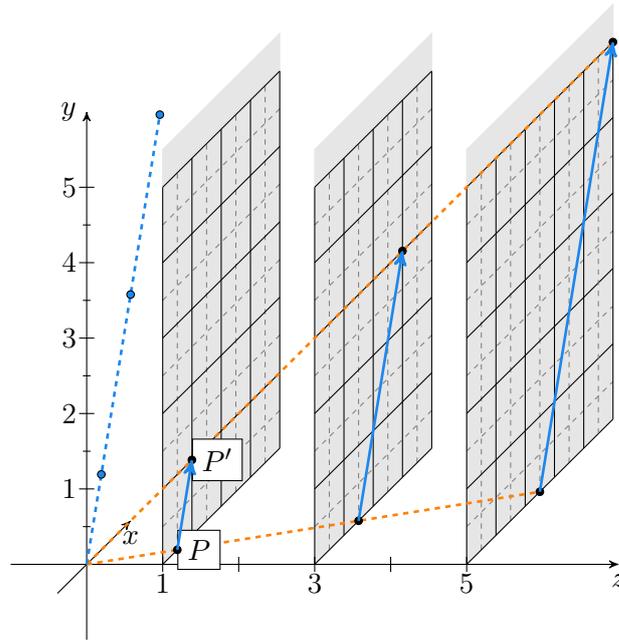


Abb. 4.6.11 Die Lösung von Aufgabenbeispiel 4.6.4, Teil b)

Verschiebungsvektoren, wenn wir sie als homogene Punkte betrachten, welche in der euklidischen Ebene denselben Fernpunkt beschreiben.

Teil c) soll ein weiteres Zahlenbeispiel liefern, anhand Schülerinnen und Schüler ihre Vermutungen aus b) bestätigen können. Die folgende Tabelle liefert die Lösung.

Urbild	$(4 / 3)$	$[4 / 3 / 1]$	$[12 / 9 / 3]$	$[20 / 15 / 5]$
Verschiebungsvektor	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
Bild	$(5 / 6)$	$[5 / 6 / 1]$	$[15 / 18 / 3]$	$[25 / 30 / 5]$

Wir erhalten dasselbe Muster wie in a), sodass nun der Schritt der Verallgemeinerung erfolgen kann. Hierbei sollen die Schülerinnen und Schüler schrittweise an die Verschiebungsmatrix herangeführt werden. Wir kommen also zur Lösung von d) und verwenden dieselbe tabellarische Darstellung wie zuvor:

Urbild	$(x / y)$	$[x / y / 1]$	$[3x / 3y / 3]$
Verschiebungsvektor	$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
Bild	$(x + v_1 / y + v_2)$	$[x + v_1 / y + v_2 / 1]$	$[3(x + v_1) / 3(y + v_2) / 3]$

Für

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

existiert keine reelle Matrix  $M$ , sodass

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \end{pmatrix}$$

ist. Die Zahlen  $v_1$  und  $v_2$  müssen Elemente der Matrix  $M$  sein, aber sie würden aufgrund der Matrixmultiplikation mit  $x$  bzw.  $y$  multipliziert statt addiert werden. Der Trick ist nun, den Wert  $v_1$  als  $1 \cdot v_1$  zu sehen. Erweitern wir den Ortsvektor um eine dritte Koordinate mit 1, so ergibt sich folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dieselbe Matrix ergibt sich auch für  $z = 3$  oder allgemein  $z = t, t \neq 0$ , wie die Schülerinnen und Schüler leicht nachrechnen können.

Wir können festhalten, dass Abbildungen, welche aufgrund einer additiven Komponente nicht linear sind, linear werden, wenn wir eine weitere Dimension hinzufügen, die Matrix-Vektor-Multiplikation durchführen und dann jene wieder reduzieren, in dem wir die anderen Komponenten durch die letzte Koordinate teilen. Im letzten Abschnitt wollen wir dieses Vorgehen auf die Zentralprojektion anwenden.

#### 4.6.4 Die Zentralprojektion mit homogenen Koordinaten

Der vorherige Abschnitt hat auf unterschiedliche Art und Weise die Eigenschaften von homogenen Koordinaten vorgestellt. Es wurde gezeigt, wie Fernpunkte durch Koordinaten definiert werden, wie homogene Koordinaten geometrisch interpretiert werden können und wie sie Verschiebungen zu linearen Abbildungen transformieren lassen. Schülerinnen und Schüler können nun argumentieren, dass für Rechnungen auf Papier, die sie selber durchführen, die Addition von zwei Vektoren deutlich einfacher ist, um eine Verschiebung durchzuführen, als homogene Koordinaten und Matrizen zu verwenden. In der Computergrafik ist die Hardware, also die Grafikkarte, darauf optimiert, Matrizenmultiplikationen effizient und schnell durchzuführen [40, S. 84], [36, S. 208], [29, S. 29]. Wie dies elektrotechnisch umgesetzt wird, soll hierbei nicht die Frage sein. Es geht lediglich um die Möglichkeiten, welche die Mathematik bietet, nicht lineare Abbildungen dennoch mithilfe einer Matrix durchzuführen.

Schauen wir uns hierzu die Abbildungsgleichung der Zentralprojektion eines Punktes  $(p_1 / p_2 / p_3)$  mit Zentrum  $(z_1 / z_2 / z_3)$  an. Analog zum Satz 4.4.2, S. 154, gilt für eine Projektion auf die  $xy$ -Ebene ( $y$ -Achse zeigt weiterhin nach oben im rechtshändigen Koordinatensystem):

$$\varphi_z(P) = \frac{1}{z_3 - p_3} \begin{pmatrix} z_3 p_1 - z_1 p_3 \\ z_3 p_2 - z_2 p_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.3)$$

Hier ist das Problem keine additiven Komponente wie bei der Verschiebung, sondern der Vorfaktor, welcher allerdings wegen  $p_3$  vom Urbild abhängig ist. Ohne diesen Faktor könnten wir folgende Matrix verwenden:

$$\begin{pmatrix} z_3 & 0 & -z_1 \\ 0 & z_3 & -z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 p_1 - z_1 p_3 \\ z_3 p_2 - z_2 p_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um den Faktor miteinzubeziehen, nutzen wir wieder die homogenen Koordinaten. Der euklidische Punkt entsteht durch Teilung der letzten Koordinate, also erweitern wir um den Nenner dieses Faktors, um eine geeignete Matrix aufstellen zu können:

$$\begin{bmatrix} z_3 p_1 - z_1 p_3 \\ z_3 p_2 - z_2 p_3 \\ 0 \\ z_3 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 & 0 & -z_1 & 0 \\ 0 & z_3 & -z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6.4)$$

Wir überprüfen unser Ergebnis anhand eines Beispiels und betrachten einen Quader mit den Koordinaten

$$(3 / 0 / 4), (0 / 0 / 8), (4 / 0 / 11), (7 / 0 / 7), \\ (3 / 2 / 4), (0 / 2 / 8), (4 / 2 / 11), (7 / 2 / 7)$$

und projizieren diese auf die  $xy$ -Ebene ausgehend vom Zentrum  $(3 / 5 / 50)$ . Den Quader und dessen Projektion zeigt Abb. 4.6.12. Die homogene Abbildungsmatrix nach Gl. (4.6.4) ist dann

$$M_Z = \begin{bmatrix} 50 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 50 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 50 \end{bmatrix}.$$

Wir fügen den Urbildpunkten eine vierte Koordinate mit dem Wert 1 hinzu und multiplizieren sie jeweils mit  $M_Z$ . Das Ergebnis sind folgende homogenen Koordinaten:

$$[138 / -20 / 0 / 46], [-24 / -40 / 0 / 42], [167 / -55 / 0 / 39], [329 / -35 / 0 / 43] \\ [138 / 80 / 0 / 46], [-24 / 60 / 0 / 42], [167 / 45 / 0 / 39], [329 / 65 / 0 / 43].$$

Nun wird wieder durch die letzte Koordinate geteilt, um die Bildpunkt in der Ebene zu erhalten:

$$(3 / -0.43), (-0.57 / -0.95), (4.28 / -1.41), (7.65 / -0.81), \\ (3 / 1.74), (-0.57 / 1.43), (4.28 / 1.15), (7.65 / 1.51).$$

Welche Möglichkeiten haben nun Schülerinnen und Schüler das Ergebnis zu prüfen? Sie können wie in Abb. 4.6.12 ihre Lösung in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zeichnen. Die vertikalen Kanten liegen in Ebenen parallel zur Bildebene, d.h. ihre Bildgeraden müssen ebenfalls parallel sein. Dies ist auch anhand der Koordinaten erkennbar, da der ursprüngliche Quader plan auf der Grundebene liegt. Die anderen gegenüberliegenden Kanten des Bodens und der Decke müssen sich bei Verlängerung in zwei Fluchtpunkten schneiden. Rein rechnerisch können die Schülerinnen und Schüler das Bild einer Ecke „zu Fuß“ berechnen, in dem sie die Gleichung der Projektionsgeraden durch das Zentrum und die Ecke aufstellen und den Schnittpunkt mit der  $xy$ -Ebene bestimmen.

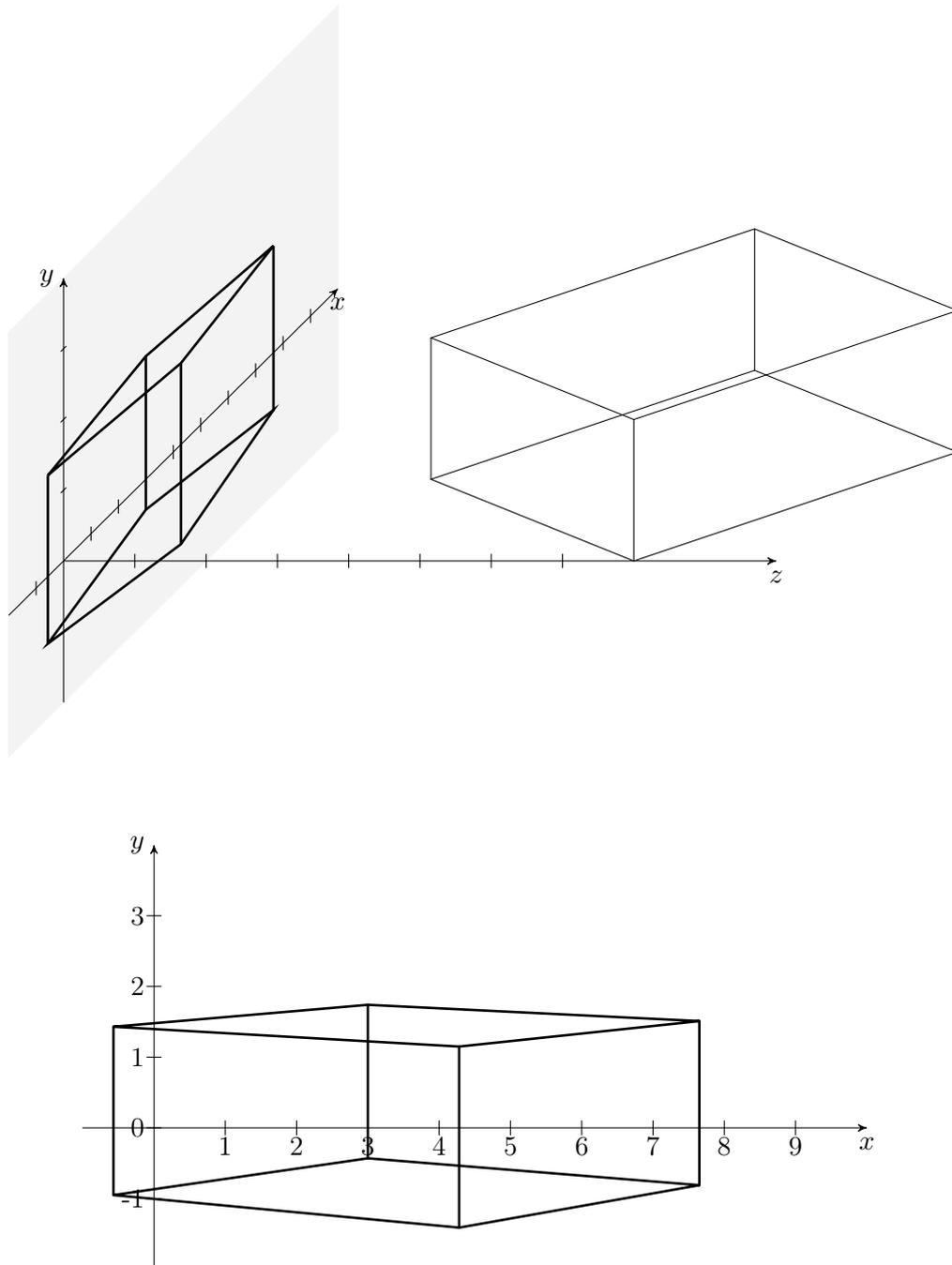


Abb. 4.6.12 Zentralprojektion eines Quaders

In der Computergrafik wird eine andere Projektionsmatrix verwendet, da das Projektionszentrum in den Koordinatenursprung gelegt wird. Die Bildebene ist bzgl. der  $xy$ -Ebene parallel verschoben und verläuft durch  $(0 / 0 / d)$  mit  $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  [29, S. 143], [50, S. 390]. Projektionen mit anderen Zentren lassen sich durch Translation des Koordinatensystems bewerkstelligen. Dies wird in Kapitel 7.6 über das Kamerakoordinatensystem erläutert.

Wir betrachten in Abb. 4.6.13 die Zentralprojektion eines Punktes  $P(x_p / y_p / z_p)$  auf die graue Bildebene, welche die  $z$ -Achse bei  $d$  schneidet. Der Bildpunkt  $P'$  habe die Koordinaten  $(x_{p'} / y_{p'} / d)$ . Die Seitenflächen der Sehpyramide enthalten Strahlensatzfiguren, sodass sich folgende Verhältnisse aufstellen lassen:

$$\frac{x_{p'}}{x_p} = \frac{d}{z_p} \Rightarrow x_{p'} = \frac{d}{z_p} \cdot x_p$$

$$\frac{y_{p'}}{y_p} = \frac{d}{z_p} \Rightarrow y_{p'} = \frac{d}{z_p} \cdot y_p.$$

Somit lässt sich der Bildpunkt wie folgt berechnen:

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \cdot \frac{d}{z_p} \\ y_p \cdot \frac{d}{z_p} \\ d \end{pmatrix} = \frac{d}{z_p} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}.$$

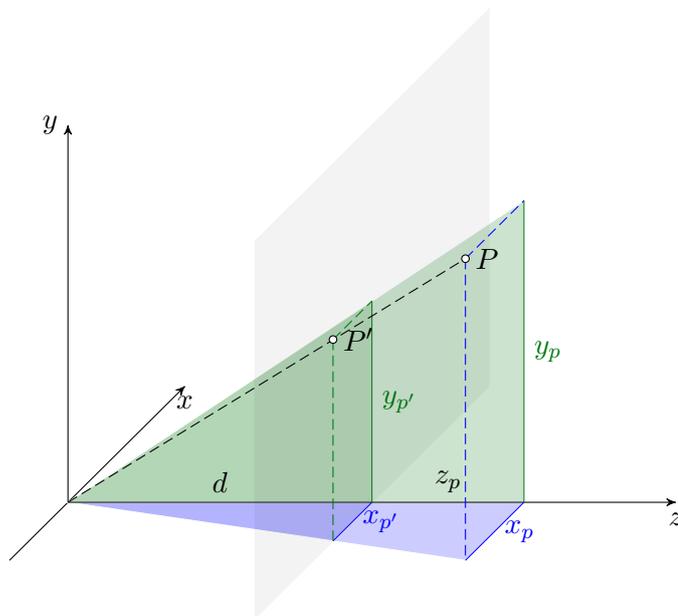


Abb. 4.6.13 Zentralprojektion vom Ursprung aus

Auch hier erhalten wir einen Faktor, welcher von der dritten Koordinate des Punktes  $P$  bestimmt wird. Wir nutzen wieder denselben Trick und verwenden den Kehrwert des Faktors als vierte Koordinate im homogenen System. Damit lässt sich wieder eine Matrix aufstellen:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ \frac{z_p}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix sieht einfacher aus als in unserem ersten Beispiel mit einem Zentrum  $Z$  außerhalb des Ursprungs. Wir wollen die Ergebnisse vergleichen und nehmen wieder den Quader. Wir verschieben das Projektionszentrum in den Ursprung, d.h. wir subtrahieren den Ortsvektor von  $Z$  ( $3/5/50$ ) von jedem Eckpunkt. Die neuen Koordinaten unseres Quaders sind dann:

$$\begin{aligned} &(0 / -5 / -46), (-3 / -5 / -42), (1 / -5 / -39), (4 / -5 / -43), \\ &(0 / -3 / -46), (-3 / -3 / -42), (1 / -3 / -39), (4 / -3 / -43) \end{aligned}$$

Im ersten Beispiel wurde der Quader auf die  $xy$ -Ebene projiziert. Die neue Bildebene schneidet die  $z$ -Achse nun in  $d = -50$ . Wir fügen den Eckpunkten wieder 1 als vierte Koordinate hinzu, multiplizieren diese mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$$

und teilen wieder durch die vierte Koordinate. Somit ergeben sich folgende Punkte:

$$\begin{aligned} &(0 / -5.43 / -50), (-3.57 / -5.95 / -50), (1.28 / -6.41 / -50), \\ &(4.65 / -5.81 / -50), (0 / -3.26 / -50), (-3.57 / -3.57 / -50), \\ &(1.28 / -3.85 / -50), (4.65 / -3.49 / -50). \end{aligned}$$

Nun müssen wir die Verschiebung wieder rückgängig machen, um das ursprüngliche Koordinatensystem zu erhalten, d.h. wir addieren ( $3/5/50$ ) und kommen auf dasselbe Ergebnis. Die Abbildungsmatrix ist also einfacher, allerdings muss vor und nach der Projektion eine Verschiebung durchgeführt werden. Da wir Translationen auch als Matrix darstellen können, müssen wir die erste Projektionsmatrix aus der vereinfachten Projektionsmatrix berechnen können.

Dabei gilt es zu beachten, dass  $d = -z_3$  ist:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z_3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_2 \\ 0 & 0 & 1 & -z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_3} \begin{bmatrix} z_3 & 0 & -z_1 & 0 \\ 0 & z_3 & -z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_3 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten bis auf einen Faktor dieselbe Matrix wie in Gl. (4.6.4), S. 198. Da der euklidische Punkt durch Teilung mit der letzten Koordinate berechnet wird, spielt ein konstanter Vorfaktor keine Rolle, denn es gilt:

$$a \cdot \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a x_h}{a t} \\ \frac{a y_h}{a t} \\ \frac{a z_h}{a t} \\ \frac{a t}{a t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_h}{t} \\ \frac{y_h}{t} \\ \frac{z_h}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der Computergrafik liegt das Projektionszentrum im Ursprung und die Bildebene parallel zur  $xy$ -Ebene. Allerdings hat die oben hergeleitete Projektionsmatrix den Nachteil, dass die  $z$ -Koordinate bei allen Bildpunkten dieselbe ist, sodass bei einer komplexen Szenerie nicht mehr unterschieden werden kann, ob ein Objekt vor oder hinter einem anderen liegt. Da wir hier nur Kantenmodelle betrachtet haben, gab es diesen Nachteil nicht. Die dritte Zeile der Matrix wird daher wie folgt abgeändert [50, S. 391]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n} & -f \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \quad n, f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$n$  und  $f$  sind die Schnittpunkte zweier Ebenen mit der  $z$ -Achse.  $n$  steht für die sog. *near plane* und  $f$  für *far plane*. Die Idee ist, dass nur Objekte zwischen beiden Ebenen auf die near plane abgebildet werden können, d.h. Objekte hinter der *far plane* sind so weit weg, dass sie auf dem Bildschirm nicht mehr angezeigt werden. Abb. 4.6.14 zeigt den Pyramidenstumpf zwischen der near und far plane. Jedes Objekt innerhalb des markierten Bereichs wird auf die near plane projiziert.

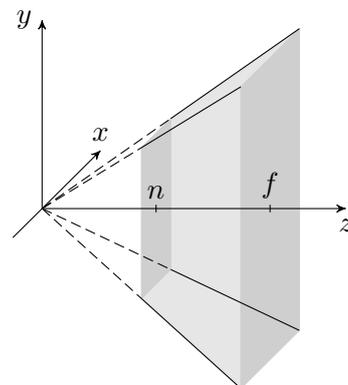


Abb. 4.6.14 Alle Objekte innerhalb des Pyramidenstumpfes werden auf den Bildschirm projiziert.

Für die Abbildungsmatrix bedeutet dies Folgendes: Die ersten beiden Zeilen und die letzte in der Matrix bestimmen die  $x$  und  $y$  Koordinaten des Bildpunktes. Die dritte Zeile kann somit beliebig ohne Auswirkungen auf das Bild abgeändert werden. Diese Zeile wird so bestimmt, dass die dritte Koordinate der Urbildpunkte innerhalb der near und far plane unverändert bleibt. Dies soll hier allerdings nicht weiter ausgeführt werden, denn das Ziel im Mathematikunterricht sollte sein, den Schülerinnen und Schüler einen Einblick in die Anwendung homogener Koordinaten bzgl. der Zentralprojektion zu geben. Für nähere Informationen zur Computergrafik sei auf folgende Literatur verwiesen: [50, 11, 36, 40, 29].

## Kapitel 5

# Die Parallelprojektion

Die Parallelprojektion ist ein Sonderfall der Zentralprojektion, welcher eintritt, wenn das Projektionszentrum ein Fernpunkt ist. Gemäß der Definition des Fernpunktes und der Axiome aus Kap. 2.2 werden die Projektionsstrahlen zu einem Parallelbüschel, wie die untere Abbildung zeigt. Dies führte zu weiteren Invarianten, welche im Abschnitt 3.1.2 erläutert wurden. Im Vergleich zur Zentralprojektion ändern sich somit die Eigenschaften der Bilder. Wir wollen diese Änderung wieder mit Methoden der analytischen Geometrie und einigen Aufgabenbeispielen für den Schulunterricht vorstellen. Danach erfolgen Konstruktionsmethoden, wie sie u.a. im technischen Zeichnen verwendet werden. Hierbei wird besonders auf die Axonometrie eingegangen, da sie eine Methode darstellt, wie aus der Parallelprojektion eine eindeutige Abbildung wird.

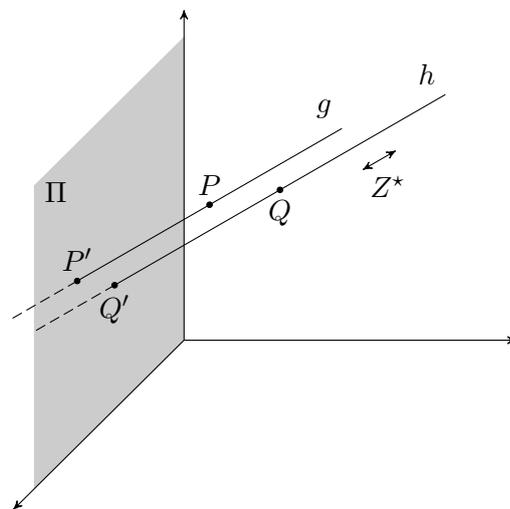


Abb. 5.0.1 Der Bildpunkt  $P'$  von  $P$  unter einer Parallelprojektion ergibt sich als Schnitt einer Geraden  $g$  durch  $P$  und  $Z^*$  mit der Bildebene  $\Pi$ . Die Projektionsstrahlen sind nun parallel zueinander.

## 5.1 Analytische Betrachtung der Parallelprojektion

Wie auch bei der Zentralprojektion können einige Eigenschaften der Parallelprojektion von Schülerinnen und Schülern mithilfe der Methoden aus der analytischen Geometrie untersucht werden. Da die Parallelprojektion ein Sonderfall der Zentralprojektion ist, vererben sich alle Eigenschaften, welche in Kap. 4.4 besprochen wurden, auch wenn sich bei der zweiten Eigenschaft ein scheinbarer Widerspruch ergibt. Parallele Geraden werden auch auf sich schneidende Geraden abgebildet, allerdings ist ihr Schnittpunkt ein Fernpunkt, sodass die Parallelprojektion im Gegensatz zur Zentralprojektion nun parallelentreu wird. Vorerst aber ein Beispiel, wie die Schülerinnen und Schüler einige Eigenschaften selbstständig untersuchen können.

### Aufgabenbeispiel 5.1.1

Gegeben sei eine Parallelprojektion

$$\varphi_{\vec{z}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$$

mit der Richtung  $\vec{z} = (2, -1, -1)^\top$  auf die Bildebene  $\Pi : x_2 = 0$ .

- a) Bestimmen Sie den Bildpunkt von  $(2 / 4 / 5)$ .
- b) Bestimmen Sie das Bild der Geraden  $g$  mit Ortsvektor  $(2, 4, 5)^\top$  und Richtungsvektor  $(1, -1, 1)^\top$ . Betrachten Sie dazu  $g$  als eine Punktreihe mit dem Parameter  $\lambda$ .  
Ist das Bild dieser Punktreihe wieder eine Gerade?
- c) Führen Sie dieselben Berechnungen mit der Geraden  $k$  durch wie in b), wobei der Richtungsvektor durch  $(2, -1, -1)^\top$  ersetzt wird. Überprüfen Sie wieder, ob das Bild der Punktreihe eine Gerade ist.
- d) Sei  $h$  die zu  $g$  parallele Gerade durch den Punkt  $(4 / 1 / 2)$ . Bestimmen Sie wieder die Bildgerade und untersuchen Sie die gegenseitige Lage von  $g'$  und  $h'$ .

Die Aufgabe ist so gestaltet, dass Themen aus dem Unterricht wiederholt werden. So muss bekannt sein, wie die Parametergleichung einer Geraden aufgestellt wird, wie die Lage von einer Geraden zu einer anderen untersucht werden kann bzw. wie Schülerinnen und Schüler anhand der Richtungsvektoren beurteilen können, ob diese parallel sind.

Der erste Teil lässt sich analog zur Zentralprojektion bearbeiten. Zuerst wird die Projektionsgerade aufgestellt und dann der Schnittpunkt mit der Bildebenen bestimmt.

$$(1) \text{ Projektionsgerade: } p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) Schnitt mit der Bildebene:

$$4 - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 4$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(10/0/1)$$

Für b) existieren zwei Lösungswege. Da nach den Axiomen zwei verschiedene Punkte eine Gerade festlegen, könnte hier der Bildpunkt eines anderen Punktes auf der Geraden  $g$  bestimmt werden. Dies setzt aber voraus, dass das Bild von  $g$  wieder eine Gerade ist. Daher sollen die Schülerinnen und Schüler die Gerade als eine Menge von Punkten auffassen und diese punktweise abbilden.

(1) Punktreihe aufstellen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_g(2 + \lambda/4 - \lambda/5 + \lambda)$$

$$(2) \text{ Projektionsgeraden: } p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \lambda \\ 4 - \lambda \\ 5 + \lambda \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) Schnitt mit der Bildebene:

$$4 - \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 4 - \lambda$$

$$\begin{pmatrix} 2 + \lambda \\ 4 - \lambda \\ 5 + \lambda \end{pmatrix} + (4 - \lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'_g(10 - \lambda/0/1 + 2\lambda)$$

$$\Rightarrow g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Bild von  $g$  ist tatsächlich wieder eine Gerade. Die Vorgehensweise für Teil c) ist analog, allerdings tritt hier der Sonderfall auf, dass sich alle Terme mit  $\lambda$  aufheben, d.h. das Bild der Geraden  $k$  ist der Punkt  $(10/0/1)$ . Wie auch bei der Zentralprojektion wird die Gerade auf einen Punkt projiziert, wenn sie mit einem Projektionsstrahl

zusammenfällt, d.h. das Projektionszentrum enthält. Bei der Parallelprojektion muss die Gerade daher den Fernpunkt  $Z^*$  enthalten, d.h. parallel zur Projektionsrichtung sein. Dies war bei  $k$  der Fall, da ihr Richtungsvektor  $\vec{z}$  war.

In der letzten Aufgabe d) sollen die Schülerinnen und Schüler untersuchen, ob die Parallelprojektion parallelentreu ist. Wir haben gezeigt, dass Geraden parallel zur Bildebene bei der Zentralprojektion wieder auf parallele Geraden projiziert werden, andere dagegen nicht. Daher wurde in dem Zahlenbeispiel ebenfalls eine Gerade gewählt, welche nicht parallel zur Bildebene ist. Das Bild von  $h$  ist

$$h' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Richtungsvektoren übereinstimmen, sind beide parallel, aber verschieden, da  $(6 / 0 / 1) \notin g'$ .

Die Aufgabe ist als Einstieg gedacht, damit Schülerinnen und Schüler anhand einiger Zahlenbeispiele die Parallelprojektion erkunden können. Es folgt nun eine allgemeine Betrachtung. Wir beginnen mit der Herleitung der Abbildungsgleichung unter der Projektionsrichtung  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ . Sei wieder die Bildebene gegeben durch

$$\Pi : x_2 = 0.$$

Sei  $P(p_1 / p_2 / p_3)$  ein beliebiger Punkt im Raum, welcher als Ortsvektor der Projektionsgeraden verwendet wird.

$$(1) \text{ Projektionsgerade: } p : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

(2) Schnitt mit der Bildebene:

$$x_2 = p_2 + \mu \cdot z_2 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-p_2}{z_2}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \frac{p_2}{z_2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P' \left( \frac{z_2 p_1 - z_1 p_2}{z_2} / 0 / \frac{z_2 p_3 - z_3 p_2}{z_2} \right)$$

Wir erhalten keinen gewöhnlichen Bildpunkt falls  $z_2 = 0$  ist. Dies ist der Fall, wenn die Projektionsstrahlen parallel zur Bildebene verlaufen. Anders als in der Abbildungsgleichung der Zentralprojektion in Satz 4.4.2, S. 154, ist der Nenner nun unabhängig vom Urbildpunkt  $P$ , sodass sich eine lineare Abbildung ergibt, wenn die

Bildebene  $\Pi : x_2 = 0$  ist.

$$\varphi_{\vec{z}}(P) = \frac{1}{z_2} \underbrace{\begin{pmatrix} z_2 & -z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_3 & z_2 \end{pmatrix}}_{:=PM} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_2} \begin{pmatrix} z_2 p_1 - z_1 p_2 \\ 0 \\ z_2 p_3 - z_3 p_2 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Linearität kann das Bild einer Geraden über die separate Multiplikation von Orts- und Richtungsvektor mit der Projektionsmatrix ermittelt werden:

$$\varphi_{\vec{z}}(g) = PM \cdot (\vec{o} + \lambda \vec{r}) = PM\vec{o} + \lambda PM\vec{r}.$$

Zusammenfassend lässt sich folgender Satz formulieren:

### Satz 5.1.1: Abbildungsgleichung

Sei  $\Pi : x_2 = 0$  die Bildebene und  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$  mit  $z_2 \neq 0$  das Projektionszentrum. Dann gelten folgende Formeln für die Bilder von Punkten bzw. Geraden mit Ortsvektor  $(p_1, p_2, p_3)^T$  und Richtungsvektor  $(r_1, r_2, r_3)^T$  unter der Parallelprojektion  $\varphi_{\vec{z}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$ :

i)  $P(p_1/p_2/p_3)$

$$\varphi_{\vec{z}}(P) (p_1 - a z_1 / 0 / p_3 - a z_3) \text{ mit } a = \frac{p_2}{z_2}$$

ii)  $g \not\parallel \Pi$  mit  $\vec{r} \neq n\vec{z}$ ,  $n \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

$$\varphi_{\vec{z}}(g) : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 - a z_1 \\ 0 \\ p_3 - a z_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 - b z_1 \\ 0 \\ r_3 - b z_3 \end{pmatrix}$$

mit  $a = \frac{p_2}{z_2}, b = \frac{r_2}{z_2}$

iii)  $g \parallel \Pi$ , d.h.  $r_2 = 0$ , mit  $\vec{r} \neq n\vec{z}$ ,  $n \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

$$\varphi_{\vec{z}}(g) : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 - a z_1 \\ 0 \\ p_3 - a z_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

mit  $a = \frac{p_2}{z_2}$

iv)  $g$  mit  $\vec{r} = n\vec{z}$ ,  $n \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

Die Gerade wird zu einer Projektionsgeraden mit  $b = n$ , sodass der Richtungsvektor zum Nullvektor wird. Es bleibt der Ortsvektor von  $g'$  als Bildpunkt:

$$\varphi_{\vec{z}}(g') (p_1 - a z_1 / 0 / p_3 - a z_3) \text{ mit } a = \frac{p_2}{z_2}$$

Wie auch in dem Zahlenbeispiel wird Gerade  $k$ , welche mit der Projektionsgeraden zusammenfällt, auf das Bild ihres Ortsvektors projiziert, sodass die Gleichung in (i) mit der in (iv) übereinstimmt, da  $P$  als Ortsvektor der Geraden  $g$  verwendet wurde. In (iii) gilt wegen  $r_2 = 0$  auch  $b = 0$ . Der Richtungsvektor bleibt unverändert, sodass in diesem Fall die Bildgerade parallel zu ihrem Urbild ist. Mithilfe von (ii) kann begründet werden, warum die Parallelprojektion parallelen-treu ist. Hat  $g$  bzw.  $h$  den Richtungsvektor  $RV(g) = \vec{r}$  bzw.  $RV(h) = n\vec{r}$  mit  $n \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ , dann gilt:

$$b_g = \frac{r_2}{z_2} \Rightarrow b_h = n \frac{r_2}{z_2} = n b_g$$

$$RV(h') = \begin{pmatrix} n r_1 - b_h z_1 \\ 0 \\ n r_3 - b_h z_3 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} r_1 - b_g z_1 \\ 0 \\ r_3 - b_g z_3 \end{pmatrix} = n RV(g')$$

Die Bilder der Richtungsvektoren bleiben linear abhängig.

## 5.2 Axonometrie

*Axonometrie* ist die Parallelprojektion eines Objektes zusammen mit dem zugehörigen Koordinatensystem [33, S. 71]. Aufgrund der Eigenschaft der Parallelprojektion, unabhängig von der Lage der Bildebene sowohl parallelen- als auch teilverhältnistreu zu sein (vgl. 3.2.1, S. 56), können die Bilder über das Bild des Koordinatensystems konstruiert werden.

Eine andere Methode ist das Einschneideverfahren. Hierbei wird mithilfe von zwei Rissen des Objektes (Grund-, Auf- oder Seitenriss) konstruiert. Mit diesem Verfahren kann das Bild ohne Kenntnisse der Koordinaten über Schnittpunkte von Parallelen direkt aus Punkten in den beiden Rissen konstruiert werden.

Die Längenverhältnisse und die Lage der projizierten Einheitsvektoren kann beliebig gewählt werden, sofern maximal zwei der drei Vektoren linear abhängig sind. Dies besagt der Satz von Pohlke, ein wichtiger Satz der Axonometrie, welcher 1853 von *Karl Wilhelm Pohlke* formuliert und in einem Lehrbuch zur Darstellenden Geometrie 1860 von ihm veröffentlicht wurde. Ein vollständiger Beweis folgte 1864 von *Hermann A. Schwarz*, welcher den Satz wie folgt formuliert hat:

**Satz 5.2.1: Satz von Pohlke**

„Hat man im Raume und in einer Ebene je drei von einem Punkte ausgehende Strecken, von denen die ersten drei nicht in einer Ebene, die zweiten drei nicht in einer Geraden liegen, so kann man jedesmal das Gebilde im Raume auf eine Ebene parallel projizieren, dass die Projection dem zweiten Gebilde ähnlich wird.“ [44]

Der o.g. Satz ist allgemein formuliert. Wir betrachten stattdessen den Spezialfall, dass das Dreibein orthogonal ist:

„Drei in der Bildebene von einem Punkt  $\bar{O}$  ausgehende Strecken  $\bar{O}X$ ;  $\bar{O}Y$ ;  $\bar{O}Z$  kann man stets betrachten als die Parallelprojektionen von drei durch einen Punkt  $O$  gehenden Würfelkanten; dabei ist vorausgesetzt, daß höchstens drei der Punkte  $\bar{O}$ ;  $X$ ;  $Y$ ;  $Z$  in einer Geraden liegen.“ [18]

Die rechte Abbildung zeigt als Beispiel eine Würfecke, welche durch eine schiefe Parallelprojektion auf die graue Bildebene abgebildet wird. Die Würfecke sei nun durch die Einheitsvektoren beschrieben. In beiden Formulierungen des Satzes wird eine Ähnlichkeitsabbildung erwähnt. In der ersten soll die Projektion des Dreibeins dem vorgegebenen Gebilde in der Ebene ähnlich sein, also dem Bild. In der zweiten Variante ist es das Urbild, zu welchem die Würfecke ähnlich sein soll.

Im Sinne eines Koordinatensystems setzen wir nun voraus, dass der Würfel die Kantenlänge 1 LE hat und ersetzen die Kanten durch Vektoren in die drei verschiedenen Raumrichtungen. Das Beispiel in Abb. 5.2.1 zeigt, dass durch die Parallelprojektion sowohl Richtung als auch Länge der Vektoren verändert werden. Während der blaue Vektor weiterhin die Länge 1 LE hat, hat sich der rote verlängert und der grüne verkürzt.

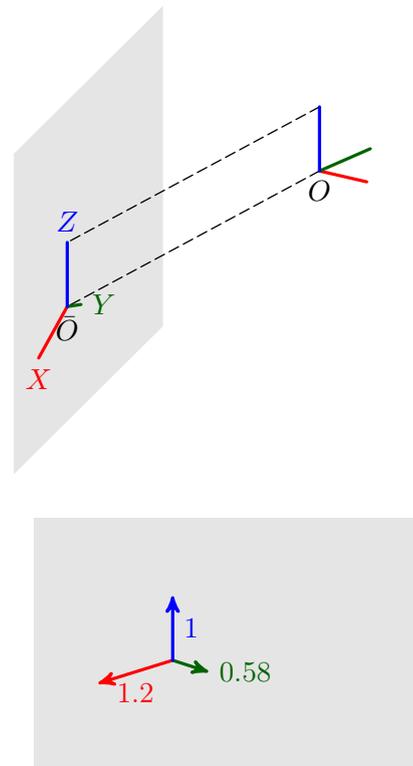


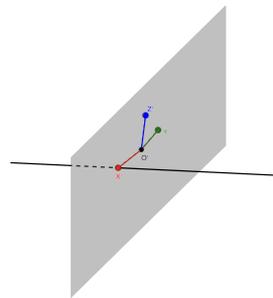
Abb. 5.2.1 Die schiefe Parallelprojektion eines orthonormalen Dreibeins führt zu einer Veränderung der Winkel und Längen.

Nach dem Satz von Pohlke können Längenverhältnisse und Richtungen der Vektoren weitgehend beliebig gewählt werden und es wird immer eine Position des orthonormalen Dreibeins im Raum geben, sodass eine Parallelprojektion mit anschließender zentrischer Streckung dieses auf das Bild projiziert. Für den Beweis sei auf der in dem Satz zitierten Literatur verwiesen. Wir wollen stattdessen einige Beispiele liefern, wie dieser Satz im Unterricht behandelt werden kann.

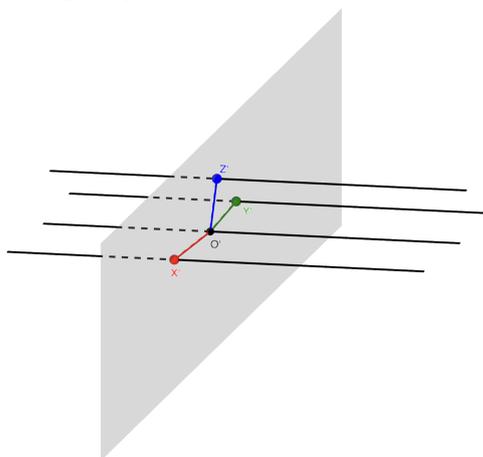
Wenn der Satz von Pohlke sicherstellt, dass es zu jedem vorgegebenen Bild ein orthonormales Dreibein als Urbild geben muss, so sollte es Schülerinnen und Schüler unter bestimmten Voraussetzungen gelingen, dieses zu rekonstruieren. Wir verwenden hierzu die dynamische Geometriesoftware *GeoGebra*. Aus didaktischen Gründen wurden andere Bezeichnungen für die Punkte bzw. Bildpunkte verwendet, als in dem zuvor zitierten Satz von Pohlke.

### Aufgabenbeispiel 5.2.1

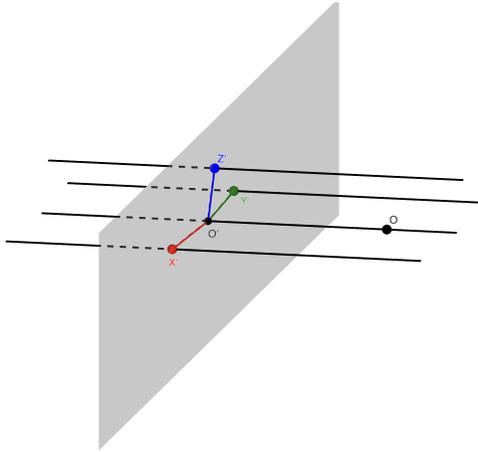
Gegeben ist die Parallelprojektion eines orthonormalen Dreibeins mit den Strecken  $\overline{OX}$ ,  $\overline{OY}$  und  $\overline{OZ}$  sowie ein Projektionsstrahl. Konstruiere das ursprüngliche Dreibein. Verwende dabei alle Eigenschaften einer Parallelprojektion.



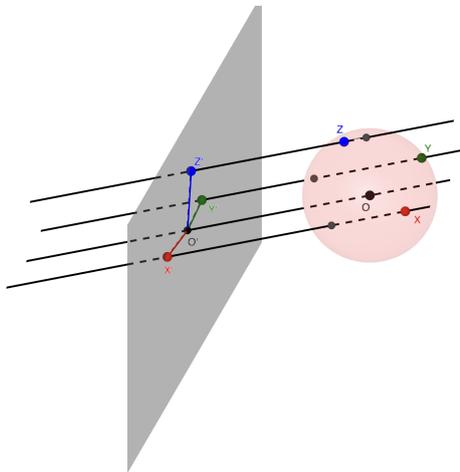
Ziel dieser Aufgabe ist es, dass Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften einer Parallelprojektion verwenden, um schrittweise das orthonormale Dreibein rekonstruieren zu können. Die vorgegebene Projektion wurde dabei mit einem orthonormalen Dreibein konstruiert und dann das Urbild in *GeoGebra* ausgeblendet. Die zentrische Streckung entfällt und das Ergebnis lässt sich danach vergleichen. Der folgende Lösungsweg wurde mit *GeoGebra* erstellt.



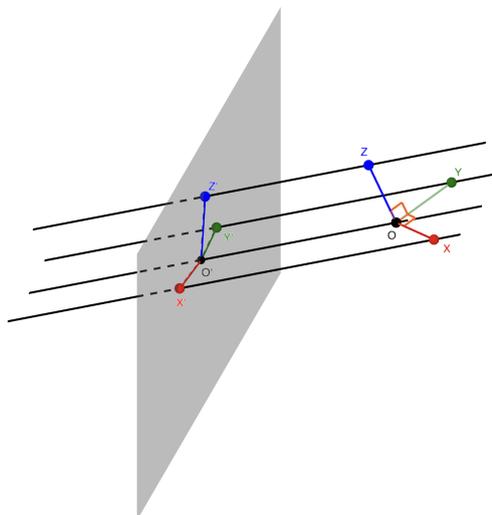
**1. Schritt:** In der Aufgabe ist die Richtung der Parallelprojektion bekannt. Wir zeichnen daher die Parallelen hierzu durch die Bildpunkte  $O'$ ,  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$ . Die Urbildpunkte  $O$ ,  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  müssen auf diesen Geraden liegen.



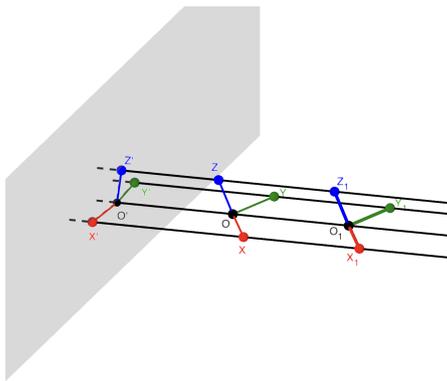
**2. Schritt:** Wird ein Objekt entlang der Projektionsgeraden verschoben, so ändert sich das Urbild nicht, denn wie zuvor erwähnt, werden alle Punkte auf den Geraden auf dasselbe Bild projiziert. Wir können somit den Ursprung  $O$  beliebig auf der entsprechenden Geraden platzieren. Die Lösung dieser Aufgabe ist somit nicht eindeutig.



**3. Schritt:** Wir wissen, dass die Strecken  $\overline{OX}$ ,  $\overline{OY}$  und  $\overline{OZ}$  1 LE lang sind. Wir zeichnen daher eine Kugel um  $O$  mit dem genannten Abstand. Die Projektionsgeraden schneiden die Kugel in mindestens einem Punkt.



**4. Schritt:** Von den grauen Schnittpunkten werden nun drei so gewählt, dass ein rechtsorientiertes, orthonormales Koordinatensystem entsteht.



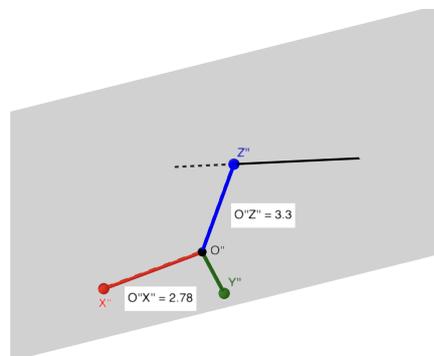
**Lösungsvergleich:** Nach der Konstruktion können wir in *GeoGebra* das ursprüngliche Dreiein  $O_1X_1Y_1Z_1$  einblenden und werden feststellen, dass es bis auf die Verschiebung wie die Rekonstruktion orientiert ist. Jede andere Kombination der Schnittpunkte führt nicht zu rechten Winkeln oder das Koordinatensystem ist anders orientiert.

Warum können wir uns aber sicher sein, dass die Kugel im dritten Schritt tatsächlich alle Geraden mindestens einmal schneidet? Wir können nach dem Satz von Pohlke die Längen beliebig wählen. Stellen wir uns also vor, die Strecke  $\overline{O'X'}$  sei derart verlängert, dass die Einheitskugel die Projektionsgerade durch  $X'$  nicht schneidet. Die Gültigkeit des Satzes wird nun dadurch gesichert, dass wir durch eine Ähnlichkeitsabbildung die Bildstrecken verkürzen können oder im Sinne der zweiten Formulierung, die Kantenlänge des Urbildes verlängern, d.h. wir vergrößern die Kugel soweit, bis sie alle Projektionsgeraden wieder schneidet. Um zu gewährleisten, dass dieser Fall im ersten Aufgabenbeispiel nicht eintritt, wurde das Dreiein zuerst abgebildet und dann in *GeoGebra* verborgen, statt die Punkte  $O'$ ,  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  beliebig in die Bildebene zu setzen.

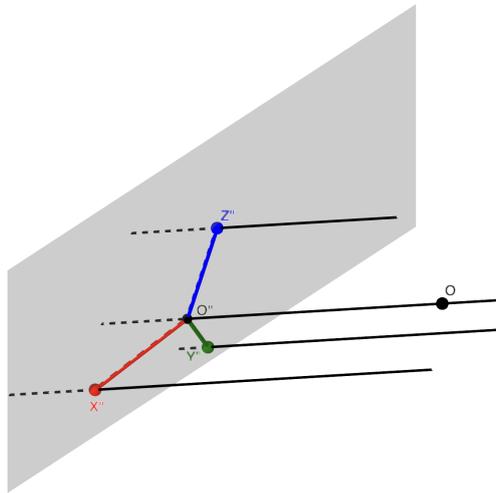
Im zweiten Beispiel wenden wir auf die Projektion eine zentrische Streckung an, welche die Strecken  $\overline{O'X'}$ ,  $\overline{O'Y'}$  und  $\overline{O'Z'}$  zwar verlängert, aber das Streckenverhältnis erhalten bleibt. Somit sollte nach der Rekonstruktion wieder das Dreiein aus dem ersten Beispiel entstehen.

### Aufgabenbeispiel 5.2.2

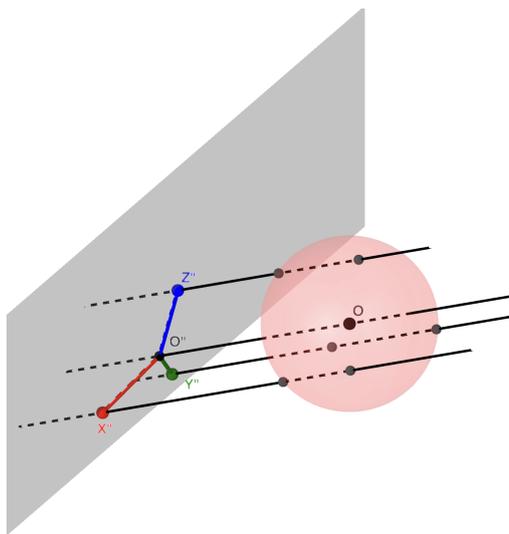
Gegeben ist die Parallelprojektion eines orthonormalen Dreieins mit den Strecken  $\overline{OX}$ ,  $\overline{OY}$  und  $\overline{OZ}$  sowie ein Projektionsstrahl. Die projizierten Strecken sind nun deutlich länger als 1 LE. Konstruiere das ursprüngliche Dreiein, wobei die Strecken  $\overline{OX}$ ,  $\overline{OY}$  und  $\overline{OZ}$  nun nicht mehr 1 LE lang sein müssen. Sie sollen nur gleich lang sein. Verwende dabei alle Eigenschaften einer Parallelprojektion.



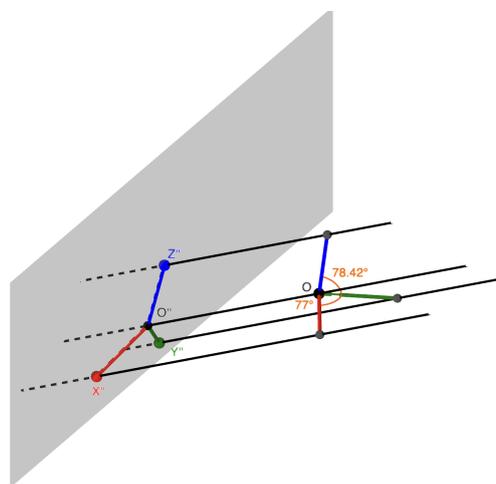
Nach der ersten Aufgabe können Schülerinnen und Schüler zum Einstieg denselben Lösungsweg versuchen.



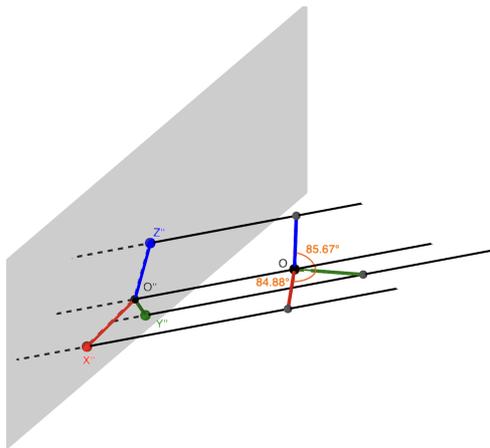
**1. u. 2. Schritt:** Analog zur ersten Aufgabe ergänzen wir die Projektionsgeraden durch die anderen Bildpunkte (diese wurden wegen der zentrischen Streckung nun mit  $X''$  usw. bezeichnet) und zeichnen  $O$  beliebig auf der Geraden ein.



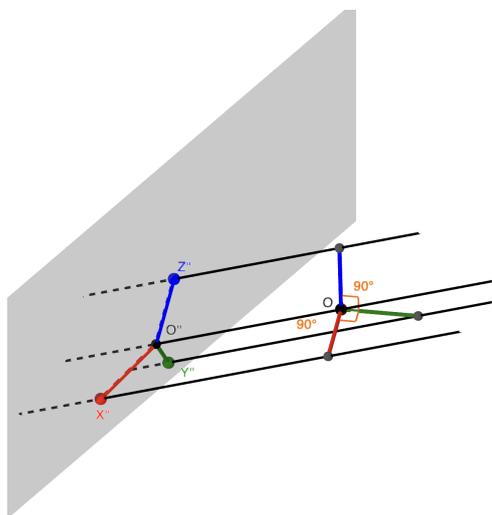
**3. Schritt:** Die Kugel um  $O$  mit Radius 1 LE wird nicht alle Geraden schneiden. Wir vergrößern daher die Kugel auf 3 LE und markieren die Schnittpunkte.



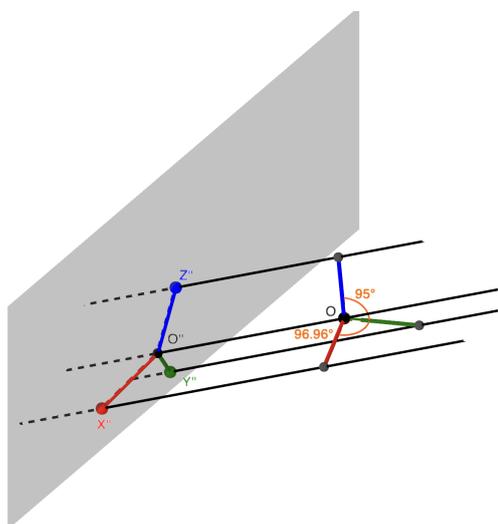
**Radius: 3 LE** Wir wählen die Punkte so, dass ein rechtsorientiertes Koordinatensystem entsteht und markieren uns zwei der drei Winkel. Aufgrund der Kugel sind die Kanten gleich lang. Das System ist aber nicht rechtwinklig. Was passiert nun mit den Winkeln, wenn der Radius verkleinert wird?



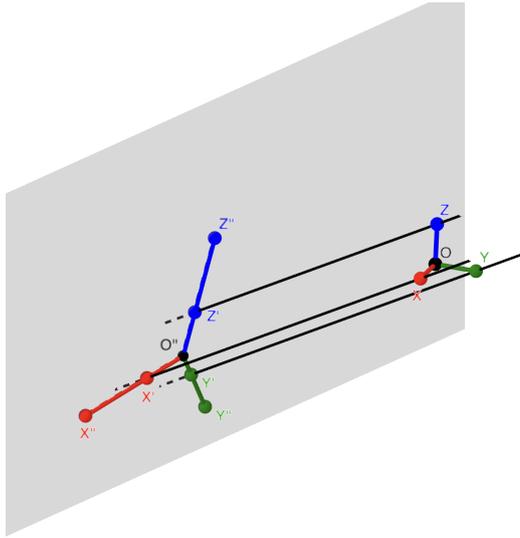
**Radius: 2.8 LE** Schülerinnen und Schüler können beobachten, dass bei Verkleinerung der Kugel sich beide Winkel  $90^\circ$  annähern und das Dreibein leicht gedreht wird.



**Radius: 2.7 LE** Die Aufgabe lässt es in diesem Fall sogar zu, dass der rechte Winkel bei 2.7 LE exakt getroffen wird, denn die zentrische Streckung des Dreibeins in der Bildebene wurde mit genau diesem Faktor durchgeführt, was die Schülerinnen und Schüler allerdings nicht wissen, da sie in der Aufgabe nur das Bild nach der Streckung bekommen. D.h. Schülerinnen und Schüler ermitteln diesen Faktor durch reines Ausprobieren.

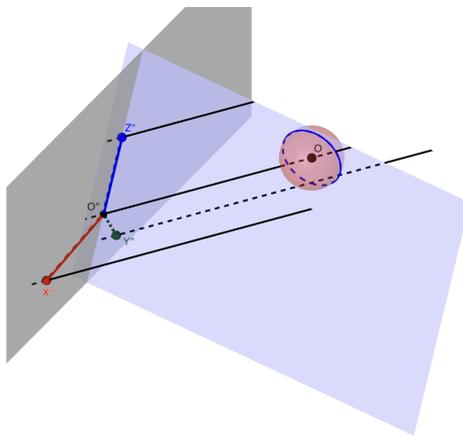


**Radius: 2.6 LE:** Wird der Radius weiter verkleinert, so vergrößern sich die Winkel weiter über  $90^\circ$  hinaus. Schülerinnen und Schüler sollten aus der Beobachtung der Winkel daher folgern, dass sie den Radius wieder vergrößern müssen.

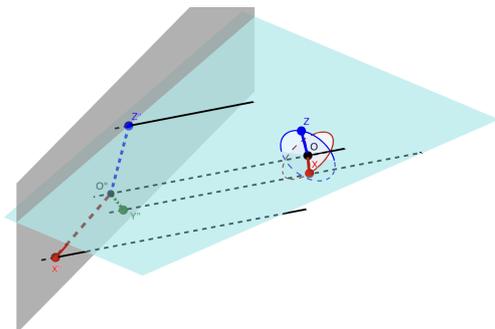


**Lösung:** Mit 2.7 LE werden die Winkel zu  $90^\circ$  und sind gleich lang. Damit ist die Aufgabe gelöst. Um ein orthonormales Koordinatensystem zu erhalten, müssen die Schülerinnen und Schüler nur noch die Einheitskugel um  $O$  zeichnen und die Schnittpunkte der Würfelkanten mit dieser markieren.

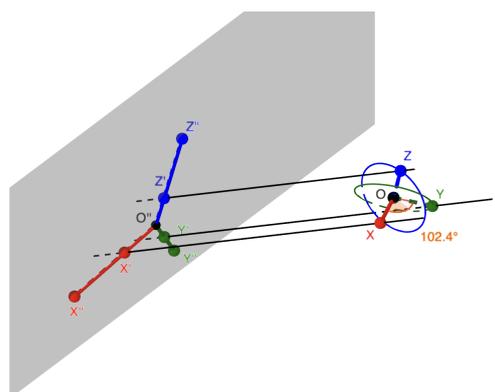
Sind die Kantenlängen des Dreibeins auf 1 LE verkürzt, so können die Bilder  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  konstruiert werden. Verbinden wir  $X''$  mit  $Z''$  sowie  $X'$  mit  $Z'$ , so sind die Geraden parallel. Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit den anderen Punkten. Die Dreiecke  $X''Y''Z''$  und  $X'Y'Z'$  sind somit einander ähnlich mit  $O''$  als Streckzentrum. Wir haben den passenden Radius der Kugel durch ausprobieren gefunden. Dies stellt keine exakte Konstruktion im Sinne der Mathematik dar, sondern ist vergleichbar mit dem Einschleiben eines rechten Winkels mit dem Geodreieck statt der exakten Konstruktion mithilfe des Satzes von Thales. Im Folgenden wird ein zweiter Lösungsweg vorgestellt, welche andere Eigenschaften der Parallelprojektion verwendet.



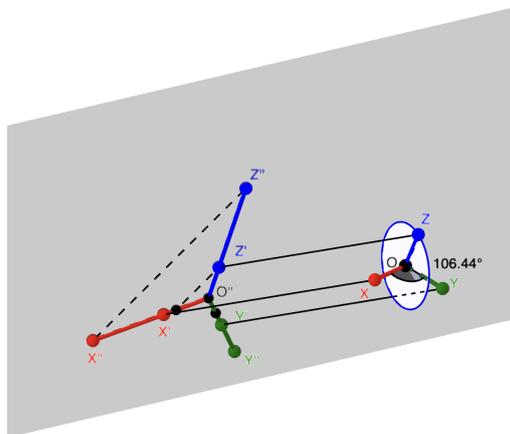
**3. Schritt:** Die ersten beiden Schritte sind analog zum ersten Lösungsweg, d.h. wir ergänzen die Projektionsgeraden und wählen den Punkt  $O$ . Nun zeichnen wir die Einheitskugel um  $O$  ein. Wir wissen, dass  $Z$  nicht beliebig auf der Oberfläche dieser Kugel liegen kann, denn der Projektionsstrahl muss die Bildebene auf der Geraden  $O''Z''$  schneiden, sonst ist die Ähnlichkeit nicht mehr gegeben. Wir ergänzen daher die Projektionsebene von  $O''Z''$ , indem wir eine Ebene durch  $O''$ ,  $Z''$  und  $O$  legen. Auf dem blauen Schnittkreis mit der Kugel muss  $Z$  liegen.



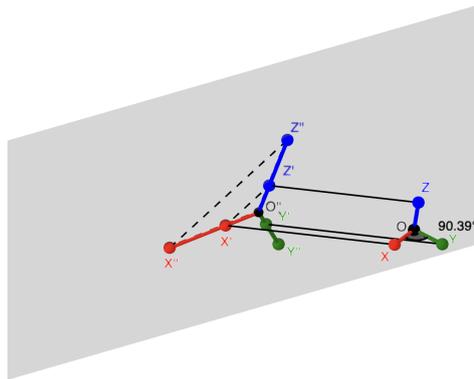
**4. Schritt:** Analog gehen wird mit  $X$  vor, d.h. wir zeichnen die Projektionsebene durch  $O'', X''$  und  $O$  und erhalten den rot markierten Schnittkreis. Nun muss die Gerade  $OX$  auch die Gerade  $OZ$  orthogonal schneiden, also in der Normalenebene von  $OZ$  liegen. Wir zeichnen diese ein und markieren den Schnittpunkt mit dem roten Kreis. Bewegen wir nun  $Z$  auf dem blauen Kreis, so bewegt sich auch  $X$  auf dem roten Kreis und steht dabei immer senkrecht zu  $OZ$ .



**5. Schritt:** Wir wenden den vierten Schritt auch auf  $Y$  an, d.h. wir bestimmen zuerst die Projektionsebene durch  $O'', Y''$  und  $O$  und erhalten den grünen Kreis. Nun schneiden wir die Normalenebene von  $OZ$  durch  $O$  mit diesem und erhalten  $Y$ . Nun schneiden alle Projektionsgerade durch  $X, Y$  und  $Z$  die Bildgeraden  $O''X''$ ,  $O''Y''$  und  $O''Z''$  und es gibt zwei rechte Winkel. Wir werden aber feststellen, dass der Winkel zwischen  $X$  und  $Y$  bei beliebiger Lage auf dem blauen Kreis nicht  $90^\circ$  beträgt.



**6. Schritt:** Wir wissen, dass das Dreieck  $X''Y''Z''$  ähnlich zum gesuchten Dreieck  $X'Y'Z'$  ist. Wir zeichnen die Parallele durch  $Z'$  zu  $X''Z''$  und markieren den Schnittpunkt (schwarz im Bild). Analog erhalten wir den schwarzen Punkt auf der Geraden  $O''Y''$ . Nun bewegen wir  $Z$  auf dem blauen Kreis, bis  $X'$  und  $Y'$  mit den schwarzen Punkten übereinstimmen.



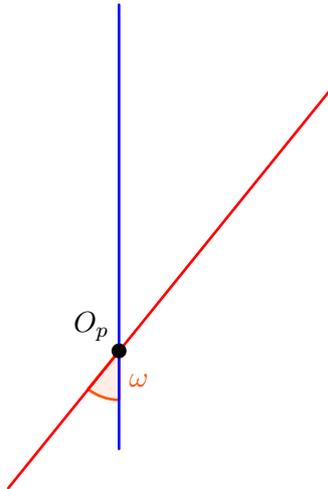
**7. Schritt:** Der Winkel zwischen  $X$  und  $Y$  beträgt nahezu  $90^\circ$ , sodass wir das Dreibein rekonstruieren konnten.

Dieser Lösungsweg setzt mithilfe von Projektions- und Normalenebenen die Lage von  $X$  und  $Y$  in die direkte Abhängigkeit von  $Z$ , da sich der Punkt statt auf der Kugeloberfläche auf einen Kreis bewegt. Aber am Ende wird trotzdem wieder eingeschoben, bis der dritte Winkel passt bzw. die Dreiecke ähnlich zueinander werden.

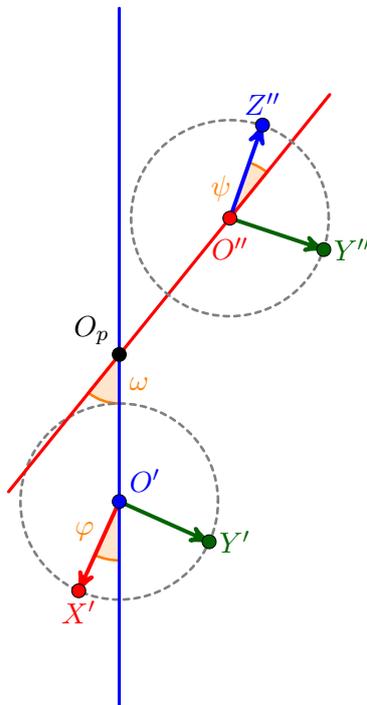
Dieser Abschnitt beschäftigte sich mit der Parallelprojektion des räumlichen Koordinatensystems. Wir wollen im Folgenden einige Verfahren zeigen, um die Bilder von Objekten unter einer Parallelprojektion direkt in der Ebene konstruieren zu können.

### 5.2.1 Das Einschneideverfahren

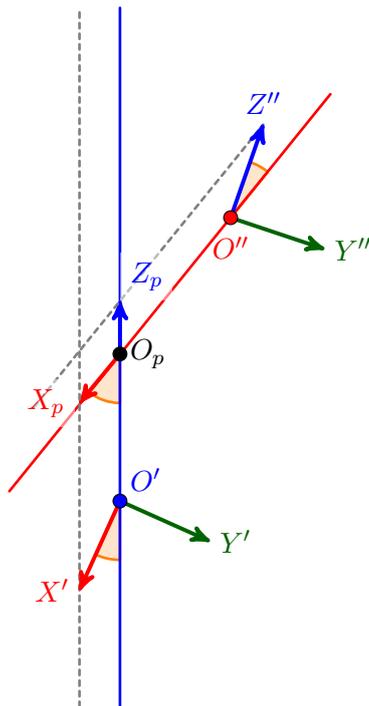
Wir wollen nun ein Verfahren vorstellen, mit welcher sich aus dem Grund- und Aufriss eines Objektes ein parallelprojektives Bild erzeugen lässt. Die Lage der Risse wird dabei mit den Winkeln  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  festgelegt [5, S. 51].



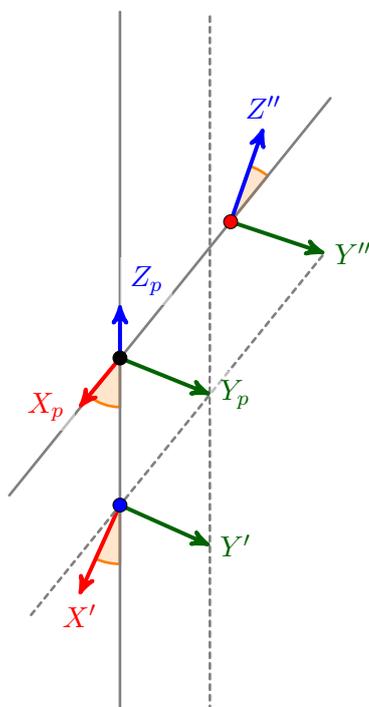
**1. Schritt:** Die blaue  $z$ -Achse wird vertikal gezeichnet und die rote  $x$ -Achse im Schnittpunkt  $O_p$ , welcher dem Ursprung des projizierten Dreibeins entspricht. Die Geraden schneiden sich dabei in dem vorgegebenen Winkel  $\omega$ .



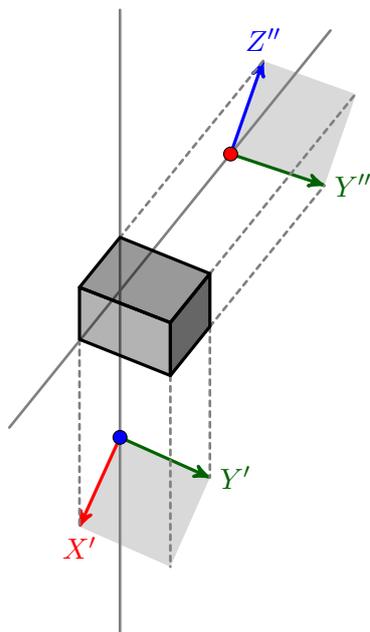
**2. Schritt:** Wir markieren auf der blauen Geraden den Grundriss  $O'$  von  $O$  an einer beliebigen Stelle unterhalb von  $O_p$ . Hier entsteht der Grundriss des ursprünglichen Dreibeins im Raum, in dem der vorgegebene Winkel  $\varphi$  an der blauen Geraden abgetragen wird. Wir zeichnen einen Kreis um  $O'$  mit Radius 1 LE. Damit erhalten wir  $X'$ , d.h. die Lage von  $X$  im Grundriss. Mit dem Lot auf  $O'X'$  durch  $O'$  ergibt sich  $Y'$ . Analog wird der Aufriss auf der roten Geraden rekonstruiert mit dem vorgegebenen Winkel  $\psi$ .



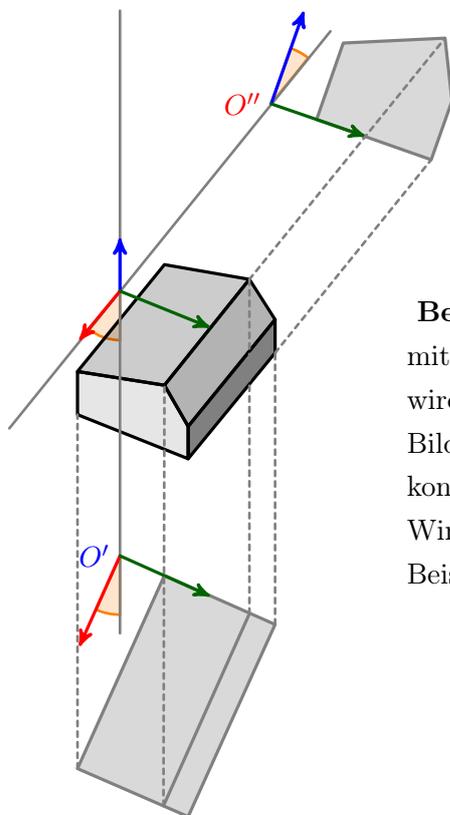
**3. Schritt:** Um das Bild des orthonormalen Dreibeins im Raum zu erhalten, zeichnen wir eine Parallele zur blauen Geraden durch  $X'$ . Sie wird die rote Gerade in  $X_p$ , der Projektion von  $X$ , schneiden. Analog wird mit der Parallelen zur roten Geraden durch  $Z''$  die Projektion  $Z_p$  erhalten. Damit sind zwei Bilder der drei Achsen des Dreibeins gefunden.



**4. Schritt:** Um die Projektion  $Y_p$  von  $Y$  zu konstruieren, zeichnen wir jeweils eine Parallele zu den Achsen durch  $Y'$  und  $Y''$ . Sie schneiden sich in dem gesuchten Punkt. Damit ist die Projektion des Dreibeins vollständig. Je nach Wahl der orange markierten Winkel  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  ändern sich Richtung und Länge des Dreibeins in der Bildebene. Sind die Koordinaten des ursprünglichen Objektes bekannt, so lassen sich diese in das projizierte Koordinatensystem abtragen, um die Projektion zu erhalten. Das folgende Beispiel zeigt eine andere Möglichkeit, Objekte mithilfe der Risse zu projizieren.



**Beispiel 1:** Grund- und Aufriss zeigt einen Würfel. Wir konstruieren mit dem sog. *Einschneideverfahren* die Projektion des Würfels. Dafür zeichnen wir durch die Eckpunkte in den Rissen die entsprechenden Parallelen. Diese schneiden sich in den gesuchten Bildpunkten. Die Projektion des Würfels erinnert an einen Quader. Die Wahl der Winkel  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  ist daher eher ungünstig.



**Beispiel 2:** Grund- und Aufriss zeigen ein Haus mit unsymmetrischer Lage des Dachfirstes. Wieder wird die Projektion mithilfe der Parallelen zu den Bildachsen durch die Eckpunkte in den Rissen konstruiert. Die Wahl der orange markierten Winkel bestimmt das Bild. So entsteht in diesem Beispiel eine Ansicht schräg von oben.

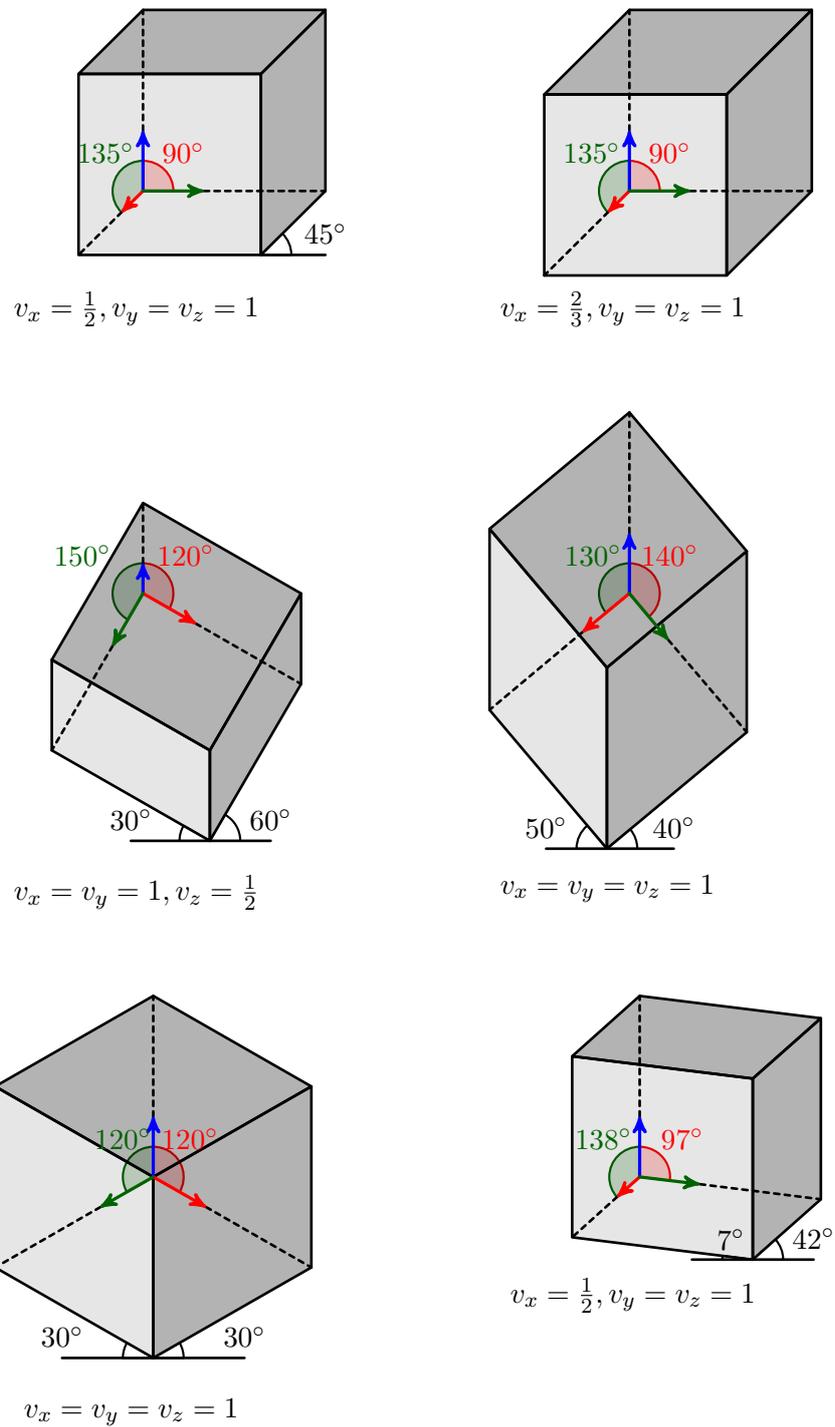


Abb. 5.2.2 Verschiedene Parallelprojektionen eines Würfels: Kavalierperspektive (oben), Militär- oder Vogelperspektive (mitte), Isometrie (unten links), Dimetrie (unten rechts)

Die Axonometrie findet vor allem Anwendung in den Ingenieurwissenschaften zur Konstruktion von Bauteilen. Statt der Winkel  $\omega, \varphi$  und  $\psi$  wird die Projektion des Dreibeins durch Angabe der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sowie den Längenverhältnissen  $v_x : v_y : v_z$  der Kanten vorgegeben. Hierbei liegt  $\alpha$  zwischen der projizierten  $x$ - und  $z$ -Achse sowie  $\beta$  zwischen der Projektion von  $y$ - und  $z$ -Achse. Damit die Abbildung möglichst unverzerrt wirkt, haben sich bestimmte Kombinationen von Winkel und Längenverhältnisse in der Anwendung etabliert. Abb. 5.2.2 zeigt eine Übersicht mit Projektionen eines Würfels.

Da die Parallelprojektion im Allgemeinen teilverhältnis- und parallelentreu ist, können wir mithilfe des projizierten Dreibeins direkt das Bild aus den ursprünglichen Koordinaten erzeugen. Als Beispiel betrachten wir ein Haus mit Walmdach. Abb. 5.2.3 zeigt das Haus im räumlichen Koordinatensystem sowie den Grund- und Aufriss zur übersichtlicheren Darstellung der Koordinaten.

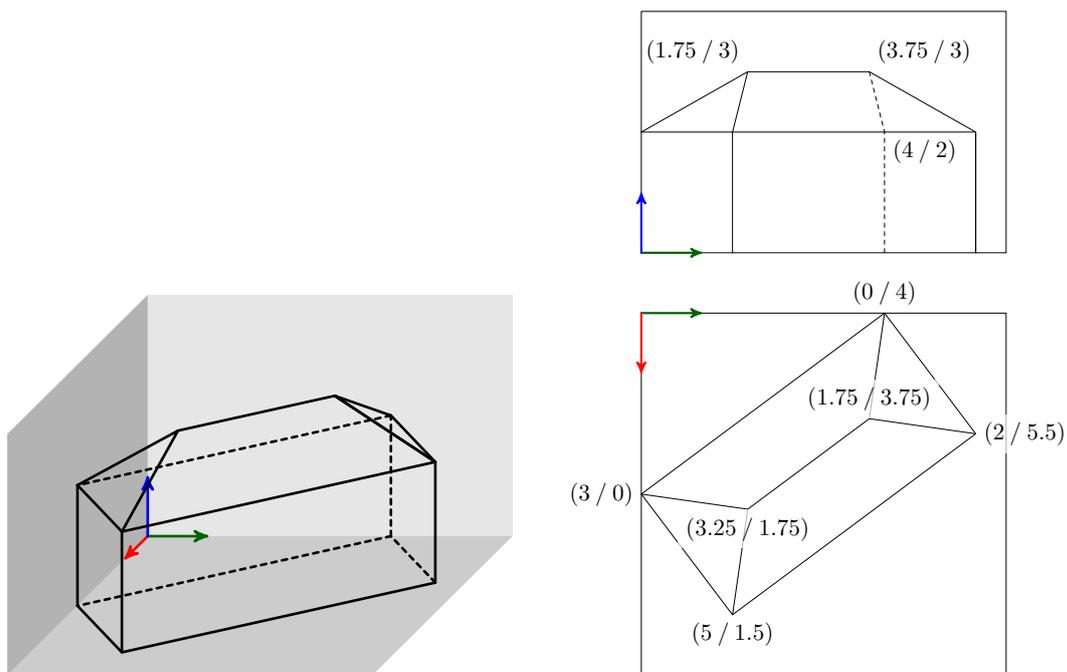
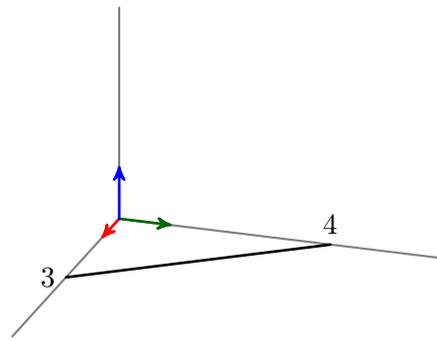
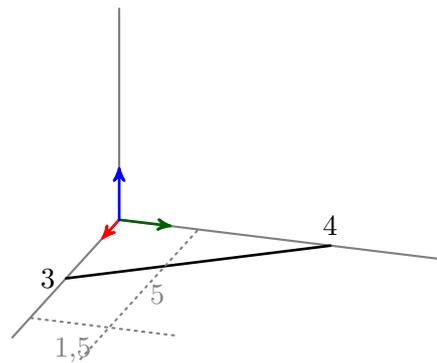


Abb. 5.2.3 Ein Haus mit Walmdach sowie seine Koordinaten im Grund- und Aufriss

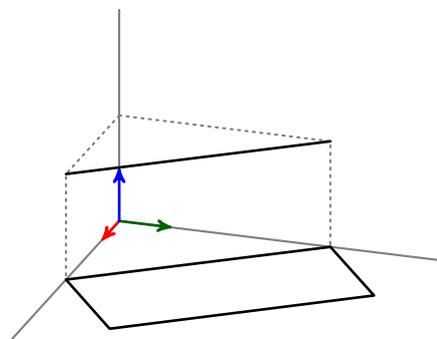
**1. Schritt:** Wir beginnen damit, das Bild des Dreiecks unter den gegebenen Parametern zu zeichnen. Wir nehmen die Dimetrie, d.h.  $\alpha = 138^\circ, \beta = 97^\circ$  und  $v_x = 0.5$  sowie  $v_y = v_z = 1$ . Mit den Winkeln kennen wir die Achsen und als neue Einheitslänge verwenden wir 0.5 LE für die  $x_p$ -Achse sowie 1 LE für die anderen beiden. Eine Ecke liegt auf der roten  $x_p$ -Achse um drei Einheiten verschoben, d.h. wir tragen vom Ursprung aus auf der Achse den Abstand  $3 \cdot 0.5 \text{ LE} = 1.5 \text{ LE}$  ab. Ebenso verfahren wir mit der grünen  $y_p$ -Achse und tragen 4 LE ab. Wir verbinden die beiden Punkte und haben die erste Kante des Hauses konstruiert.



**2. Schritt:** Nun könnte man auf die Idee kommen, jeweils ein Lot zur Verbindungslinie durch die Eckpunkte zu fällen, um die nächsten Kanten zu konstruieren. Die Parallelprojektion bildet im Allgemeinen rechte Winkel nicht unverändert ab, d.h. wir müssen die Koordinaten verwenden. Wir tragen also 2.5 LE auf der roten Achse ab und ziehen die Parallele zur grünen. Dann tragen wir auf der grünen Achse 1.5 LE ab und ziehen die Parallele zur roten Achse. Aufgrund der Parallelentreue der Projektion schneiden jene sich im Punkt mit den ursprünglichen Koordinaten  $(5 / 1.5 / 0)$ .



**3. Schritt:** Wir verfahren mit dem vierten Punkt im Grundriss wie im zweiten Schritt. Damit ist der Boden des Hauses fertig. Wir ziehen durch zwei Ecken die Parallele zur blauen Achse und tragen auf dieser 2 LE ab. Dann ziehen wir die Parallelen zu den anderen beiden Achsen. Die Verbindung der Schnittpunkt ergibt eine weitere Kante des Quaders.



**4. Schritt:** Statt den Parallelen können wir auf denen durch die Ecken direkt 2 LE abtragen und die Punkte verbinden. Damit ist der Quader fertig.

**5. Schritt:** Zum Schluss tragen wir die Koordinaten des Walmdaches auf den Achsen ab und erhalten durch den Schnittpunkt der entsprechenden Parallelen die Eckpunkte.

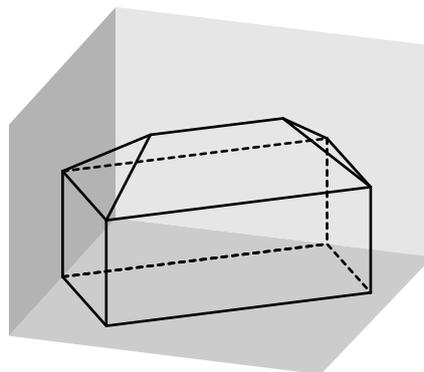
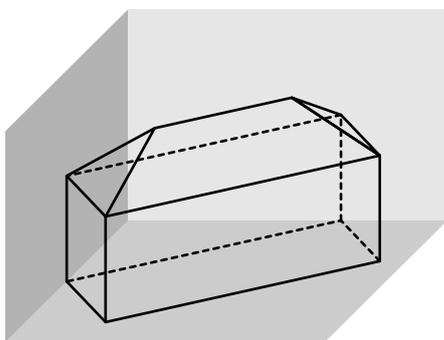
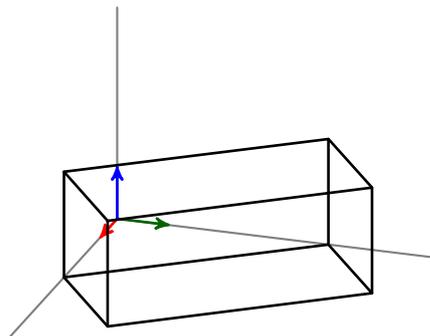


Abb. 5.2.4 Das Haus in zwei verschiedenen Parallelprojektionen. Links in Kavalierperspektive, rechts als Dimetrie.

Vergleichen wir die beiden Projektion des Hauses, so wirkt das Haus links etwas zu lang. Die geringe Drehung der Raumecke in der Dimetrie bewirkt, dass das Haus nicht in die Länge gezogen erscheint. Dagegen liegt links der Aufriss unverändert vor, was die sog. *Kavalierperspektive* ausmacht. Diese ist eine von zwei Perspektiven, bei welcher ein Riss unverändert bleibt. Abb. 5.2.2, S. 223, zeigt oben zwei Beispiele jener Perspektive. Damit der Aufriss unverändert bleibt, muss  $\beta = 90^\circ$  und  $v_y = v_z = 1$  sein. Der Winkel zwischen Grund- und Tiefenlinie beträgt meist  $45^\circ$ , sodass  $\alpha = 135^\circ$  ist, kann aber wie auch  $v_x$  beliebige Werte annehmen, wobei dann auch verzerrte Bilder entstehen können.

Bei der sog. *Militärperspektive* bleibt der Grundriss erhalten, d.h.  $\alpha + \beta = 270^\circ$  und  $v_x = v_y = 1$ . Die o.g. Abbildung zeigt zwei Beispiele mit unterschiedlichen Werten für  $\alpha$  und  $v_z$ . Da der Grundriss unverändert bleibt, entsteht eine Ansicht von oben herab auf das Objekt. In der Literatur findet sich daher auch die Bezeichnung *Vogelperspektive*, welche im Kunstunterricht allerdings für die Zentralprojektion von einem erhöhten Standpunkt aus verwendet wird.

Damit wollen wir den mathematischen Teil dieser Arbeit abschließen und im nächsten verstärkt Bezug auf den Schulunterricht nehmen.

## Teil III

# Projektion im schulischen Kontext



## Kapitel 6

# Der Unterricht an Schulen in NRW

Nachdem einige theoretische Aspekte und Konstruktionsmethoden der Projektion vorgestellt wurden, wird in diesem Teil der Schwerpunkt auf den Mathematikunterricht an Gymnasien und Gesamtschulen gelegt. Zum Einstieg werden einige für den Unterricht in NRW zugelassene Schulbücher vorgestellt. Es geht um die Frage, wie hoch der Geometrieanteil im Unterricht ist. Hierzu wurde der prozentuale Seitenanteil zu geometrischen Themen in den Büchern ermittelt. Im Zuge dessen wurden auch die Inhalte erfasst und u.a. der Klassenstufe zugeordnet. Diese Methode wurde deshalb gewählt, da Schulbücher primäres Unterrichtsmaterial sind und hiermit die Unterrichtsthemen auch quantitativ abgebildet werden können, als alleine durch die Vorgaben im Lehrplan. Es wurde davon ausgegangen, dass der Stellenwert eines Themas sich nach der Anzahl der Seiten, die für Erklärungen, Beispiele und Aufgaben verwendet wurden, richtet. Gleichzeitig wurden auch aktuelle Aufgaben zur Zentral- und Parallelprojektion in den Schulbüchern erfasst, um einen aktuellen Stand zu erhalten.

Daran anknüpfend folgen zwei weitere Abschnitte, welche eigene Unterrichtsideen vorstellen. Im ersten Kapitel geht es um die Berechnung von Anaglyphenbildern unter Einsatz des Computers. Dies ist ein Beispiel, wie die Zentralprojektion fächerübergreifend thematisiert werden kann. Die Koordinaten der Bildpunkte können über eine Formel berechnet werden. Die Berechnung erfolgt dann mit Programmcode, den die Schülerinnen und Schüler unter Anleitung selbst verwenden und verändern können. Somit lässt sich der Bezug zum Informatikunterricht herstellen.

Das letzte Kapitel stellt einige selbst entwickelte Materialien für den Unterricht vor, welche von der Geschichte inspiriert wurden. In der Vergangenheit erfanden einige Mathematiker und Physiker Instrumente zur Erstellung von zentralprojektiven Bildern. Einer davon war *J. H. Lambert*, in dessen Schriften der Perspektographen vorgestellt wird. Während mit einem Stift eine ebene Figur abgefahren wird, bewegt

sich ein zweiter Stift, welcher das entsprechende Bild zeichnet. Es wurde versucht, einen solchen Perspektographen aus lasergeschnittenem Kunststoff nachzubauen. Zusätzlich wurden zwei Materialien zur Erkundung der Dreitafelprojektion entwickelt.

Wir haben in den vorherigen Kapiteln gezeigt, wie sich ein zentralprojektives Bild anhand von Grund- und Aufriss konstruieren lässt. Solche Konstruktionen sind auch teil des Kunstunterrichtes. Wie dieses Thema in Kunst behandelt wird und welche Vorgaben im Lehrplan für beide Schulformen in NRW stehen, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

## 6.1 Perspektive im Kunstunterricht

Die Zentralprojektion ist ein Thema im Kunstunterricht. Im Lehrplan zur Gesamtschule und Gymnasium finden sich Begriffe wie *Linearperspektive*, *Ein-Fluchtpunkt-* oder *Übereck-Perspektive*. Tab. 6.1.1 zitiert einige Punkte aus den Lehrplänen der Sekundarstufe I, welche in Bezug zur Perspektive und Darstellungsmitteln zur Erzeugung von Raumillusionen stehen.

Aber wie wird die Perspektive im Unterricht behandelt? Leider existieren zum Kunstunterricht keine vom Schulministerium zugelassenen Schulbücher, denn die Suche auf deren Internetseite ergab keine Ergebnisse. Daher wurde auf den Internetseiten bekannter Schulbuchverlage, wie *Cornelsen*, *Klett* und *Westermann Schroedel*, nach Lehrwerken zum Kunstunterricht an Gesamtschulen und Gymnasien in NRW recherchiert.



Abb. 6.1.1 Beispiele von zentralperspektiven Bildern (eigene Malereien)

Die Tabelle zeigt, dass das über die Jahrgangstufen verteilte Thema *Raumdarstellung* immer wieder aufgegriffen wird. In den unteren Stufen werden Mittel wie Überdeckung oder Verblässung verwendet, während später die Konstruktionen erfolgen. Im Lehrplan des Gymnasiums wird explizit erwähnt, dass die Bilder sowohl mit einem wie auch mit zwei Fluchtpunkten konstruiert werden. In der Gesamtschule fällt nur der Begriff *Linearperspektive*, die Anzahl der Fluchtpunkte wird nicht festgelegt. Die Formulierungen im Lehrplan der Oberstufe fallen ebenso vage aus.

Tab. 6.1.1 Auszüge aus den Anforderungen des Kernlehrplans Kunst an Schulen in NRW [23, 21, 26]

Jgst.	Gymnasium
5 - 6	entwerfen durch die Verwendung elementarer Mittel der Raumdarstellung (Überschneidung, Staffelung, Verkleinerung, Verblässung, Höhenlage/Flächenorganisation) Räumlichkeit suggerierende Bildlösungen
7 - 9	entwerfen raumillusionierende Bildkonstruktionen (Ein-Fluchtpunkt-Perspektive, Über-Eck-Perspektive)
Jgst.	Gesamtschule
7 - 10	mit verschiedenen Raum schaffenden Bildmitteln (u. a. Linearperspektiven) dreidimensionale Objekte und Räume zeichnerisch darstellen  Raumillusionen durch die Verwendung elementarer Mittel wie Überschneidung, Staffelung, Verkleinerung und Farbperspektive schaffen
Oberstufe	Gymnasien und Gesamtschulen
	erproben und beurteilen Ausdrucksqualitäten zweidimensionaler Bildgestaltungen unter Anwendung linearer, flächenhafter und raumillusionärer Bildmittel  realisieren Bildwirkungen unter Anwendung linearer, farbiger, flächenhafter und raumillusionärer Mittel der Bildgestaltung

Wir wollen im Folgenden drei Schulbücher für den Kunstunterricht vorstellen, in welchen Abschnitte zur Perspektive gefunden wurden: *Kunst Arbeitsbuch 2* von Klett, *Kunst entdecken 2* aus dem Cornelsen Verlag sowie *Kunst Grundkurs 1* von Schroedel für die Oberstufe.

In der Einleitung des ersten Buches wird keine Einordnung in eine Klassenstufe genannt. Da es der zweite Band dieser Reihe ist, wird von der Stufe sieben und acht ausgegangen. Als Einstieg wird ein zentralperspektives Bild eines Bauprojektes gezeigt, welches am Computer erstellt wurde. Danach folgen einige Kommentare zu diesem Bild, wie auf- und absteigende Linien, je nachdem, ob sie sich unter oder über der Augenhöhe befinden. Der Fluchtpunkt auf der Horizontlinie wird ebenfalls erwähnt, allerdings werden in diesem Abschnitt nur Eigenschaften der Bilder besprochen [46, S. 38].

Erst später werden solche Bilder auch konstruiert. Das Bild eines Würfels auf dem Tisch soll mithilfe einer Plexiglasscheibe skizziert werden. Dabei wird angeregt, die

Lage der Scheibe oder auch den Standpunkt zu verändern. Anschließend werden einige Eigenschaften der Bilder genannt. So bleiben senkrechte Kanten des Würfels im Bild parallel, während die waagerechten sich in der Ferne annähern [46, S. 142]. Anschließend werden im Buch die Konstruktionsschritte gelistet. Zuerst wird der Horizont auf dem Zeichenblatt festgelegt, dann die Fluchtpunkte und mit ihnen über die Tiefenlinien ein Quader konstruiert. Damit das Objekt plastisch wirkt, wurden zum Schluss noch Schatten eingefügt [46, S. 143].

Das zweite Buch ist laut Einband für die Klassen ab sieben geeignet. Hier werden verschiedene Werke aus der Kunst vorgestellt und an ihnen entsprechende Inhalte des Kunstunterrichtes. So wird die Perspektivkonstruktion an *Sandro Botticellis* Werk *Verkündigung an Maria* vorgestellt. Es folgen weitere Bilder aus der Renaissance zu demselben biblischen Thema. Viele von ihnen weisen Säulengänge oder andere Bauwerke im Hintergrund auf. Zum Schluss werden einige Arten der Perspektive aufgelistet [17, S. 27]:

- Die Parallelperspektive wird mit einem Würfel, dessen Tiefenlinien um  $45^\circ$  geneigt und verkürzt sind, gezeigt. Weitere Beispiele der Axonometrie werden nicht genannt.
- Die Farbperspektive, welche sich durch warme Farben im Vorder- und kalte im Hintergrund auszeichnet.
- Die Luftperspektive, die Objekte in Richtung des Hintergrundes verblassen lässt.

Die Konstruktion der Linearperspektive wird wie folgt beschrieben: Zuerst wird der Fluchtpunkt gezeichnet und dann ein Schachbrettmuster konstruiert, welches dann als Orientierung dient, um darauf verschiedene Objekte zu platzieren [17, S. 28]. Zusätzlich wird die Lage des Horizontes an drei Skizzen thematisiert, wobei der Beobachter auf einer Treppe, auf dem Boden und sitzend dargestellt wird, während dazu das Bild des Schachbrettes skizziert ist. Es wird erwähnt, dass der Horizont die Augenhöhe beschreibt und somit das Bild von dem Standpunkt des Betrachters abhängig ist. Allerdings findet sich, auch wie in dem vorherigen Buch, keine Darstellung der Zentralprojektion im Raum mit den Projektionsstrahlen auf die Bildebene. In beiden Schulbüchern werden alle Erklärungen anhand des projizierten Bildes geführt.

Anders sieht es in dem Buch zur Oberstufe aus. Am Ende befindet sich ein Glossar, in welcher die Perspektive und der Sehvorgang in der räumlichen Darstellung skizziert werden: Ein Betrachter steht vor der Bildebene, dahinter befindet sich ein Schachbrettmuster. Von dem Kopf treffen die Sehstrahlen auf den Boden, wodurch sich

die Projektion auf der Bildebene ergibt. Horizont und Sehkegel sind ebenfalls eingezeichnet. Neben dieser Darstellung befindet sich die Projektion des Schachbrettes zusammen mit einer Hauptdiagonalen und dem Hinweis, dass die Tiefenlinien sich im Fluchtpunkt, welcher auf dem Horizont liegt, schneiden und das Schachbrett auch über die Diagonale erzeugt werden kann. Die Konstruktion mit einem Fluchtpunkt wird Frontal- oder Einpunktperspektive genannt, jene mit zwei Fluchtpunkten als Übereckperspektive. Die Lage des Horizontes wird wie in den vorherigen Büchern beschrieben [28, S. 200].

## 6.2 Geometrieanteil im Mathematikunterricht

Welchen Stellenwert hat die Geometrie im Mathematikunterricht an Gesamtschulen und Gymnasien in NRW? Welche Themen zur Geometrie werden besprochen? Um diesen Fragen nachzugehen wurde eine Auswahl an Mathematikbüchern, welche vom Schulministerium NRW zugelassen wurden, untersucht. Die Bücher sind in Tab. 6.2.1 gelistet. Da teilweise nicht alle Bücher einer Reihe für jede Jahrgangsstufe zugelassen wurden, sind in der Tabelle die entsprechenden mit einem „x“ markiert.

Für der Anteil der Geometrie im Unterricht wurden alle Bücher, welche 2019 für jede Jahrgangsstufe zugelassen wurden (mit Ausnahme des Lambacher Schweizer), verwendet. Über das Inhaltsverzeichnis konnte ermittelt werden, welche Themen in den einzelnen Jahrgangsstufen behandelt werden. Diese wurden dann den vier inhaltlichen Kompetenzfelder *Geometrie*, *Arithmetik/Algebra*, *Funktionen* und *Daten und Zufall* zugeordnet und die Anzahl der Seiten zu den Themen ermittelt. Die Abbildungen 6.2.1 und 6.2.2 zeigen den prozentualen Anteil der Seiten.

Tab. 6.2.1 Übersicht der zugelassenen Schulbücher in NRW für Gymnasium (G8) (oben) und Gesamtschulen (unten) (Stand: 08.2019)

Name, Verlag	Jahrgangsstufe				
	5	6	7	8	9
Elemente der Mathematik, <i>Schroedel</i>	x	x	x	x	x
Neue Wege, <i>Schroedel</i>	x	x	x	x	x
MatheNetz, <i>Westermann</i>			x	x	x
mathe.delta, <i>C.C. Buchner</i>	x				
Fundamente der Mathematik, <i>Cornelsen</i>	x	x	x	x	x
Fokus Mathematik, <i>Cornelsen</i>			x	x	x
Duden Mathematik, <i>Cornelsen (Duden)</i>				x	x
Lambacher Schweizer, <i>Ernst Klett</i>	x		x	x	x
Das Mathematikbuch, <i>Ernst Klett</i>			x	x	x

Name, Verlag	Jahrgangsstufe					
	5	6	7	8	9	10
Mathematik heute, Schroedel	x	x	x	x	x	x
Sekundo (plus), Schroedel	x	x	x	x	x	x
Mathematik, Westermann	x	x	x	x	x	x
mathewerkstatt, Cornelsen	x	x	x	x	x	x
Zahlen und Größen, Cornelsen	x	x	x	x	x	x
Mathe live, Ernst Klett	x	x	x	x	x	x
Schnittpunkt Mathematik, Ernst Klett	x	x	x	x	x	x

Insgesamt beträgt der Anteil der Geometrie in beiden Schulformen etwas weniger als ein Drittel und steht damit an zweiter Stelle nach *Arithmetik und Algebra*. Es fällt auf, dass im Gymnasium die Geometrie in der 9. Klasse fast die Hälfte der Schulbuchseiten einnimmt, während in den Jahrgangsstufen davor der Anteil meist weniger als ein Viertel betrug. Dies liegt daran, dass in der 9. Klasse die großen Themen wie *Satzgruppe des Pythagoras*, *Ähnlichkeit und Strahlensätze* sowie *Trigonometrie* durchgenommen werden. Eine Übersicht aller Themen liefert die Abb. 6.3.1, S. 237. Nach dem Spiralprinzip werden ebene Figuren und Körper schrittweise eingeführt:

In den unteren Stufen 5 und 6 werden vor allem Vierecke definiert und auf ihre Eigenschaften untersucht. Als Körper werden Würfel und Quader thematisiert. In den Stufen 7 und 8 stehen Dreiecke im Vordergrund. So werden die Winkelsumme und die Kongruenzsätze an Dreiecken eingeführt. Als Körper werden Prismen besprochen. In den Klassen 9 und 10 wird als ebene Figur der Kreis thematisiert und als Körper passend Kegel und Zylinder. Als Weiterführung der Dreiecke kommen dann Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze sowie Trigonometrie.

In der Gesamtschule sind die Unterschiede zwischen den Büchern innerhalb einer Jahrgangsstufe deutlich größer, insgesamt jedoch sind die Anteile gleich. Wie auch beim Gymnasium nimmt die Geometrie etwas weniger als ein Drittel der Seiten ein und steht wieder an zweiter Stelle nach *Arithmetik und Algebra*. Bspw. beträgt der Anteil in *Mathematik heute* in Klasse 10 etwa ein Drittel, dagegen in *Mathematik* weniger als ein Viertel. Dies liegt daran, dass einige Themen der 9. und 10. Jahrgangsstufen unterschiedlich auf die Jahrgänge verteilt sind. So wird in *Mathematik* das Thema Volumen und Oberfläche von verschiedenen Körpern wie Prisma, Pyramide, Kegel und Zylinder in die 9. Klasse vorgezogen, in den anderen Büchern dagegen erst ein Jahr später behandelt. Gleiches ist auch in Klasse 7 und 8 zu beobachten. So werden in Jgst. 7 in *Schnittpunkt Mathematik* nur Dreiecke, Kongruenzsätze sowie In- und Umkreis thematisiert, dagegen in *Sekundo* auch Flächeninhalt von Rechteck und Dreieck sowie Volumen von Quader und zusammengesetzter Körper besprochen, welche im erstgenannten Buch Themen der 8. Klasse sind.

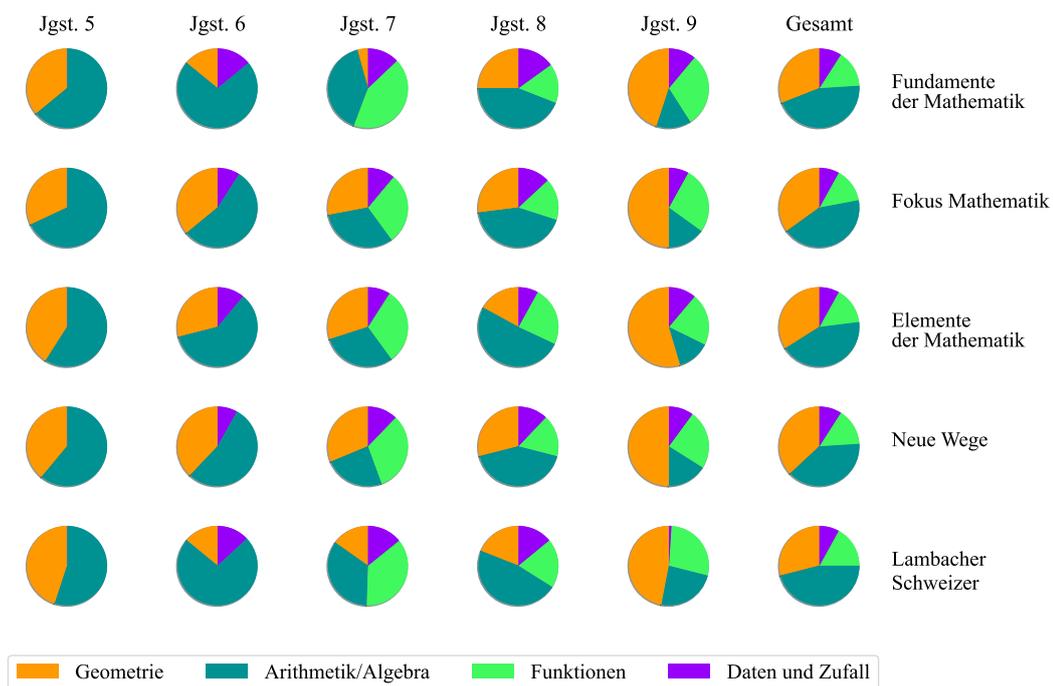


Abb. 6.2.1 Anteile der inhaltsbezogenen Kompetenzfelder in Schulbüchern an Gymnasien in NRW

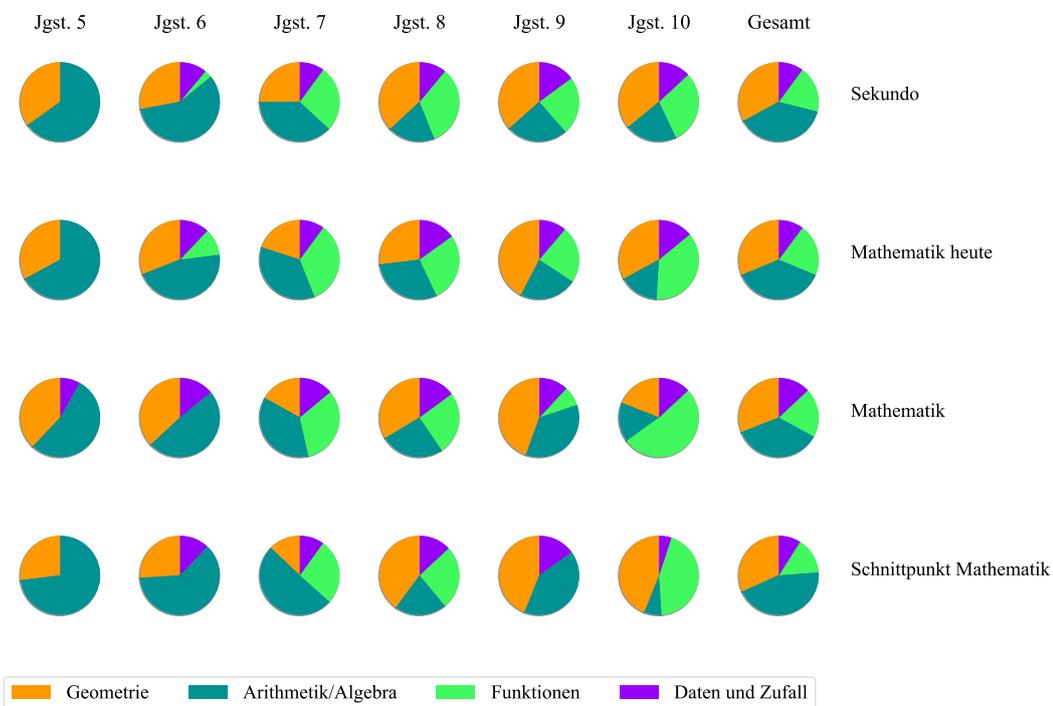


Abb. 6.2.2 Anteile der inhaltsbezogenen Kompetenzfelder in Schulbüchern an Gesamtschulen in NRW

### 6.3 Der Geometrieunterricht an Gymnasien und Gesamtschulen

Welche Themen sind notwendig, um sich mit Zentral- und Parallelprojektion beschäftigen zu können? Die Beantwortung dieser Frage ist notwendig, um eine Einordnung in den Lehrplan zu ermöglichen. Die nachfolgende Abbildung 6.3.1 stellt eine Übersicht beider Schulformen dar. Sie beinhaltet ebenso Anmerkungen zu bestimmten Schulbüchern, in denen Aufgaben zum Thema Projektion gefunden wurden, welche später noch im Einzelnen vorgestellt werden.

Die Übersicht entstand durch Sichtung verschiedener in NRW vom Schulministerium 2019 zugelassener Bücher für den Mathematikunterricht. Für die Unterteilung der Klassen wurde sich am Kernlehrplan orientiert, da hier ebenfalls die Lernziele am Ende der 6. bzw. 8. und 10. Klasse<sup>1</sup> formuliert sind. Die Spalten stehen für verschiedene Themenbereiche des Geometrieunterrichts und die Zeilen für die Klassenstufen. In diesem Raster wurden die Geometriethemen eingeordnet.

Wie erwartet zeigt die Übersicht, dass in der 5. und 6. Jahrgangsstufe der Schwerpunkt auf das Erlernen von Definitionen und Grundbegriffen liegt während in der 7. und 8. Jahrgangsstufe mathematische Sätze erkundet werden. Die Sätze beziehen sich vor allem auf Dreiecke.

Mit weiß und gestrichelten Umrissen sind Themen zur Zentral- bzw. Parallelprojektion markiert. Die Übersicht zeigt deutlich, dass die Aufgabenbeispiele hauptsächlich in der 8. und 9. Jahrgangsstufe gefunden wurden.

In zweiten Hauptteil dieser Arbeit wurde häufig der Strahlensatz verwendet, welcher ebenfalls in der 9. Klasse gelehrt wird. Die Untersuchung von Invarianten von Abbildungen sind in der Übersicht selten zu finden, denn auch das Thema geometrische Abbildungen ist kaum bis gar nicht vorhanden. Es stellt sich daher die Frage, wie überhaupt mit geometrischen Abbildungen im Unterricht umgegangen wird. Hierfür wurden vier verschiedene Schulbuchreihen gesichtet:

Tab. 6.3.1 Untersuchte Schulbücher

Reihe	Jahrgangsstufe
Mathe live	6, 8, 9
MatheNetz	8
Lambacher Schweizer	9
Elemente der Mathematik	5, 6, 8, 9

<sup>1</sup>Dies gilt für Gesamtschulen und Gymnasien mit dem G9 Modell. Für Gymnasien mit G8 Modell sind die Kompetenzerwartungen an Ende der 9. Klasse formuliert.

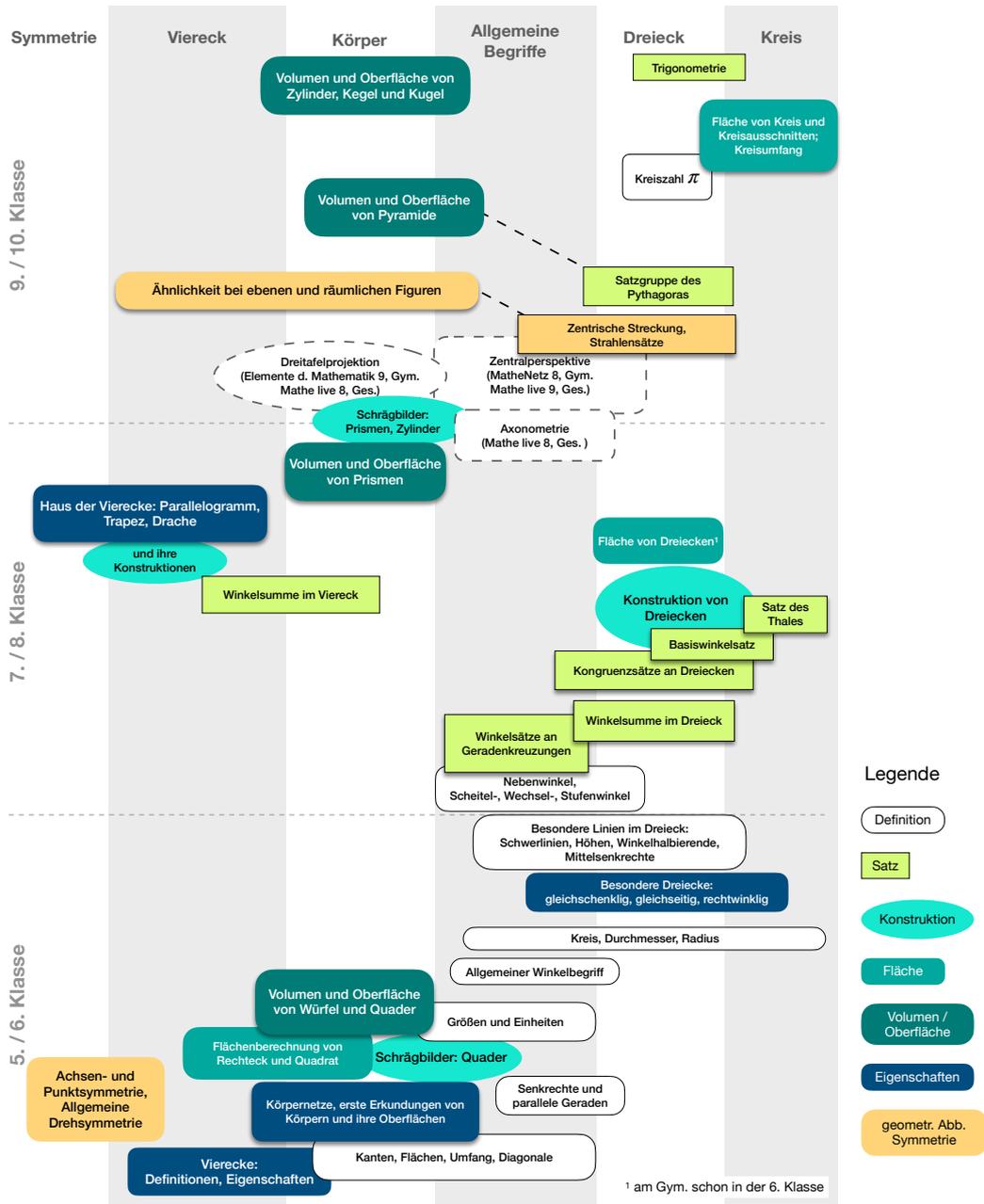


Abb. 6.3.1 Übersicht der Inhalte des Geometrieunterrichts an Gymnasien und Gesamtschulen

Nach den Büchern werden zuerst Symmetrien von Figuren in den Klassen 5 bzw. 6 untersucht. Danach folgt die Konstruktion eines Bildpunktes unter Achsen- und Punktspiegelung mit dem Geodreieck. Dies wurde in allen vier Reihen gefunden. Die Verschiebung wurde nur im *MatheNetz 8* sowie in *Elemente der Mathematik 6* thematisiert. Im *MatheNetz 8* gibt es zudem eine gute Übersicht zu den vier Kongruenzabbildungen Achsenspiegelung, Drehung und Verschiebung sowie Punktspiegelung als Halbdrehung. Hier werden die Abbildungen mit ihren Symmetrien genannt sowie alle Parameter, welche die Abbildung erst festlegen. Bspw. definiert sich eine Achsenspiegelung über die Spiegelgerade und für eine Drehung muss ein Drehzentrum und der Drehwinkel festgelegt werden. Weiterhin werden auch Fixpunkte und -geraden gelistet. In einigen Büchern der vier Reihen wird auf Besonderheiten der Abbildungen hingewiesen. So steht in *Elemente der Mathematik 6*, dass bei einer Punktspiegelung Punkt, Bildpunkt und das Zentrum auf einer Geraden liegen, und in *Mathe live 6*, dass bei einer Punktspiegelung Punkt und Bildpunkt von dem Zentrum denselben Abstand aufweisen.

In Klasse 9 wird die Ähnlichkeit von Figuren über gleiche Winkel und gleiche Streckenverhältnisse definiert und danach zur zentrischen Streckung übergeleitet. Die Vorgehensweise ist also dieselbe wie zuvor. Denn bei der Achsenspiegelung werden ebenfalls zuerst achsensymmetrische Figuren thematisiert, bevor mithilfe der Spiegelung solche Bilder konstruiert werden. Der Fokus liegt weniger auf der geometrischen Abbildung an sich, denn die Spiegelung wird nicht verwendet, um ein beliebiges Objekt zu spiegeln, sondern um eine Figur zu einer achsensymmetrischen zu vervollständigen. Abb. 6.3.2 zeigt hierzu ein Beispiel.

Die Vermutung liegt nahe, dass geometrische Abbildungen im Schulunterricht an sich nicht von großer Relevanz sind. Eine sinnvolle Behandlung der Projektion ist daher schwierig. Folglich werden auch Invarianten von geometrischen Abbildungen im Unterricht nur wenig besprochen. Im *Lambacher Schweizer 9* wird die zentrische Streckung als winkel- und streckenverhältnistreue Abbildung beschrieben. Bild und Urbild einer zentrischen Streckung sind ähnlich zueinander, d.h. die Winkel verän-

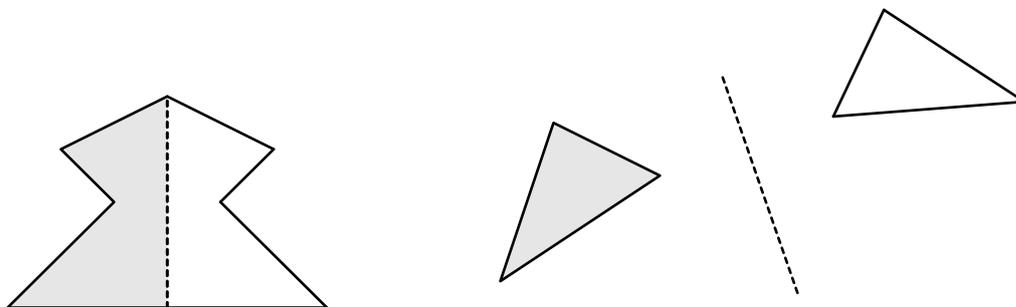


Abb. 6.3.2 Links ergeben Bild und Urbild zusammen eine achsensymmetrische Figur, während rechts die Achsenspiegelung als Abbildung im Fokus steht.

dem sich nicht und das Längenverhältnis zwischen Bild und Urbildstrecke bleibt gleich. Weitere Invarianten wie parallelentreu oder teilverhältnistreu wurden in den o.g. Büchern nicht gefunden. Vor allem das Teilverhältnis oder das Doppelverhältnis sind keine obligatorischen Themen im Mathematikunterricht.

Dagegen werden neben den Strahlensätzen auch die Kongruenzsätze an Dreiecken thematisiert. Die Kongruenzsätze lassen sich mithilfe von Kongruenzabbildungen beweisen, d.h. durch die Verkettung von Verschiebung, Drehung und Spiegelung können zwei kongruente Dreiecke aufeinander abgebildet werden. In den gesichteten Schulbüchern dagegen werden diese entweder gar nicht bewiesen oder nur durch Konstruktionen. Die Schülerinnen und Schüler untersuchen hierzu, mit welcher Kombination von Winkel- und Längenangaben ein Dreieck sich bis auf seine Lage oder Orientierung eindeutig konstruieren lässt.

Unter diesen Voraussetzungen bzw. Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler ist es schwierig, das Thema Projektion zu behandeln. Die Aufgaben zu den Themen Zentralprojektion, Schrägbilder und Dreitafelprojektion in den gesichteten Schulbüchern waren gering. Vor allem die Zentralprojektion wurde meist als optionale Projektarbeit behandelt. Demzufolge hat die Projektion seitens des Lehrplans eher eine geringe Priorität. Die nachfolgenden Abschnitte stellen einige Aufgaben zu den drei genannten Bereichen vor, welche in den verfügbaren Schulbüchern (Tab. 6.3.1) gefunden wurden.

## 6.4 Schulbuchaufgaben zur Projektion

Zur Untersuchung des momentanen Stands der Projektion im aktuellen Mathematikunterricht wurden Schulbücher verschiedener Reihen und Jahrgangsstufen gesichtet und einige Aufgaben zu den Themen Schrägbilder, Dreitafelprojektion und Zentralprojektion herausgesucht, welche im Folgenden vorgestellt werden.

Wie werden die Begriffe eingeführt? Wir werden feststellen, dass die Dreitafelprojektion ohne Erwähnung der Parallelprojektion vorgestellt wird, ebenso auch die Konstruktion der Schrägbilder. Oft wird hierbei die Kavalierperspektive verwendet, wobei die Tiefenlinien unter einem Winkel von  $45^\circ$  gezeichnet werden. Für die Verkürzung entspricht eine Kästchendiagonale einem Zentimeter, d.h.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ist der Faktor. Die Zentralprojektion war von den drei Bereichen am wenigsten präsent. Meist wird sie als Projekt auf einer Seite kurz vorgestellt, wobei nur auf die Konstruktion mit einem oder zwei Fluchtpunkten eingegangen wird, aber bspw. nicht darauf, woher der Fluchtpunkt kommt oder bei welcher Lage sich die Projektionen paralleler Geraden in einem Punkt schneiden.

Neben den Einführungs- und Konstruktionsbeispielen wird auch auf die zugehörigen Aufgaben eingegangen. Welche Lernziele können mit diesen Aufgaben erreicht werden? Wie sinnvoll sind diese im Umgang mit dem Thema?

### 6.4.1 Schrägbilddarstellung

In einer Vielzahl der zugelassenen Schulbücher wird nur die Schrägbilddarstellung in Kavalierverspektive mit einem Verzerrungswinkel von  $45^\circ$  thematisiert. Die Tiefenlinien werden bei Würfeln und Quadern derart verkürzt, dass 1 cm einer Kästchendiagonalen entspricht. Da die Kästchenlänge in Schulheften 0,5 cm ist, ist der Verkürzungsfaktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Diese Konvention hat den Vorteil, dass die Schülerinnen und Schüler sich an dem gängigen Gitter der Schulhefte orientieren können, was gerade für die 5. Klasse sinnvoll erscheint, da das Geodreieck und der allgemeine Winkelbegriff erst in der 6. Klasse eingeführt wird, wie die Übersicht in Abb. 6.3.1, S. 237 zeigt. In *Elemente der Mathematik 5* (kurz: EdM) wird als Beispiel ein Quader in drei Schritten gezeichnet (Abb. 6.4.1). Zuerst wird die Vorderseite des Quaders unverändert übernommen. Im zweiten Schritt werden die Tiefenlinien auf den Kästchendiagonalen übertragen, wobei eine Diagonale einem Zentimeter entsprechen soll. Zur Steigerung des räumlichen Eindrucks werden verdeckte Linien gestrichelt gezeichnet. Zuletzt werden die Endpunkte der Tiefenlinien verbunden, sodass die hintere Fläche des Quaders entsteht.

In Klasse 8 werden Prismen gezeichnet. Hierfür wird ebenfalls ein Winkel von  $45^\circ$  verwendet. Für den Verkürzungsfaktor wird nun  $\frac{1}{2}$  angegeben, womöglich, weil durch die Verwendung des Geodreiecks nun eine Orientierung am Gitter nicht mehr nötig ist bzw. eine Länge zu halbieren für die Schülerinnen und Schüler einfacher zu berechnen ist als die Multiplikation mit dem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Abb. 6.4.2 zeigt die im Buch beschriebenen Schritte. Im Text wird die Höhe als

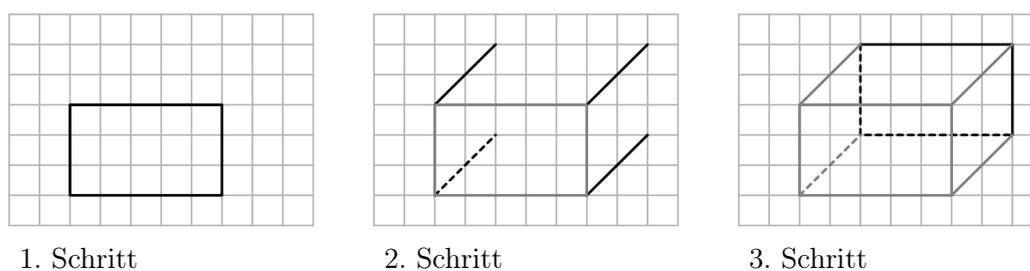


Abb. 6.4.1 EdM 5, S. 172, Konstruktion eines Schrägbildes [14]

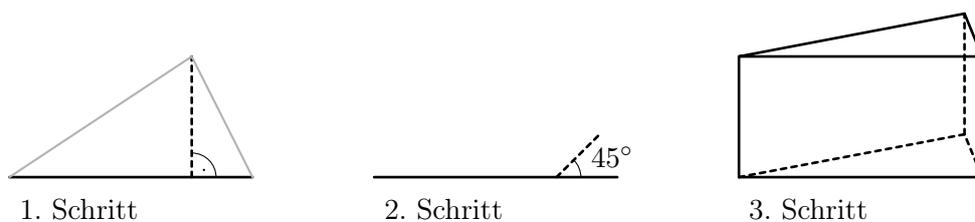


Abb. 6.4.2 EdM 8, S. 231, Schrägbild eines Prismas [15]

geeignete Hilfslinie bezeichnet, da es sich hierbei um eine „Tiefenstrecke“ handelt, welche „orthogonal zur Vorderkante“ [15, S. 231] verlaufen. Es wird nicht explizit gesagt, dass diese Hilfslinie benötigt wird, da sich der Verzerrungswinkel von  $45^\circ$  nur auch die zur Bildebene orthogonalen Tiefenlinien bezieht. Im ersten Schritt wird die Höhe und die Lage des Lotfußpunktes gemessen und im zweiten Schritt auf der unveränderten Grundseite des Bilddreiecks übertragen. Die Höhe wird mit  $45^\circ$  und mit halber Länge ergänzt. Somit ist die Spitze des Dreiecks gefunden. Im letzten Schritt werden die Höhen des Prismas in wahrer Größe übernommen und mit der oberen Dreiecksfläche das Schrägbild des Prismas vervollständigt.

In demselben Buch wird auch thematisiert, dass die Wahl von Verzerrungswinkel und Verkürzungsfaktor zu ungünstigen Bildern führen kann. Die Abbildung im Buch zeigt dabei ein Schrägbild mit verdeckten Kanten (Abb. 6.4.3, oben). Schülerinnen und Schüler werden dazu motiviert, Verzerrungswinkel und Verkürzungsfaktor zu verändern und die entstehenden Schrägbilder auf ihre Wirkung zu beurteilen. Drei Wertepaare sollen sie mit einem Würfel von 4 cm ausprobieren. Die Lösung zeigt Abb. 6.4.3 unten.

In allen drei Beispielen sind keine Kanten verdeckt. Dies ist verwirrend, da aufgrund des Negativbeispiels in der Aufgabe ein Variante mit verdeckten Kanten zu erwarten wäre. Es wird auch nicht näher erläutert, nach welchen Kriterien die Beurteilung erfolgen soll. Im Aufgabentext heißt es:

In der Einführung wurde  $45^\circ$  als Verzerrungswinkel und  $\frac{1}{2}$  als Verkürzungsfaktor gewählt. Dabei erhält man oft, aber nicht in jedem Fall, ein informatives Schrägbild (siehe linker Quader). [15, S. 32]

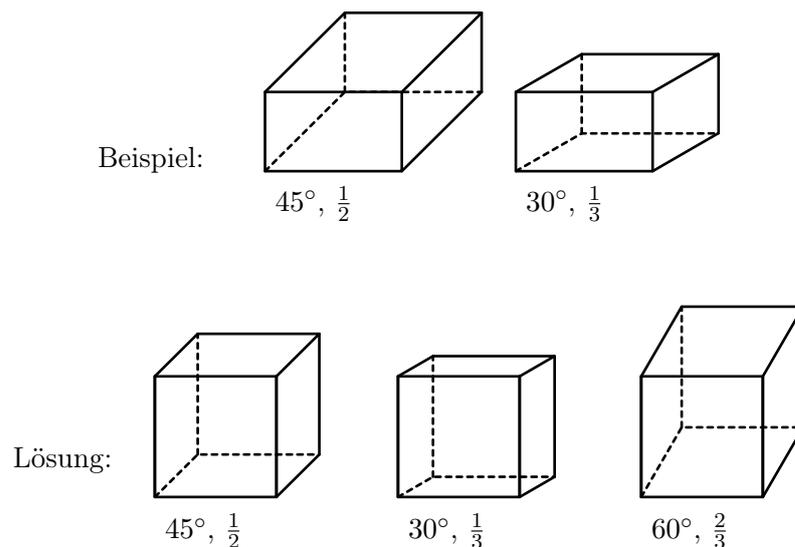


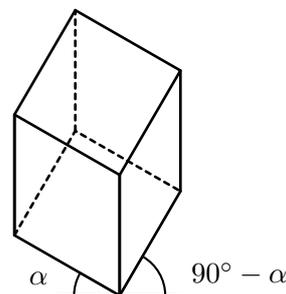
Abb. 6.4.3 EdM, S.232 : Variation von Verzerrungswinkel und Verkürzungsfaktor [15]

Was ist also ein *informatives Schrägbild*? Die verdeckten Kanten scheinen nur ein mögliches Problem zu sein. Schülerinnen und Schüler könnten die Blickrichtung beurteilen oder ob die Projektion einen Würfel suggeriert. Letzteres trifft auf alle drei Schrägbilder zu und für höhere Verzerrungswinkel scheint der Blick weiter nach unten zu gehen bzw. sich die Position des Betrachters nach oben zu verschieben, da von  $30^\circ$  bis  $60^\circ$  immer mehr von der Decken- bzw. Bodenfläche zu sehen ist. Es fällt auf, dass Winkel und Faktor sind nicht beliebig gewählt wurden. Bei allen drei Paaren beträgt das Verhältnis von Verzerrungswinkel zu Verkürzungsfaktor  $90^\circ$ .

Das Problem in dieser Aufgabe ist, dass zwar Winkel und Faktor variiert werden, aber der Zusammenhang zwischen Schrägbild und Parallelprojektion fehlt. So kann diese Aufgabe nicht mehr vermitteln, als, dass  $45^\circ$  und  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  nur eine Konvention ist und andere Wertepaare zu unterschiedlichen Schrägbildern führen. Ohne die Kenntnis von Projektionsrichtung und Bildebene können Verzerrungswinkel und Verkürzungsfaktor nicht näher thematisiert werden. Es bleibt daher bei einer oberflächlichen Betrachtung der Axonometrie.

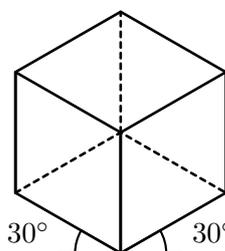
Im Schulbuch *Mathe live 8* werden ebenfalls Winkel und Faktor variiert. Positiv ist hier zu erwähnen, dass es nicht bei der Kavalierperspektive bleibt, sondern sogar die Militärperspektive (unverzerrte Projektion des Grundrisses), isometrische und dimetrische Darstellung vorgestellt werden (Abb. 6.4.4). Dies liegt womöglich daran, dass das Schulbuch für die Gesamtschule ausgelegt ist, sodass Bezüge zu benötigten Kenntnissen im Handwerk üblich sind. So gibt es im Schulbuch der 8. Klasse einen Exkurs zum technischen Zeichnen mit Aufgaben

### Militärperspektive



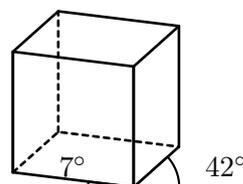
$\alpha$  beliebig, hier  $30^\circ$ ,  
alle Kanten unverkürzt

### Isometrische Darstellung



alle Kanten unverkürzt

### Dimetrische Darstellung



Tiefenlinien werden halbiert,  
alle anderen bleiben unverkürzt

Abb. 6.4.4 Schrägbilddarstellung in *Mathe live 8* [27], S. 11

zur Darstellung von Bauteilen u.a. auch mit der Dreitafelprojektion ([27], S. 19f). Beim Zeichnen des Schrägbildes einer geraden Pyramide wird der Schnittpunkt der Diagonalen in der Projektion der rechteckigen Grundfläche verwendet, um den Mittelpunkt zu finden. Es wird allerdings nicht erklärt, warum so der Mittelpunkt in der Projektion gefunden werden kann. Da der Bezug zur Parallelprojektion fehlt, fehlen auch die Invarianten. Daher kann die Mittelpunktsfindung nicht durch die Inzidenz- oder Teilverhältnistreue begründet werden.

In einer älteren Ausgabe von *MatheNetz 8* für das Gymnasium wurde noch die Militär- und Kavalierverspektive (im Buch mit Horizontal- und Frontalprojektion bezeichnet) thematisiert ([9], S. 89). In den neueren zugelassenen Schulbüchern dieser Reihe ist dieses Thema gänzlich verschwunden. In der Zusammenfassung des Buches zum Thema Schrägbilddarstellung, welche die Abb. 6.4.5 zeigt, wird durch die Assoziation mit den Handlungen „Bauen“ und „Ziehen“ indirekt gesagt, dass bei der Militärperspektive (links) der Grundriss erhalten bleibt, dagegen bei der Kavalierverspektive (rechts) der Aufriss. Die Konstruktion der Tiefenlinien bei der Kavalierverspektive wird durch die Angabe des  $45^\circ$  Winkels angedeutet. Die Verkürzung der Tiefenlinien wird nicht genannt, ebenso die Winkel, die zur gekippten Position in der Militärperspektive führen. Es bleibt dem Betrachter überlassen, anhand der Darstellung die Konstruktionsschritte zu erkennen. Ebenso fehlt die Grundlinie im zweiten Bild der Reihe links, sodass nicht erkennbar ist, dass die ergänzten Kanten über dem Grundriss orthogonal zu dieser Linie sind.

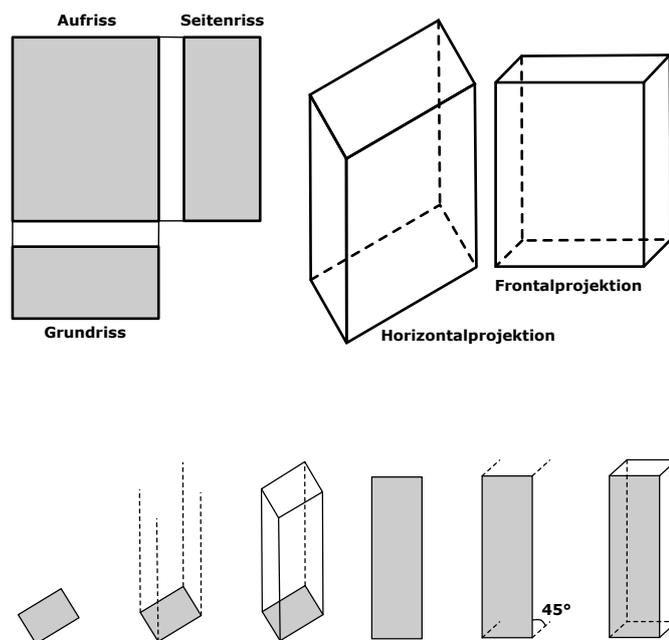


Abb. 6.4.5 Schrägbildarstellung in *MatheNetz 8* [9, S. 89] (ältere Ausgabe)

Der Bezug zur Parallelprojektion fehlt ebenfalls. Dagegen wird in dem Buch sogar ein räumliches Koordinatensystem vorgestellt, welches nicht wie das übliche, dreidimensionale kartesische System gezeichnet wird. Wie für die Konstruktion von Axonometrien wird in der nebenstehenden Abbildung ein Koordinatensystem mit anderen Verzerrungswinkeln und Verkürzungsfaktoren angedeutet. Es bleibt allerdings bei einer Andeutung, denn das räumliche Koordinatensystem wird hier nicht näher thematisiert. Möglicherweise weil das Buch für die 8. Jahrgangsstufe konzipiert wurde und das räumliche Koordinatensystem erst in der Oberstufe für die analytische Geometrie eingeführt wird.

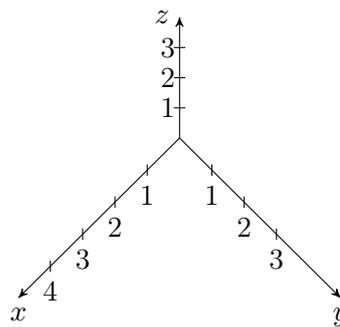


Abb. 6.4.6 Die Projektion eines räumlichen Koordinatensystem in Mathe Netz 8 (ältere Ausgabe) [9, S. 89]

Zusammenfassend benutzen alle gesichteten Schulbücher für die Konstruktion von Schrägbildern die Kavalierperspektive mit einem Verzerrungswinkel von  $45^\circ$  und einem Verkürzungsfaktor von  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (Kästchendiagonale) bzw.  $\frac{1}{2}$ . Erste Schrägbilddarstellungen finden sich in der 6. Klasse für Quader und Würfel. In manchen der Bücher wurde das Thema in der 8. Klasse wieder aufgegriffen und weiter vertieft, in dem auch Prismen oder Zylinder gezeichnet oder Winkel und Faktor verändert wurden. Nur in zwei der gesichteten Bücher wurden auch andere Darstellung als die Kavalierperspektive gefunden. In allen Büchern konnte kein erwähnter Zusammenhang zur Parallelperspektive festgestellt werden. Stattdessen wurden Begriffe, wie veränderter Standpunkt oder andere Blickrichtung, verwendet. Mit Letzterem kann der Einfall der parallelen Projektionsstrahlen auf die Bildebene assoziiert werden. Dagegen ist der Begriff eines veränderten Standpunktes eher irreführend, da die Richtung der Projektionsstrahlen überall gleich ist. Dieser Begriff passt eher zur Zentralprojektion, da die Position des Zentrums bzw. des Betrachters relativ zur Bildebene sich auch auf das Bild auswirkt.

### 6.4.2 Dreitafelprojektion

Die Dreitafelprojektion wurde in den Büchern *Mathe live 8* und *Elemente der Mathematik 9* gefunden. In beiden wird ein dreidimensionaler Körper in einer Raumecke dargestellt. Senkrechte Linien gehen von den Eckpunkten des Körpers auf die drei verschiedenen Ebenen, um die Risse zu ergeben. In beiden Büchern wird auch das Aufklappen der Raumecke gezeigt, sodass diese in einer Ebene zum liegen kommen.

Motiviert wird das Thema durch verschiedene Ansichten eines Körpers zur Verbesserung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Während im ersten Buch die Dreitafelprojektion ein eigener Abschnitt ist, findet es im zweiten nur als optionale Vertiefung am Ende des Abschnittes *Pyramide, Kegel, Kugel* Erwähnung.

In *Mathelive 8* wird ein angeschnittener und ein vollständiger Quader als Beispiel verwendet. Die Risse werden mit Seitenansicht und Grundriss bezeichnet. Es wird nicht unterschieden zwischen Seiten- und Aufriss. Die Aufgaben dazu erstrecken sich über vier Seiten inklusive einem Bezug zum technischen Zeichnen in der Holzverarbeitung. Es sollen die Ansichten zu verschiedenen Körpern wie Kegel, Zylinder oder Pyramide gezeichnet werden, wie auch die Risse von einem Quader, dessen Seitenflächen nicht parallel zu den Rissebenen ausgerichtet sind. Mit dem Thema technisches Zeichnen wird die Dreitafelprojektion in Zusammenhang mit Schrägbildern gebracht.

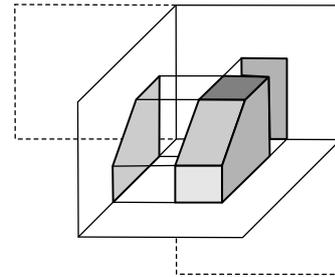


Abb. 6.4.8 Beispiel einer Dreitafelprojektion in *Mathe live 8* [27, S. 7]

Im zweiten Buch *EdM 9* wird die Dreitafelprojektion durch Grundrisszeichnungen aus der Architektur motiviert. Abb. 6.4.7 zeigt das Einführungsbeispiel, welches deutlich komplexer ist, als der Quader im vorherigen Buch. Es wird eine Kirche zusammengesetzt aus Quadern, Prisma und Pyramide verwendet sowie ein Punkt in allen drei Rissen markiert. Mit Hilfslinien wird der Zusammenhang zwischen allen drei Rissen gekennzeichnet. Für verdeckte Kanten werden gestrichelte Linien verwendet. Der Punkt  $P$  wird mit  $P'$  im Grundriss gekennzeichnet. Dies entspricht auch der Be-

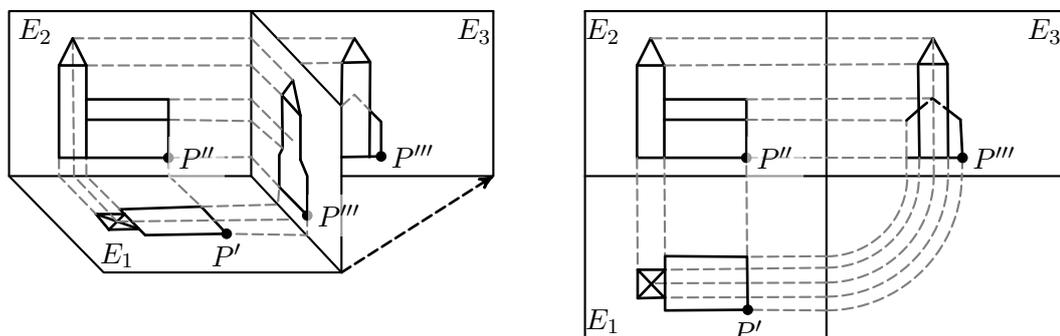


Abb. 6.4.7 In *Elemente der Mathematik 9* (kurz: EdM 9) wird ein Modell einer Kirche bestehend aus Quadern, Prisma und Pyramide als Beispiel einer Dreitafelprojektion verwendet [16, S. 232].

zeichnung in der Literatur. In den Seitenansichten wird zwischen Seiten- und Aufriss unterschieden.

Im Gegensatz zum ersten Buch gibt es allerdings nur vier Aufgaben zu dem Thema. In der ersten sollen die Risse von verschiedenen zusammengesetzten Körpern konstruiert, in der nächsten zu zwei Rissen der dritte rekonstruiert werden. Die nächste Aufgabe zeigt, dass zwei Risse nicht eindeutig auf den Körper schließen lassen. Als Beispiel wird ein Quader und ein Zylinder gezeigt. Sie liegen derart in der Raumecke, dass Grund- und Aufriss dieselben Rechtecke zeigen. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun weitere Beispiele finden.

In der letzten Aufgabe sind alle drei Risse eines unbekanntes Körpers, wie in der nebenstehenden Abbildung, gezeigt: Im Grundriss ein Dreieck, im Aufriss ein Quadrat und im Seitenriss ein Kreis. Allerdings sind keine Längenangaben gegeben, was die Aufgabe sehr erschwert. Damit der Körper existiert, muss z.B. der Kreis die Seiten des Quadrates berühren, d.h. ein Innkreis sein. Das Dreieck sieht in der Zeichnung wie ein gleichseitiges aus. Beim Versuch, diese Aufgabe mithilfe von *GeoGebra* zu lösen, wurde festgestellt, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handeln muss, wobei Grundseite und Höhe einer Quadratseite entsprechen. Dies zeigt die ergänzte, obere Darstellung, bei welcher alle drei Risse ineinander gezeichnet wurden.

Wie Schülerinnen und Schüler die Lösung der Aufgabe finden? Wir nehmen zwei Risse und überlegen uns, welcher Körper hierdurch beschrieben werden kann. Ein Zylinder, dessen Durchmesser mit der Höhe übereinstimmt, hat als Riss einen Kreis und ein Quadrat, während ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche sich

aus Quadrat und Dreieck ergibt. Die Idee ist nun, sich den Schnitt beider Körper anzuschauen. Hierzu übertragen wir die Risse in *GeoGebra* und konstruieren den Zylinder (Abb. 6.4.10). Im zweiten Schritt entsteht das Prisma und wir markieren die Schnitte der seitlichen Prismafächen mit dem Zylinder (blau). Der Schnittkörper liefert allerdings nicht das richtige Ergebnis, da der Aufriss kein Quadrat mehr ist, wie die folgende Abbildung zeigt.

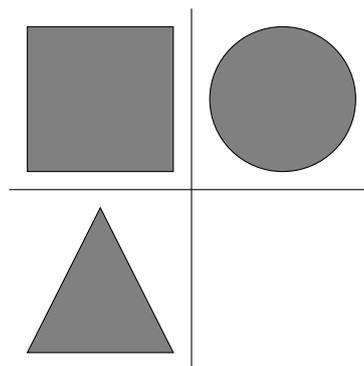
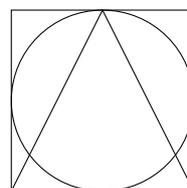


Abb. 6.4.9 Die Dreitafelprojektion eines gesuchten Körpers im Buch EdM 9 [16, S. 232]

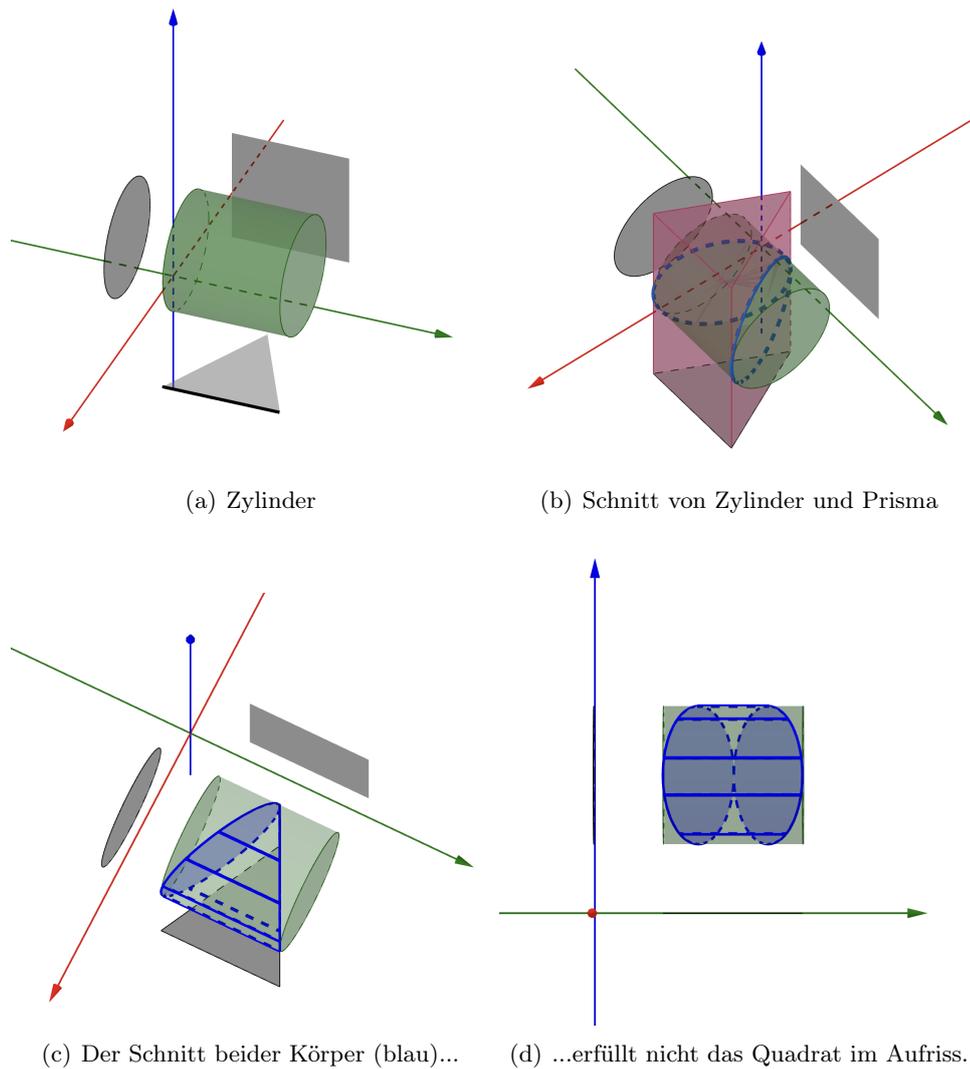
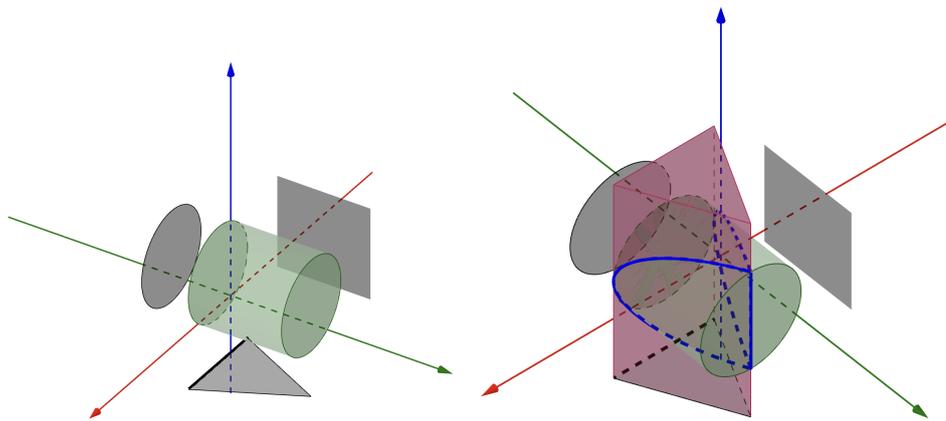


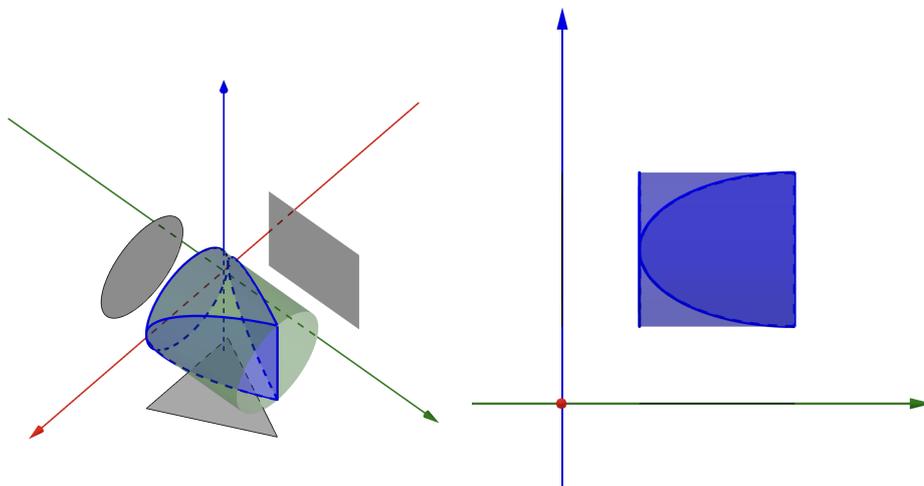
Abb. 6.4.10 Gesucht ist ein Körper, welcher ein Dreieck, ein Quadrat und einen Kreis als Riss besitzt. Der erste Versuch (markierte Grundseite des Dreiecks ist parallel zum Aufriss) führte nicht zum richtigen Ergebnis.

In einem zweiten Versuch drehen wir das Dreieck um  $90^\circ$ , sodass die Grundseite nun zum Kreis zeigt. In Abb. 6.4.11 sind wieder die einzelnen Schritte dargestellt. Das Prisma ist nun um  $90^\circ$  gedreht, sodass beim Schnitt die quadratische Fläche im Längsschnitt des Zylinders enthalten bleibt. Es hat sich also herausgestellt, dass die Lage der Risse in der Aufgabestellung irreführend ist.



(a) Die Grundseite des Dreiecks ist parallel zum Seitenriss.

(b) Schnitt von Zylinder und Prisma...



(c) ...führt nun zum richtigen Ergebnis.

(d) Der Aufriss ergibt nun ein Quadrat.

Abb. 6.4.11 Im zweiten Versuch wurde das Dreieck im Grundriss um  $90^\circ$  gedreht. Somit konnte der gesuchte Körper rekonstruiert werden.

Sowohl die Schrägbilddarstellung als auch die Dreitafelprojektion stehen in Zusammenhang mit der Parallelprojektion. Im ersten Fall sind es die Bilder, wobei Verzerrungswinkel und Verkürzungsfaktor von dem Einfall der Projektionsstrahlen auf die Bildebene bestimmt werden, und im zweiten Fall entstehen die Risse durch eine orthogonale Projektion auf die Flächen der Raumecke. In allen gesichteten Schulbüchern wird die Parallelprojektion nicht genannt oder thematisiert. Bei den Beispielen zur Dreitafelprojektion werden die senkrechten Projektionsstrahlen nur angedeutet. Es bleibt oft bei einer impliziten Andeutung, wenn von verschiedenen Blickrichtungen, oder bei den Rissen auch von Körperansichten, gesprochen wird.

### 6.4.3 Zentralprojektion

In der älteren Ausgabe von *MatheNetz 8* gibt es eine Seite mit Projektideen zum Thema Zentralprojektion und künstliche Welten [9, S. 92]. In der Kunst auf Gemälden oder im Bereich der Computerspiele werden reale oder ausgedachte, räumliche Szenen auf einer Ebene dargestellt. Damit diese besonders realistisch erscheinen, wird die Zentralprojektion verwendet. Passend zur Entdeckung der Perspektive wird in dem Schulbuch ein Gemälde des Künstlers *Paolo Ucello* von 1467, der Renaissance, gezeigt sowie ein Ausschnitt aus einem bekannten Computerspiel. Beide Bilder enthalten einen gekachelten Boden, welcher an ein Schachbrett erinnert, als gängiges Beispiel einer Zentralprojektion. Darunter ist eine Skizze, wo eine Person auf einen Turm und einen Baum schaut (Abb. 6.4.12). Von dem Auge der Person gehen „Sehstrahlen“ aus, welche die Bildebene vor dem Betrachter schneiden, um die Entstehung der projizierten Bilder zu skizzieren. Direkt unterhalb dieser Szene ist anhand eines Quaders die Konstruktion des zentralprojektiven Bildes mit einem bzw. mit zwei Fluchtpunkten gezeigt. Nachteil dieser Kombination der Abbildungen ist, dass sie suggeriert, die Sehstrahlen stimmen mit den Tiefenlinien zur Konstruktion des Quaders überein, wie auch das Projektionszentrum in der oberen Abbildung mit dem Fluchtpunkten in der unteren. Der Zusammenhang zur Fluchtpunktkonstruktion, wie sie Schülerinnen und Schüler aus dem Kunstunterricht kennen sollten, wird nicht deutlich in der räumlichen Skizze von Objekt, Bild, Betrachter und Bildebene.

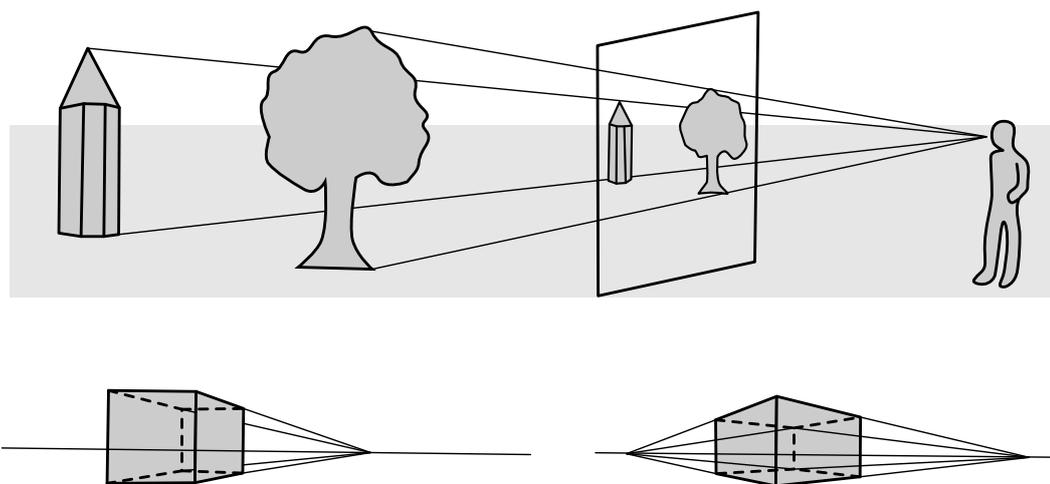


Abb. 6.4.12 Zentralprojektion als Projektidee in *MatheNetz 8* (ältere Ausgabe) [9, S. 92]

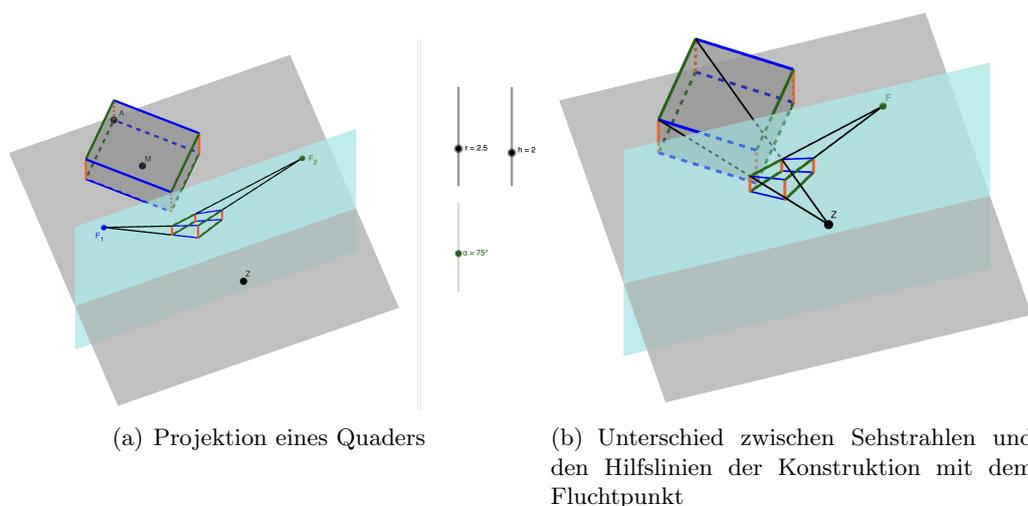


Abb. 6.4.13 Mit *GeoGebra* können Schülerinnen und Schüler einen Quader auf die Bildebene projizieren.

*GeoGebra* ermöglicht die Konstruktion im Raum, sodass Schülerinnen und Schüler die Projektion eines Quaders mit den Sehstrahlen nachbauen können. Abb. 6.4.13 (a) zeigt ein Arbeitsblatt. Mithilfe der Schieberegler lassen sich Länge  $r$  und Winkel  $\alpha$  der Diagonalen der Grundfläche des Quaders variieren. Mit  $h$  wird die Höhe eingestellt. Mit dem Punkt  $M$  kann der Quader verschoben und mit  $A$  gedreht werden. Zur besseren Orientierung sind parallele Kanten farbig markiert. Schülerinnen und Schüler können mit diesem Arbeitsblatt nun beobachten, wie sich die Lage der Fluchpunkte bei Änderung von Größe und Position des Quaders verändert. Ebenso wird das Bild über die Schnittpunkte der Sehstrahlen mit der Bildebene ausgehend von dem ursprünglichen Objekt erzeugt. Die Fluchpunkte entstehen dabei. Im Kunstunterricht dagegen orientiert sich die Projektion nicht an das Objekt mit seiner Lage und seinen Maßen. Es wird eher wie folgt vorgegangen (Abb. 6.4.14): Mit der Lage des Horizontes wird über Frosch-, Normal- oder Vogelperspektive entschieden, d.h. wie hoch der Betrachter relativ zum Objekt steht. Dann werden links und rechts von der Bildmitte die Fluchpunkte auf die Horizontlinie gesetzt. Anschließend wird über die Tiefenlinien der Quader konstruiert.

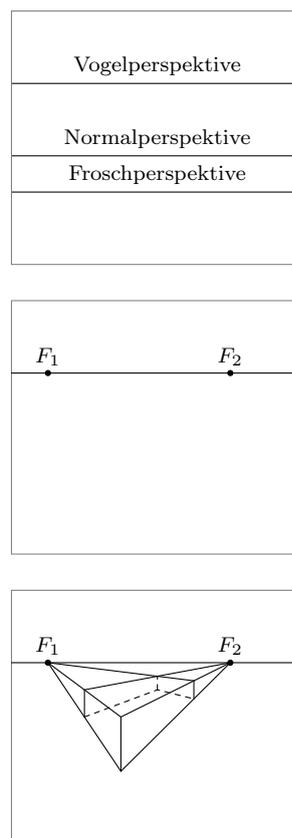


Abb. 6.4.14 Konstruktion eines Quaders wie im Kunstunterricht

Die Wahl von zwei Fluchtpunkten zeigt, dass der Quader nicht parallel zur Bildebene ausgerichtet ist. Wie weit dieser aber gedreht ist, wird durch die Lage der Fluchtpunkte bestimmt. Da diese aber beliebig gesetzt werden, ist der Winkel wie auch die konkreten Maße des Quaders unbekannt, ebenso der Standort des Betrachters relativ zur Bildebene. Es ist bspw. anhand der Projektion nicht erkennbar, ob es sich um einen allgemeinen Quader oder um einen Würfel handelt. Vorteil dieser Methode ist dagegen, dass sehr einfach Projektionen direkt auf der Bildebene konstruiert werden können, ohne einen Grund- oder Aufriss zu benötigen. Daher erscheint die Vorgehensweise für den Kunstunterricht geeignet. Im Mathematikunterricht sollte dagegen der Fokus weniger auf das fertige Bild als auf seine Entstehung liegen. Hier sollte das Lernziel, die Projektion als geometrische Abbildung zu verstehen, sein. Und dies lässt sich mit einer oberflächlichen Darstellung, wie in den gesichteten Schulbüchern, nicht erreichen.

Dieses *GeoGebra* Arbeitsblatt macht zudem deutlich, dass die Hilfslinien, welche bei der direkten Konstruktion über die Fluchtpunkte genutzt werden, nicht die Projektionsstrahlen sind, wie die Abb. 6.4.13 (b) zeigt.

Nach der kurzen Erklärung der Zentralprojektion in der älteren Ausgabe von *MatheNetz 8* folgen drei Aufgaben, u.a. das Bild eines Schachbrettes bzw. eines Würfels zu konstruieren. Da wie schon erläutert, die Fluchtpunkt konstruktion nicht von dem Objekt selbst ausgeht, ist es schwierig, ein Feld bestehend aus Quadraten oder einen Würfel zu konstruieren. Zumindest wenn der Anspruch besteht, dass Schülerinnen und Schüler die Zentralprojektion ganzheitlich verstehen lernen, denn tatsächlich können wir zeigen, dass jede Konstruktion eines Schachbrettes nach folgendem Schema, auch ohne Grundriss, zum richtigen Ergebnis führt.

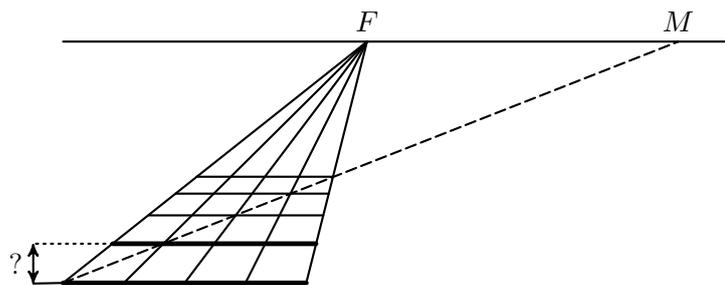


Abb. 6.4.15 Wie muss der Abstand der ersten horizontalen Linie gewählt werden, damit die Projektion ein Schachbrett darstellt?

Wir gehen davon aus, dass das Schachbrett parallel zur Bildebene ausgerichtet ist. Dann stehen die Tiefenlinien senkrecht auf jener, sodass wir nur einen Fluchtpunkt benötigen, wie Abb. 6.4.15 zeigt. Wir setzen  $F$  auf die Horizontlinie. Unterhalb dieser zeichnen wir eine parallele Strecke, welche in der Bildebene liegt. Demnach bleiben Längen auf dieser Strecke nach der Projektion unverzerrt, d.h. wir können diese in

gleich große Abschnitte unterteilen. In der Abbildung sind es vier. Wir verbinden die Endpunkte dieser Abschnitte mit  $F$ , sodass die Tiefenlinien entstehen. Nun müssen wir entscheiden, in welchem Abstand zur vorderen Strecke wir die nächste horizontale Linie des Schachbrettes einzeichnen. Danach können wir mithilfe der Diagonalen alle weiteren Horizontallinien ergänzen. Hierbei nutzen wir aus, dass die Projektion nach Definition inzidentzreu ist.

Aber wo befindet sich die gesuchte Höhe, damit dies die Projektion eines Schachbrettes mit quadratischen Feldern wird? Die Antwort ist, dass die Höhe beliebig gewählt werden kann, da nach der Aufgabe der Standort des Betrachters nicht vorgegeben wird. Abb. 6.4.16 zeigt, wie sich der Standort aus dem konstruierten Bild rekonstruieren lässt. Die linke Seite der Abbildung zeigt das Bild aus Abb. 6.4.15. Wir ergänzen darunter den Grundriss. Nach Vorgabe liegt das Schachbrett an der Bildebene, d.h. die Verlängerung der unteren Linie ergibt die Risskante, wo sich Objekt- und Bildebene schneiden (vgl. Abb.4.3.6, S. 106). Wir fällen durch  $F$  das Lot auf die Risskante und erhalten  $F'$ . Analog ergibt sich  $M'$  aus dem Fluchtpunkt der Diagonalen. Da die Tiefenlinien senkrecht zur Bildebene liegen, fällt der Fluchtpunkt mit dem Hauptpunkt  $H$  zusammen, d.h. im Grundriss liegt das Projektionszentrum  $Z'$  auf ihr. Wir zeichnen die Hauptdiagonale im Grundriss des Schachbrettes ein. Da wir jeden Fluchtpunkt durch die Parallele durch das Zentrum erhalten, zeichnen wir nun die Parallele zur Hauptdiagonalen durch  $M'$ . Der Schnitt mit dem Lot durch  $F$  entspricht somit  $Z'$ .

Zeichnen wir die zweite Horizontale in der Projektion weiter weg von der unteren Kante, so liegt  $M$  näher  $F$ . Dabei verringert sich auch der des Betrachters von der Bildebene, wie die rechte Seite der Abb. 6.4.16 zeigt.

Demnach ist die Aufgabe in dem Schulbuch *MatheNetz 8* mit der nur grob vorgestellten Zentralprojektion lösbar, allerdings erfüllt sie kaum ein sinnvolles Lernziel. Statt den Zusammenhang zwischen Bild und Lage der Bildebene bzgl. des Betrachters zu thematisieren, wird in dieser Aufgabe ausgenutzt, dass jede Entscheidung des Lernenden, wo die horizontale Begrenzung der ersten Quadratreihe zu setzen ist, zu einem korrekten Ergebnis führt. Falls der Lernende die Kantenlänge der Quadrate als Höhe verwendet, weil in einem Quadrat alle Seiten gleich lang sind, kann dies zu einem Fehlkonzept führen. Vor allem, wenn die nächste Reihe ebenfalls in der Höhe der Quadrate abgetragen wird, d.h. jede Reihe äquidistant zu ihrem Vorgänger wird. Denn in den Abbildung des Buches gibt es keinen Hinweis, dass die Diagonale als Hilfslinie verwendet werden kann. Erst damit können Schülerinnen und Schüler die nächsten drei Reihen mit den richtigen Abständen ergänzen.

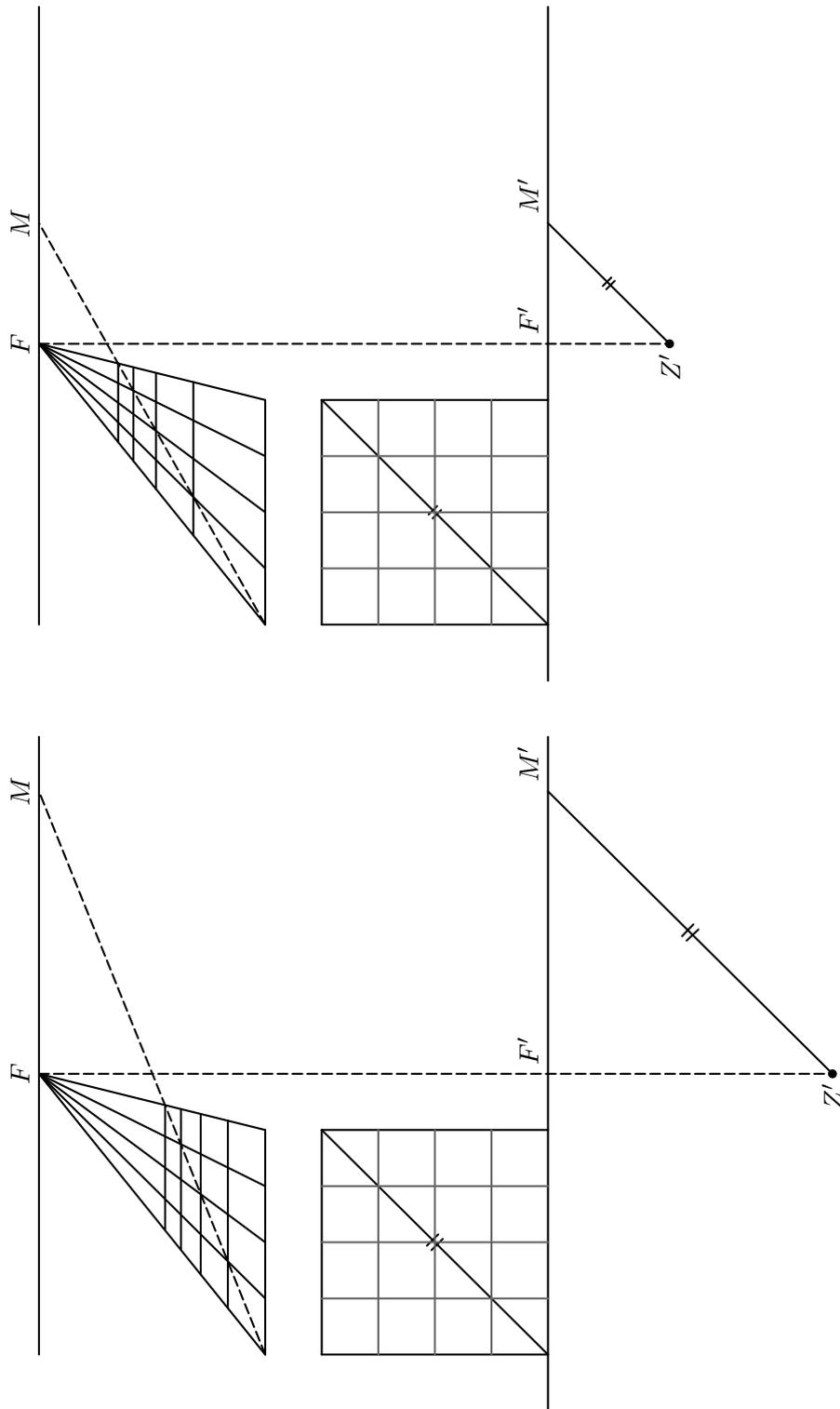


Abb. 6.4.16 Ob die Projektion die es Schachbrettes ist, hängt von dem Abstand zur Bildebene ab.

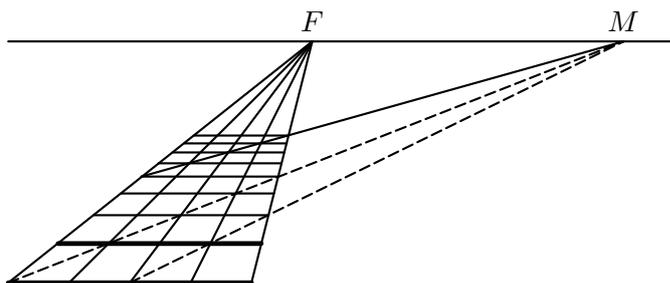


Abb. 6.4.17 Die Diagonalen in einem Schachbrett sind parallel zueinander, d.h. in der Projektion schneiden sich alle Diagonalen im Fluchtpunkt  $M$ .

Aber wie lassen sich weitere Reihen konstruieren? Wir wissen, dass alle Geraden mit gleicher Richtung sich in einem Fluchtpunkt auf der Horizontlinie schneiden werden. Da auch die Diagonalen parallel zueinander sind, muss  $M$  dieser gesuchte Punkt sein. Wir verbinden daher die linke obere Ecke der letzten Kachel auf der linken Seite mit  $M$ , welche wieder die Tiefenlinien an der richtigen Höhe der quadratischen Felder schneiden wird (Abb. 6.4.17). Auch hierfür liefert das Buch keinen Hinweis.

Wir kommen mit *Mathe live 9* (für Grundkurs in Gesamtschulen von NRW) zum zweiten Buch, welches Aufgaben zur Zentralprojektion enthielt. Nach dem Kapitel zur Ähnlichkeit von Figuren und der daran anschließenden zentrischen Streckung, wird mit zwei Seiten zur Zentralperspektive der Abschnitt abgeschlossen. Wieder wird mit einem Kunstbild das Thema motiviert. Das Werk *Kartenspieler in einem sonnendurchfluteten Raum* von Pieter de Hooch (1629 - 1684) zeigt einen Raum, auf dessen Rückseite eine Tür nach draußen geöffnet ist. Der Boden ist mit schwarzen und weißen Kacheln gefliest und wirkt wie ein Schachbrett, welches die Raumwirkung verstärkt. In der Mitte des Raumes befindet sich ein Tisch, an dem drei Personen sitzen, während eine vierte daneben steht. In dem Bild sind einige Tiefenlinien markiert, welche zeigen, dass sich der Horizont etwas oberhalb der Bildmitte befindet. Es gibt genau einen Fluchtpunkt, welcher auf den Kopf eines der Sitzenden gerichtet ist und bzgl. der Bildmitte nur leicht nach links versetzt ist. Neben dieser Abbildung wird aufgelistet, wodurch die Zentralperspektive bzw. Zentralprojektion bestimmt wird:

durch (die Augenhöhe) den Horizont und die Fluchtpunkte zur Festlegung der Sehstrahlen. [6, S. 29]

Somit findet sich wie in *MatheNetz 8* eine irreführende Gleichsetzung der Tiefenlinien, welche sich im Fluchtpunkt schneiden, mit den Seh- bzw. Projektionsstrahlen.

In *Mathe live 9* wird auf den Standpunkt des Betrachters eingegangen, aber nicht auf die Lage eines Objektes relativ zur Bildebene, da auf Grund- und Aufriss in der Konstruktion verzichtet wird. Die Abb. 6.4.18 zeigt ein Beispiel aus dem Buch zur Erklärung der Horizontlage und Standpunktes des Betrachters. Nach dem Buch kommt es im mittleren Fall zu zwei Fluchtpunkten, weil der Betrachter auf die Ecke des Hauses schaut. Diese Beschreibung ist fehlerhaft, da es bei der Anzahl der Fluchtpunkte nicht auf den Standort des Betrach-

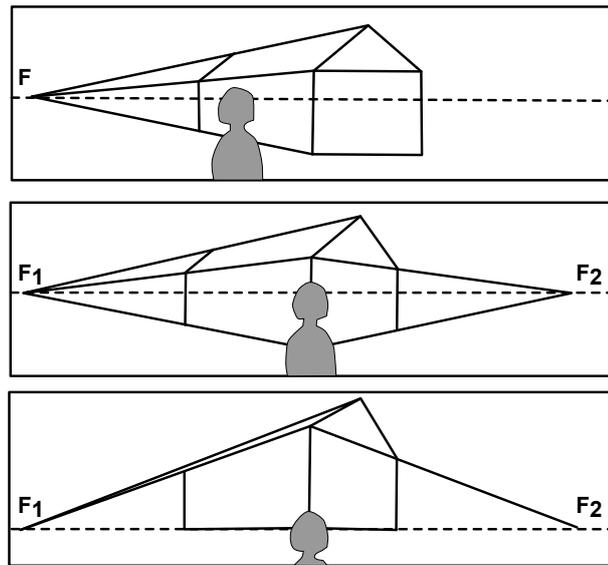


Abb. 6.4.18 Die Auswirkung der Horizontlage und Position des Betrachters auf die Projektion [6, S. 29]

ters ankommt, sondern auf die Lage der Bildebene relativ zum Haus. Ebenso problematisch ist die Beschreibung im Buch zum ersten Fall, wonach es zu einem Fluchtpunkt kommen soll, wenn der Betrachter auf die Seitenfläche des Hauses schaut. Daher ist dieser im oberen Teil der Abbildung im Buch seitlich verschoben dargestellt. Falls die Urheber dieses Abschnittes implizit davon ausgegangen sind, dass die Bildebene immer senkrecht zur Blickrichtung des Betrachters ausgerichtet ist, dann stimmt der erste Fall nicht. Die Bildebene wäre dann parallel zur Seitenfläche. Folglich wäre der Seitenriss unverzerrt und nicht die Vorderseite des Hauses im Aufriss.

Abb. 6.4.19 zeigt die Konstruktion mithilfe von Grund- und Aufriss des Hauses nach der Methoden im Abschnitt 4.3.2, S. 106. Der Vergleich mit der Abbildung aus dem Schulbuch zeigt, dass diese auch in der Position des Betrachters fehlerhaft ist. Der Aufriss des Hauses ist unverzerrt, also muss die Vorderseite parallel zur Bildebene ausgerichtet sein. Dann liegen die Tiefenlinien senkrecht zur Ebene, sodass der Fluchtpunkt mit dem Hauptpunkt zusammenfällt. Demnach muss die Person unterhalb von  $F$  gezeichnet werden, was in der Abbildung im Schulbuch nicht der Fall ist.

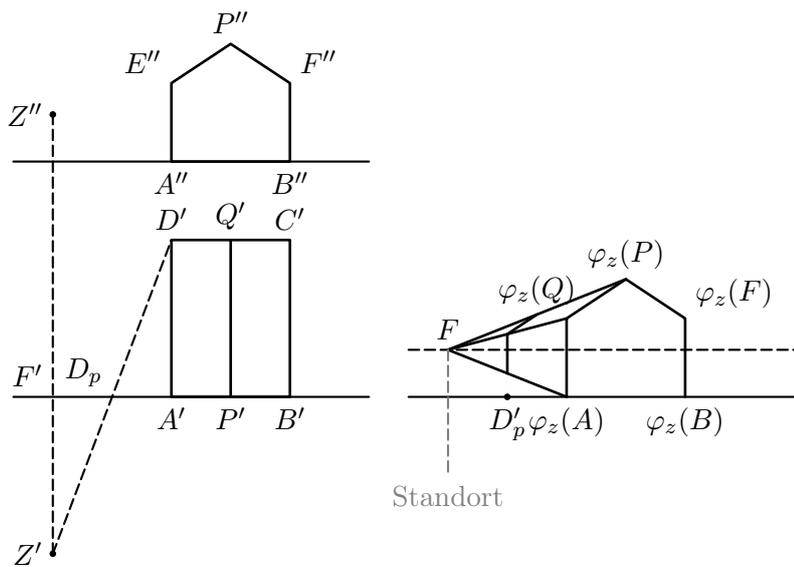


Abb. 6.4.19 Konstruktion des Hauses im ersten Fall von Abb. 6.4.18 mithilfe von Grund- und Aufriss.

Im zweiten Beispiel steht die Person vor der Hausecke. Nach der Erklärung entstehen zwei Fluchtpunkte, weil die Person nun auf die Ecke schaut. Auch das beschreibt die Situation nicht vollständig, denn wie in Abb. 6.4.20 dargestellt, entstehen zwei Fluchtpunkte, wenn das Haus nicht mehr parallel zur Bildebene ausgerichtet ist. Die Person muss dabei nicht zwingend vor der Hausecke stehen.

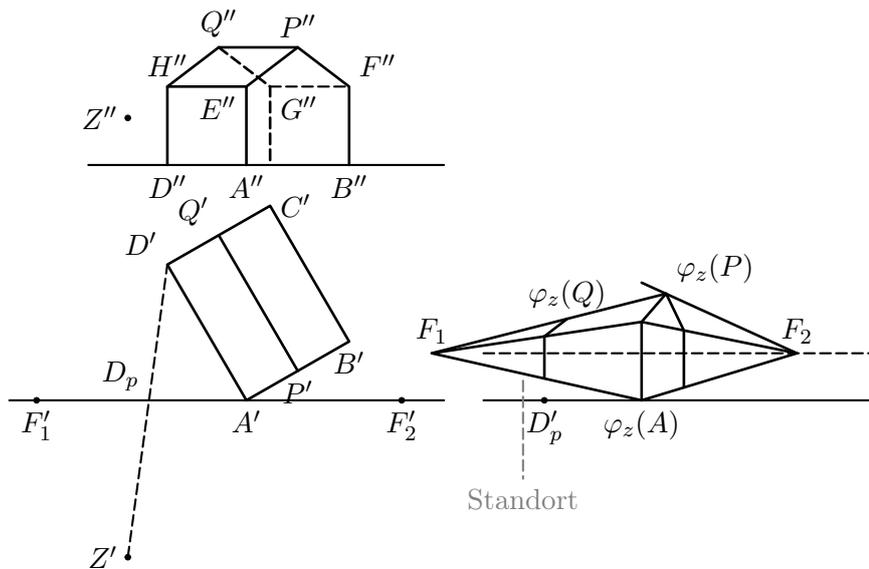


Abb. 6.4.20 Konstruktion des zweiten Falls von Abb. 6.4.18

Die zweite Seite im Schulbuch *Mathe live 9* zum Thema Zentralperspektive enthält eine Reihe von Aufgaben. Neben Konstruktionsaufgaben (Quader mit einem bzw. zwei Fluchtpunkten oder einem Haus in Vogelperspektive) gibt es auch Anregungen, die Zentral- und Kavalierperspektive zu vergleichen und Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten aufzulisten. Da keine Invarianten geometrischer Abbildungen im Unterricht besprochen werden, fällt die Liste vermutlich kurz aus. Ein offensichtlicher Unterschied ist die Parallelentreue, welche nur bei der Parallelprojektion für alle parallelen Kanten eines Körpers gilt. In beiden Projektionsarten verkürzen sich die Tiefenlinien. Allerdings können Schülerinnen und Schüler die Verkürzung nicht weiter unterscheiden, da Teil- und Doppelverhältnis nach Lehrplan im Mathematikunterricht an Schulen in NRW nicht unterrichtet wird [24, 22]. Das Streckenverhältnis dagegen sollte Schülerinnen und Schüler bekannt sein, da sie im Unterricht in Zusammenhang mit den Strahlensätzen bzw. der zentrischen Streckung besprochen werden. Da die Projektion aber nicht als geometrische Abbildung im Schulbuch definiert wird, sondern allein über die Konstruktion, ist der Begriff *Streckenverhältnistreue* nicht bekannt. Demnach können Schülerinnen und Schüler nicht mehr Unterschiede oder Gemeinsamkeiten zwischen Zentral- und Kavalierperspektive nennen.

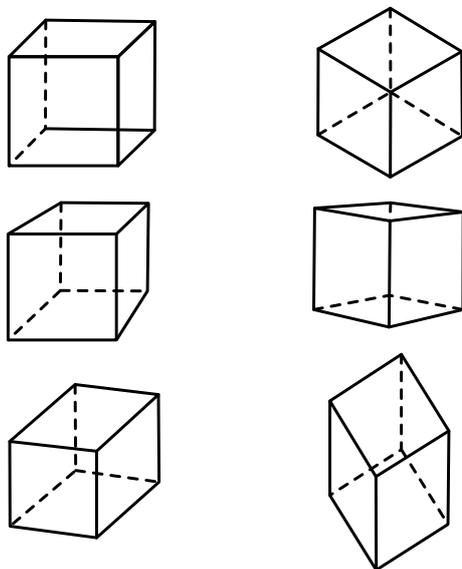


Abb. 6.4.21 Aufgabe aus *Mathe live 9* zum Vergleich von Zentral- und Kavalierperspektive [6, S. 30]

In der nebenstehenden Abbildung wird eine weitere Aufgabe aus dem Schulbuch zitiert. Hier sind sechs Projektionen eines Würfels dargestellt und die Schülerinnen und Schüler sollen zuerst entscheiden, welche im Sinne der Zentralperspektive gezeichnet sind und danach die anderen Darstellungsarten nennen. Diese wurden in *Mathe live 8* zum Thema Dreitafelprojektion vorgestellt. Dabei handelt es sich um Kavalier- und Militärperspektive sowie Iso- und Dimetrie. Es ist daher positiv zu erwähnen, dass hier ein Bezug zu vorherigen Themen erstellt wird.

Beide Schulbücher behandeln die Zentralprojektion als Projekt oder als zusätzliche Information auf wenigen Seiten und nicht als eigenes Kapitel. Dies zeigt den geringen Stellenwert des Themas. So wird in beiden Fällen die Projektion über die Konstruktion mithilfe von Horizont und Fluchtpunkt definiert und nicht als geo-

metrische Abbildung. Teilweise konnten sogar Unstimmigkeiten bis hin zu Fehlern aufgezeigt werden. Ebenso behandeln die zugehörigen Aufgaben das Thema eher oberflächlich.

#### 6.4.4 Projektion in der Oberstufe

Die vorherigen Aufgaben entstammen alle aus Schulbüchern der Sekundarstufe I. Wir wollen in diesem Abschnitt einige Aufgaben aus dem Buch *Neue Wege* der Sekundarstufe II zeigen, welche den Teilbereich *Lineare Algebra* und *Analytische Geometrie* abdeckt.

Wir finden die Parallel- und Zentralprojektion im Abschnitt für Geraden im Raum und der Berechnung von *Spurpunkten*, d.h. den Schnittpunkten einer Gerade mit den drei Koordinatenebenen. In einem Aufgabenbeispiel mit Lösung wird ein Dreieck im Raum, dessen Koordinaten bekannt sind, entlang eines Vektors auf die  $x_1x_2$ -Ebene projiziert. Im Fall der Zentralprojektion wird dasselbe Dreieck auf die  $x_1x_3$ -Ebene abgebildet, wobei das Zentrum wieder vorgegeben wird [42, S. 59].

Einige Seiten später wird dieses Thema für die Berechnung von Schattenbildern wieder aufgegriffen. Als Anregung dienen Lichteffekte in der Computergrafik, denn durch die Schatten der Objekte wirkt eine Szene realer. Eine Abbildung zeigt nach der Erklärung die Schatten eines Objektes bei einer Parallel- bzw. einer Zentralprojektion. Als mögliche Lichtquellen werden die Sonne bzw. eine Lampe genannt.

Nach einigen Aufgaben wird die Zentralperspektive als Projektthema vorgestellt. Als Einführung dient ein bekannter Kupferstich von *A. Dürer*, in welcher der Künstler über einen Faden und einer klappbaren Leinwand das Bild einer Laute punktwise

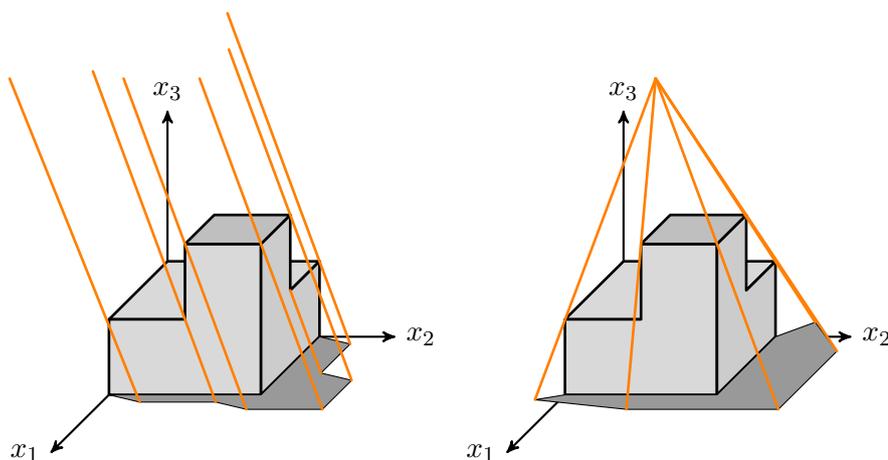


Abb. 6.4.22 Der Schattenwurf bei Sonnenlicht (links) und einer Lampe (rechts) (vgl. [42, S. 69])

konstruiert. Danach wird der Fluchtpunkt anhand eines Fotos von Gleisen vorgestellt, mit der Aussage, dass parallele Kanten in den Bildern nicht mehr parallel sind. Dass es auch Geraden gibt, welche wieder auf parallele Geraden abgebildet werden, wird nicht erwähnt.

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Zentralprojektion eines Würfels berechnen. Aufgrund der gedrehten Lage des Würfels hat das Bild zwei Fluchtpunkte. Anhand der Bildkoordinaten sollen die Schülerinnen und Schüler nun zeigen, dass sich die Bildkanten des Würfels in diesen Punkten schneiden. Danach folgt die Aufgabenreihe zur Erzeugung eines Rot-Grün-Bildes des Würfels. Damit endet das Projektthema.

In einem späteren Kapitel über Matrizen und geometrischen Abbildungen wird das Thema Projektion wieder aufgegriffen [42, S. 184]. In einem Aufgabenbeispiel ist der Schatten eines Würfels mit einer aufgesetzten Pyramide auf einer schiefen Ebene gezeigt. An einem Beispiel wird ein Bildpunkt unter einer Parallelprojektion mit vorgegebener Richtung berechnet. Die Schülerinnen und Schüler sollen danach zwei weitere Bildpunkte bestimmen. Im letzten Aufgabenteil wird die Matrix gesucht, welche multipliziert mit den Ortsvektoren der Punkte die Bildpunkte ergibt.

Es folgt ein Teil über die Verwendung linearer Abbildungen in der Computergrafik und zum Schluss gibt es einige Projektseiten zur Axonometrie [42, S. 197]. Hier werden verschiedene Koordinatensysteme passend zur Kavalier- und Militärprojektion sowie Isometrie und Dimetrie gezeigt.

Als zweites Buch wurde der *Lambacher Schweizer* für die Oberstufe untersucht. Auch hier werden zum Thema *Geometrische Objekte und Situationen im Raum* Schatten durch Sonnenlicht entlang eines gegebenen Vektors auf die Koordinatenebenen bestimmt. Es findet auch der Bezug zur Zentralprojektion mit einem Scheinwerfer als Lichtquelle statt. Eine Weiterführung über die Schattenbilder hinaus, wie im ersten Buch, findet nicht statt.

Damit endet die Vorstellung bestehender Aufgaben zur Projektion in aktuellen Schulbüchern. Das folgende Kapitel greift die o.g. Aufgabe zur Erzeugung eines Rot-Grün-Bildes wieder auf. Die Berechnung der Bildkoordinaten erfolgt dabei computergestützt mit einer dafür geeigneten Programmiersprache. Wir greifen dafür auf Inhalte in den Abschnitten *Analytische Betrachtung der Zentralprojektion* sowie die homogenen Koordinaten wieder auf.



## Kapitel 7

# Erzeugung einfacher Projektionen am Computer

Im zweiten Hauptteil dieser Arbeit wurde die Zentralprojektion aus rein mathematischer Sicht vorgestellt und weniger in Bezug auf Schule und Unterricht. Wir wollen nun an Kapitel 4.6, Zentralprojektion in der Computergrafik, anknüpfen. Wir haben gezeigt, dass sich einfache Szenen aus den drei Einheitskörpern Würfel, Prisma und Pyramide erstellen lassen, indem die Körper entsprechend skaliert, gedreht und verschoben wurden. Mit einem Koordinatensystem lassen sich die Eckpunkte der Körper definieren. In Folge dessen werden die geometrischen Abbildungen Skalierung, Drehung und Verschiebung mithilfe von Matrizen berechnet, sofern es sich um lineare Abbildungen handelt. Wir haben in dem o.g. Kapitel gezeigt, dass dies bei der Verschiebung nicht der Fall ist, da bspw. der Ursprung nicht auf sich selbst abgebildet wird. Mit diesem Problem wurde die Verwendung von sog. *homogenen Koordinaten* motiviert, welche durch Anhebung des Raumes in die vierte Dimension eine Verschiebung linearisierte.

Wir wollen nun lineare Abbildungen und homogene Koordinaten verwenden, um mithilfe des Computers aus den drei Einheitskörpern Würfel, Pyramide und Prisma (Abb. 4.6.2, S. 182) Szenen von Gebäuden zu erstellen und diese sowohl parallel- als auch zentralprojektiv abzubilden. Dabei wird die Programmiersprache *Processing* verwendet, welche neben grafischen Darstellungen auch einfache Animationen ermöglicht. Nach dem Kernlehrplan der Oberstufe an Gymnasien und Gesamtschulen in NRW ist eine Auseinandersetzung mit objektorientierten Programmiersprachen im Informatikunterricht vorgesehen, allerdings wird die Sprache nicht vorgegeben. In Schulbüchern gängiger Verlage wie Cornelsen und Westermann wird *Java* verwendet. *Processing* basiert auf *Java*. Weiterhin ist *Processing* und der benötigte Editor (*Processing Development Environment*, Version 3.5.4) zum Schreiben und Ausführen von Skripten kostenlos erhältlich. Da Matrizen- und Vektorrechnung nötig ist, richten sich die Aufgabenvorschläge an den Unterricht der Sekundarstufe II an Ge-

samtschulen und Gymnasien. Für nähere Informationen und Programmbeispielen zu *Processing* sei auf das Buch [45] von D. Shiffmann hingewiesen, welcher auf seinem YouTube Kanal *The Coding Train* einige Videotutorials zur Verwendung der Sprache zur Verfügung stellt.

Bevor wir auf die Programmiersprache selbst eingehen, ein paar allgemeine Erklärungen zur Programmierung. Generell besteht ein Quellcode aus einer Reihe von Anweisungen, die der Computer auf Objekten bzw. Variablen anwendet, um eine definierte Zustandsänderung zu erbringen. Dazu folgendes Beispiel: zuerst wird eine Objekt mit dem Name *a* initialisiert und dann der Wert 5 zugeordnet. Somit gilt  $a = 5$  und der Zustand

„*a* existiert ohne Wert“

wird durch die Anweisung `= 5` in den Zustand

„*a* hat den Wert 5“

geändert. Genauso lassen sich auch eigene Funktionen definieren, indem Anweisungen auf ein Funktionsargument zusammengefasst werden und nacheinander, Zeile für Zeile, ausgeführt werden. Als Beispiel definieren wir eine Funktion, welche ein gegebenes Argument verdoppelt:

Funktion **Verdoppel**(*Zahl*) :

*Ergebnis* = 2 \* *Zahl*

**Return**(*Ergebnis*)

Die Funktion hat den Namen „Verdoppel“ und nimmt als Argument ein Objekt mit dem Namen „Zahl“ entgegen. Dieses wird in der zweiten Zeile verdoppelt und das Produkt in der Variablen *Ergebnis* gespeichert, welche dann im dritten Schritt durch die Anweisung **Return** von der Funktion ausgegeben wird. Damit lässt sich die Funktion mit verschiedenen Argumenten aufrufen, bspw. **Verdoppel**(4) gibt als Wert 8 zurück, welcher dann in einer weiteren Variablen mit dem Namen *Ergebnis1* gespeichert werden kann. Weitere Beispiele sind:

*Ergebnis2* = **Verdoppel**(50)

*Ergebnis3* = **Verdoppel**(5.5)

*Ergebnis4* = **Verdoppel**(-10)

Damit wird *Ergebnis2* der Wert 100 zugeordnet, *Ergebnis3* 11 und zuletzt *Ergebnis4* der Wert -20.

In der Entwicklung von Programmiersprachen existieren zwei Hauptströme: prozedural oder objektorientiert. Die ersten Sprachen wie *Fortran* (50er Jahre) oder *C* (70er Jahre) sind Ersterem zuzuordnen. In prozeduralen Sprachen gibt es allerdings keine Verknüpfung zwischen Anweisung und dem Objekt selbst. Dies ist charakteristisch für den zweiten Hauptstrom der Programmiersprachen, welche *objektorientiert* genannt werden. Hier können eigene Objekttypen definiert werden, welche bestimmte Eigenschaften enthalten. Ein Objekttyp „Quadrat“ wird über eine Kantenlänge definiert und kann zusätzlich noch Informationen über Linien- oder Füllfarbe enthalten. Damit ist ein Quadrat definiert, aber wenn der Benutzer dies auch in einem Fenster auf dem Bildschirm zeichnen möchte, braucht es eine Anweisung, bspw. **Zeichne**(*Quadrat*). Diese Anweisung macht aber für eine Zahl als Argument keinen Sinn, d.h. wir haben eine Anweisung, welche mit einem bestimmten Objekttyp verknüpft wird. Dies ist der große Unterschied zwischen prozeduralen und objektorientierten Sprachen. Daher werden Anweisungen in ersteren Sprachen als „Funktionen“ und in zweiteren als „Methoden“ bezeichnet. Ein Objekttyp und seine Methoden werden dann in sog. *Klassen* zusammengefasst. Da die hier verwendete Sprache *Processing* objektorientiert ist und für die Projektion eigene Klassen definiert wurden, wird in Abschnitt 7.3 ein einfaches Beispiel mit Kreisen als Objekttyp vorgestellt.

Szenen können mithilfe von Einheitskörpern erstellt werden. Daher wurde eine Klasse von Einheitskörpern in *Processing* definiert, welche als Unterklassen die Körper Würfel, Pyramide und Prisma hat. Diese Objekte werden über ihre Eckpunkte im dreidimensionalen Koordinatensystem definiert und können mithilfe von Abbildungsmatrizen skaliert, gedreht und verschoben werden, sodass bspw. aus einem Würfel ein Quader wird. Für die Darstellung auf dem Bildschirm werden die Eckpunkte anschließend mit Projektionsmatrizen abgebildet. Zur Verwendung der Zentralprojektion werden homogene Koordinaten genutzt und als Anwendungsbeispiel sog. Anaglyphenbilder erzeugt, welche die Schülerinnen und Schüler ausdrucken und ihre Wirkung mithilfe von Rot-Grün-Brillen überprüfen können. Wir wollen daher zuerst das Anaglyphenverfahren und dann die Entwicklerumgebung von *Processing* vorstellen. Zum Abschluss werden einige Aufgabenbeispiele zur Anwendung des Quellcodes besprochen.

## 7.1 Das Anaglyphenverfahren

Die Idee, Rot-Grün-Bilder am Rechner zu erstellen, wurde angeregt durch eine Aufgabe aus dem Schulbuch *Neue Wege (2011)* für die Oberstufe zu den Themen Lineare Algebra und Analytische Geometrie [42, S. 91 - 92]. Gegeben sind folgende vier Eckpunkte eines Würfels

$$A(0/3/0), B(4/0/0), D(3/7/0), E(0/3/5)$$

sowie der Ort einer Lampe mit  $L_1(12/3/3)$ . Diese beleuchtet den Würfel und die Schülerinnen und Schüler sollen nun die fehlenden Eckpunkte bestimmen sowie die Bildpunkte auf der  $x_2x_3$ -Ebene.

In einer daran anschließenden Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler den projizierten Würfel grün zeichnen und das Bild wiederholt bestimmen, wenn der Würfel von einer zweiten Lampe mit  $L_2(12/4/3)$  beleuchtet wird. Das zweite Bild sollen sie rot zeichnen. Den Würfel und die Lampen zeigen die Abbildungen 7.1.1 und 7.1.2. Die Farben der Lampen sowie ihre Position lassen auf das sog. *Anaglyphenverfahren* schließen, welches auf derselben Seite im Schulbuch auch kurz vorgestellt wird. Die Lampen befinden sich auf derselben Höhe und sind seitlich um 1 LE verschoben. Wir ersetzen nun die Lampen durch ein Augenpaar, welches auf den Würfel schaut. Die Augen nehmen jeweils ein leicht verändertes Bild des Würfels wahr, was Schülerinnen und Schüler daran erkennen können, das sich das Gesehene verändert, wenn sie abwechselnd die Augen schließen. Unser Gehirn baut aus beiden Bildern das räumliche Bild zusammen. Dieser Eindruck wird mithilfe des Anaglyphenverfahrens künstlich erzeugt, d.h. der Betrachter nimmt ein räumliches Bild wahr, obwohl er auf eine Ebene schaut.

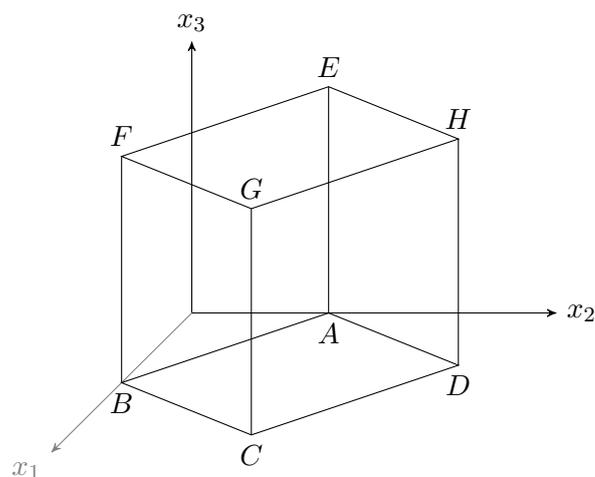


Abb. 7.1.1 Würfel der vorgestellten Schulbuchaufgabe

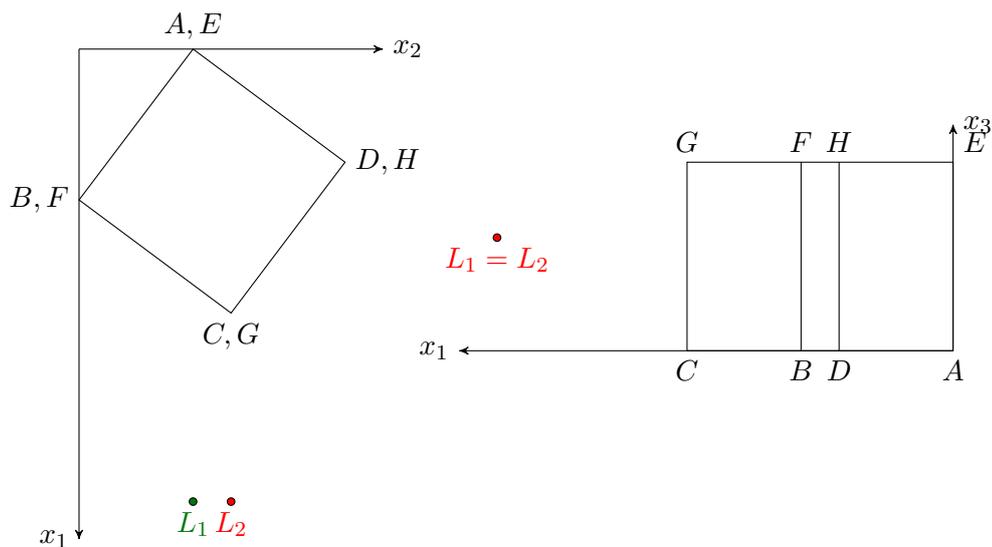


Abb. 7.1.2 Der Würfel und die beiden Lampen in Grund- und Seitenansicht

Abb. 7.1.3 zeigt das Verfahren mit den Farben Rot und Grün. Es handelt sich hierbei um sog. *Komplementärfarben*, d.h. die Überlagerung beider Farben ergibt schwarz. Mithilfe der Rot-Grün-Brille sehen die Augen dasjenige Bild des Würfels, welches durch Projektion mit dem Auge als Zentrum entstanden ist. Die Würfelprojektion vom linken Auge wird grün gezeichnet. Das Glas ist aber rot gefärbt, d.h. das grüne Bild erscheint schwarz, während gleichzeitig die rote Würfelprojektion ausgeblendet wird. Beide Augen sehen somit nur das für sie bestimmte Bild. Das Gehirn kann wieder den räumlichen Eindruck erzeugen, sofern der Betrachter auch den passenden Abstand zur Bildebene einnimmt.

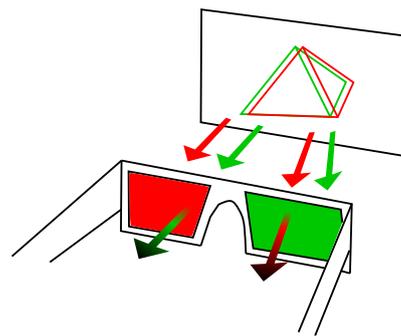


Abb. 7.1.3 Das Anaglyphenverfahren

Die Zentral- und Parallelprojektion wird in dem Schulbuch zum Thema „Spurpunkten“ von Geraden kurz angesprochen. Als *Spurpunkte* werden die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen bezeichnet. Das Buch liefert ein Rechenbeispiel. Hier wird die Parametergleichung der Geraden verwendet und der Parameter durch Nullsetzen der entsprechenden Koordinate bestimmt. Dies ist auch die Vorgehensweise für die Berechnung der Bildpunkte einer Projektion auf eine der Koordinatenebenen, wie sie im Aufgabenbeispiel 4.4.1, S. 142, schon durchgeführt wurde. Die Aufgabenstellung in dem Buch bzgl. des Würfels lässt allerdings offen, ob die

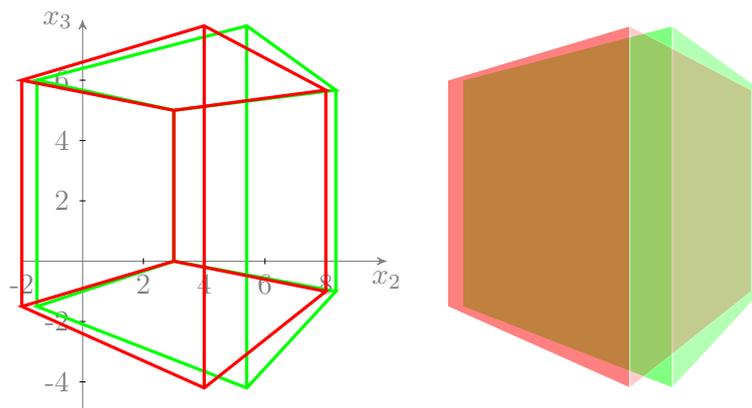


Abb. 7.1.4 Ergebnis der Schulbuchaufgabe

Schülerinnen und Schüler diese Rechnung nun 16 mal durchführen sollen. Da der Rechenweg für jeden Punkt derselbe ist, ist es sinnvoller, diesen einmalig mit dem Punkt  $P(p_1 / p_2 / p_3)$  und dem Zentrum  $L(l_1 / l_2 / l_3)$  durchzuführen. Wir gehen genauso vor wie in Kapitel 4.4.2, S. 152. Da in dieser Aufgabe  $E : x_1 = 0$  die Bildebene ist, müssen wir die erste Koordinate in der Parametergleichung der Projektionsgeraden null setzen. Für die Bildpunkte erhalten wir somit folgende Formel:

$$P' \left( 0 / \frac{l_1 p_2 - l_2 p_1}{l_1 - p_1} / \frac{l_1 p_3 - l_3 p_1}{l_1 - p_1} \right). \quad (7.1.1)$$

Wir setzen nun für jedes Zentrum die Eckpunkte des Würfels ein. In Abb. 7.1.4 ist links das Ergebnis zu sehen. Im rechten Bild ist derselbe Würfel als geschlossener Körper abgebildet. Mit einer Rot-Grün-Brille können die Schülerinnen und Schüler sich dann selbst davon überzeugen, dass der 3D Effekt funktioniert, wenn sie den richtigen Abstand zum Bild einnehmen.

Mit der Gl. (7.1.1) ist es nun auch möglich, den Computer für die Berechnung und Darstellung der Bildpunkte zu verwenden, in dem wir Quellcode in einer geeigneten Programmiersprache schreiben. Denn der Rechenweg ist immer derselbe. Der Anwender gibt das Zentrum sowie eine Liste von Punkten vor. Der Computer soll dann diese Liste durchgehen, jeden Punkt in die o.g. Formel einsetzen und eine Liste mit den Bildpunkten herausgeben. Geben wir auch noch vor, welche Punkte der Liste miteinander durch eine Linie verbunden werden, so kann der Computer das Ergebnis zeichnen. Nicht jede Programmiersprache ist für jede Anwendung geeignet. Die Wahl fiel auf *Processing*, denn hier ist es einfach, Linien durch Angabe des Anfangs- und Endpunktes zu zeichnen oder Animationen zu erzeugen. Sie ist ebenfalls objektorientiert und erfüllt damit eine Vorgabe des Lehrplans für den Informatikunterricht der Oberstufe.

## 7.2 Die Entwicklerumgebung von *Processing*

Bevor wir den Quellcode vorstellen, wird in diesem Abschnitt die Oberfläche des verwendeten Editors sowie einige Eigenschaften der Programmiersprache erläutert. Die Abb. 7.2.1 zeigt ein Beispiel für die Erzeugung von Quader und Prisma, welche zu einem Haus zusammengefügt wurden. Nach Ausführung des Programmes entsteht das weiße Kantenmodell auf schwarzem Hintergrund.

Der Quellcode ist in verschiedene Bereiche aufgeteilt, am linken Rand befindet sich die Zeilennummerierung. Für die Projektion wurden eigene Funktionen und Objekte definiert, welche unter den obigen Reitern *Matrics* und *Shape* zu finden sind. Die Ausführung der Methoden erfolgt zeilenweise. Jede Zeile, welche Befehle enthält, muss mit einem Semikolon beendet werden.

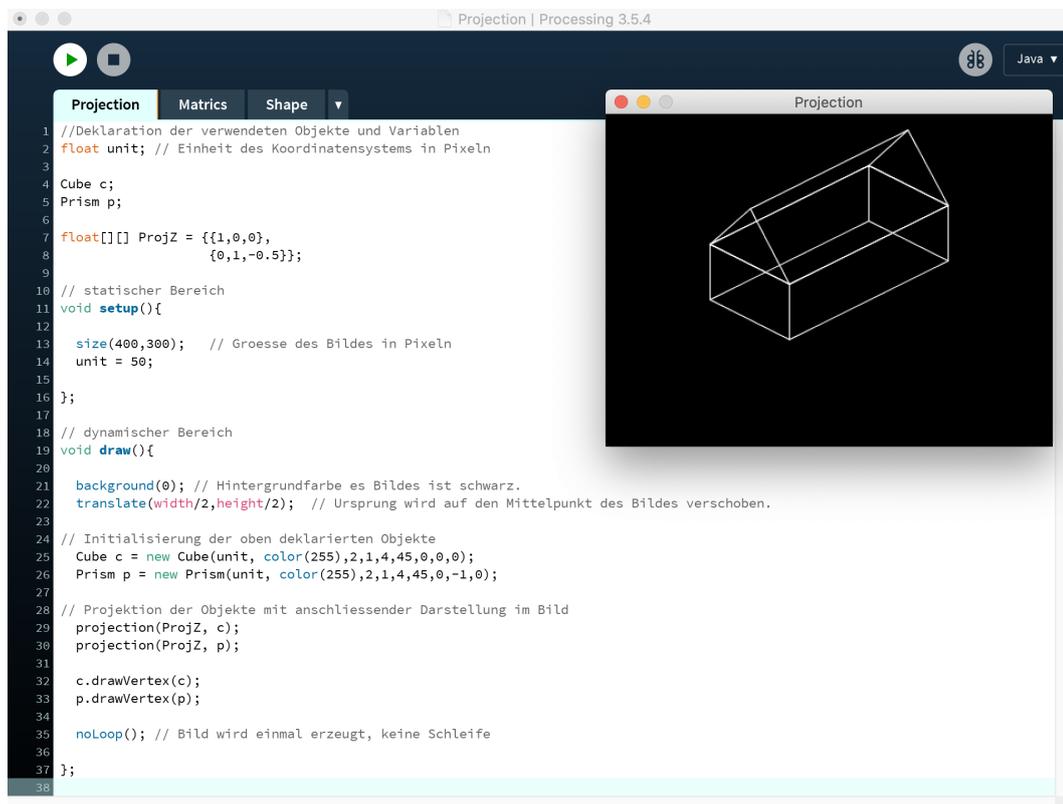


Abb. 7.2.1 Der Editor von *Processing*

In Zeile 1 wird mit `//` ein Kommentar eingefügt. Nach dieser Zeichenfolge wird alles nachfolgende in der Zeile bei der Ausführung übersprungen. In Zeile 2 wird mit `float` die erste Variable mit der Kennzeichnung `unit` erzeugt und die Zeile mit einem `;` beendet. Die Sprache *Processing* verlangt für jede Variable neben einem eindeutigen Namen eine Zuordnung zu einer Klasse, wie `Cube` oder `Prism` in Zeile 4

und 5, oder zu einer Zahlenmenge. Mit `int` werden Zahlen vom Typ *Integer* erzeugt, welche ganzzahlig sind, wie z.B. 1 oder -5. Mit `float` werden Fließkommazahlen erzeugt, wie 1.5 oder -0.3333. Zu den Fließkommazahlen gehören aber auch die ganzen Zahlen, sodass in Zeile 14 der Variable `unit` der Wert 50 zugeordnet werden kann. Jede Zahl vom Typ `integer` ist auch vom Typ `float`, aber nicht umgekehrt. Bspw. würde

```
int unit ;
unit = 3.1 ;
```

zu einer Fehlermeldung führen. In Zeile 4 wird ein Objekt der Klasse `Cube` mit dem Namen `c` erzeugt. Da es sich hier um eine eigene definierte Klasse handelt, dessen Parameter unter dem Reiter *Shape* zu finden sind, wird die Typbezeichnung nicht farblich hervorgehoben.

Die Koordinaten der projizierten Eckpunkte der Körper werden über eine Matrix-Vektor-Multiplikation berechnet, sodass vorab eine Matrix initialisiert wird. Die Einträge können auch Fließkommazahlen sein, wodurch die Matrix mit der Bezeichnung *ProjZ* in Zeile 7 durch `float[][]` definiert wird. Die beiden Klammern stehen für eine Liste von Listen, denn die Zeile einer Matrix wird von der Sprache als eine Liste von Zahlen interpretiert und die ganze Matrix wiederum als eine Liste von Listen. Die verwendete Projektionsmatrix ist daher

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Anders als bei `unit` wird bei der Initialisierung der Matrix direkt auch ein Wert zugeordnet. Beide Vorgehensweisen sind in *Processing* erlaubt. Da aber die Einheit im zugrunde gelegten Koordinatensystem abhängig ist von der Größe des Bildes in Zeile 13, wird der Wert erst in Zeile 14 zugeordnet. Die Projektionsmatrix dagegen ist unabhängig und kann direkt mit ihren Werten erzeugt werden. Durch diese Aufteilung wird der Quellcode besser lesbar. Damit ist der Abschnitt der Deklaration aller verwendeter Objekte und Variablen vollständig.

Anschließend wird in *Processing* in zwei Bereiche unterschieden. Der statische Bereich wird mit

```
void setup() {
    ...
}
```

gekennzeichnet. `setup()` ist eine Funktion, welche aufgrund der leeren, runden Klammern keine Argumente benötigt. Mit `void` wird signalisiert, dass die Funktion nach ihrer Ausführung kein Objekt zurückgibt. Mit `{ }` wird eine Umgebung erzeugt, in welcher der Benutzer einige Parameter, wie die Größe des Fensters mit

`size(Breite, Höhe)` in Pixeln, festlegen kann. Um die Körper zu erzeugen, werden die Eckpunkte mithilfe von Koordinaten beschrieben, sodass es hierfür nötig ist, eine benutzerdefinierte Einheit anzugeben, um die Objekte je nach Fenstergröße skalieren zu können.

Die letzte Umgebung ist der dynamische Bereich und wird mit

```
void draw() {  
    ...  
}
```

gekennzeichnet. Hier werden die im Fenster grafisch erzeugten Elemente definiert. Diese Umgebung wird von *Processing* standardmäßig mehrfach in einer Schleife ausgeführt, weshalb dieser Bereich als dynamisch bezeichnet wird. Dies hat den Vorteil, dass sich Objekte im Fenster bewegen können. Bspw. kann ein Objekt sich drehen, wenn bei der Rotation der Winkel nach jedem Durchlauf um  $1^\circ$  erhöht wird.

Die Hintergrundfarbe soll schwarz sein, weshalb die Funktion `background()` das Argument 0 erhält. Die Codierung von Farben wird in einem späteren Abschnitt erläutert. In Zeile 22 wird der Ursprung des Koordinatensystems, welcher sich standardmäßig in der oberen linken Ecke befindet, zum Mittelpunkt des Fensters verschoben. In Zeile 25 und 26 werden die Parameter des Würfels und des Prismas definiert, sodass das Kantenmodell des Hauses entsteht. Näheres zu den Parametern wird im anschließenden Unterkapitel erläutert. Die Eckpunkte des Hauses befinden sich noch in der dritten Dimension, weshalb beide Körper in Zeile 29 und 30 mithilfe der Matrix-Vektor-Multiplikation auf die Bildebene projiziert werden. Diese ist implizit in der Projektionsmatrix *ProjZ* hinterlegt.

Zum Schluss wird das Kantenmodell beider Körper gezeichnet. Da es sich hierbei um ein statisches Bild handeln soll, wird mit `noLoop()` die Schleife unterbrochen.

## 7.3 Die Einheitskörper als Klassen

*Processing* ist eine objektorientierte Programmiersprache, in welcher Objekte mit gleichen Parametern zu sog. *Klassen* zusammengefasst werden. Dies ermöglicht den Aufbau einer hierarchischen Struktur, welches u.a. zu einer übersichtlichen, strukturierten Gestaltung des Quellcodes führt. Zur Erklärung, was unter Objektorientierung zu Verstehen ist, wird der Begriff der Klasse anhand eines Beispiels erläutert.<sup>1</sup> Wir stellen uns vor, wir wollen ein Bild mit vielen verschiedenen Kreisen erzeugen. Den Quellcode zeigt Abb. 7.3.1. Wir konstruieren zu Beginn einen Kreis, welcher über folgende Parameter erzeugt wird:

<sup>1</sup>Das Beispiel ist angelehnt an einem Videotutorial von D. Shiffman von seinem YouTube Kanal *The Coding Train*.

---

<code>stroke(0)</code>	Farbe der Umrandung ist schwarz.
<code>fill(200)</code>	Farbe der Füllung ist ein Grauton.
<code>ellipse(100,200,100,100)</code>	Zeichnet eine Ellipse, mit Mittelpunkt (100,200) und der Breite 100 sowie der Höhe 100.

Das zugrunde gelegte Koordinatensystem hat ihren Ursprung in der linken oberen Ecke. Die  $x$ -Achse weist nach rechts, die  $y$ -Achse nach unten, sodass es sich um ein linkshändiges Koordinatensystem handelt. Im Mathematikunterricht wird dagegen ein rechtshändiges System verwendet. Damit die Ellipse zum Kreis wird, müssen Breite und Höhe denselben Wert erhalten. Um weitere Kreise unterschiedlicher Größe und Farbe zu zeichnen, müssen die letzten beiden Befehle mehrfach kopiert werden (Abb. 7.3.1 Mitte). Wir fassen nun alle Kreise mit den Attributen Durchmesser, Farbe und Ort zu einer Klasse zusammen und nennen diese *BubbleClass*. Der Quellcode zu dieser Klasse wird in einem neuen Reiter geschrieben. Wir werden ihn später noch erläutern. Der Vorteil ist nun, dass jeder Kreis mit seinen Attributen in einer eigenen Variablen  $b_1, b_2, b_3$  und  $b_4$  vom Typ *Bubble* gespeichert wird (Abb. 7.3.1, unten).

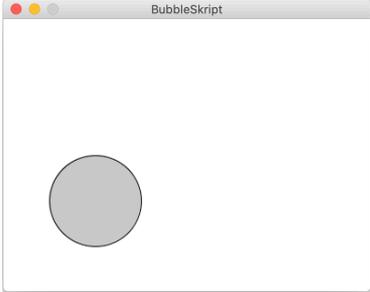
Mit `b1.display()` wird eine Methode aufgerufen, welche in der *BubbleClass* definiert wurde und nur von Objekten dieser Klasse aufgerufen werden kann. Wir erhalten also eine Verknüpfung von Attributen und Methoden zu einem Objekt. Nehmen wir ein weiteres Beispiel für ein Klassenkonstrukt. Eine Auto kann die Attribute *Farbe*, *Hersteller*, *gefahrne Kilometer* und *Tankfüllung* sowie die Methode *fahren* oder *tanken* haben. Sind diese Methoden innerhalb der Klasse definiert, kann ein Objekt außerhalb davon sie nicht aufrufen. So kann ein Kreis nicht die Methode *fahren* ausführen. Ein weiterer Vorteil zeigt Abb. 7.3.2. Hier werden mithilfe einer `for`-Schleife 50 Kreise in Zeile 13 zufällig erzeugt und gezeichnet. Ohne die Klasse müssten die Methoden `fill()` und `ellipse()` fünfzig mal hintereinander kopiert werden, was mühselig ist und den Quellcode unübersichtlich macht.

Wie eine Klasse definiert wird, zeigt Abb. 7.3.2 (unten). Jede Klasse muss einen eindeutigen Namen besitzen. Danach werden die Attribute definiert, d.h. die Position des Mittelpunktes mit `x`, `y`, der Durchmesser mit `diameter` sowie die Farbe mit `bubcol`. Mit `Bubble()` wird ein sog. *Konstruktor* aufgerufen, in welcher der Anwender den Attributen Werte zuordnet. Zum Abschluss steht in Zeile 14 die Methode `display()`, welche den Kreis in das Programmfenster zeichnet.

```

BubbleSkript
1 void setup(){
2   size(400,300);
3   background(255);
4 }
5
6
7 void draw(){
8   stroke(0);
9   fill(200);
10  //ellipse(x, y, x_diameter, y_diameter)
11  ellipse(100,200,100,100);
12  noLoop();
13 }
14

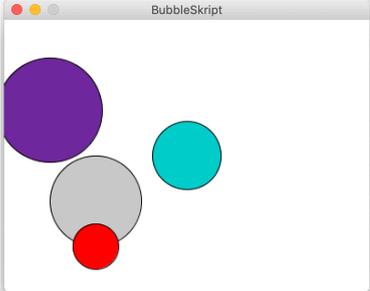
```



```

7
8 void draw(){
9   stroke(0);
10  fill(200);
11  ellipse(100,200,100,100);
12
13  fill(255,0,0);
14  ellipse(100,250,50,50);
15
16  fill(0,200,200);
17  ellipse(200,150,75,75);
18
19  fill(100,50,150);
20  ellipse(50,100,115,115);
21  noLoop();
22 }
23

```



```

BubbleSkript BubbleClass
1 Bubble b1;
2 Bubble b2;
3 Bubble b3;
4 Bubble b4;
5
6 void setup(){
7   size(400,300);
8   background(255);
9 }
10
11
12 void draw(){
13
14   Bubble b1 = new Bubble(100, 100, 200, color(200)); // Bubble(diameter, x, y, color)
15   b1.display(); // Zeichne Kreis
16
17   Bubble b2 = new Bubble(50, 100, 250, color(255,0,0));
18   b2.display();
19
20   Bubble b3 = new Bubble(75, 200, 150, color(0,200,200));
21   b3.display();
22
23   Bubble b4 = new Bubble(115, 50, 100, color(100,50,150));
24   b4.display();
25
26   noLoop();
27 }
28

```

Abb. 7.3.1 Das Zeichnen von Kreisen kann mithilfe einer Klassenstruktur vereinfacht werden.

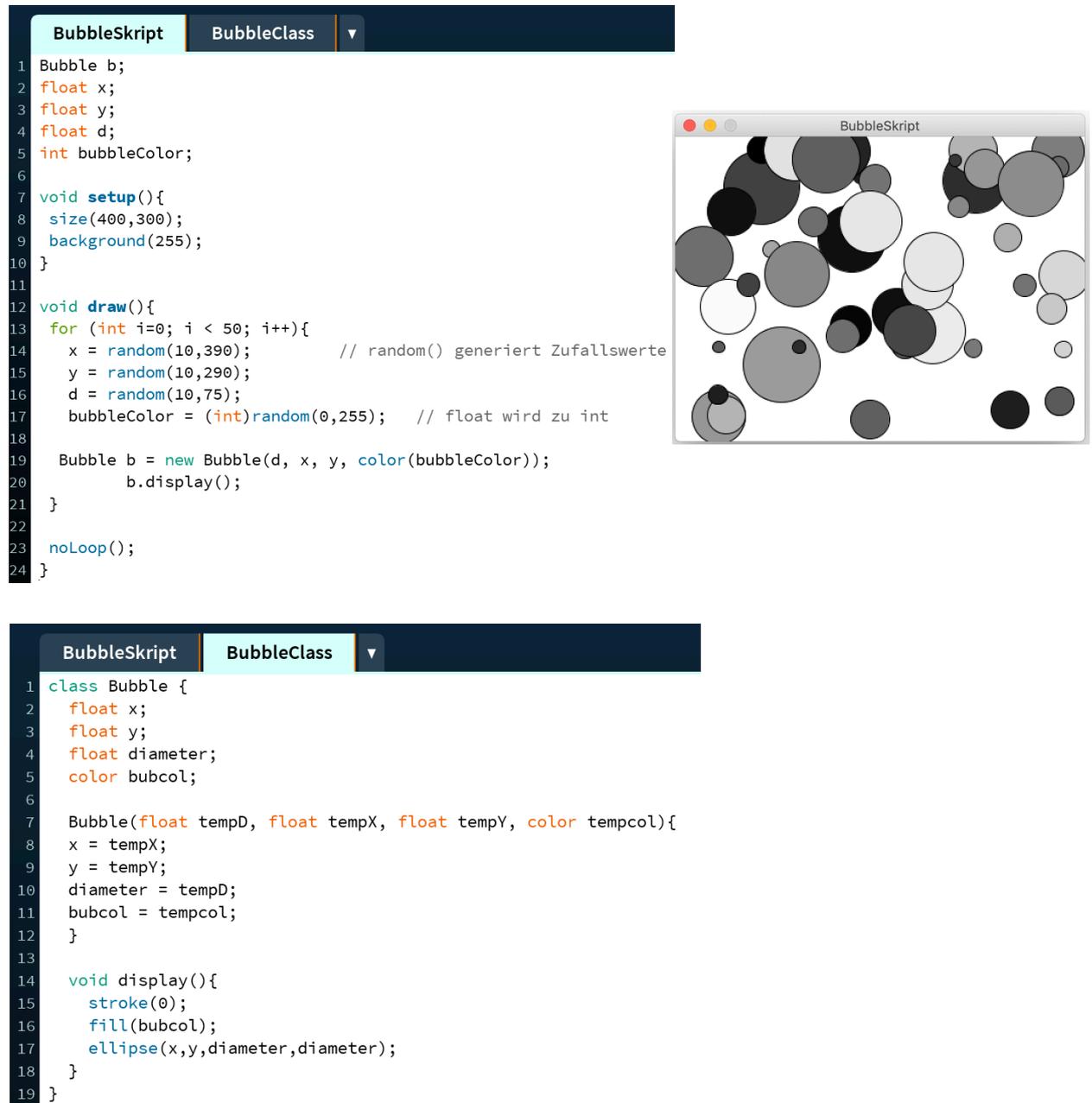


Abb. 7.3.2 Generierung von 50 zufälligen Kreisen und der Quellcode zur Definition der Kreisklasse *Bubbles*.

Klassen lassen sich auch ineinander schachteln. Wir können eine Oberklasse *Ebene Figur* definieren, welche wiederum die Unterklassen *Dreieck*, *Viereck* und *Fünfeck* enthält. Sie besitzen alle die Attribute *Ecken* und *Kanten*, allerdings ist die Anzahl der Ecken unterschiedlich sowie die Verknüpfung dieser mit den Kanten, sodass dies wiederum in einer Unterklasse spezifiziert wird.

Ähnlich verfahren wird mit den dreidimensionalen Körpern, welche für die Projektion verwendet werden. Die Oberklasse besteht aus dreidimensionalen Körpern mit Ecken und Kanten, welche wiederum in Unterklassen unterteilt sind. Der Würfel besteht aus acht Eckpunkten, welche über zwölf Kanten verbunden sind. Ihre Länge sei nicht festgelegt, wohl aber ihre Lage zueinander. So sollen die Kanten in jedem Eckpunkt senkrecht aufeinander stehen. Diese Eigenschaft erfüllt auch ein Quader, sodass beide Objekte zu einer Subklasse zusammenfasst wurden. Hingegen erfüllt ein schiefes Prisma nicht jede Anforderung. Sie bilden daher eine neue Unterklasse. Hierbei wurde sich allerdings auf ein gerades Prisma mit der Grundfläche eines gleichschenkligen Dreiecks beschränkt. Die dritte und letzte Unterklasse umfasst Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche, dessen Spitze sich über dem Mittelpunkt befindet. Abb. 7.3.3 zeigt eine grobe Übersicht der Klassenstruktur, sowie eine Parallelprojektion vierer Körper als Beispiel. Mithilfe der Methoden *scale*, *rotate* und *shift* werden die Kantenlängen bzw. die Lage der Körper im Raum bzw. zur *xy*-Ebene angepasst und diese zum Schluss mithilfe einer Matrix projiziert. Je nach Projektionsmatrix ist das Ergebnis eine Parallel- oder Zentralprojektion.

Jede Unterklasse enthält die Koordinaten der Eckpunkte von Würfel, Prisma und Pyramide, wie sie im Abschnitt 4.6.2, S. 182, eingeführt wurden. Die Oberklasse hat die Methode `transform()`, welche den Einheitskörper skaliert, rotiert und verschiebt. Dies erfolgt über eine Matrix-Vektor-Multiplikation aller Eckpunkte des Körpers. Die entsprechenden Matrizen sind in den Methoden `scale()`, `rotate()` und `shift()` hinterlegt. Mithilfe von homogenen Koordinaten werden alle drei Abbildungen linear, sodass ihre Verkettung das Produkt dreier Matrizen ist. Mit `transform()` wird diese Produktmatrix bestimmt und diese mit den Eckpunkten multipliziert. Die neue Liste an Koordinaten der Ecken wird dann in der Variablen des Objektes, z.B. `Cube c` gespeichert. Zum Schluss wird die in der Oberklasse definierte Methode `projection()` aufgerufen, welche eine erneute Matrix-Vektor-Multiplikation mit der vom Anwender definierten Projektionsmatrix ausführt, sodass am Ende das zweidimensionale Bild im Fenster entsteht.

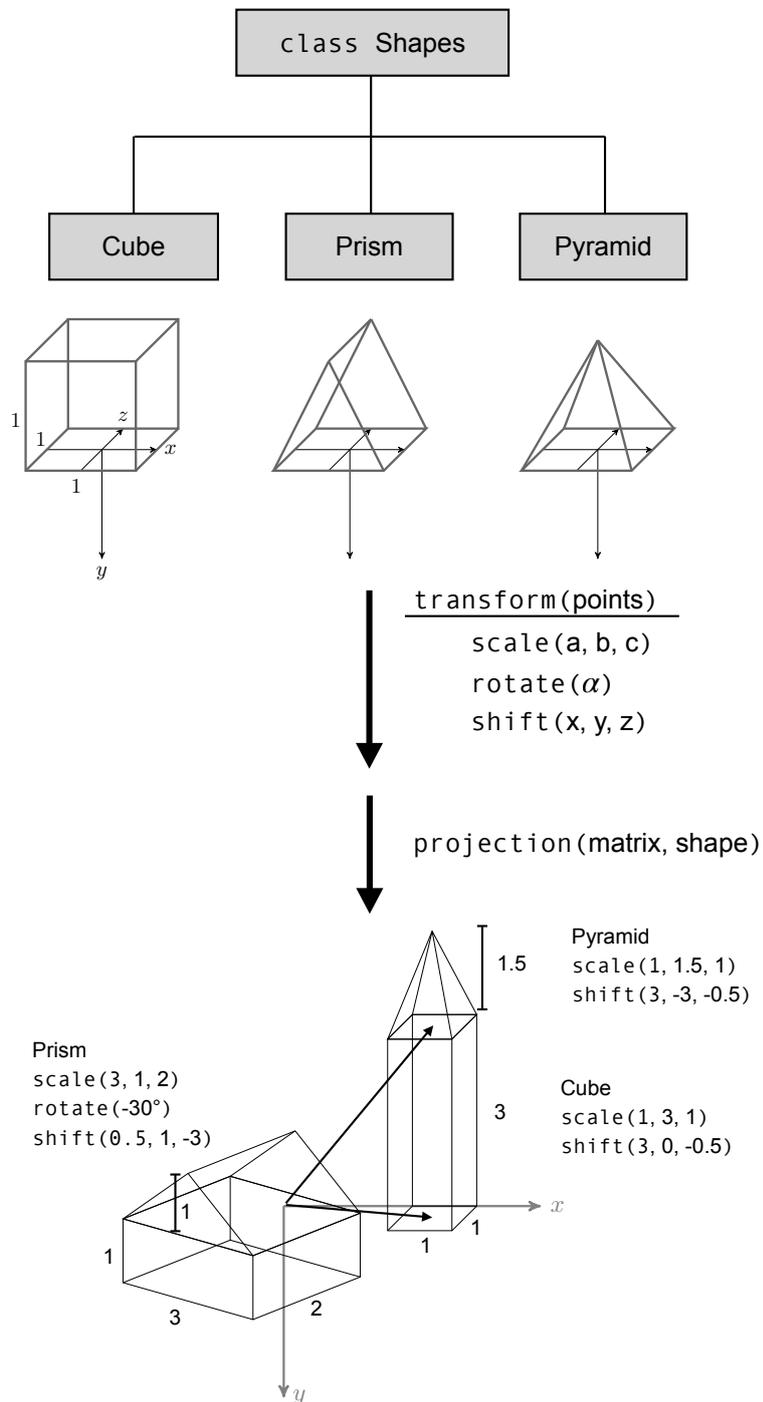


Abb. 7.3.3 Die Klasse *Shape* wird unterteilt in die Subklassen *Cube*, *Prism* und *Pyramid*. Das Bild ergibt sich nach Anwendung der Funktionen *transform* und *projection*.

## 7.4 *Processing* im Unterricht

Nach dem kurzen Überblick zur Entwicklerumgebung von *Processing* wird nun eine Aufgabenreihe vorgestellt, die im Mathematik- oder Informatikunterricht den Schülerinnen und Schüler eine sinnvolle Auseinandersetzung mit dem Programm ermöglichen soll. Wir gehen dabei von dem Quellcode aus, welcher in Abb. 7.2.1, S. 267, dargestellt ist. Die Schülerinnen und Schüler sollen einige Änderungen durchführen und beobachten, wie sich diese auf das Ergebnis auswirken.

### Aufgabenbeispiel 7.4.1

Wir wollen zunächst einige Farben des Bildes ändern. Beachte dabei nur die Zeilen 21, 25 und 26.

- a) Betrachten wir einmal die Farbe des Hintergrundes und der Kanten. Die Zahl 0 bedeutet schwarz, die Zahl 255 dagegen weiß. Ändere den Quellcode so ab, dass der Hintergrund weiß und die Kanten schwarz werden.
- b) Statt 0 oder 255 sind auch alle ganzzahligen Werte dazwischen erlaubt. Wähle nun andere Zahlen und beobachte, wie sich das Bild verändert.
- c) Wir wollen nun mehr Farbe einbringen. Jede Farbe lässt sich durch eine Kombination von drei Zahlen, welche ebenfalls zwischen 0 und 255 liegen, definieren. Ähnlich wie in einem Koordinatensystem werden sie in der Form (r,g,b) angegeben. Dabei steht r für Rot, g für Grün und b für Blau. Wir geben also mit den Zahlen den Anteil an Rot, Grün und Blau an. (255,0,0) ergibt bspw. ein sattes Rot. Färbe den Hintergrund blau, die Kanten des Quaders rot und die des Daches grün.
- d) Experimentiere nun ein wenig mit den Farben.  
Welche Farbe ergibt (100,0,0)? Oder die Kombination aus rot und grün durch (255,255,0)? Probiere weitere Kombinationen aus!

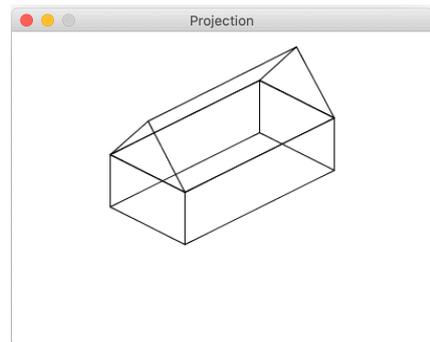
Für den Einstieg werden die Zeilen, in denen Änderungen vorzunehmen sind, genannt, um den Schülerinnen und Schüler eine bessere Orientierung zu bieten. In a) müssen lediglich die Zahlen 0 und 255 vertauscht werden (Abb. 7.4.1), für c) und d) werden die Parameter auf drei Zahlen erweitert.

a)

```
// dynamischer Bereich
void draw(){

    background(255);
    translate(width/2,height/2);

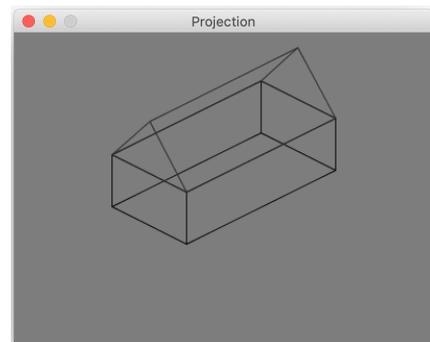
    // Initialisierung der oben deklarierten Objekte
    Cube c = new Cube(unit, color(0),2,1,4,45,0,0,0);
    Prism p = new Prism(unit, color(0),2,1,4,45,0,-1,0);
```



b)

```
background(125);
translate(width/2,height/2);

// Initialisierung der oben deklarierten Objekte
Cube c = new Cube(unit, color(10),2,1,4,45,0,0,0);
Prism p = new Prism(unit, color(50),2,1,4,45,0,-1,0);
```



c)

```
background(0,0,255);
translate(width/2,height/2);

// Initialisierung der oben deklarierten Objekte
Cube c = new Cube(unit, color(255,0,0),2,1,4,45,0,0,0);
Prism p = new Prism(unit, color(0,255,0),2,1,4,45,0,-1,0);
```

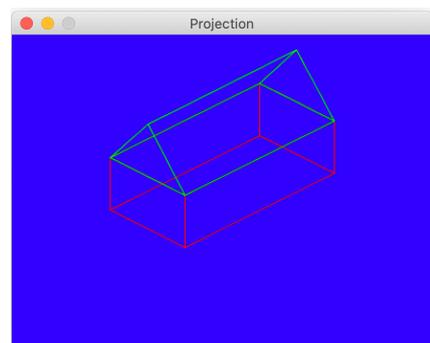


Abb. 7.4.1 Lösung der Aufgabe 7.4.1.

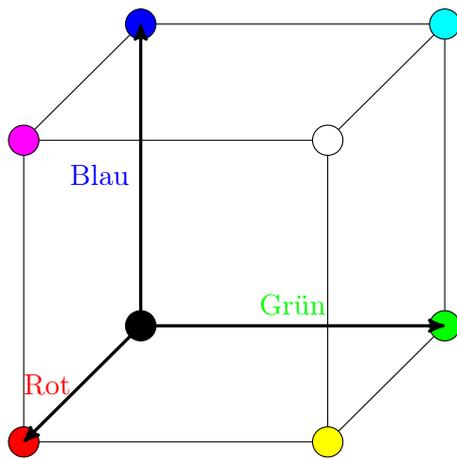


Abb. 7.4.2 Der *RGB*-Farbraum wird mit Achsen für Rot, Grün und Blau aufgespannt.

Farben werden in der Computergrafik in einem Farbraum dargestellt, d.h. einem Punkt im Raum wird eine Farbe zugeordnet. Im sog. *RGB*-Farbraum steht die erste Koordinate für den Anteil an Rot, die zweite für Grün und die letzte für Blau (Abb. 7.4.2). Der Raum wird auf einen Würfel der Kantenlänge 255 beschränkt, sodass Werte von 0 bis 255 verwendet werden können. Die Achsen sind diskretisiert, sodass die Koordinaten natürliche Zahlen sein müssen. Auf der Raumdiagonalen liegen alle Grautöne, wobei  $(0, 0, 0)$  schwarz und  $(255, 255, 255)$  weiß ist. Da für die Graustufen alle drei Koordinaten denselben

Wert erhalten, können in *Processing* diese mit einer Zahl aufgerufen werden, d.h. `color(10)` ist äquivalent zu `color(10, 10, 10)`.

Durch Veränderung der Anteile an Rot, Grün und Blau können alle Farben dargestellt werden. Abb. 7.4.3 zeigt eine Auswahl, welche sich auf den Seitenflächen des Würfels befinden. Links zeigt den Boden, die hintere Fläche und die linke Seite, rechts die drei anderen Würfelflächen.

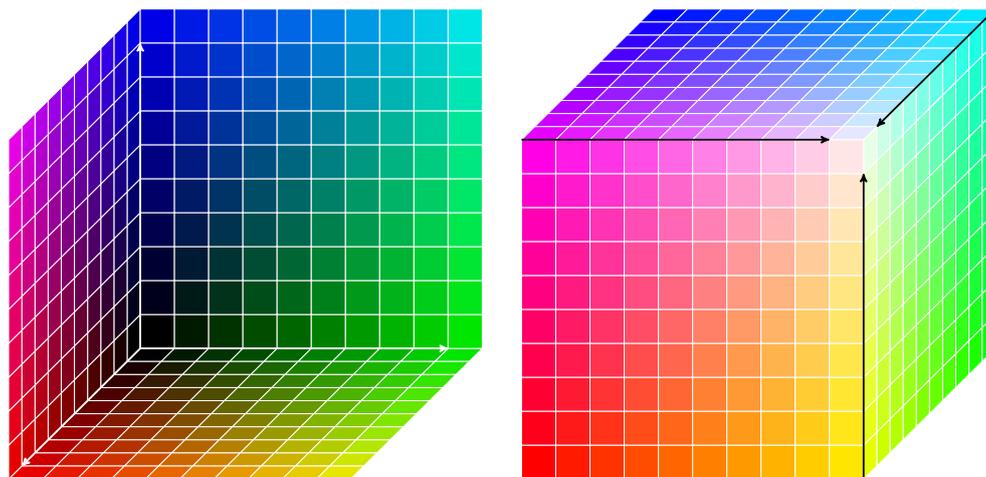


Abb. 7.4.3 Die Farben auf den Seitenflächen des Würfels

### Aufgabenbeispiel 7.4.2

Wir wollen nun Bewegung ins Bild bekommen. Stelle dafür die Hintergrundfarbe zurück auf weiß und die Kanten auf schwarz. Wir wollen jetzt den Drehwinkel von Quader und Prisma in Zeile 25 und 26 ändern.

- a) Verändere den Winkel auf  $0^\circ$ ,  $20^\circ$  und  $55^\circ$ . In welchem Uhrzeigersinn wird das Haus gedreht?
- b) Wir wollen jetzt, dass sich das Haus kontinuierlich dreht. Erstelle nach Zeile 9 unterhalb von der Projektionsmatrix `ProjZ` eine neue Variable mit dem Namen `angle` vom Typ `integer` und dem Wert 55. Ersetze dann bei Quader und Prisma den Winkel durch die Variable. Führe das Programm aus. Hat sich das Bild geändert?
- c) Das Haus dreht sich noch nicht, da das Bild nur einmal erzeugt wird und sich auch der Wert von `angle` nicht ändert. Entferne den Befehl `noLoop()` mitsamt des Kommentars. Schreibe stattdessen `angle = angle + 1`. Beende die Zeile mit einem Semikolon. Das Bild sollte sich jetzt drehen.
- d) Wir wollen nun, dass sich das Haus langsamer dreht. Überlege dir, warum wir dies erreichen können, wenn wir in der letzten Zeile `+1` durch `+0.5` ersetzen. Ändere dann die Zeile ab. Führe das Programm aus. Was ist nun passiert?
- e) Ändere im oberen Abschnitt die Typenbezeichnung vor der Variablen `angle` zu `float`. Warum funktioniert das Programm jetzt?
- f) Im dynamischen Bereich findest du den Befehl `background(255)`. Verschiebe ihn in den statischen Bereich, sodass er sich innerhalb der geschweiften Klammern befindet. Führe das Programm aus. Was ist nun passiert? Hast du eine Erklärung?

Im zweiten Aufgabenteil soll nun das Haus gedreht werden. Teil a) arbeitet noch statisch mit dem Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler sich mit den Parametern der Objekte in Zeile 25 und 26 auseinandersetzen. Bei der Erzeugung des Quaders und des Prismas ist die Reihenfolge der Parameter wichtig, damit die eingegebenen Werte den Attributen der Unterklassen richtig zugeordnet werden. Die Parameter sind: Einheit des Koordinatensystems, d.h. wie viele Pixel 1 LE sind, die Farbe der Kanten, die Maße des Körpers, der Drehwinkel um die senkrechte Koordinatenachse, die Verschiebung bzgl. des Ursprungs:

Cube (	1 LE,	55 px
	Farbe,	schwarz
	Breite,	2
	Höhe,	1
	Tiefe,	4
	Drehwinkel,	0°
	Verschiebung in x,	0
	y,	0
	z )	0

Die Veränderung des Drehwinkels an der richtigen Stelle ist daher als Einstieg für diesen Aufgabenteil konzipiert. Die Lösung zeigt Abb. 7.4.4. Für 0° sind auch die Angaben der Maße 2, 1, 4 einfacher zuzuordnen. Die Werte sind in der Reihenfolge x, y, z definiert. Da aber das Koordinatensystem anders als in der Schule gedreht ist, erscheint die Reihenfolge Breite, Höhe, Tiefe erstmal unge-

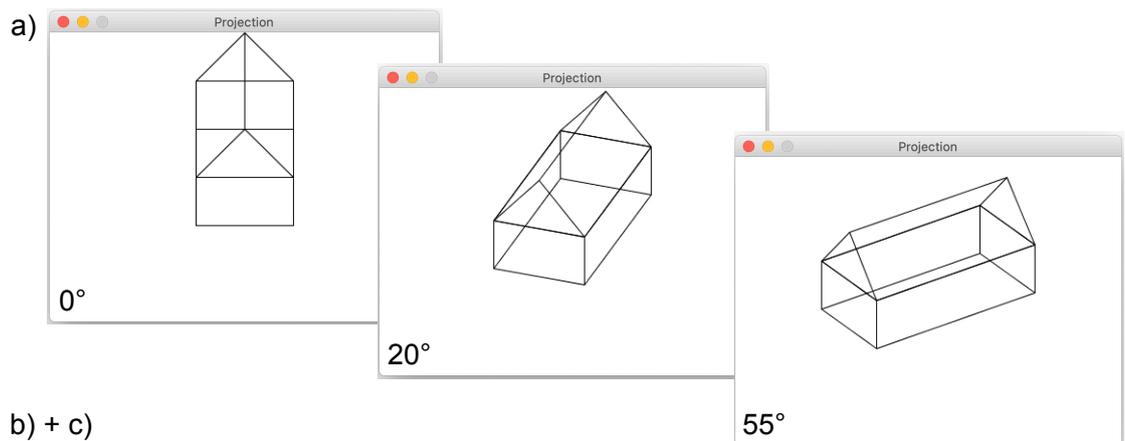
wöhnlich gewählt zu sein. Anhand der drei Bilder ist leicht ersichtlich, dass das Haus mit dem Uhrzeigersinn um die senkrechte Mittelachse des Hauses rotiert.

b) und c) ist eine schrittweise Erzeugung der Animation. Nach jedem Durchgang der Schleife soll sich der Drehwinkel um 1° erhöhen. Wir brauchen daher eine Variable, welche im oberen Abschnitt zunächst als Integer deklariert wird, da der Startwinkel und die Erhöhung ganzzahlig sind. Zudem muss der Befehl `noLoop()` entfernt werden. Die letzte Zeile mit `angle = angle + 1` erscheint zunächst ungewöhnlich. Aufgrund des Gleichheitszeichens könnten Schülerinnen und Schüler hier auch eine Gleichung mit der Unbekannten *angle* vermuten, welche allerdings keine Lösung hat. Dies ist aber eine mathematische Interpretation des Zeichens =. Im Sinne der Programmiersprache bedeutet = eine Zuordnung, welche von links nach rechts gelesen werden muss. Der Variablen *angle* wird der Wert `angle + 1` zugeordnet. Im Programmablauf passiert daher Folgendes: der ursprüngliche Wert von *angle*, z.B. 55, wird um 1 erhöht und die Summe wieder der Variablen *angle* zugeteilt. D.h. das Programm überschreibt den ursprünglichen Wert mit 56. Die Schleife beginnt ab `background(255)` erneut, sodass nun das Haus um 56° gedreht gezeichnet wird.

Im nächsten Teil sollen die Schülerinnen und Schüler sich mit den Typen *integer* und *float* sowie einer Fehlermeldung auseinander setzen. Damit sich das Haus langsamer dreht, muss der Winkel nach jedem Durchgang um weniger als 1° erhöht werden, d.h. der Summand muss durch eine Fließkommazahl ersetzt werden, was dann direkt zu einer Fehlermeldung führt (Abb. 7.4.4, Teil d)). Da der Winkel bei der Deklaration als Integer angegeben wurde, stimmt der Wert mit jenem nicht mehr überein. Die Schülerinnen und Schüler müssen daher den Typ zu *float* ändern, womit auch die Fehlermeldung verschwindet.

Der letzte Punkt f) soll zeigen, warum es wichtig ist, dass `background(255)` im dynamischen Bereich, d.h. innerhalb der Schleife liegen muss. Intuitiver wäre es, die Hintergrundfarbe im statischen Bereich zu definieren, direkt nach der Größe des

Fensters. Wird die Angabe verschoben, entsteht keine Fehlermeldung, aber es passiert dennoch etwas Merkwürdiges, wie in Abb. 7.4.4 zu erkennen ist. Bei der Drehung hinterlässt das Haus eine schwarze Spur, sodass das Objekt nach einer Umdrehung nicht mehr erkennbar ist. Die Animation besteht aus einer Vielzahl von Bildern, welche vom Programm in einem bestimmten Zeittakt gezeichnet werden, sodass es für das Auge wie eine bewegte Szene erscheint. Nun ist zu beachten, dass nach jedem Durchgang der Schleife, das Bild des Hauses gelöscht werden muss, bevor das neue gezeichnet wird. Daher muss am Anfang der Schleife das Fenster wieder auf weiß zurückgesetzt werden.



b) + c)

```
float[][] ProjZ = {{1,0,0},
                  {0,1,-0.5}};
```

```
int angle = 55; //Drehwinkel
```

```
// statischer Bereich
void setup(){
```

```
  size(400,300);
  unit = 50;
```

```
};
```

```
// dynamischer Bereich
void draw(){
```

```
  background(255);
  translate(width/2,height/2);
```

```
// Initialisierung der oben deklarierten Objekte
```

```
Cube c = new Cube(unit, color(0),2,1,4,angle,0,0,0);
Prism p = new Prism(unit, color(0),2,1,4,angle,0,-1,0);
```

```
// Projektion der Objekte mit anschließender Darstellung im Bild
projection(ProjZ, c);
projection(ProjZ, p);
```

```
c.drawVertex(c);
p.drawVertex(p);
```

```
  angle = angle + 1;
```

```
};
```

e)

```
float angle = 55; //Drehwinkel
```

d)

```
// Projektion der Objekte mit anschließender Darstellung im Bild
projection(ProjZ, c);
projection(ProjZ, p);
```

```
c.drawVertex(c);
p.drawVertex(p);
```

```
  angle = angle + 0.5;
```

```
};
```

Type mismatch, "float" does not match with "int"

f)

```
// statischer Bereich
void setup(){
```

```
  size(400,300);
  unit = 50;
```

```
  background(255);
};
```

```
// dynamischer Bereich
void draw(){
```

```
  translate(width/2,height/2);
```

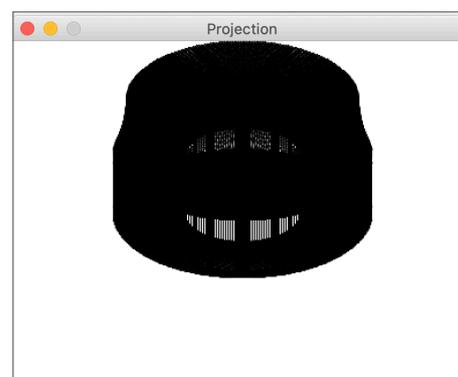


Abb. 7.4.4 Lösung der Aufgabe 7.4.2.

**Aufgabenbeispiel 7.4.3**

Wir wollen nun die Maße des Hauses ändern und einen Turm hinzufügen. Entferne daher die Variable `angle`, verschiebe `background(255)` wieder in den dynamischen Bereich, entferne die Zeile `angle = angle + 0.5` (es entsteht eine Fehlermeldung, welche wir erst einmal ignorieren werden) und schreibe stattdessen `noLoop()`. Schließe die Zeile wieder mit einem Semikolon ab.

- a) Ändere die Parameter des Quaders und des Prismas so ab, dass das Haus 3 LE tief und um  $120^\circ$  gedreht ist. Die Fehlermeldung sollte verschwinden, sodass du das Programm wieder ausführen kannst.
- b) Wir wollen nun neben dem Haus den Turm zeichnen. Dazu müssen wir zwei neue Objekte zuerst deklarieren und dann im dynamischen Bereich initialisieren und zeichnen.
  - (1) Deklariere oberhalb des statischen Bereiches zwei neue Variablen mit `Cube turm` und `Pyramid spitze`. Orientiere dich dabei an der Deklaration der Objekte des Hauses.
  - (2) Gehe nun in den dynamischen Bereich und kopiere den Abschnitt ab `Cube c` bis `p.drawVertex(p)` und füge ihn unterhalb `p.drawVertex(p)` und oberhalb `noLoop()` ein.
  - (3) Passe nun die Namen der Variablen an die beiden neuen Objekte aus (1) an. Die Parameter kannst du erstmal übernehmen. Beachte, dass sich der Typ von `Prim` auf `Pyramid` geändert hat.
  - (4) Führe das Programm aus. Das Haus und der Turm sollten nun ineinander gezeichnet sein. Du kannst dem Turm auch eine andere Farbe geben.
- c) Wir wollen nun den Turm neben das Haus verschieben.
  - (1) Der Turm soll nun aus einem Quader mit einer quadratischen Grundfläche von 1.5 LE sowie einer Höhe von 2 LE und einer Spitzenhöhe von 1 LE bestehen. Ändere die Parameter für `Cube turm` und `Pyramid spitze` entsprechend ab. Denke daran, dass die Pyramide passend nach oben geschoben werden muss.
  - (2) Verschiebe nun den gesamten Turm rechts neben das Haus. Zwischen beiden Objekten soll keine Lücke sein.

```

Cube c;
Prism p;
b) (1)
Cube turm;
Pyramid spitze;

float[][] ProjZ = {{1,0,0},
                  {0,1,-0.5}};

// statischer Bereich
void setup(){

    size(400,300);
    unit = 50;

};

// dynamischer Bereich
void draw(){

    background(255);
    translate(width/2,height/2);

// Initialisierung der oben deklarierten Objekte
Cube c = new Cube(unit, color(0),2,1,3,120,0,0,0);
Prism p = new Prism(unit, color(0),2,1,3,120,0,-1,0);

// Projektion der Objekte mit anschließender Darstellung im Bild
projection(ProjZ, c);
projection(ProjZ, p);

c.drawVertex(c);
p.drawVertex(p);

b)

//Turm
Cube turm = new Cube(unit, color(0,0,255),2,1,3,120,0,0,0);
Pyramid spitze = new Pyramid(unit, color(0,0,255),2,1,3,120,0,-1,0);

projection(ProjZ, turm);
projection(ProjZ, spitze);

turm.drawVertex(turm);
spitze.drawVertex(spitze);

noLoop();
};
c) (1)

//Turm
Cube turm = new Cube(unit, color(0,0,255),1.5,2,1.5,120,0,0,0);
Pyramid spitze = new Pyramid(unit, color(0,0,255),1.5,1,1.5,120,0,-2,0);

c) (2)

//Turm
Cube turm = new Cube(unit, color(0,0,255),1.5,2,1.5,120,0,0,2.25);
Pyramid spitze = new Pyramid(unit, color(0,0,255),1.5,1,1.5,120,0,-2,2.25);

```

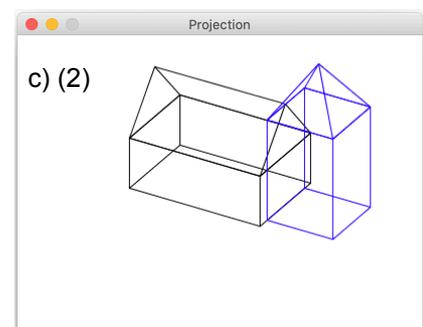
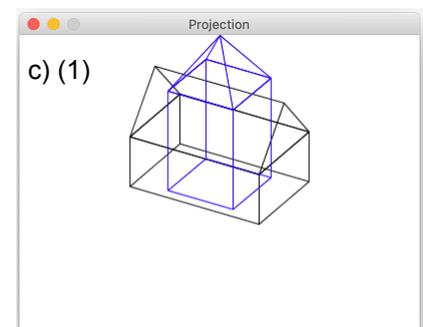
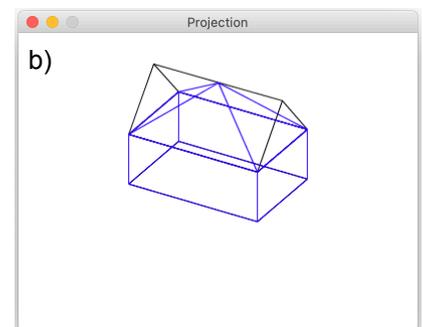
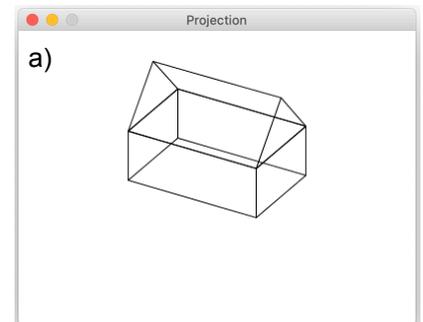


Abb. 7.4.5 Lösung der Aufgabe 7.4.3.

In der letzten Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler sich mit den restlichen Parametern der Objekte auseinandersetzen und zudem zwei weitere hinzufügen. Es wird ein statisches Bild erzeugt, sodass einige Einstellungen aus den vorherigen Aufgaben übernommen werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich daran gewöhnen, dass das Koordinatensystem in der Computergrafik anders ausgerichtet ist, als sie es vom Schulunterricht kennen.

Die Tiefe entspricht der Richtung der  $z$ -Achse, d.h. die 4 im ursprünglichen Quellcode muss durch eine 3 ersetzt werden. Dann wird das Haus um  $120^\circ$  gedreht. Hierbei ist zu beachten, dass auch das Koordinatensystem mit rotiert (Abb. 7.4.6), was bei der späteren Verschiebung des Turmes vom Vorteil sein wird.

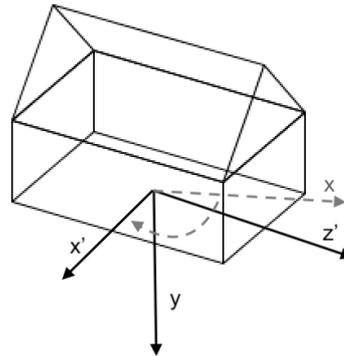


Abb. 7.4.6 Das zugrunde liegende Koordinatensystem, welches noch um  $120^\circ$  gedreht wurde.

In b) wird nun der Turm hinzugefügt. Da dieser aus einem Quader und einer Pyramide besteht, müssen zwei neue Objekte im oberen Abschnitt des Quellcodes deklariert werden (Abb. 7.4.3). Mit der Pyramide wird ein neuer Objekttyp `Pyramid` eingeführt. Die Attribute dieser Unterklasse sind dieselben wie beim Prisma, sodass die Schülerinnen und Schüler nichts Neues erlernen müssen. Nach der Deklaration werden im dynamischen Bereich beide Objekte mit den Maßen und dem Ort initialisiert, sowie die Methoden zur Projektion und zum Zeichnen aufgerufen. Da auch die Pyramide ein Objekt derselben Klassen wie Quader und Prisma ist, können die Schülerinnen und Schüler den bestehenden Abschnitt kopieren und müssen nur die Variablennamen anpassen. Dabei können sie sich an den bestehenden Quellcode orientieren. Dann werden die neuen Maße des Turmes übernommen. Die Schülerinnen und Schüler müssen dabei beachten, dass die Pyramide um -2 Einheiten auf der  $y$ -Achse verschoben werden muss, damit sie auf dem Quader liegt.

Im letzten Teil von c) wird die Pyramide verschoben, sodass sie am Haus anschließt. Hier ist nun der Vorteil, dass auch das Koordinatensystem mit dem Uhrzeigersinn um  $120^\circ$  um die  $y$ -Achse gedreht wird, sodass die Schülerinnen und Schüler den Turm entlang der  $z$ -Achse verschieben können (Abb. 7.4.6). Die Länge, um die verschoben wird, müssen die Schülerinnen und Schüler sich selbst anhand der Körper überlegen. In Abb. 7.4.3, c) (1) ist erkennbar, dass die Mittelpunkte der Bodenfläche von Haus und Turm übereinstimmen. Die Tiefe des Hauses beträgt 3 LE, beim Turm 2.5 LE,

d.h. es muss um die Hälfte ihrer Summe verschoben werden.

Nach diesem Aufgaben sollten die wichtigsten Bestandteile des Quellcodes verstanden sein, sodass im kommenden Abschnitt die Projektion behandelt wird. In Kap. 5.1, S. 206, wurde gezeigt, wie mithilfe einer Matrix die Parallelprojektion eines dreidimensionalen Körpers auf die Ebene  $x_2 = 0$  berechnet werden kann. Im folgenden Abschnitt wird dies auf die Projektion der  $xy$ -Ebene übertragen und gezeigt, wie Schülerinnen und Schüler den Richtungsvektor bzw. die Projektionsmatrix in *Processing* ändern können.

## 7.5 Parallelprojektion mit *Processing*

Wie im Abschnitt 7.2, S. 267, zuvor erwähnt, ist

$$ProjZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

die Projektionsmatrix, welche in den vorherigen Aufgaben verwendet wurde, um eine Parallelprojektion auf die  $xy$ -Ebene zu erzeugen. *Proj* steht für *Projektion* und *Z* für die Richtung entlang der  $z$ -Achse, d.h. der Betrachter schaut auf die  $xy$ -Ebene. Nachdem der Fokus auf die Erzeugung von den Objekten Quader, Prisma und Pyramide lag, wollen wir uns nun der Parallelprojektion zuwenden. Die Schülerinnen und Schüler beginnen wieder mit einem fertigen Programm (Abb. 7.5.2) und ändern diesen an bestimmten Stellen der Aufgabe entsprechend ab.

### Aufgabenbeispiel 7.5.1

Nachdem wir gelernt haben, ein Haus zu erzeugen, wollen wir uns jetzt mit der Parallelprojektion auf die  $xy$ -Ebene, unserem Bildschirm, beschäftigen.

- a) i) Sei  $\vec{p}_z = (z_1, z_2, z_3)^T$  die Richtung der Parallelprojektion und  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$  ein beliebiger Punkt im Raum. Bestimme das Bild bei der Projektion auf die  $xy$ -Ebene und zeige, dass

$$\frac{1}{z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & -z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Projektionsmatrix ist.

- ii) Schaue dir nun in Zeile 14 `ProjZ` an und berechne die Richtung der Parallelprojektion. Führe dann das Programm aus. Ist das Bild so, wie du es erwartet hast? Du kannst dich an dem Koordinatenachsen orientieren, welche in Zeile 28 erzeugt werden.
- b) Wir wollen nun wieder eine Animation erstellen, in dem wir die Richtung der Parallelprojektion entlang der Achsen ändern. Führe in Zeile 2 eine neue Variable `t` mit dem Wert 0 ein. Die Richtung soll  $(t, 0.5, 1)$  sein. Verändere `ProjZ` entsprechend und ersetze zudem Zeile 30 durch
- ```
t = t + 0.005;
if (t > 1.5) {
  noLoop();
}
```
- c) Bestimme die Projektionsmatrix `ProjZ` für die Richtung  $(0, 0.5, t)$ . Wie ändert sich nun die Richtung der Projektionsstrahlen? Setze den Anfangswert von  $t$  auf 1.0 und in Zeile 30 den Endwert 1.5 auf 2. Führe das Programm aus. Ändert sich das Bild so wie du es erwartet hast?

Wir haben in Kap. 5.1 gezeigt, dass die Parallelprojektion eine lineare Abbildung ist und durch eine Matrix beschrieben werden kann. Zur Herleitung stellen wir zuerst die Gleichung der Projektionsgeraden durch  $\vec{q}$  auf:

$$p : \vec{x} = \vec{q} + \mu \cdot \vec{z}$$

Nun bestimmen wir den Schnittpunkt mit der  $xy$ -Ebene und daraus die Matrix:

$$q_3 + \mu \cdot z_3 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{q_3}{z_3}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \frac{q_3}{z_3} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - \frac{z_1}{z_3} \cdot q_3 \\ q_2 - \frac{z_2}{z_3} \cdot q_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_p(\vec{q}) = \frac{1}{z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & -z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Angewendet auf Zeile 14 in Abb. 7.5.2 ergibt sich als Projektionsrichtung

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wird das Programm ausgeführt, so ergibt sich das linke Bild in Abb. 7.5.2. Anders als in den vorherigen Aufgaben können sich die Schülerinnen und Schüler an den Koordinatenachsen orientieren, welche durch die Funktion `worldKOS()` in Zeile 28 mit den Objekten projiziert werden.

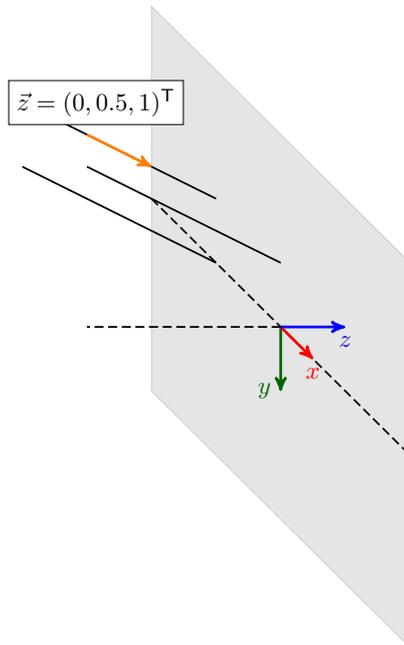


Abb. 7.5.1 Projektionsstrahlen aus a) der Aufgabe 7.5.1.

Da die erste Komponente null ist, gehen die Projektionsstrahlen nicht zur Seite. Die zweite und dritte Komponente gibt die vertikale Richtung an. Da die Achse nach unten zeigt und der Wert positiv ist, verlaufen die Strahlen von oben nach unten. Wir sehen daher im Bild das Dach des Hauses. Wir werden später im Teil c) noch zeigen, dass sich das Haus verkleinern wird, wenn der letzte Eintrag erhöht wird. In der nebenstehenden Abbildung sind die Projektionsstrahlen skizziert. Es handelt sich hierbei um eine schiefe Parallelprojektion.

In Teilaufgabe b) und c) wird mithilfe der Animationsschleife der Projektionsvektor systematisch verändert. Wie sich die Veränderungen auf das Haus auswirken, ist in Abb. 7.5.2 und 7.5.3 dargestellt. Das Haus befindet sich im Ursprung, d.h. in der Mitte des Bildschirms. Es ist nicht gedreht, sodass die Ansicht auf die Vorderseite bezogen ist. Wird nun im Teil b) der Strahl seitlich entlang der  $x$ -Achse gekippt, so wird die Seite des Hauses sichtbar. Je größer die erste Komponente in  $\vec{z}$  wird, um so verzerrter wirkt die Projektion. Dies ist vergleichbar mit der Verlängerung des Schattens, wenn sich die Sonne gen Horizont bewegt. Wird dagegen nur die letzte Komponente in  $\vec{z}$  verändert, so bewirkt dies eine Verkleinerung des Hauses. Dies ist anhand der Projektionsmatrix erkennbar, wenn wir uns die Teilmatrix mit den Einträgen anschauen, welche nur  $z_3$  enthalten:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_3} \end{pmatrix}$$

Dies entspricht einer Skalierung in der  $xy$ -Ebene, wobei beide Achsen um denselben Faktor verkleinert werden, wenn  $z_3$  vergrößert wird. Die Projektionsstrahlen treffen dabei flacher auf die Bildebene.

Projection
Matrics
Shape
▼

```

1 float unit = 50;
2
3 // statischer Bereich
4 void setup(){
5   size(400,300);
6 };
7
8 // dynamischer Bereich
9 void draw(){
10
11   background(255);
12   translate(width/2,height/2);
13
14   float[][] ProjZ = {{1,0,0},
15                     {0,1,-0.5}};
16
17   // Haus
18   Cube c = new Cube(unit, color(0), 2,1,3, 0, 0,0,0);
19   Prism p = new Prism(unit, color(0), 2,1,3, 0, 0,-1,0);
20
21   projection(ProjZ, c);
22   projection(ProjZ, p);
23
24   c.drawVertex(c);
25   p.drawVertex(p);
26
27   // Dreibein des Koordinatensystems
28   worldKOS(unit, ProjZ, 2);
29
30   noLoop();
31 }

```

b) → float t = 0;

b) → float[][] ProjZ = {{1,0,-t},  
{0,1,-0.5}};

b) → t = t+0.005;  
if(t > 1.5){  
 noLoop();  
}

a)

t = 0

b)

t = 0.7

t = 1.5

Abb. 7.5.2 Lösung des Aufgabenbeispiels 7.5.1, a) und b). Je nach Richtung der Projektionsstrahlen wirkt das Bild verzerrt.

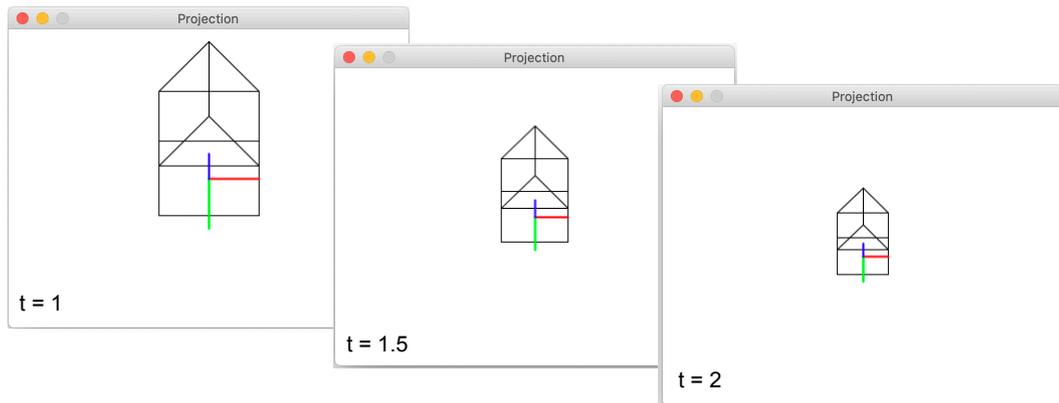
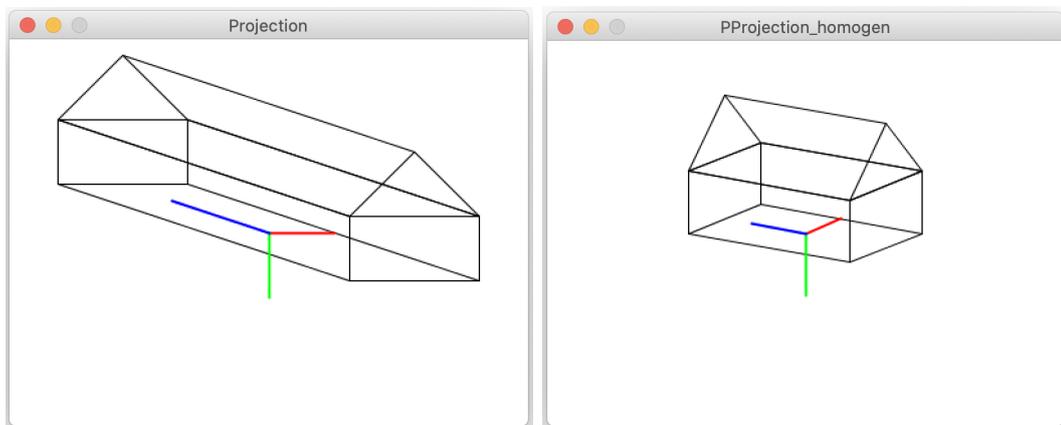


Abb. 7.5.3 Lösung des Aufgabenbeispiels 7.5.1, c)

Die letzte Aufgabe hat gezeigt, dass beim Festhalten der  $xy$ -Ebene als Bildebene die schiefe Parallelprojektion auch extrem verzerrte Bilder erzeugt. Die orthogonale Parallelprojektion liefert bessere Ergebnisse (Abb. 7.5.4), allerdings muss dafür auch die Bildebene verändert werden, sodass die Projektionsmatrix komplizierter wird.

Wir stellen daher im folgenden Kapitel eine Transformation des Koordinatensystems vor, welche trotz veränderter Blickrichtung eine orthogonale Projektion ermöglicht, die Projektionsmatrix in ihrer Form wie aus den vorherigen Aufgaben aber erhalten bleibt.

Abb. 7.5.4 Vergleich der schiefen Parallelprojektion (links) mit der orthogonalen (rechts) für die Blickrichtung  $\vec{z} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T$ .

## 7.6 Das Kamerakoordinatensystem

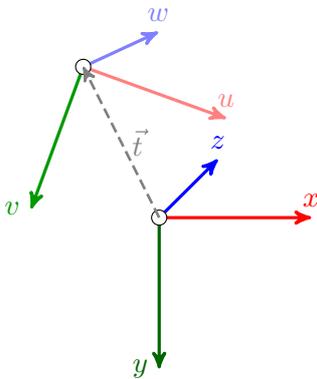


Abb. 7.6.1

Die Achsen  $u, v$  und  $w$  bilden das Kamerakoordinatensystem für die orthogonale Parallelprojektion.

Das bisherige Koordinatensystem mit den Achsen  $x, y$  und  $z$  bezeichnen wir ab jetzt als das *Weltkoordinatensystem*, in welches die Objekte gesetzt werden. Nun setzen wir den Beobachter in die Szene, welcher mit einem Auge oder mit einer Kamera die Projektion ausführt. Wir stellen uns nun vor, dass die Kamera ein eigenes Koordinatensystem mit den Achsen  $u, v$  und  $w$  hat. Ihr Ursprung ist das Projektionszentrum und ihre Blickrichtung die  $w$ -Achse. Die Kamera befindet sich nicht nur an einem beliebigen Punkt in der Szene, sie kann auch gekippt werden (Abb. 7.6.2).

Wir suchen nun eine bijektive Abbildung zwischen dem Welt- und Kamerakoordinatensystem, wobei der Ursprung um den Vektor  $\vec{t}$  verschoben wird (Abb. 7.6.1). Die Projektion erfolgt dann auf die  $uw$ -Ebene des Kamerakoordinatensystems. Anhand eines Beispiels wird nun erklärt, wie bei einer gegebenen Blickrichtung  $\vec{w}$  die Drehung der Kamera ausgehend vom Weltkoordinatensystem bestimmt werden kann. Der Translationsvektor  $\vec{t}$  lässt sich aus den Ursprungspunkten der Koordinatensysteme bestimmen. Mithilfe von homogenen Koordinaten kann dann durch Multiplikation der entsprechenden Dreh- und Translationsmatrizen die gesuchte Transformationsmatrix berechnet werden. Wir betrachten dazu das Beispiel 1 in Abb. 7.6.3, wo beide Systeme in ihren Ursprüngen übereinstimmen und somit die Translation entfällt. Wir suchen nun Drehmatrizen, welche durch Verkettung den Vektor  $\vec{w}$  des Kamerakoordinatensystems auf die  $z$ -Achse des Weltkoordinatensystems abbilden.

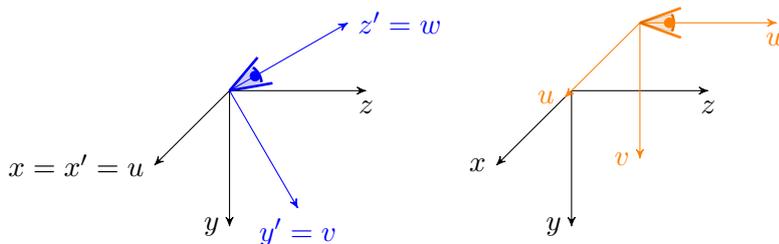


Abb. 7.6.2 Drehung und Verschiebung der Kamera

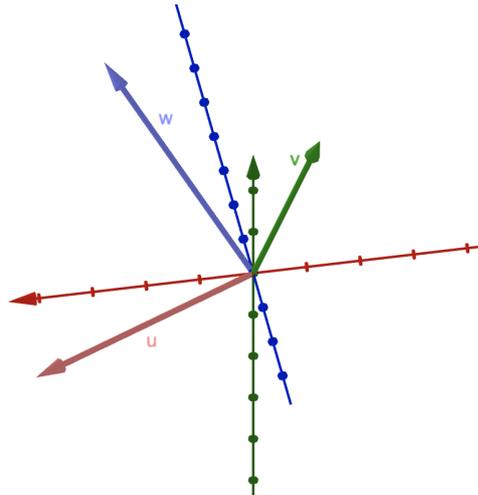
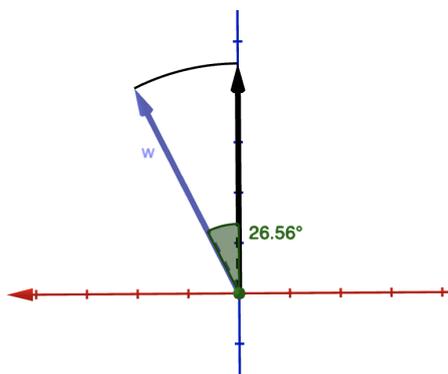


Abb. 7.6.3  $\vec{w}$  soll durch Drehung um die  $y$ - und  $x$ -Achse auf die blaue  $z$ -Achse abgebildet werden.

Beispiel 1:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.408 \\ 0.408 \\ 0.816 \end{pmatrix}$$

Der gegebene Richtungsvektor wurde zuerst normiert. Abb. 7.6.3 zeigt die normierten Richtungsvektoren  $u, v, w$  des Kamerakoordinatensystems. Ausgehend von  $\vec{w}$  lassen sich über das Kreuzprodukt auch die anderen beiden Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  bestimmen. In Beispiel 1 wollen wir zuerst zeigen, wie durch Drehung um die  $y$ - und  $x$ -Achse der Vektor  $\vec{w}$  auf  $\vec{z}$  abgebildet wird.

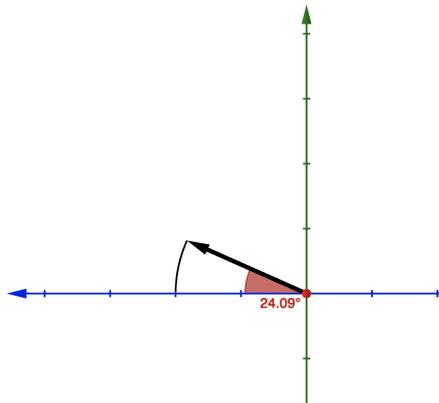


Wir rotieren den Vektor  $\vec{w}$  zuerst um die  $y$ -Achse. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Sicht entgegengesetzt zu dieser Achse. Der Winkel lässt sich über den Tangens bestimmen, da bei der senkrechten Projektion von  $\vec{w}$  auf die  $xz$ -Ebene, diese Koordinaten erhalten bleiben:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.408}{0.816}\right) = 26,56^\circ$$

Die positive Drehrichtung ist in dieser Ansicht entgegengesetzt des Uhrzeigersinns. Dies können Schülerinnen und Schüler anhand der „Rechten-Hand-Regel“ leicht nachvollziehen. Der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung der  $y$ -Achse - in diesem

Fall aus der Ebene heraus. Die restlichen Finger krümmen sich dann in Richtung des positiven Drehsinnes, wie er auch den Rotationsmatrizen zugrunde gelegt wurde.  $\vec{w}$  muss also um  $-26,56^\circ$  gedreht werden, damit er in der  $yz$ -Ebene zum Liegen kommt.



Wir drehen nun die Ansicht entgegengesetzt zur  $x$ -Achse, sodass wir auf die  $yz$ -Ebene schauen. Da der Vektor normiert wurde, hat die Hypotenuse die Länge 1. Aufgrund der ersten Drehung bleibt die  $y$ -Koordinate von  $\vec{w}$  erhalten, da die  $y$ -Achse auf sich selbst abgebildet wird. Wir können somit den Winkel über den Sinus bestimmen:

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{1}\right) = \tan^{-1}(0.408) = 24,09^\circ$$

Der positive Drehsinn um die  $x$ -Achse ist hier ebenfalls entgegen des Uhrzeigersinns, sodass hier um  $24,09^\circ$  rotiert werden muss. Wir fassen nun beide Ergebnisse in einer Abbildungsmatrix zusammen:

$$\begin{aligned} \vec{e}_z &= \underbrace{(M_{x,24.09} \cdot M_{y,-26.56})}_{:=TM} \cdot \vec{w} \\ TM &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 24.09 & -\sin 24.09 \\ 0 & \sin 24.09 & \cos 24.09 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-26.56) & 0 & \sin(-26.56) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-26.56) & 0 & \cos(-26.56) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.89 & 0 & -0.45 \\ -0.18 & 0.91 & -0.37 \\ 0.41 & 0.41 & 0.82 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur Kontrolle können Schülerinnen und Schüler überprüfen, ob mit  $TM$  der Vektor  $\vec{w}$  auf den Einheitsvektor der  $z$ -Achse abgebildet wird:

$$TM \cdot \begin{pmatrix} 0.408 \\ 0.408 \\ 0.816 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix  $TM$  überführt die Koordinaten von dem Welt- ins Kamerakoordinatensystem. Denn im Weltkoordinatensystem zur Basis  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  hat

$\vec{w}$  folgende Einträge:

$$0.408 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.408 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.816 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im Kamerakoordinatensystem zur Basis  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  gilt:

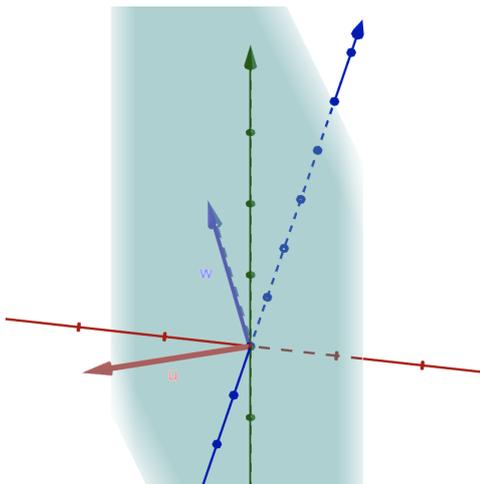
$$0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w}$$

Wir suchen daher genau diese Matrix  $TM$ , um die Weltkoordinaten der Objekte so zu transformieren, dass es zu einer orthogonalen Projektion entlang des Vektors  $\vec{w}$  auf die neue Bildebene kommt. Wir wollen überprüfen, ob die beiden anderen Basisvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ebenfalls durch  $TM$  auf  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  abgebildet werden, wobei jene ermittelt werden müssen.

*Beispiel 2:*

Gegeben ist der normierte Vektor  $\vec{w} = (0.408, 0.408, 0.816)^\top$ . Wir wollen nun die beiden fehlenden Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  bestimmen, sodass sich wieder eine orthonormale Basis für den dreidimensionalen Raum ergibt.

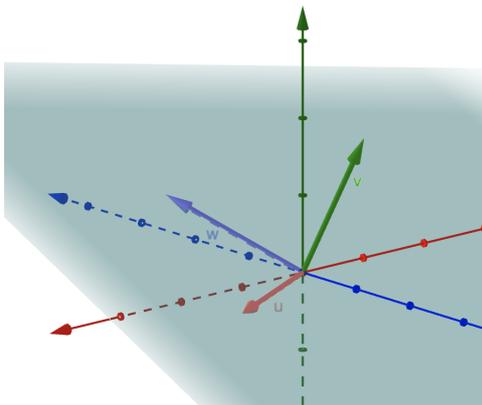
Wir suchen eine Ebene, welche  $\vec{w}$  enthält und senkrecht zu  $\vec{u}$  steht. Damit wir unterscheiden können, ob die Kamera im Quer- oder Hochformat steht, benötigen wir eine ungefähre Richtung, wo im Raum unten ist<sup>2</sup>. Soll die Kamera im Querformat bleiben, so kann hierfür  $\vec{e}_y$  verwendet werden.



Der Normalenvektor der Ebene, die von  $\vec{e}_y$  und  $\vec{w}$  aufgespannt wird, wird über ihr Vektorprodukt bestimmt. Dabei ist die Reihenfolge der Vektoren im Produkt wichtig, damit wir weiterhin ein rechtshändiges Koordinatensystem erhalten. Hierzu zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung des ersten Vektors im Produkt, der Zeigefinger in die des zweiten. Der Mittelfinger weist dann in die Richtung des Vektorproduktes. Anschließend wird das Ergebnis wieder normiert.

<sup>2</sup>Oftmals ist das Weltkoordinatensystem in der Literatur ([36, 11, 50]) mit der  $y$ -Achse nach oben und die Blickrichtung zur negativen  $z$ -Achse ausgerichtet. Dann gibt  $\vec{e}_y$  die Raumrichtung *nach oben* an. Da *Processing* eine andere Ausrichtung des Koordinatensystems nutzt, wurde dies als Raumrichtung *nach unten* angepasst.

$$\vec{u} = \vec{e}_y \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.408 \\ 0.408 \\ 0.816 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.816 \\ 0 \\ -0.408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.895 \\ 0 \\ -0.447 \end{pmatrix}$$



Der dritte Vektor  $\vec{v}$  wird analog über das Vektorprodukt von  $\vec{u}$  und  $\vec{w}$  bestimmt. Auch hier wird mit der Rechten-Hand-Regel die Reihenfolge im Produkt bestimmt. Die anschließende Normierung entfällt, da beide Vektoren im Produkt die Länge 1 haben und orthogonal zueinander stehen:

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -0.812 \\ 0.913 \\ -0.365 \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen abschließend, ob die neuen Basisvektoren mithilfe der Transformationsmatrix  $TM$  auf  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  abgebildet werden:

$$TM \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0.89 & 0 & -0.45 \\ -0.18 & 0.91 & -0.37 \\ 0.41 & 0.41 & 0.82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.895 \\ 0 \\ -0.447 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$TM \cdot \begin{pmatrix} -0.812 \\ 0.913 \\ -0.365 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schauen wir genau hin, so ist das Ergebnis nicht überraschend. Die Zeilenvektoren von  $TM$  stimmen mit den neuen Basisvektoren überein, d.h. bei der Matrix-Vektor-Multiplikation entsteht der Eintrag 1 aufgrund der normierten Vektoren und 0 wegen ihrer Orthogonalität. Alle drei Rechnungen zusammengefasst zeigen folgende Eigenschaft:

$$TM \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{pmatrix} = TM^T = TM^{-1}$$

Wird die Transformationsmatrix  $TM$  transponiert, so erhalten wir auch ihre Inverse, da es sich um eine orthonormale Matrix handelt. Diese Eigenschaft ermöglicht

folgenden Vorteil: anstatt die Drehwinkel der Kamera zu bestimmen, können auch die Basisvektoren des Kamerakoordinatensystems berechnet werden, welche als Zeilenvektoren die gesuchte Transformationsmatrix ergeben.

Die Kamera soll sich aber nicht nur drehen sondern auch verschiebbar sein. Bei einer Parallelprojektion hat dies zwar nur Auswirkungen auf den gezeigten Bildausschnitt, da die Projektion allein von der Richtung bestimmt wird. Wir werden später aber sehen, dass die Koordinatentransformation auch für die Zentralprojektion genutzt wird. Um die Translation als lineare Abbildung nutzen zu können, müssen wir nun homogene Koordinaten verwenden. Das folgende Beispiel wird zuerst in der Ebene durchgeführt und dann auf den dreidimensionalen Raum übertragen.

*Beispiel 3:*

Abb. 7.6.4 zeigt ein Welt- und Kamerakoordinatensystems (grau und blau) in der Ebene. Das Weltkoordinatensystem mit der Basis  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$  wurde um den Vektor  $\vec{t} = (2, 3)^\top$  verschoben und um  $-20^\circ$  gedreht. Wir betrachten den Punkt  $P$ , welcher im Weltkoordinatensystem den Ortsvektor  $\vec{p}$  hat. Wir wollen nun einige Zusammenhänge herleiten, welche es ermöglichen, die Koordinaten von  $P$  im Kamerakoordinatensystem anzugeben.

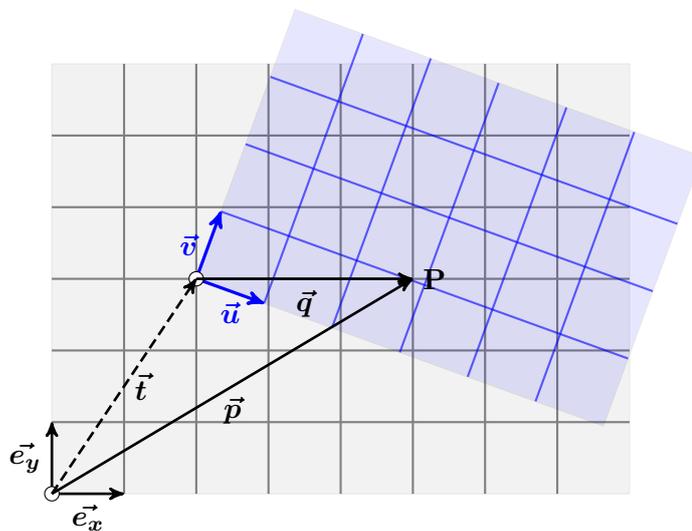


Abb. 7.6.4 Die Kamera wurde um  $-20^\circ$  um den Ursprung gedreht und dann nach  $(2, 3)$  verschoben.

Wir berechnen zuerst die Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}$  in Weltkoordinaten. Entweder ist der Drehwinkel oder die Blickrichtung  $\vec{v}$  bekannt. Im ersten Fall kennen wir die Drehmatrix:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(-20) & -\sin(-20) \\ \sin(-20) & \cos(-20) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.94 \\ -0.34 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(-20) & -\sin(-20) \\ \sin(-20) & \cos(-20) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.94 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Fall können wir über das Skalarprodukt und dem bekannten Vektor  $\vec{u}$  auch  $\vec{v}$  berechnen, da sie senkrecht zueinander stehen müssen. Der Punkt  $P$  hat nun folgende Koordinaten bzgl. der verschiedenen Basen:

$$\text{Basis } \{\vec{e}_x, \vec{e}_y\} : \mathbf{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Basis } \{\vec{u}, \vec{v}\} : \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \cdot \begin{pmatrix} 0.94 \\ -0.34 \end{pmatrix} + \mathbf{b} \cdot \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.94 & 0.34 \\ -0.34 & 0.94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist orthogonal, d.h. ihre Inverse ist die Transponierte:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.94 & -0.34 \\ 0.34 & 0.94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{3.68} \cdot \begin{pmatrix} 0.94 \\ -0.34 \end{pmatrix} + \mathbf{4.52} \cdot \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.94 \end{pmatrix}$$

In Abb. 7.6.4 ist leicht zu sehen, dass  $P$  nicht die Koordinaten  $(3.68 / 4.52)$  im Kamerakoordinatensystem hat. Abb. 7.6.5 zeigt dagegen, dass ohne die Translation die neuen Koordinaten richtig wären.

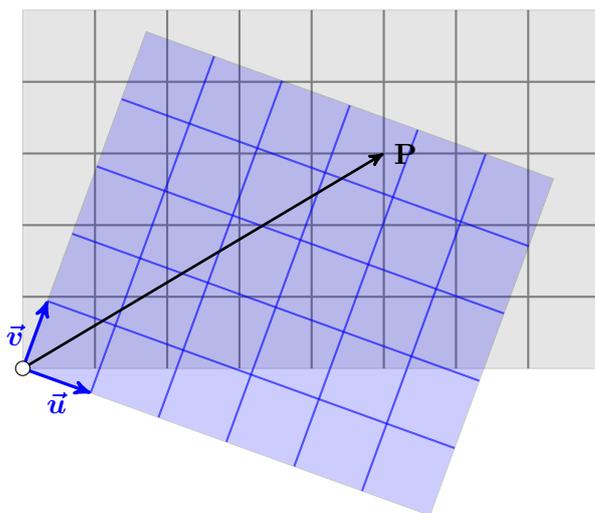


Abb. 7.6.5 Die Kamera wurde um  $-20^\circ$  gedreht, aber nicht verschoben.

Über das Gitter in Abb. 7.6.4 lässt sich  $\vec{q} \approx (2.8, 1)^\top$  abschätzen. Der Grund liegt darin, dass wir nur die Drehung der Basisvektoren betrachtet haben, aber nicht die Translation des Ursprungs. Ziehen wir nachträglich den Translationsvektor  $\vec{t} = (2, 3)^\top$  ab, so erhalten wir (1.68 / 1.52). Dies entspricht auch nicht  $\vec{q}$ . Transformieren wir dagegen auch  $\vec{t}$  wie oben ins andere System, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0.86} \cdot \begin{pmatrix} 0.94 \\ -0.34 \end{pmatrix} + \mathbf{3.50} \cdot \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.94 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3.68 \\ 4.52 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.86 \\ 3.50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.82 \\ 1.02 \end{pmatrix}$$

Dies kommt der Abschätzung für  $\vec{q}$  recht nahe. Ziel ist es nun, die Berechnung mithilfe von Matrizen zu ermöglichen. Betrachten wir nun das Dreieck, welches die Ortsvektoren und der Translationsvektor bildet:

$$\vec{p} = \vec{q} + \vec{t}$$

$\vec{q}$  habe nun die Einträge  $a, b$  im Kamerakoordinatensystem. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{t} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.94 & 0.34 & 2 \\ -0.34 & 0.94 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wir haben in der ersten Zeile eine Summe, deren Summanden aus Vektoren multipliziert mit einem Skalar bestehen. Dies lässt sich zu einer Matrix-Vektor-Multiplikation umformen. Hier erfolgt der Übergang in die homogenen Koordinaten, weshalb die Matrix um die letzte Zeile erweitert wurde. Um  $a, b$  zu erhalten, benötigen wir die inverse Matrix. Das diese algorithmisch umständlich zu berechnen sind, verwenden wir wieder einen Trick. Wir wissen aus der Anschauung heraus, dass diese Matrix eine Verkettung von Drehung und Translation ist. Da wir bereits die homogene Translationsmatrix kennen, können wir die gesuchte Matrix als Produkt von zwei Matrizen ermitteln. Dabei ist die Reihenfolge wichtig:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.94 & 0.34 & 0 \\ -0.34 & 0.94 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.34 & 0 \\ -0.34 & 0.94 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da Drehmatrizen orthogonal sind, ist ihre Transponierte die gesuchte Inverse. Gegenspieler der Translation ist  $-\vec{t}$ . Wir erhalten somit folgende Transformationsmatrix:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 & -0.34 & 0 \\ 0.34 & 0.94 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.94 & -0.34 & -0.86 \\ 0.34 & 0.94 & -3.50 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.82 \\ 1.02 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten dasselbe Ergebnis. Die beiden Teilschritte im ersten Rechenweg lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.94 & -0.34 \\ 0.34 & 0.94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.94 & -0.34 \\ 0.34 & 0.94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.94 & -0.34 \\ 0.34 & 0.94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.82 \\ 1.02 \end{pmatrix}$$

Interpretieren wir die obige Rechnung anschaulich, bedeutet dies, wir verschieben das Kamerakoordinatensystem zurück zum Ursprung des Weltkoordinatensystems und drehen dann um  $20^\circ$ . Wir wollen hier noch einmal verdeutlichen, warum es sinnvoll ist, homogene Koordinaten zu verwenden. Sei  $P_0$  eine Ecke eines Einheitswürfels im Weltkoordinatensystems. Um einen Quader mit beliebigen Maßen zu erstellen, muss  $P_0$  mit  $M_{\text{sca}}$  skaliert werden. Zusätzlich wird der Körper mit  $M_{\text{rot}}$  gedreht und an einem beliebigen Ort  $o$  in der Welt platziert:

$$\vec{p}_1 = \vec{o} + \underbrace{M_{\text{rot}} \cdot M_{\text{sca}}}_{:=M_0} \cdot \vec{p}_0$$

Die Kamera sei um den Winkel  $\alpha$  gedreht und um  $\vec{t}$  verschoben. Wir erhalten dann folgendes Ergebnis in Kamerakoordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_2 &= M_{rot,\alpha}^T \cdot \vec{p}_1 - M_{rot,\alpha}^T \cdot \vec{t} \\
&= M_{rot,\alpha}^T \cdot \vec{o} + M_{rot,\alpha}^T \cdot M_0 \cdot \vec{p}_0 - M_{rot,\alpha}^T \cdot \vec{t} \\
&= M_{rot,\alpha}^T \cdot (\vec{o} - \vec{t}) + M_{rot,\alpha}^T \cdot M_0 \cdot \vec{p}_0
\end{aligned}$$

Wir benötigen hier zwei verschiedene Matrizen und den zusätzlichen Vektor  $\vec{o} - \vec{t}$ . Mit homogenen Koordinaten lässt sich eine Matrix bestimmen, sodass gilt:

$$\vec{p}_2 = M \cdot \vec{p}_0$$

Wir übertragen die Erkenntnisse aus den Beispielen nun in den Raum und fassen alles in folgendem Satz zusammen:

### Satz 7.6.1

Sei  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  die Basis des Weltkoordinatensystems und  $\vec{t}$  der Ortsvektor der Kamera mit normierter Blickrichtung  $\vec{w}$ . Für eine Projektion im Querformat ( $y$ -Richtung ist für die Kamera „unten“) lässt sich die Transformationsmatrix von Welt- ins Kamerakoordinatensystem zur Basis  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  wie folgt bestimmen:

(1) Basisvektoren:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \frac{\vec{e}_y \times \vec{w}}{\|\vec{e}_y \cdot \vec{w}\|_2} \\
\vec{v} &= \vec{w} \times \vec{u}
\end{aligned}$$

(2) Von Welt- ins Kamerakoordinatensystem:

$$TM = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_1 \\ 0 & 1 & 0 & -t_2 \\ 0 & 0 & 1 & -t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

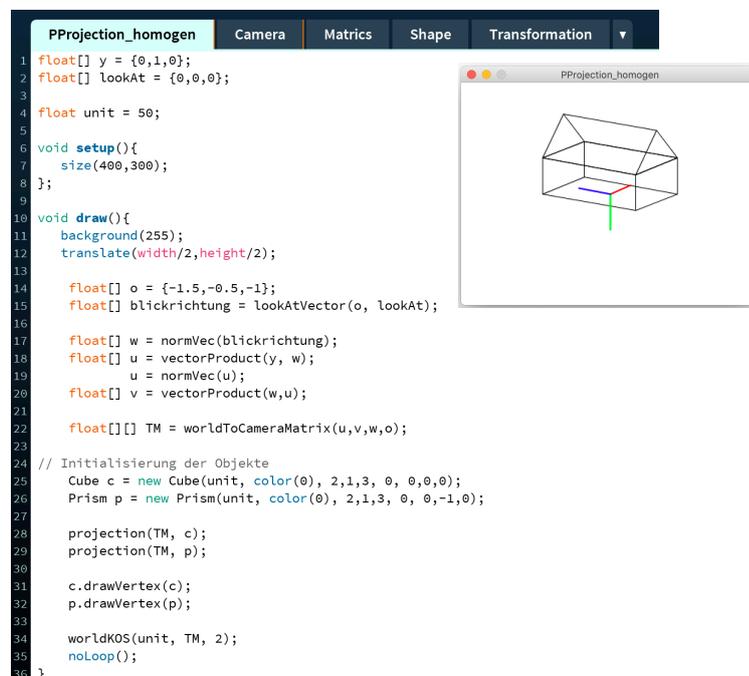
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = TM \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$  ist dabei der Ortsvektor eines Punktes  $P$  in Weltkoordinaten,  $(a, b, c)^T$  in Kamerakoordinaten.

## 7.7 Orthogonale Parallelprojektion in *Processing*

Nachdem wir die Transformation vom Welt- ins Kamerakoordinatensystem vorgestellt haben, wollen wir uns nun die Implementierung in *Processing* anschauen. Im Quellcode wurden die Koordinaten der Einheitskörper durch homogene ersetzt, d.h. an vierter Stelle eine 1 eingefügt.

Abb. 7.7.1 zeigt den Editor. Da wir nun eine Kamera verwenden, existiert der neue Reiter „Camera“ mit allen Operationen, um von Welt- in Kamerakoordinaten zu transformieren. Die Abbildung zeigt als Beispiel wieder ein Haus. Mit der Variablen  $o$  sind die Koordinaten des Augpunktes bzw. der Kamera gegeben. Der Ursprung des Kamerakoordinatensystems muss daher an diese Stelle verschoben werden. Die Person schaut zu dem Punkt, dessen Koordinaten in *lookAt* gespeichert sind. Die Blickrichtung ergibt sich somit aus der Differenz von Kameraposition und jenem Punkt. Die Differenz wird mit der Anweisung **lookAtVector** in Zeile 15 berechnet. Der Vektor  $y$  in Zeile 1 gibt an, in welcher Richtung „unten“ für die Kamera ist. Die Transformationsmatrix  $TM$  lässt sich nach Satz 7.6.1 über die Vektoren  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $o$  berechnen. Die benötigten Vektoren werden in Zeile 17 bis 20 ermittelt.  $w$  ist der normierte Vektor der Blickrichtung und  $u$  das normierte Vektorprodukt aus jenem mit  $y$ .  $v$  ist das Vektorprodukt aus  $w$  und  $u$ . Da diese Vektoren schon normiert sind, ist das Vektorprodukt  $v$  ebenfalls normiert.



```

PProjection_homogen Camera Matrics Shape Transformation
1 float[] y = {0,1,0};
2 float[] lookAt = {0,0,0};
3
4 float unit = 50;
5
6 void setup(){
7   size(400,300);
8 }
9
10 void draw(){
11   background(255);
12   translate(width/2,height/2);
13
14   float[] o = {-1.5,-0.5,-1};
15   float[] blickrichtung = lookAtVector(o, lookAt);
16
17   float[] w = normVec(blickrichtung);
18   float[] u = vectorProduct(y, w);
19   u = normVec(u);
20   float[] v = vectorProduct(w,u);
21
22   float[][] TM = worldToCameraMatrix(u,v,w,o);
23
24 // Initialisierung der Objekte
25 Cube c = new Cube(unit, color(0), 2,1,3, 0, 0,0,0);
26 Prism p = new Prism(unit, color(0), 2,1,3, 0, 0,-1,0);
27
28 projection(TM, c);
29 projection(TM, p);
30
31 c.drawVertex(c);
32 p.drawVertex(p);
33
34 worldKOS(unit, TM, 2);
35 noLoop();
36 }

```

Abb. 7.7.1 Der erweiterte Quellcode für die orthogonale Parallelprojektion mit homogenen Koordinaten

Die Anweisung `worldToCameraMatrix` berechnet dann nach o.g. Satz das Matrixprodukt. Mit dieser wird in Zeile 28 und 29 die Parallelprojektion auf die  $xy$ -Ebene des Kamerakoordinatensystems für beide Körper erzeugt und die Bildpunkte in Zeile 31 und 32 gezeichnet. Für eine bessere Orientierung wurde abschließend in Zeile 34 die Achsen des Weltkoordinatensystems eingefügt. Da das Haus nicht verschoben wurde, liegt der Mittelpunkt der Bodenfläche im Ursprung.

Im Reiter *Transformation* befinden sich die  $4 \times 4$  - Matrizen für Skalierung, Drehung um alle drei Raumachsen sowie Translation der Objekte. Abb. 7.7.3 zeigt einen Ausschnitt dieser homogenen Matrizen, wie auch die Berechnung der Transformationsmatrix vom Welt- ins Kamerakoordinatensystem sowie der Blickrichtung im Reiter *Camera*.

Motiviert wurde das vorherige Kapitel über das Kamerakoordinatensystem, S. 290, mit der Abb. 7.5.4, wo die Richtung der Strahlen der Parallelprojektion bzgl. der  $x$ -Achse verschoben wurde, während das Bild weiterhin auf der  $xy$ -Ebene entstand. Je schiefer die Projektionsstrahlen auf diese Ebene trafen, um so verzerrter wurde das Bild des Hauses. Damit bei Positionsveränderung des Betrachters die Bilder unverzerrt bleiben, wurde in dem nachfolgenden Kapitel ein Verfahren gezeigt, welches das Koordinatensystem derart verschiebt und dreht, sodass die Bildebene senkrecht zur Blickrichtung des Betrachters steht. Die Projektion ist somit immer orthogonal und die Schrägbilder weniger verzerrt.

Zum Vergleich nehmen wir nun wieder das Haus bestehend aus Quader und Prisma und verschieben den Betrachter entlang der  $x$ -Achse. Dann vergleichen wir die Bilder mit und ohne Transformation des Weltkoordinatensystems, wobei bei letzterem der

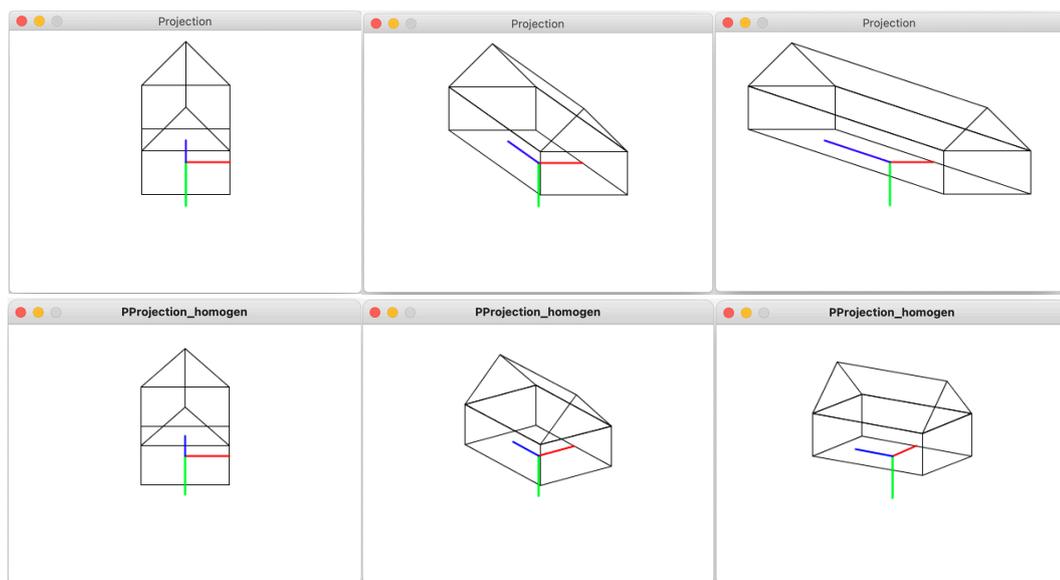


Abb. 7.7.2 Vergleich der schiefen (oben) und orthogonalen (unten) Parallelprojektion bei Verschiebung des Betrachters entlang der  $x$ -Achse.

Betrachter immer auf den Ursprung des Weltkoordinatensystems schauen soll. Abb. 7.7.2 zeigt das Ergebnis. Die ersten beiden Bilder sind ähnlich, da die Projektionsrichtung  $(0 / -0.5 / -1)^T$  liegt, d.h. um eine Einheit weg von der Bildebene und um 0.5 Einheiten nach oben verschoben, allerdings nicht zur Seite. Aufgrund der Verschiebung nach oben, fallen die Strahlen nicht senkrecht auf die Bildebene (Vgl. Abb. 7.5.1, S. 287). Im ersten Bild der Vergleichsreihe ist das Dach etwas höher als in der unteren orthogonalen Projektion.

Mit dem Beispiel haben wir gezeigt, welchen Vorteil die Transformation in Kamerakoordinatensystem bietet und weshalb homogene Koordinaten dies vereinfachen, da wir am Ende nur eine Matrix benötigen, mit welcher jeder Eckpunkt der Körper multipliziert wird.

Das nächste Kapitel verwendet *Processing* zur Erzeugung von Rot-Grün-Bildern. Wie im Abschnitt 7.1 Das Anaglyphenverfahren, S. 264, schon erwähnt, wurde dieses Thema durch eine Aufgabe in einem Schulbuch der Oberstufe motiviert, wo ein Würfel anhand zwei nahe beieinander liegender Zentren auf eine Bildebene projiziert wird, wobei ein Bild rot und das andere in grün gezeichnet wird. Mit einer Rot-Grün-Brille und dem passenden Abstand erscheint der Würfel dreidimensional.

```

PProjection_homogen | Camera | Matrics | Shape | Transformation
1 //Transformationsmatrizen
2
3 float[][] MScale(float sca, float scb, float scc){
4
5     float[][] M = {{sca, 0, 0, 0},
6                   {0, scb, 0, 0},
7                   {0, 0, scc, 0},
8                   {0, 0, 0, 1}};
9
10    return M;
11 }
12
13 float[][] MRotate(float angle, char axis){
14
15     float alpha = PI * angle/180; //Deg to Rad
16
17     if(axis == 'x'){
18         float[][] M = {{1, 0, 0, 0},
19                       {0, cos(alpha), -sin(alpha), 0},
20                       {0, sin(alpha), cos(alpha), 0},
21                       {0, 0, 0, 1}};
22
23         return M;
24     }
25
26     if(axis == 'y'){
27         float[][] M = {{cos(alpha), 0, sin(alpha), 0},
28                       {0, 1, 0, 0},
29                       {-sin(alpha), 0, cos(alpha), 0},
30                       {0, 0, 0, 1}};
31
32         return M;
33     }
34 }
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56 float[][] worldToCameraMatrix(float[] u, float[] v, float[] w, float[] CameraPosition){
57
58     float[][] rotMatrix = {{u[0],u[1],u[2],0},
59                           {v[0],v[1],v[2],0},
60                           {w[0],w[1],w[2],0},
61                           {0, 0, 0, 1}};
62
63     float[][] transMatrix = {{1,0,0,-CameraPosition[0]},
64                             {0,1,0,-CameraPosition[1]},
65                             {0,0,1,-CameraPosition[2]},
66                             {0,0,0, 1}};
67
68     float[][] result = matmul(rotMatrix, transMatrix) ;
69
70     return result;
71 }
72
73 float[] lookAtVector(float[] CameraPosition, float[] lookPoint){
74
75     int n = CameraPosition.length;
76     float[] blickrichtung = new float[n];
77
78     for(int i=0; i<n; i++){
79         blickrichtung[i] = lookPoint[i] - CameraPosition[i];
80     }
81
82     return blickrichtung;
83 }

```

Abb. 7.7.3 homogene Matrizen zur Skalierung und Drehung der Einheitskörper sowie die Ermittlung der Transformationsmatrix vom Welt- ins Kamerakoordinatensystem

## 7.8 Erzeugung von Anaglyphenbildern

Wir wollen nun in *Processing* eine Zentralprojektion durchführen, um Anaglyphenbilder zu erzeugen. Als Grundlage dienen wieder die drei Klassen Würfel, Prisma und Pyramide. Für die Skalierung, Drehung und Verschiebung verwenden wir die  $4 \times 4$ -Matrizen aus dem vorherigen Kapitel. Da die Zentralprojektion ebenfalls keine lineare Abbildung ist, sind auch hier homogene Koordinaten sinnvoll. Wir wollen aber zum Einstieg die Gleichung 7.1.1, S. 266, verwenden. Abb. 7.8.1 zeigt die entsprechende Implementierung in *Processing* mit einem Haus als Beispiel. Das Haus besteht aus einem Würfel mit quadratischer Grundfläche (Kantenlänge: 3 Einheiten, 2 Einheiten hoch) sowie einem Prisma (1.5 Einheiten hoch). Der Mittelpunkt des Hauses, welches um  $40^\circ$  gedreht wurde, befindet sich im Ursprung.

```

ZProjection_ohneHK  Matrics  Shape  Transformation
2
3 float[] L1 = {3*unit,-3*unit,-8*unit};
4 float[] L2 = {3.5*unit,-3*unit,-8*unit};
5
6 void setup(){
7   size(400,400);
8 };
9
10 void draw(){
11   background(255);
12   translate(width/2,height/2);
13
14   // Initialisierung der Objekte
15
16   Cube c_g = new Cube(unit, color(0,255,0), 3,2,3, 40, 0,0,0); // Würfel in Grün
17   Cube c_r = new Cube(unit, color(255,0,0), 3,2,3, 40, 0,0,0); // Würfel in Rot
18
19   Prism p_g = new Prism(unit, color(0,255,0), 3,1.5,3, 40, 0,-2,0); // Dach
20   Prism p_r = new Prism(unit, color(255,0,0), 3,1.5,3, 40, 0,-2,0);
21
22
23   // Zentralprojektion auf die xy Ebene
24
25   CentralProjection(L1, c_g);
26   CentralProjection(L2, c_r);
27
28   CentralProjection(L1, p_g);
29   CentralProjection(L2, p_r);
30
31   strokeWeight(2);
32
33   c_r.drawVertex(c_r);
34   c_g.drawVertex(c_g);
35
36   p_r.drawVertex(p_r);
37   p_g.drawVertex(p_g);
38
39   noLoop();
40 }

```

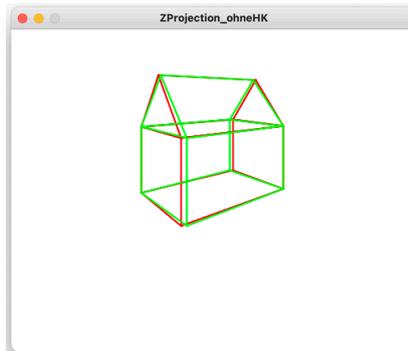
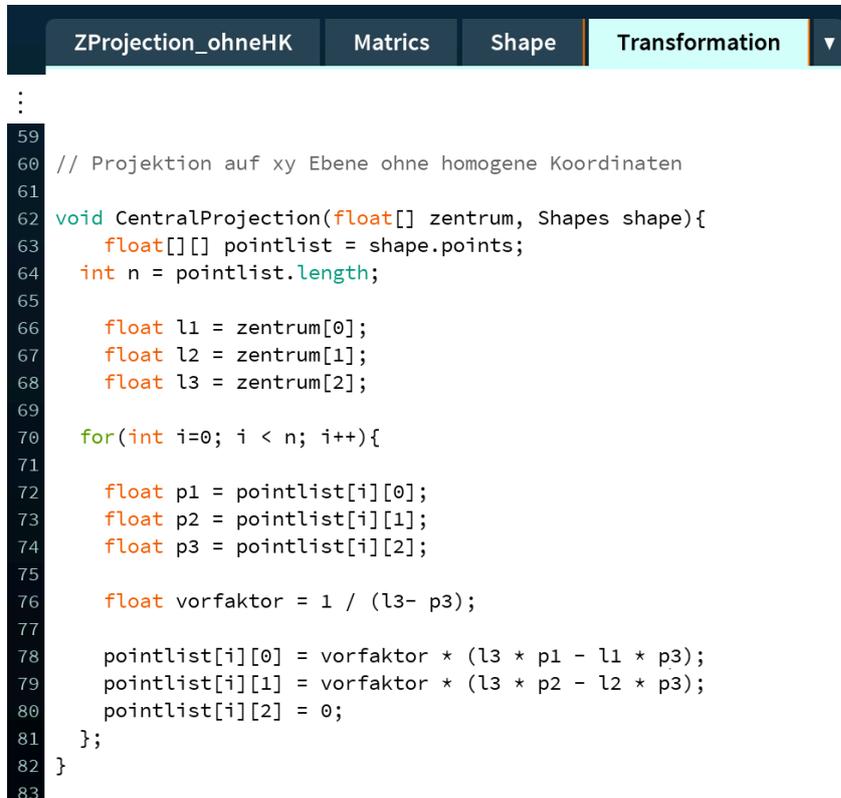


Abb. 7.8.1 Die Zentralprojektion des Hauses

Im Reiter „Transformation“ der Abb. 7.8.2 ist die Zentralprojektion definiert. Als Argument benötigt **CentralProjection** das Projektionszentrum und den Körper. Zur besseren Lesbarkeit werden die Koordinaten des Zentrums in den Variablen  $l1$ ,  $l2$  und  $l3$  übertragen. Ebenso wird innerhalb der Schleife (ab Zeile 70) verfahren,

welche die Punktliste durchläuft, die jeder Körper aufgrund seiner Klasse beinhaltet. Hier werden die Koordinaten in  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  temporär abgelegt. Die Werte werden dann für jeden Eckpunkt des Körpers in die Formel eingesetzt und die in der Liste jeder Punkt durch seinen Bildpunkt ersetzt (Zeile 78 bis 80).



```

59
60 // Projektion auf xy Ebene ohne homogene Koordinaten
61
62 void CentralProjection(float[] zentrum, Shapes shape){
63     float[][] pointlist = shape.points;
64     int n = pointlist.length;
65
66     float l1 = zentrum[0];
67     float l2 = zentrum[1];
68     float l3 = zentrum[2];
69
70     for(int i=0; i < n; i++){
71
72         float p1 = pointlist[i][0];
73         float p2 = pointlist[i][1];
74         float p3 = pointlist[i][2];
75
76         float vorfaktor = 1 / (l3- p3);
77
78         pointlist[i][0] = vorfaktor * (l3 * p1 - l1 * p3);
79         pointlist[i][1] = vorfaktor * (l3 * p2 - l2 * p3);
80         pointlist[i][2] = 0;
81     };
82 }
83

```

Abb. 7.8.2 Implementierung der Formel zur Berechnung der Bildkoordinaten bei zentraler Projektion auf die  $xy$ -Ebene

Nun ersetzen wir die Formel in der Funktion **CentralProjektion** durch eine homogene Matrix nach Gl. (4.6.4), wie sie auf Seite 198 hergeleitet wurde. Es wurden weitere Veränderungen vorgenommen, wie Abb. 7.8.3 zeigt. In Abb. 7.8.1 wurden die Projektionszentren  $L_1$  und  $L_2$  (Zeile 3 und 4) mit der Einheit angegeben. Diese Skalierung wurde nun in die Projektionsfunktion (Zeile 5 bis 7) übernommen. Zur Verdeutlichung wurde diese Änderung in der Abb. 7.8.3 mit einem Pfeil markiert. Der Vergleich beider Abbildungen zeigt, dass wir dasselbe Anaglyphenbild erhalten.

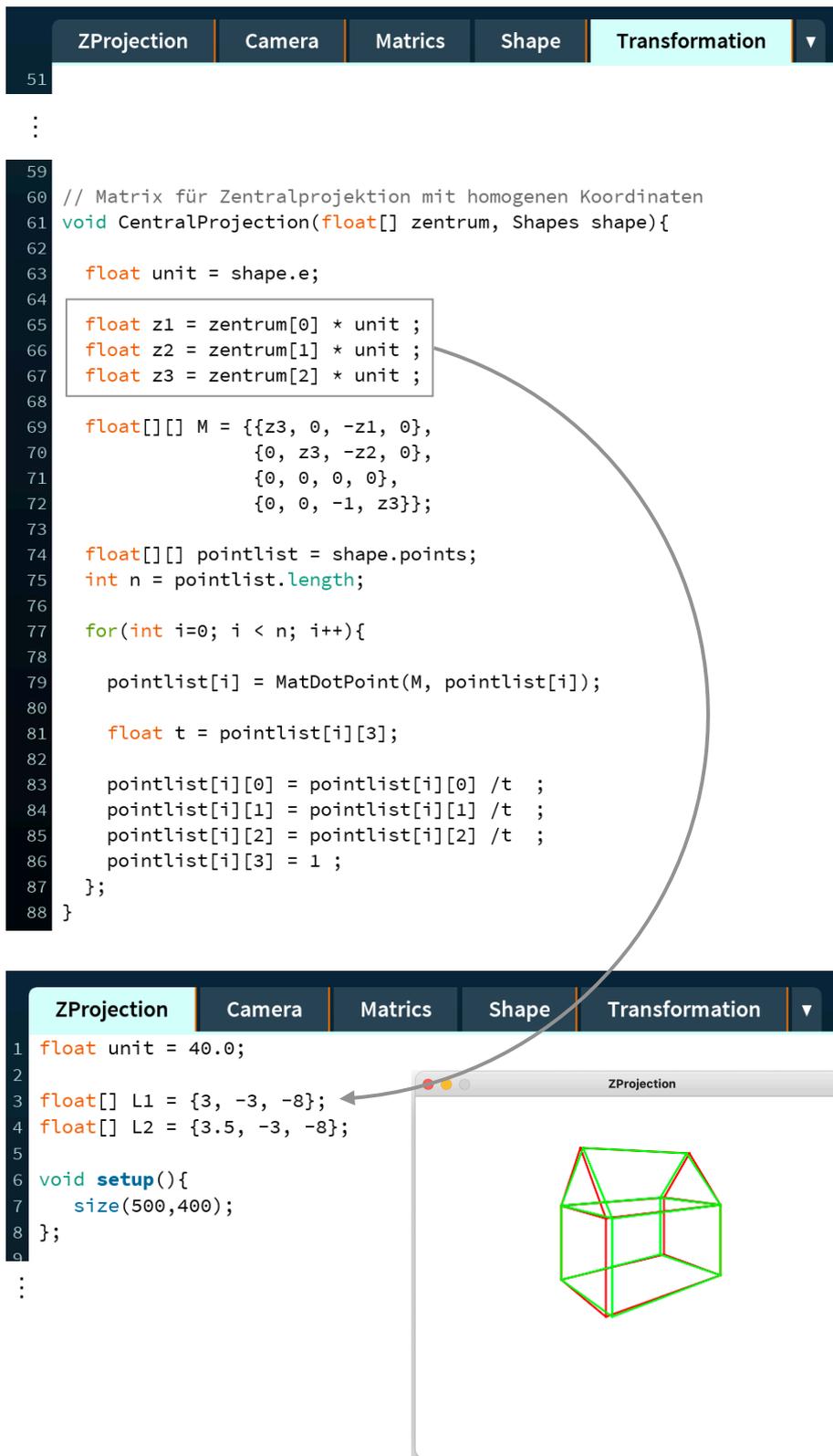
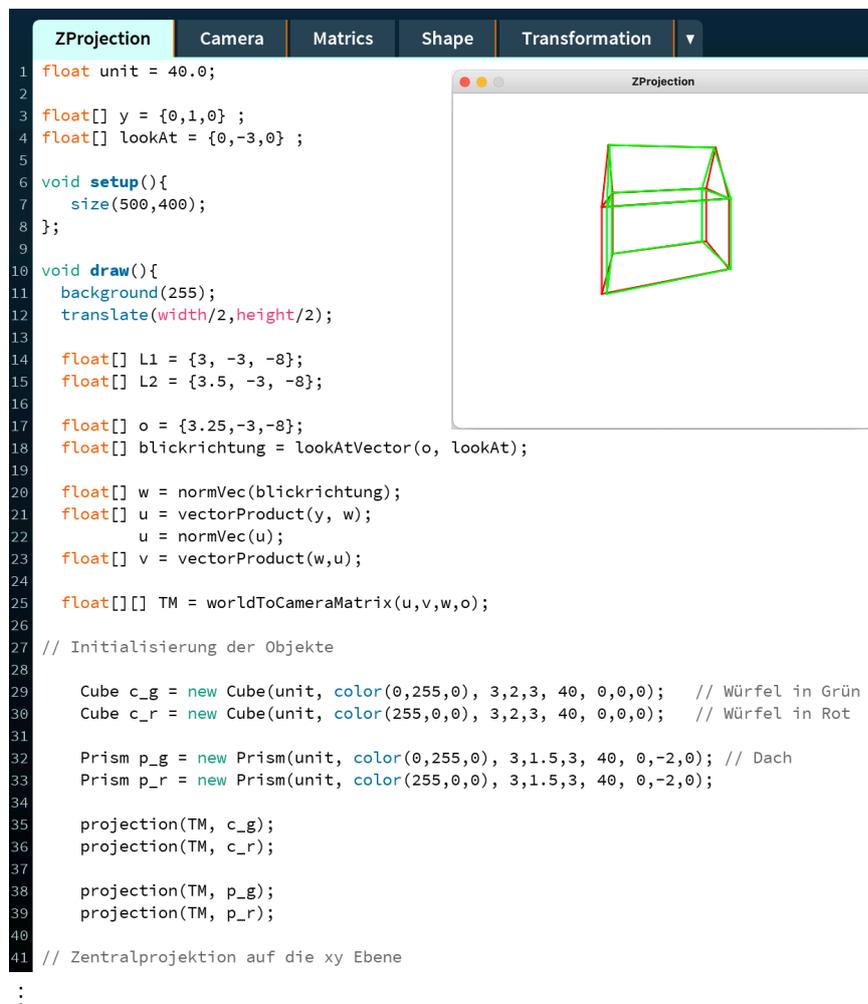


Abb. 7.8.3 Die Zentralprojektion erfolgt nun mit einer Matrix und liefert dasselbe Bild wie in Abb. 7.8.1

Wir wollen nun zum Abschluss auch die Transformation ins Kamerakoordinatensystem in unseren Quellcode einbauen. Da diese Umrechnung ins andere Koordinatensystem unabhängig von der Projektion ist, können wir die Funktionen **worldToCameraMatrix** und **lookAtVector** aus dem Abschnitt zur orthogonalen Parallelprojektion übernehmen. Abb. 7.8.4 zeigt das Ergebnis, wenn wir dasselbe Haus sowie die Projektionszentren aus dem vorherigen Beispiel übernehmen. Da wir nun zwei Zentren haben, nehmen wir für den Ort der Kamera (Variable *o*, Zeile 17) den Mittelpunkt zwischen diesen entlang der *x*-Achse. Damit die Bildebene parallel zum Haus liegt (Übereck-Perspektive), soll die Kamera wegen der erhöhten Position ( $y = -3$ ) nicht nach unten schauen. Daher gilt  $lookAt = \{0, -3, 0\}$  (Zeile 4). Die Blickrichtung entspricht dem Hauptstrahl der Zentralprojektion, d.h. die Bildebene liegt hierzu senkrecht.



```

1 float unit = 40.0;
2
3 float[] y = {0,1,0} ;
4 float[] lookAt = {0,-3,0} ;
5
6 void setup(){
7     size(500,400);
8 };
9
10 void draw(){
11     background(255);
12     translate(width/2,height/2);
13
14     float[] L1 = {3, -3, -8};
15     float[] L2 = {3.5, -3, -8};
16
17     float[] o = {3.25,-3,-8};
18     float[] blickrichtung = lookAtVector(o, lookAt);
19
20     float[] w = normVec(blickrichtung);
21     float[] u = vectorProduct(y, w);
22     u = normVec(u);
23     float[] v = vectorProduct(w,u);
24
25     float[][] TM = worldToCameraMatrix(u,v,w,o);
26
27 // Initialisierung der Objekte
28
29     Cube c_g = new Cube(unit, color(0,255,0), 3,2,3, 40, 0,0,0); // Würfel in Grün
30     Cube c_r = new Cube(unit, color(255,0,0), 3,2,3, 40, 0,0,0); // Würfel in Rot
31
32     Prism p_g = new Prism(unit, color(0,255,0), 3,1.5,3, 40, 0,-2,0); // Dach
33     Prism p_r = new Prism(unit, color(255,0,0), 3,1.5,3, 40, 0,-2,0);
34
35     projection(TM, c_g);
36     projection(TM, c_r);
37
38     projection(TM, p_g);
39     projection(TM, p_r);
40
41 // Zentralprojektion auf die xy Ebene
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

```

Abb. 7.8.4 Zentralprojektion des Hauses mit Transformation ins Kamerakoordinatensystem

Durch die Anpassung der Bildebene lassen sich Verzerrungen vermeiden. Dazu machen wir ein analoges Beispiel, wie schon im Abschnitt zur Parallelprojektion. Statt einem Anaglyphenbild projizieren wir das Haus nur einmal und zeichnen es schwarz. Wir verschieben die Kamera wieder entlang der  $x$ -Achse. Abb. 7.8.5 stellt die Projektionen ohne und mit Transformation gegenüber. Je weiter weg sich die Kamera seitlich vom Ursprung, bei gleicher Höhe und gleichem Abstand zur Bildebene, entfernt, umso verzerrter wird die Projektion, wenn die Bildebene nicht mitgeführt wird. Allerdings bleibt es nicht aus, dass die Kanten des Hauses mit quadratischer Grundfläche bei  $x = -10$  auch mit Kamerakoordinaten derart verzerrt werden, dass es nicht mehr quadratisch wirkt.

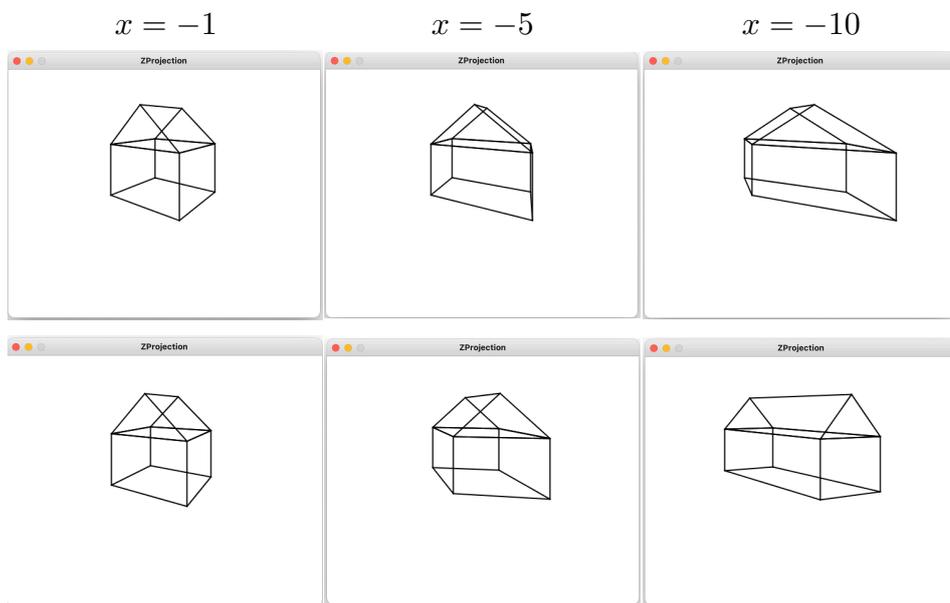


Abb. 7.8.5 Verschiebung des Projektionszentrum entlang der  $x$ -Achse ohne Transformation ins Kamerakoordinatensystem (oben) und mit (unten)

Zur besseren Erklärung, was die Transformation ins Kamerakoordinatensystem bewirkt, zeigt Abb. 7.8.6 das Haus und die Bildebene im dreidimensionalen Koordinatensystem, wobei die  $y$ -Achse nach unten zeigt und die  $z$ -Achse nach hinten, wie es auch im Quellcode.

Grau sind die ursprüngliche  $xy$ -Ebene und die Objektebene dargestellt.  $H$  bezeichnet den Hauptpunkt, auf welchen die Kamera schaut ( $lookAt = \{0, -3, 0\}$ ). Der Betrachter ( $Z_i$ ) bewegt sich parallel zur  $x$ -Achse und schaut dabei immer auf  $H$ . Damit dreht sich durch die Transformation ins Kamerakoordinatensystem die Bildebene derart, dass die Gerade  $Z_iH$  immer orthogonal zur neuen Bildebene steht.

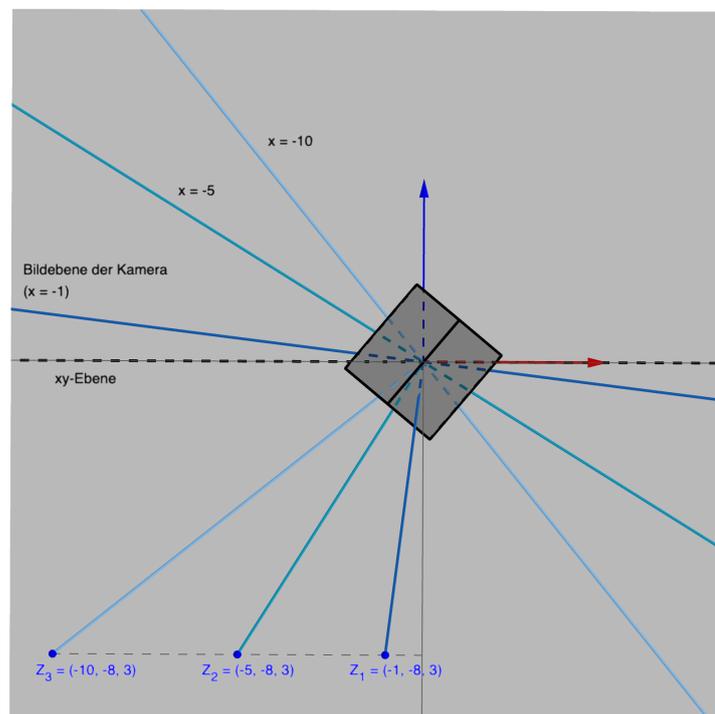
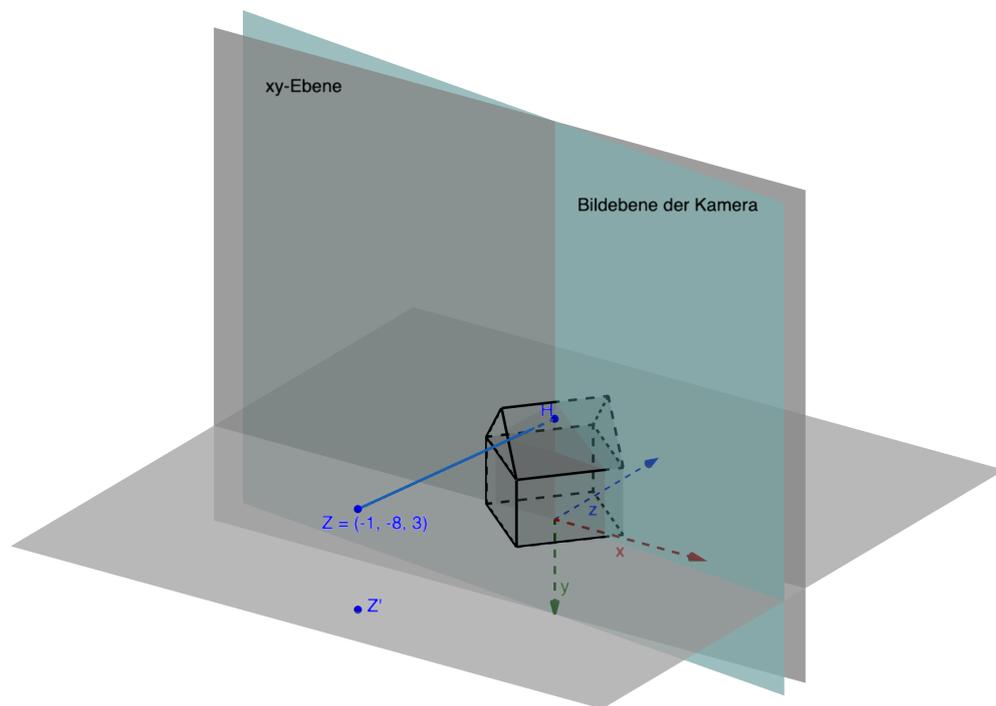


Abb. 7.8.6 Durch Transformation ins Kamerakoordinatensystem ist die neue  $xy$ -Ebene gedreht, sodass der Hauptstrahl diese senkrecht trifft. Unten zeigt den Grundriss der obigen Szene mit den entsprechenden Bildebenen.

Damit endet dieses Kapitel über *Processing* und den entworfenen Quellcode zur Erstellung von Bildern. Wir haben gezeigt, wie sich ausgehend von den Einheitskörpern Würfel, Prisma und Pyramide eine Szene aufbauen lässt, indem durch Matrizenmultiplikation die Eckpunkte skaliert, gedreht und verschoben werden können. Dabei haben wir gezeigt, dass alle drei Transformationen mit einer Matrix möglich sind, wenn wir homogene Koordinaten verwenden. Es wurde erläutert, wie dies im Quellcode durch eine Klassenstruktur erfasst wird.

Danach haben wir uns mit der Parallelprojektion dieser Szenen befasst und gezeigt, dass durch orthogonale Projektionen Verzerrungen vermieden werden. Ein Beispiel motivierte die Transformation in ein Kamerakoordinatensystem.

Zum Abschluss erzeugten wir Anaglyphenbilder mit der Zentralprojektion, wobei wir auch hier homogene Koordinaten verwendeten, da jene Projektion keine lineare Abbildung ist. Zum Schluss wurde wieder an einem Beispiel gezeigt, dass auch hier vor der Projektion die Transformation ins Kamerakoordinatensystem bessere Bilder lieferte.

## Kapitel 8

# Materialien und Anwendungsbeispiele

Wir haben uns in den vorherigen Kapiteln dem Thema Zentral- und Parallelprojektion auf ganz unterschiedliche Arten genähert: rein mathematisch unter Verwendung von Koordinaten und Vektoren im Sinne der analytischen Geometrie im Mathematikunterricht, Konstruktion der Bilder mit Grund- und Aufriss ohne Berechnungen, wie sie auch im Kunstunterricht durchführbar wäre oder fachübergreifend die Berechnung der Bilder mithilfe einer objektorientierten Programmiersprache im Informatikunterricht. Dies hat gezeigt, wie vielseitig dieses Thema in der Schule Anwendung finden kann. Wir wollen nun in eine weitere Richtung gehen und Materialien vorstellen, welche im Mathematikunterricht zur Unterstützung von Lernprozessen verwendet werden können.

Inspiziert von historischen Schriften wurde der Perspektograph von *Lambert* nachgebaut und auf seine Funktion und Tauglichkeit geprüft. Ebenso angeregt durch die vorhandenen Aufgaben in Schulbüchern zur Dreitafelprojektion wurden zwei Versionen einer Raumecke entwickelt und Aufgabenbeispiele zu ihrer Verwendung entworfen.

## 8.1 Der Perspektograph

*Johann Heinrich Lambert* beschrieb 1752 in seinen *Schriften zur Perspektive* [32] den Entwurf eines Perspektographen, welcher es ermöglicht, aus einer ebenen Figur in der Objektebene das Bild unter einer Zentralprojektion zu zeichnen, sofern sich Objekt- und Bildebene orthogonal schneiden. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Perspektographen nach *Lamberts* Entwurfzeichnungen, erstellt mit dem Programm *FreeCAD*, einer kostenlose Software zur Zeichnung von Objektmodellen (computer-aided design).

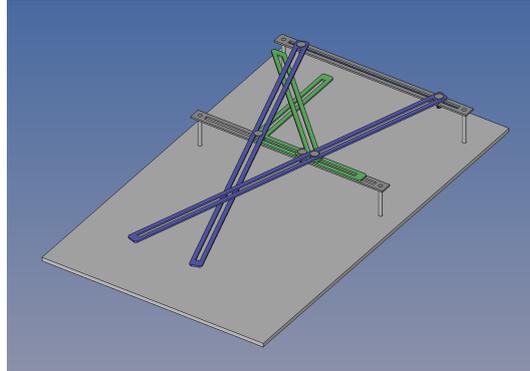


Abb. 8.1.1 Mit einem CAD Programm nachkonstruierter Perspektograph nach Lambert

Um die Funktionsweise des Perspektographen zu erklären, betrachten wir Abb. 8.1.2: Das in der Objektebene liegende Rechteck wird als Zentralprojektion in die Bildebene übertragen, wobei das Projektionszentrum  $Z$  nicht Teil dieser Ebene sein darf. Die Objektebene schneidet die Bildebene orthogonal. Die Schnittgerade ist die Bildspur  $a$ . Um den Bildpunkt von  $A$  zu konstruieren, zeichnen wir den Projektionsstrahl  $ZA$ , welcher die Bildebene in  $\varphi_z(A)$  schneidet. Wir hatten im Abschnitt 4.3.2 *Konstruktionsmethoden mit Grund- und Aufriss* schon erläutert, wie sich der Bildpunkt in der Ebene konstruieren lässt.

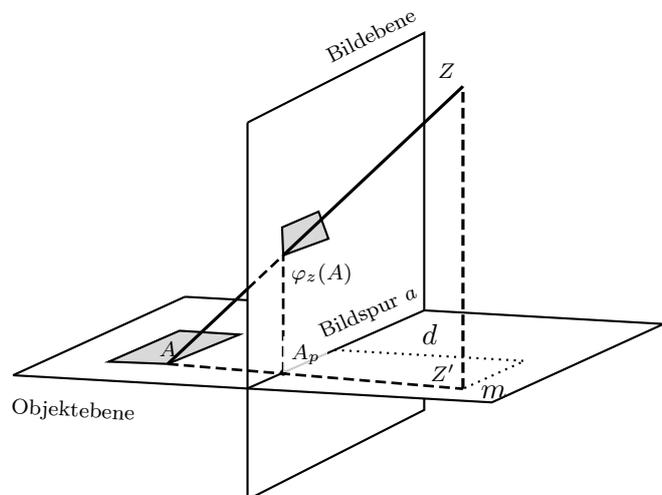


Abb. 8.1.2 Konstruktion des Bildpunktes unter einer Zentralprojektion

Wir wissen, dass der Bildpunkt auf der Lotgeraden zu  $a$  durch  $A_p$  liegt. Denn:  $ZZ'$  schneidet die Objektebene senkrecht. Da die Bildebene ebenfalls orthogonal zur jener Ebene liegt, muss jede Gerade in der Bildebene parallel oder windschief zu  $ZZ'$  sein. Da aber  $A_p\varphi_z(A)$  auch in der Projektionsebene  $AZ'Z$  liegt, bleibt nur noch der erste Fall. Somit ist  $A_p\varphi_z(A)$  parallel zu  $ZZ'$  und somit auch orthogonal zur Objektebene. Damit lässt sich auch der Strahlensatz anwenden. Es gilt:

$$d(A_p, \varphi_z(A)) = \frac{d(A, A_p) \cdot d(Z, Z')}{d(A, Z')} \quad (8.1.1)$$

Für den Einsatz im Unterricht wurde folgendes Material entwickelt, dessen Aufbau an Abb. 8.1.2 orientiert ist. Das CAD Modell und die Umsetzung zeigt Abb. 8.1.3.

Die Objektebene ist eine Platte aus beschichtetem Holz und die Bildebene eine durchsichtige Scheibe aus Acrylglas, welche auf die Platte aufgesteckt werden kann. Auf einer Seite der Objektebene sind verschiedene Löcher gebohrt, in die ein Stab senkrecht gesteckt werden kann. Oben am Stab befindet sich eine gelochte Platte. Sie stellt den Augpunkt  $Z$  dar. Zur Variation von  $Z$  wurden zwei verschiedene Rundhölzer mit unterschiedlichen Höhen gefertigt, welche in die beiden Löcher auf der Platte gesteckt werden können. Somit sind vier verschiedene Lagen von  $Z$  möglich.

Der Winkel aus Holz hat auf der senkrechten Leiste ein Zentimetermaß und kann verwendet werden, um die berechneten Abstände zwischen Objektebene und Bildpunkt  $\varphi_z(A)$  über den Schnittpunkt  $A_p$  abzutragen. Um  $A_p$  zu markieren bzw. die anderen beiden Abstände in Gl. (8.1.1) zu messen, kann ein Lineal unter die Acrylglasplatte geschoben werden.

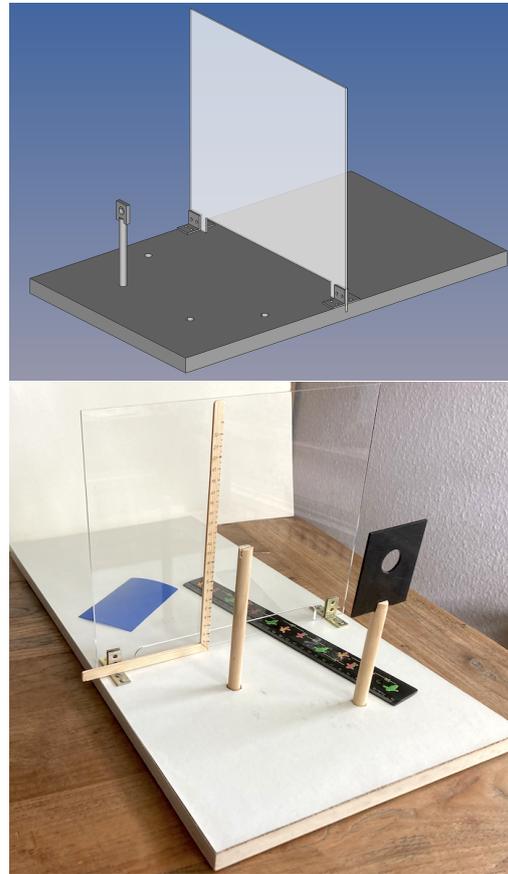


Abb. 8.1.3 Material für die Projektion einer ebenen Figur

Wir wollen die Anwendung an einem Beispiel demonstrieren und verwenden ein blaues Rechteck, welches auf der anderen Seite der Acrylglasplatte mit Klebeband fixiert wird. Zur besseren Orientierung beschriften wir die Ecke mit einem wasserlöslichen Stift. Für das Zentrum nehmen wir den kleineren der beiden Rundhölzer und stecken es in das hintere Loch. Damit haben wir das Projektionszentrum festgelegt. Nun wollen wir die Bildpunkte berechnen.

*Schritt 1:*

Wir messen die Höhe von der Platte bis ungefähr zur Mitte des Guckloches und erhalten  $d(Z, Z') = 14$  cm.

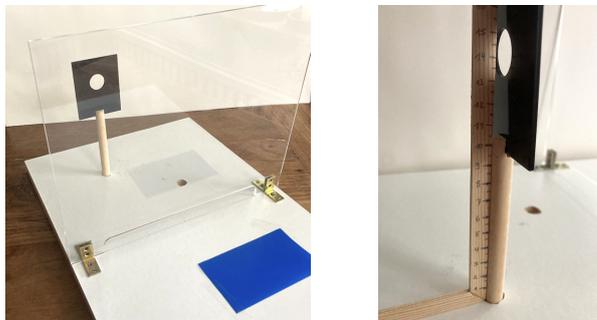


Abb. 8.1.4 Schritt 1: Das Objekt wird fixiert und der Abstand des Zentrums zum Boden ausgemessen.

*Schritt 2:*

Mit einem Lineal wird der Abstand zwischen den Urbildpunkten und dem Standpunkt  $Z'$  bzw. zum Schnittpunkt mit der Bildspur gemessen, indem das Lineal durch die Öffnung in der Acrylglasplatte geschoben wird. Zusätzlich markieren wir diese Schnittpunkte.

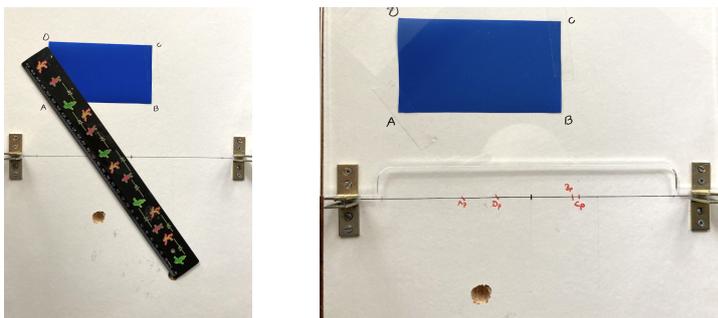


Abb. 8.1.5 Schritt 2: Messen der Abstände und Markierung der Schnittpunkte

Wir schreiben die Werte (in cm) in eine Tabelle und berechnen über den Strahlensatz nach Gl. (8.1.1) die Höhe der Bildpunkte:

| $X$ | $d(X, X_p)$ | $d(X, Z')$ | $d(X_p, \varphi_z(X))$ |
|-----|-------------|------------|------------------------|
| $A$ | 7,9         | 25,2       | 4,4                    |
| $B$ | 6,5         | 20,7       | 4,4                    |
| $C$ | 13,5        | 27,8       | 6,8                    |
| $D$ | 15,2        | 31,2       | 6,8                    |

Das Rechteck liegt mit den Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  parallel zur Bildebene. In diesem Fall wird ihr Fluchtpunkt zum Fernpunkt, sodass auch die Bildstrecken parallel sind. Dies zeigt sich in den Ergebnissen, da die Endpunkte der Bildstrecken auf derselben Höhe liegen.

Schülerinnen und Schüler haben somit die Möglichkeit, ihre Ergebnisse auf Plausibilität zu überprüfen.

*Schritt 3:*

Mit den Längenangaben und der obigen Formel (8.1.1) lassen sich die Längen von  $X_P$  bis zu den Bildpunkten  $\varphi_z(X)$  berechnen und auf der Acrylplatte abtragen. Hierzu können wir, wie in der vorherigen Abbildung, die Platte an die schwarz markierte Bildspur legen. Wegen den Halterungen auf beiden Seiten kann die Platte nicht ganz an die Bildspur gelegt werden. Der Abstand beträgt 3 mm und muss zu  $d(X_p, \varphi_z(X))$  hinzu addiert werden. Vorteil ist dagegen, dass ein Geodreieck direkt an die Schnittpunkte  $A_p, B_p, \dots$  angelegt werden kann, um senkrecht die ermittelte Länge abzutragen. Wir markieren die Bildpunkte mit einem wasserlöslichen Stift. Eine Alternative zeigt das erste Bild der folgenden Abbildung:

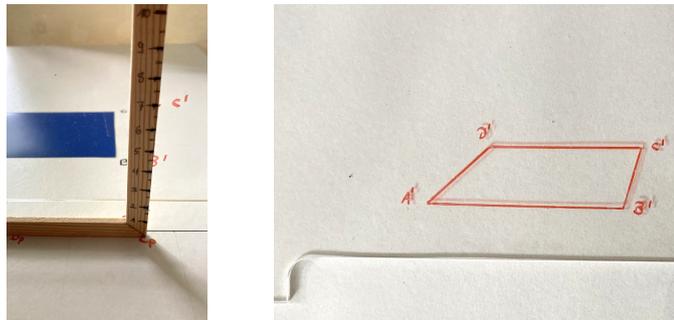


Abb. 8.1.6 Schritt 3: Abtragen der berechneten Längen auf die Acrylglasplatte

Der Winkel wird bis an den Schnittpunkt mit der Bildspur geschoben und der Bildpunkt auf der stehenden Acrylglasplatte an der berechneten Höhe markiert. Hierbei müssen die 3 mm nicht berücksichtigt werden. Mit allen weiteren Eckpunkten der Figur wird so verfahren. Die Acrylglasplatte kann nun herausgenommen werden, um die Bildpunkte mit dem wasserlöslichen Folienstift miteinander zu verbinden.

*Schritt 4:*

Zur Kontrolle haben Schülerinnen und Schüler nun die Möglichkeit, die Platte wieder aufzustecken und durch das Loch oberhalb des Stabes zu sehen. Wurde richtig gerechnet, sollte das gesehene Rechteck auf der Objektebene mit dem konstruierten Bild auf der Acrylglasplatte übereinstimmen. Der Blick sollte dabei durch das Loch senkrecht auf die Bildebene fallen, damit die Sehebene des Auges parallel zur Bildebene ausgerichtet ist. Wird stattdessen zum seitlich versetzten Rechteck geschaut, stimmen die Bilder nicht überein. Die Richtung, in welche die Person schaut, liegt orthogonal zur Sehebene des Auges. Wird nicht senkrecht durch das Loch geschaut, so stimmen Seh- und Bildebene nicht mehr überein. Dies war der Grund für die Einführung des Kamerakoordinatensystems aus dem vorheri-

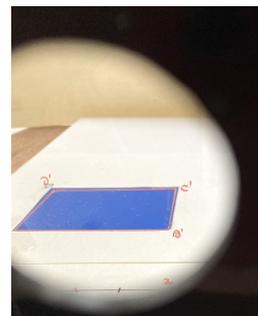


Abb. 8.1.7 Validierung des Ergebnisses

gen Kapitel mit *Processing*. Einfacher lässt sich das Ergebnis überprüfen, wenn statt dem eigenen Auge eine Handykamera verwendet wird. Dabei muss das Handy auch parallel zur Bildebene ausgerichtet werden. So ist die vorherige Abbildung entstanden.

Nach diesem Beispiel sind weitere Fragestellungen möglich. So können auf der Acrylglasplatte die Bildstrecken  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$  derart verlängert werden, dass sie sich in den Fluchtpunkt  $F$  schneiden. Wir stellen die Platte wieder in die Halterung und schauen durch das Loch. Wir sehen direkt auf  $F$ , da sich der Punkt auf derselben Höhe befindet. Dies stimmt auch mit der Theorie überein, denn in Kapitel 3.1 *Die Zentralprojektion*, S. 46, wurde gezeigt, dass der Fluchtpunkt das Bild des Fernpunktes ist, welches die Richtung der Geraden  $AD$  und  $BC$  beschreibt. Nach den Konstruktionsverfahren im Abschnitt 4.3.2 lässt sich der Fluchtpunkt konstruieren, indem wir durch  $Z$  eine Parallele zu  $AD$  ziehen, welche die Bildebene in  $F$  schneidet. Da das Rechteck parallel zur Bildebene liegt, ist  $AD$  orthogonal zu dieser. Demnach fällt  $F$  mit dem Hauptpunkt zusammen.

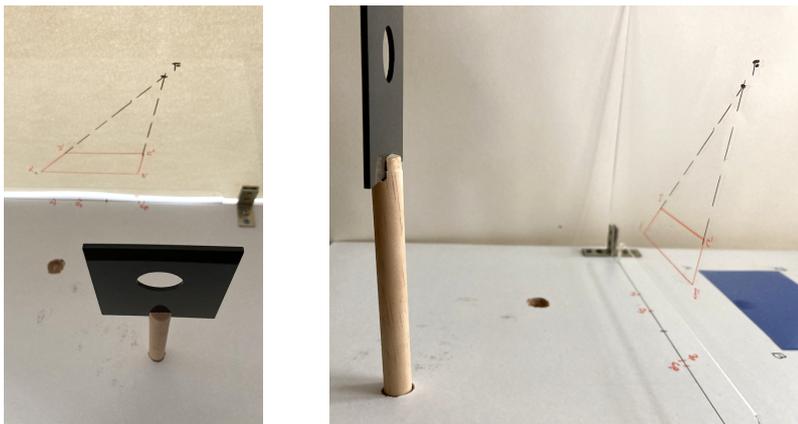


Abb. 8.1.8 Die Ansicht von oben und von der Seite zeigen, dass sich der Fluchtpunkt orthogonal vor dem Loch befindet.

Wir wollen in einem zweiten Beispiel die Lage von Fluchtpunkten untersuchen. Hierzu nehmen wir eine Raute und legen sie neben das Rechteck auf die Objektebene. Wir konstruieren die Bildpunkte wieder mithilfe der Formel, übertragen diese auf die Acrylglasplatte und schauen danach durch das Loch, um das Ergebnis zu überprüfen. Das mittlere Foto in Abb. 8.1.9 zeigt die Übereinstimmung zwischen Bild und Urbild. Nun nehmen wir wieder die Platte heraus und verlängern alle Seiten der Raute, sodass wir die beiden Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  erhalten. Weiterhin zeichnen wir auf die Objektebene die Parallele zu  $EF$  und  $EH$  durch  $Z'$ . Ihr Schnittpunkt mit der Bildspur sollte  $F'_1$  und  $F'_2$  sein, d.h.  $F_1$  und  $F_2$  im Grundriss. Wir stecken die Acrylglasplatte zurück in die Halterung. Das dritte Foto in Abb. 8.1.9 zeigt, dass die Fluchtpunkte unter Berücksichtigung einiger Ungenauigkeiten durch das Zeichnen

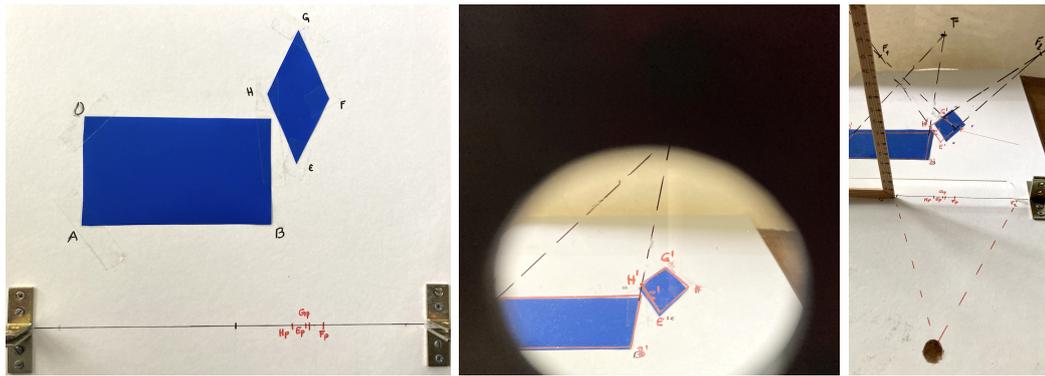


Abb. 8.1.9 Im zweiten Beispiel wird eine Raute abgebildet und die Fluchtpunkte gezeichnet.

senkrecht über  $F'_1$  und  $F'_2$  liegen.

Beide Fluchtpunkte liegen auf einer Geraden, welche parallel zur Objektebene liegt. Dies ist der Horizont, welcher alle Fluchtpunkte enthält, sofern die entsprechenden Parallelbüschel in parallelen Ebenen bzgl. der Objektebene liegen. Hier zeigt sich im rechten Foto der Abb. 8.1.9 eine Unstimmigkeit, denn  $F, F_1$  und  $F_2$  liegen auf keiner gemeinsamen Geraden.  $F$  befindet sich etwas oberhalb der Verbindungsgeraden  $F_1 F_2$ . Dies liegt an Ungenauigkeiten im Zeichnen und kann durch die Projektion von größeren ebenen Figuren verringert werden. Die Bildkanten der Raute waren anscheinend zu kurz, um die Bildgeraden durch die vier Eckpunkte genau zeichnen zu können. Geringe Abweichungen können schon zu einer größeren Lageverschiebung der Fluchtpunkte führen.

Das Material bietet noch weitere Möglichkeiten, als die Untersuchung von Fluchtpunkten. Wir können auch die Bilder mithilfe der Konstruktionsmethode in Abschnitt 4.3.2 erstellen, diese auf die Acrylglasplatte übertragen und mithilfe des Guckloches das Ergebnis überprüfen. So bekommen Schülerinnen und Schüler die Chance, ihre Ergebnisse zu validieren. Dies wird hier allerdings nicht weiter ausgeführt.

*J. H. Lambert* hat die vorherige Methode weiterentwickelt, mit dem Ziel, den Abstand  $d(X_p, \varphi_z(X))$  in der Objektebene zu konstruieren statt zu berechnen. In seinem Perspektographen entsteht das Bild mechanisch durch Abfahren des Grundrisses mit einem Stift. Dafür wurde folgender Trick verwendet, wie die neben stehenden Abbildungen zeigen:

Wir übertragen den Abstand  $d(a_p, \varphi_z(A))$  auf die Bildspur  $a$  und erhalten den Punkt  $M$ . Analog verfahren wir mit  $Z$ , indem wir  $d(Z, Z')$  auf die Parallele zu  $a$  durch  $Z'$  abtragen. Damit haben wir den Punkt  $O$ . Wenn wir nun  $O$  mit  $A$  verbinden, so liegt  $M$  auf dieser Strecke. Denn: beide Dreiecke haben die Kante  $\overline{AZ'}$  mit dem Teilungspunkt  $A_p$  gemeinsam. Aufgrund des Strahlensatzes ist das Streckenverhältnis

$d(A, A_p) : d(A, Z')$  gleich zum Verhältnis  $d(\varphi_z(A), A_p) : d(Z, Z')$ . Dies gilt auch im Dreieck  $\Delta AZ'O$ , da beide Dreiecke die Kante  $\overline{AZ'}$  mit dem Teilungspunkt  $A_p$  gemeinsam haben. Da ist auch das Verhältnis  $d(M, A_p) : d(Z', O)$  gleich den vorherigen Verhältnissen. Somit ist  $M$  ein Teilungspunkt der Strecke  $\overline{AO}$ .

Eine andere Sichtweise zeigt Abb. 8.1.11. Die Dreiecke  $\Delta\varphi_z(A)A_pM$  und  $\Delta ZZ'O$  sind rechtwinklig und gleichschenkelig. Folglich sind sie ähnlich zueinander. Das eine Dreieck lässt sich über eine Zentralprojektion  $\varphi_z$  mit  $A$  als Zentrum auf das andere abbilden. Dabei ist  $AO$  ein Projektionsstrahl und somit  $M$  das Bild von  $O$ . Demnach muss  $M$  auf  $AO$  liegen.

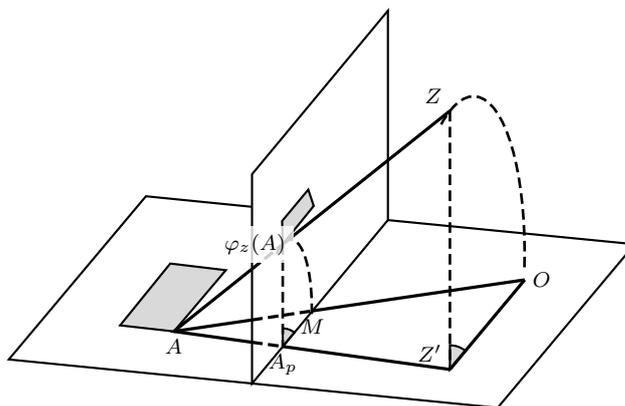


Abb. 8.1.10 Drehung in die Ebene um  $90^\circ$

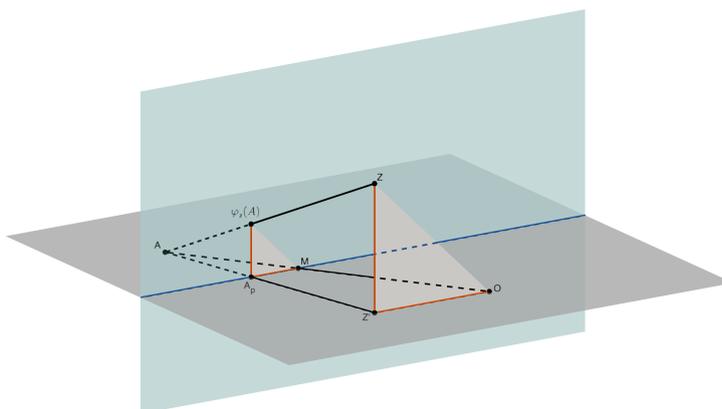


Abb. 8.1.11 Zentralprojektion des Dreiecks

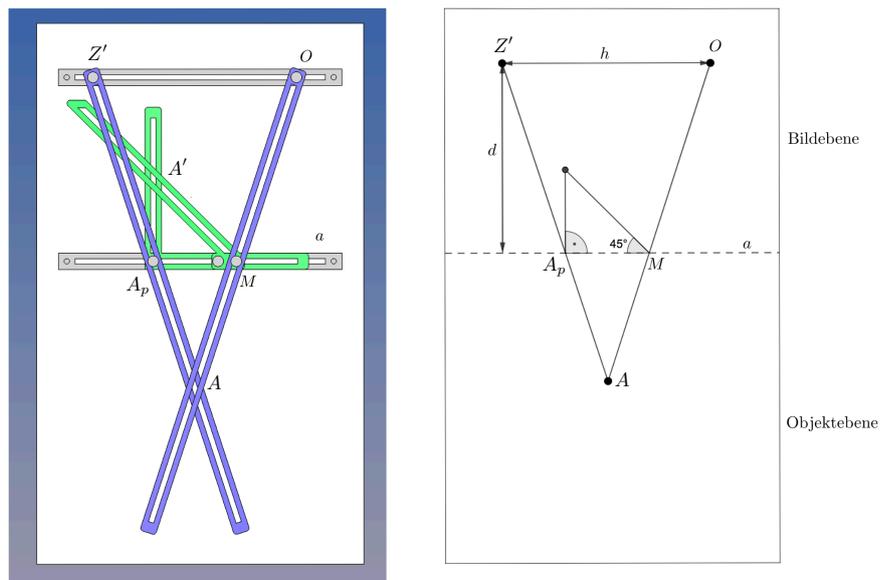


Abb. 8.1.12 Ansicht von oben

Statt  $d(A_p, \varphi_z(A))$  mithilfe des 2. Strahlensatzes zu berechnen, lässt sich die Strecke konstruieren, indem  $O$  mit  $A$  verbunden wird, um den Punkt  $M$  zu erhalten. Somit ist auch die Funktionsweise des Perspektographen geklärt, welche die Abb. 8.1.12 zeigt.

Auf der oberen Leiste lassen sich die Punkte  $Z'$  und  $O$  einstellen.  $Z'$  legt dabei fest, wo der Betrachter steht, und der Abstand  $d(Z', O) = h$ , wie weit der Augpunkt über der Ebene liegt. Wie weit der Betrachter von der Bildebene entfernt steht, wird dabei durch den Abstand  $d$  der beiden grauen Leisten festgelegt. In dem Nachbau sind diese Leisten in einem festen Abstand von 17 cm montiert.

Nun werden die violetten Leisten über dem Urbildpunkt  $A$  gekreuzt. Der Schnittpunkt der Leiste beginnend bei  $Z'$  bzw. bei  $O$  mit der mittleren Leiste  $a$  stellt den Punkt  $A_p$  bzw.  $M$  dar.  $A'$  ergibt sich nun, wenn der Abstand  $d(A_p, M)$  senkrecht über  $A_p$  abgetragen wird. Dies wird im Perspektographen über das gleichschenklige Dreieck erreicht, d.h. der Schnittpunkt der beiden grünen Leisten ist  $A'$ . Abb. 8.1.14 zeigt den Nachbau des Perspektographen.

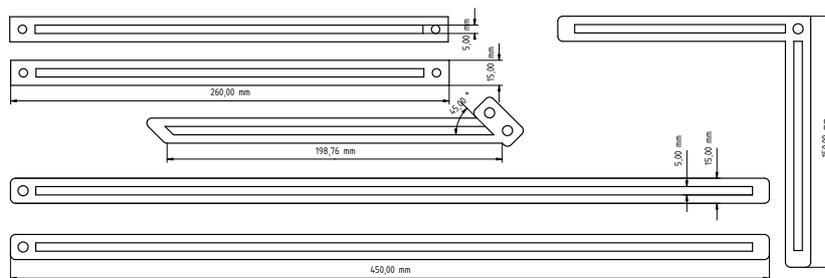
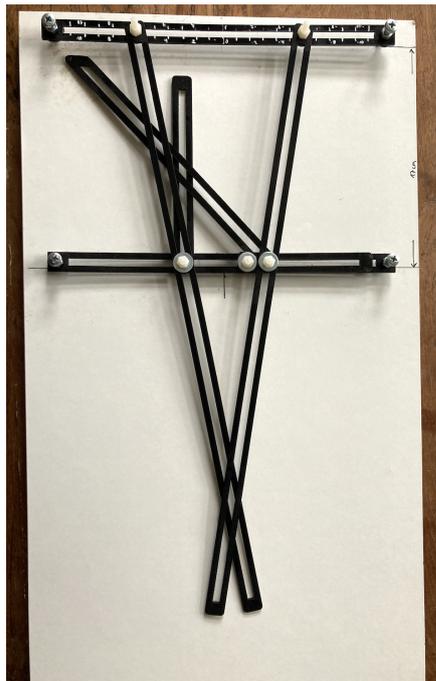


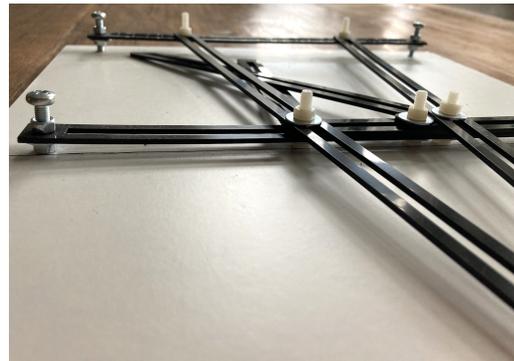
Abb. 8.1.13 Die einzelnen Bauteile des Perspektographens



(a) Übersichtsaufnahme



(b) Auf der oberen Leisten steht in weißer Schrift der Abstand zum Mittelpunkt.



(c) Die horizontalen Leisten befinden sich in unterschiedlichen Höhen.

Abb. 8.1.14 Der Nachbau des Perspektographen

Die einzelnen Teile des Nachbaus wurden anhand von Zeichnungen in *Lamberts* Schriften [32] mit dem Programm *FreeCAD* entworfen. Abb. 8.1.13 zeigt die Teile mit ihren Maßen in mm. Mit *Sculpteo* wurde eine Firma gefunden, welche Einzelaufträge für das Laserschneiden annahm. Als Material wurde der Kunststoff POM (Polyoxymethylen) gewählt, da es neben hoher Festigkeit auch sehr dünn sein musste, da an zwei Stellen im Perspektographen drei Teile übereinander gelegt werden mussten und der somit entstehende Höhenunterschied so gering wie möglich sein sollte. Neben dem Kunststoff bot die Firma auch MDF Holzplatten an, allerdings war die Dicke der Platten Anfang 2019 noch größer als 2 mm und die Oberfläche rau, was ein Gleiten der Leisten über die horizontalen Träger erschweren würde. Im Nachhinein stellte sich heraus, dass der Kunststoff zwar eine sehr glatte Oberfläche hatte, allerdings die Festigkeit nicht für eine volle Funktionsfähigkeit ausreichte.

Bevor wir die Nachteile im Nachbau aufzeigen, zeigt Abb. 8.1.14 einige Detailaufnahmen. Als Unterlage wurde ein weißes Regalbrett verwendet (a). Mit Schrauben wurden die horizontalen Träger in einem Abstand von 17 cm auf das Brett angebracht. Als Abstandshalter dienten Muttern. Die Leisten, welche über dem Urbildpunkt gekreuzt werden, wurden am oberen Träger mit weiteren Schrauben befestigt. Am unteren Träger liegt dazwischen jeweils ein weiteres Bauteil, um das gleichschenklige Dreieck zu bilden. Damit entsteht ein Höhenunterschied zwischen dem Auflagepunkt der langen Leisten am oberen und unteren Träger. Dieser wurde ausgeglichen, indem

jene durch die Muttern auf unterschiedliche Höhen gestellt wurden, damit die Träger gerade bleiben (c). Um  $Z'$  und  $O$  einzustellen, wurde in weißer Schrift ein Zentimetermaß an der oberen Leiste übertragen (b).

Wir kommen nun zu den Nachteilen des Materials und der Befestigung mit den Schrauben. POM ist ein harter Kunststoff, allerdings sind die Leisten nicht stabil. Die Breite beträgt bei allen Bauteilen 15 mm und der Ausschnitt in der Mitte hat eine Breite von 5 mm. Damit ist zu wenig Material vorhanden, um auf einer Länge von 45 cm nicht durchzubiegen. Hinzu kommt, dass trotz der Unterlegscheiben an den Schrauben die Leisten beim Bewegen die Führung verlieren und über die Unterlegscheiben springen, wie in der Abbildung durch einen Pfeil markiert wurde.

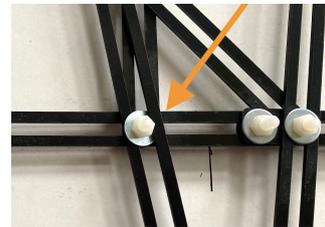


Abb. 8.1.15 Die Leisten springen über Unterlegscheibe

Wie stark sich die Leisten dehnen lassen, zeigt die nächste Abbildung. Ohne viel Kraft können die Leisten mit dem Finger gedehnt werden. Somit ist ein reibungsloses Gleiten der Leisten über die Halterung kaum möglich. Ebenso lässt sich kein Stift in den Kreuzungspunkten der Leisten, weder zum Abfahren des Grundrisses noch zum Zeichnen des Bildes, einsetzen. Zudem biegen sich die Leisten aufgrund der Länge durch. Trotz des geringeren Gewichtes der weißen Plastikschrauben und der Bauteile biegt sich die mittlere Leiste in der Mitte durch.

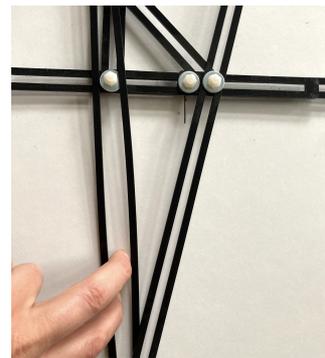


Abb. 8.1.16 Zu dünne Leisten

Des Weiteren ist der Bereich, in dem sich die Leisten bewegen lassen, eingeschränkt. Die Übereckleiste, welche das rechtwinklige Dreieck bildet, läuft mit einem Schenkel auf der mittleren Halteleiste, damit der andere Schenkel immer orthogonal zur jener Leiste liegt. Diese ist allerdings auch 15 cm lang und kann nicht über die Halterung der mittleren Leiste hinausgehen, wie die nebenstehende Abbildung zeigt, da hier der Kopf der Schraube im Wege steht.

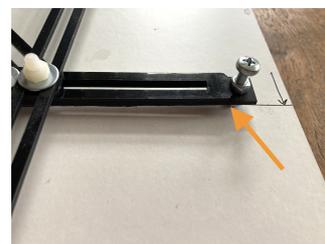


Abb. 8.1.17 Eingeschränkte Beweglichkeit der Eckleiste

Ein geeignetes Material, welches dünn und formstabil ist, ist Metall. Allerdings konnte Anfang 2019 keine Firma gefunden werden, welche private Aufträge für das Laserschneiden von Metallen annahm. Daher wurde der Nachbau des Perspektographen an dieser Stelle beendet.

## 8.2 Die Raumecke - Materialien zur Dreitafelprojektion

Wir kommen nun zu zwei Hilfsmitteln, welche für die Auseinandersetzung mit der Dreitafelprojektion entworfen wurden. Auch hier gab es Anregungen aus der Literatur für das erste Modell. Es ist an die räumliche Ecke von *A. Lipsmeier, 1971* [35, S. 290] und dem sog. *Omnibus* von *T. Olivier, 1852* [39, S. 76] angelehnt.

Die Abb. 8.2.1 zeigt den Entwurf einer Raumecke mit einem Anwendungsbeispiel. Für die Konstruktion wurde wieder *FreeCAD* verwendet. Die Raumecke sollte aus leicht zugänglichen Materialien gebaut werden und dessen Wände in die Ebene klappbar sein. Daher befinden sich am Boden jeweils zwei Scharniere. Die Seitenflächen bestehen aus Acrylglas, damit sowohl mit einem Folienstift darauf gezeichnet, sowie hindurch gesehen werden kann. Für einige Anwendungsbeispiele wurden Bauteile eines Soma Würfels verwendet und eine Szene in der Raumecke gebaut. Abb. 8.2.1 (g) - (i) zeigen drei Ansichten der Szene.

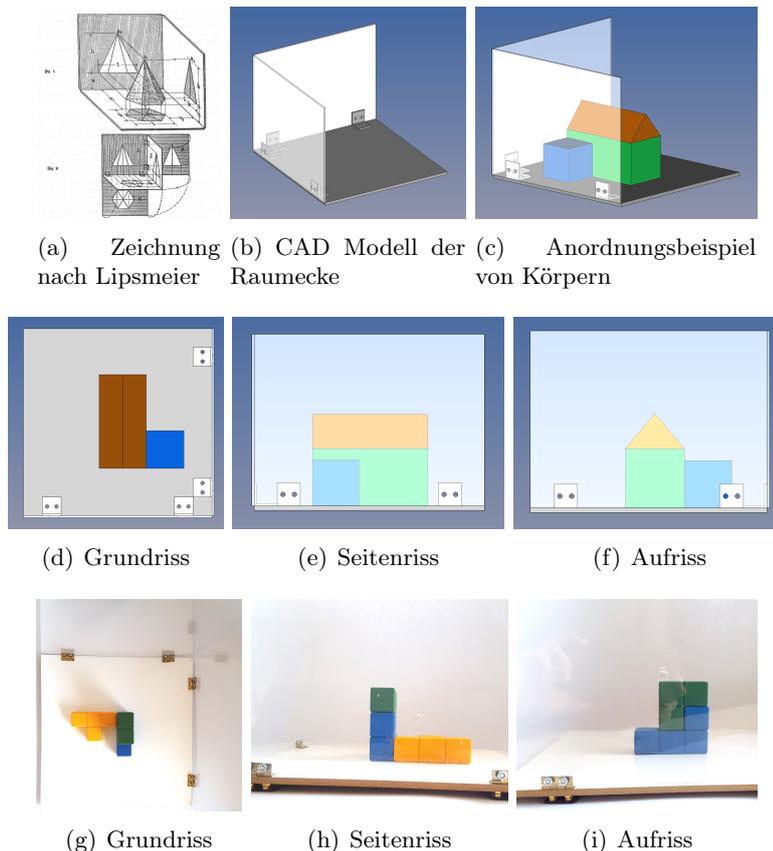


Abb. 8.2.1 Entwurf der Raumecke mit *FreeCAD* und erste Versuche mit Teilen eines Soma Würfels

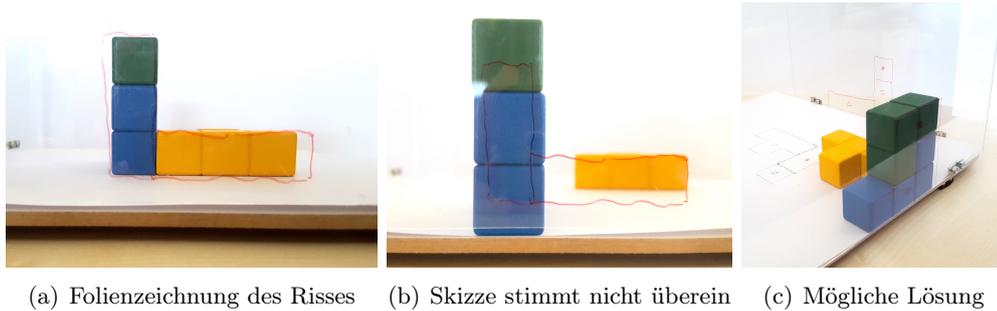


Abb. 8.2.2 Problem beim Zeichnen der Risse

Als Anwendungsbeispiel können Schülerinnen und Schüler mit den Teilen des Soma Würfels unterschiedliche Anordnungen ausprobieren und die entsprechenden Risse durch die transparenten Scheiben betrachten. Die Idee ist, dass sie mithilfe von wasserlöslichen Folienstiften die entsprechenden Risse auf die Scheiben übertragen und dann diese auseinander klappen, um die Risse vergleichen zu können. Abb. 8.2.2 zeigt, welche Probleme sich dabei ergaben:

Da das eigene Sehen zentralprojektiv ist, lassen sich die Risse mithilfe des Folienstiftes nicht auf die Scheiben übertragen, selbst wenn senkrecht auf die Bildebene geschaut wird. Die Zeichnung ist das Bild einer Zentralprojektion und stimmt nicht annähernd mit dem einer orthogonalen Parallelprojektion überein, wie das zweite Bild in der Reihe zeigt. Beholfen wurde sich, in dem die Objekte orthogonal zur Bildebene verschoben und dann abgezeichnet wurden, wie im dritten Bild der Reihe zu sehen.

Weiterhin waren die ersten Skizzen einfarbig, was die Zuordnung der einzelnen Objekte in den Rissen erschwerte. In der nebenstehenden Abbildung wurde sich mit Symbolen geholfen. Auch das Zeichnen von geraden Kanten an der senkrechten Acrylglasplatte war schwer. Nachdem alle Objekte auf der Platte übertragen waren, wurden die Risse herunter geklappt und einige Hilfslinien gestrichelt ergänzt. Aufgrund der Ungenauigkeiten beim Abzeichnen, schneiden die Hilfslinien die Schnittgeraden der Ebenen nicht orthogonal. Zudem dauert das Zeichnen sehr lange, vor allem, wenn die Bauten zur Acrylglasplatte verschoben

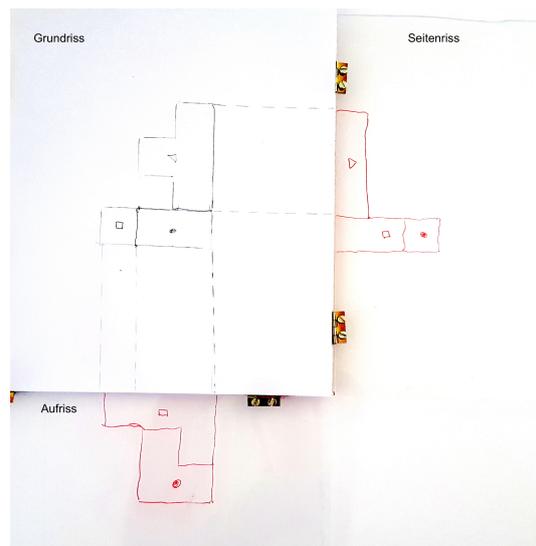


Abb. 8.2.3 Die Risse im Überblick

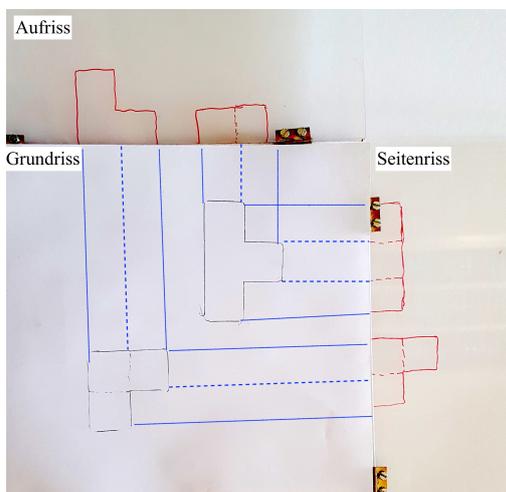
ben werden müssen, um die Risse zu zeichnen. Für eine einfachere Zuordnung können statt Symbole anders farbige Folienstifte verwendet werden. Diese Probleme wurden im Nachhinein gelöst. Aber bevor wir die Verbesserungen vorstellen, folgt eine Diskussion zu möglichen Aufgabenstellungen zu dem Beispiel in Abb. 8.2.3:

- Wie lässt sich entscheiden, ob ein Objekt auf, vor, neben oder hinter einem anderen Objekt ist?
- Wie lässt sich entscheiden, ob ein Objekt mehrere Stufen hat?
- Welche Kanten kommen in mehreren Rissen vor?
- Wird jede Kante auf eine Kante abgebildet?
- Gibt es Kanten, welche auf dieselbe Kante projiziert werden?

Für diese ersten Erkundungen wurden zwei Bauteile des Soma Würfels verwendet und so gelegt, dass sie sich nicht verdecken und alle Kanten parallel zu den Ebenen liegen. So lassen sich zwei verschiedene Beispiele gleichzeitig bearbeiten, sodass die Schülerinnen und Schüler ihre Vermutungen an beiden Objekten prüfen können. Die folgende Bilderreihe stellt Aufgaben sowie mögliche Lösungen vor. Da die Verbesserungen erst nach dieser Bildreihe entwickelt wurden, wurde hier noch die Teile an die Acrylglasplatte verschoben und die Kanten mit einem Folienstift nachgezeichnet.

### Aufgabenbeispiel 8.2.1

Um die Risse zu auf die Acrylglasplatte zu zeichnen, mussten die Objekte verschoben werden. Entlang welcher Linien wurde dies getan? Zeichne diese ein.



Die Objekte wurden entlang der blauen Linien verschoben. Sie liegen orthogonal zu der Aufriss- und Seitenrissebene und entsprechen den Projektionsrichtungen der Dreitafelprojektion. Aus den in rot gezeichneten Rissen lassen sich die Maße der verwendeten Bauteile des Soma Würfels abmessen.

Abb. 8.2.4 Es wurde entlang der Hilfslinien verschoben.

**Aufgabenbeispiel 8.2.2**

Markiere eine Kante im Grundriss. Findest du diese Kante auch im Auf- oder Seitenriss wieder? Verfahre so mit weiteren Kanten im Grundriss und vergleiche die Ergebnisse.

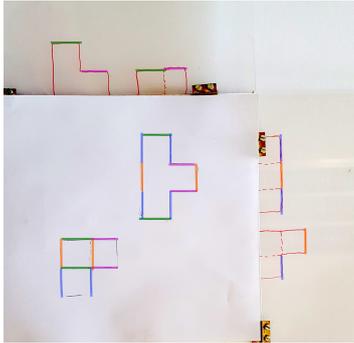


Abb. 8.2.5 Farbige Zuordnung der Kanten in den einzelnen Rissbildern

Da der Grundriss zwischen beiden anderen Ebenen liegt, ist es einfacher anfangs eine Kante im Grundriss in den anderen Rissen zu suchen, da hierbei die Markierungslinien aus Aufgabe 1 helfen können. Welche Zusammenhänge lassen sich nun feststellen?

Die Zuordnung erfolgt durch gleiche Farben. Die orange markierte Kante erscheint nicht im Aufriss, dagegen mit gleicher Länge im Seitenriss. Alle Kanten, welche senkrecht zur Ebene stehen, erscheinen nicht im Rissbild, während alle, die parallel zu ihr liegen, unverändert abgebildet werden. Dann gibt es noch Kanten (eine grüne im unteren Objekt), welche zwar parallel zur Aufrissebene liegen, dennoch nicht

im Rissbild erscheinen. Hier ist nur eine grün markiert. Die zweite grüne Kante wird verdeckt und könnte bspw. gestrichelt ergänzt werden.

**Aufgabenbeispiel 8.2.3**

Finde Kanten, welche in zwei unterschiedlichen Rissen vorkommen und markiere diese in derselben Farbe. Gibt es Kanten, welche in allen drei Rissen oder genau einem Riss abgebildet werden?

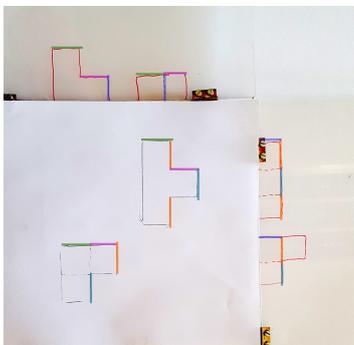


Abb. 8.2.6 Gleiche Kanten in unterschiedlichen Rissen

Dies ist eine Erweiterung der vorherigen Aufgabe. Wir haben da schon Kanten gefunden, welche im Grund- und Aufriss vorkommen, aber nicht im Seitenriss. Der Grund, weshalb Kanten verschwinden, war entweder, weil sie senkrecht zur Bildebene standen oder verdeckt wurden. Aber was ist die Antwort auf die zweite Frage? Es gibt in diesem Beispiel keine Kanten, welche in allen drei oder genau einem Riss abgebildet werden. Dies liegt an der Art der Aufstellung: die Objekte sind parallel zu einer der Ebenen ausgerichtet.

Dadurch gibt es Kanten, welche senkrecht zur Bildebene stehen und bei einer orthogonalen Parallelprojektion mit dem Projektionsstrahl zusammenfallen. Sie werden dadurch auf einen Punkt abgebildet. Dies wird in der letzten Aufgabe thematisiert.

#### Aufgabenbeispiel 8.2.4

Finde Kanten, welche auf einen Punkt abgebildet werden. Wie liegen diese im Vergleich zu den anderen Kanten? Markiere im Grundriss eine Ecke und die anliegenden Kanten in drei Farben. Zeichne die zugehörigen Kanten im Auf- und Seitenriss in derselben Farbe. Was fällt dir auf?

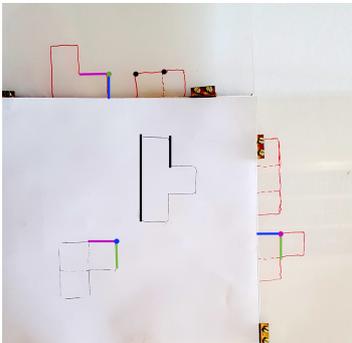


Abb. 8.2.7 Es gibt Kanten, welche auf Punkte projiziert werden.

Da die Körper parallel zu allen drei Rissen ausgerichtet sind, gibt es Kanten, welche parallel zu den Projektionsstrahlen sind und somit auf einen Punkt abgebildet werden. Alle Kanten, welche senkrecht zum entsprechenden Riss liegen, ergeben einen Punkt. Mithilfe der Farben ist erkennbar, dass immer zwei Kanten parallel zur Bildebene liegen, während die dritte dazu senkrecht steht. Mit drei Farben lassen sich somit genau drei Kombinationen bilden, welche aus zwei Kanten und einem Punkt bestehen. Somit kommt jede Farbe in den Kombinationen genau zweimal als Kante vor und daher auch in den Rissen.

Wir kommen nun zur Verbesserung der Raumecke, nachdem mit der vorherigen Aufgabenreihe erste Versuche mit dem Material unternommen wurden. Statt mit dem Folienstift die Risse auf der Acrylplatte nachzuzeichnen, wurde Fensterfolie verwendet, da diese ohne Kleber auf der Acrylglasplatte haftet, aber ebenso leicht wieder abgezogen werden kann, ohne Spuren zu hinterlassen. Hierfür wurden alle drei Risse einiger

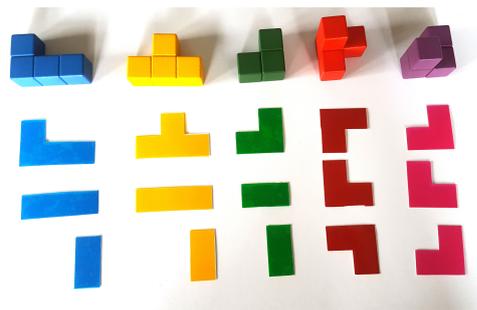


Abb. 8.2.8 Die drei Risse der verwendeten Teile eines Somawürfels

Bauteile des Soma Würfels aus farbiger Fensterfolie geschnitten (Abb. 8.2.8). So ist es möglich, dass die Risse jeder Anordnung der Bauteile auf die Scheiben aufgeklebt werden können, sofern diese parallel zu einer der Ebenen ausgerichtet sind. Zusammenfassend liefert die Fensterfolie folgende Vorteile:

- Die einzelnen Bauteile sind aufgrund der Farbe besser zu unterscheiden.
- Da die Folien transparent sind, sind auch verdeckte Bereiche in den Rissen erkennbar.
- Es muss kein Folienstift entfernt werden, sodass die Platten länger sauber bleiben.
- Die Folien haften aufgrund von Oberflächeneffekte, d.h. ein Kleber ist nicht nötig und die Folien sind wiederverwendbar.

Die Abb. 8.2.9 zeigt ein Beispiel unter Einsatz der Fensterfolie. Ein Nachteil lässt sich damit dennoch nicht lösen: die Anordnung muss immer noch bis zur Acrylglasplatte verschoben werden, um den Riss mit der Folie kleben zu können. Ebenso war es bei den obigen Aufgaben sinnvoll, Markierungen mit dem Folienstift zu zeichnen, um bspw. gleiche Kanten zu finden. Die Raumecke wurde daher weiterentwickelt.

Die Platten erhielten nachträglich ein Raster passend zu den Bauteilen des Somawürfels, denn diese bestehen selbst aus gleichgroßen Würfeln. Die Kantenlänge dieser Würfel entspricht dem Raster auf den Ebenen, wie die ersten beiden Bilder in Abb. 8.2.10 zeigen. So können sich Schülerinnen und Schüler beim Ankleben der Risse daran orientieren und müssen die Teile nicht mehr verschieben. Zum anderen ist dann folgende Aufgabenstellung möglich:

Die Risse einer unbekanntens Anordnung der Teile des Somawürfels ist vorgegeben und die Schülerinnen und Schüler sollen diese nachbauen. Ein Beispiel zeigt das dritte Bild in der nebenstehenden Abbildung. Hierfür können sie als Hilfe die Risse auf den Acrylplatten mithilfe des Rasters nachkleben, die Platten aufstellen und dann den Nachbau mit den farbig passenden Teilen des Soma Würfels beginnen. So haben sie die Möglichkeit sich anhand der Risse zu kontrollieren. Je nachdem wie gut die Raumvorstellung entwickelt ist, stellt dies gerade für den Anfang eine

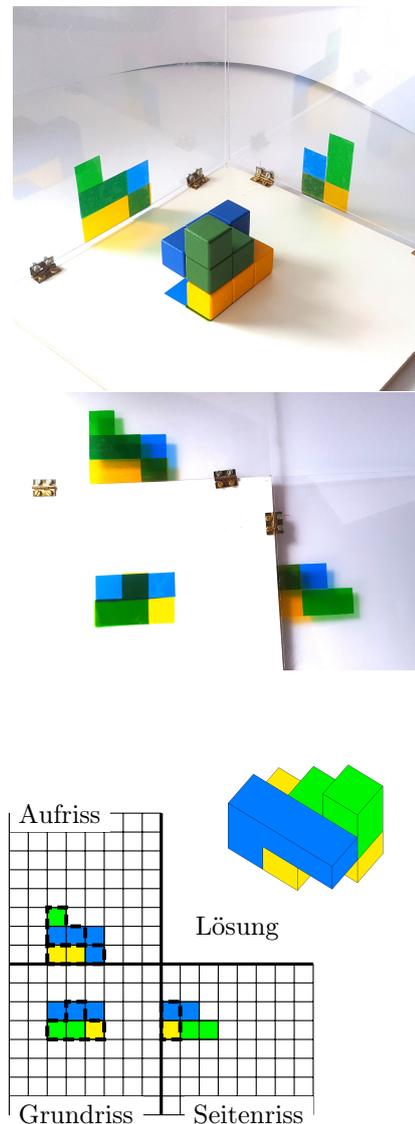


Abb. 8.2.9 Dreitafelprojektion mit Fensterfolie

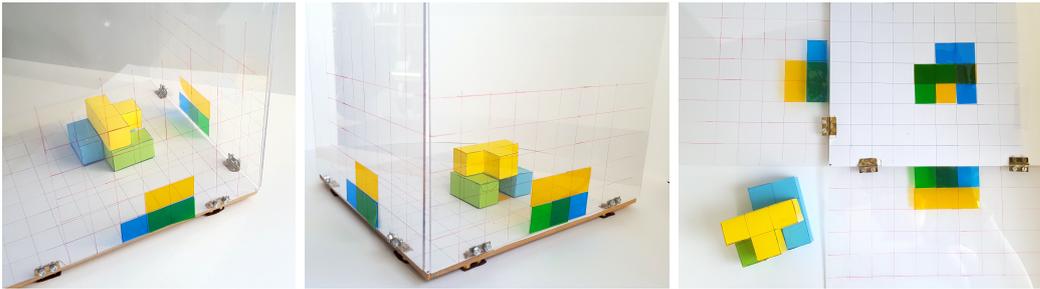


Abb. 8.2.10 Die Raumecke wurde ergänzt durch ein geeignetes Raster

gute Hilfe dar. Die verdeckten Kanten in dem Bild zur Aufgabe werden durch gestrichelten Linien angedeutet. Somit können auch konkave Objekte eindeutig dargestellt werden. Der Schwierigkeitsgrad ließe sich durch komplexere Anordnungen erhöhen.

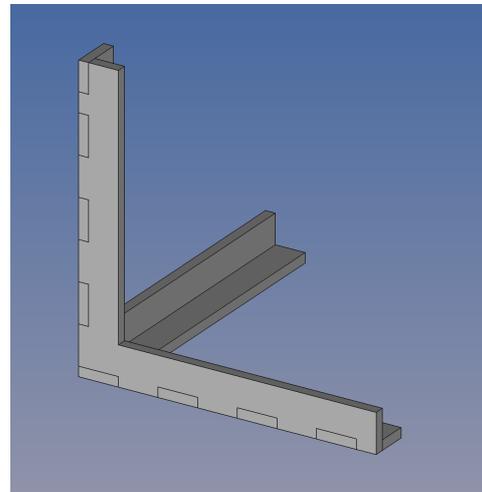
Der Einsatz der Fensterfolie hat allerdings noch den Nachteil, dass einerseits die Bauteile des Soma Würfels nötig sind und ebenso die parallele Ausrichtung zu den Rissebenen. Wir wollen zum Abschluss eine zweite Variante der Raumecke vorstellen, indem es um die Frage geht, ob Körper zu bestimmten Kombinationen an Rissen existieren. Die erste Raumecke wurde verwendet, um aus einer bestehenden Anordnung die Risse zu erstellen. Nun wollen wir aus Kombinationen von Rissen verschiedene Körper ableiten, d.h. in dem neuen Material sind die Ebenen nicht nur faltbar sondern können auch ausgetauscht werden.

### 8.3 Die zweite Variante der Raumecke

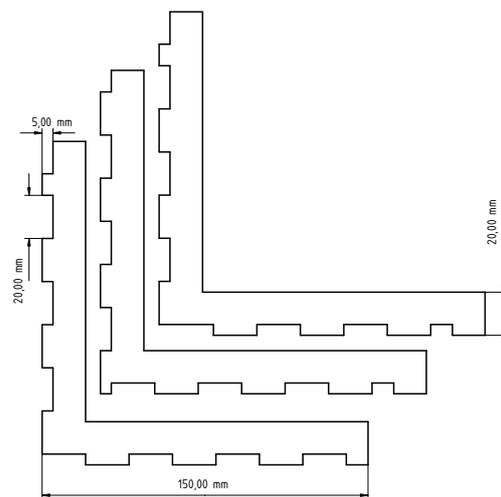
Die zuvor vorgestellte Raumecke war für Aufgaben entwickelt worden, wo die Körper und ihre Anordnung festgelegt und die entsprechenden Risse gezeichnet wurden. Das folgende Material ist für Aufgaben gedacht, wo dies umgekehrt wird: die Risse werden vorgegeben und die Schülerinnen und Schüler sollten passende Körper dazu finden.

Die Raumecke in Abb. 8.3.1 wird aus drei Teilen gebildet, welche ineinander gesteckt werden können. Hierzu gab es keine Vorlage. Es wurde ein Gestell entwickelt, welches einerseits Acrylglasplatten halten kann, aber sich auch auseinander klappen lässt. Die Verwendung kleinerer Scharniere wurde verworfen, da sie zu Erhebungen führen, sodass die Platten nicht ebenen auf dem Gestell angebracht werden können. Daher wurde auf ein Stecksystem zurückgegriffen, welches mit *FreeCAD* konstruiert wurde. Das erste Modell war aus Pappe. Da das Stecksystem funktionierte, wurde die Firma *Sculpteo* beauftragt, zwei dieser Gestelle aus Holz mit einer Stärke von 5 mm mittels eines Lasers zu schneiden.

Das Gestell dient zur Halterung von drei Platten aus Acrylglas in den Maßen  $140 \times 140 \times 2$  mm. Hierzu wurden zwei verschiedene Befestigungsarten probiert, welche die Abb. 8.3.2 zeigt: das linke Holzmodell hat Klettunkte, das rechte aufgeklebte Metalleisten.



(a) CAD Modell

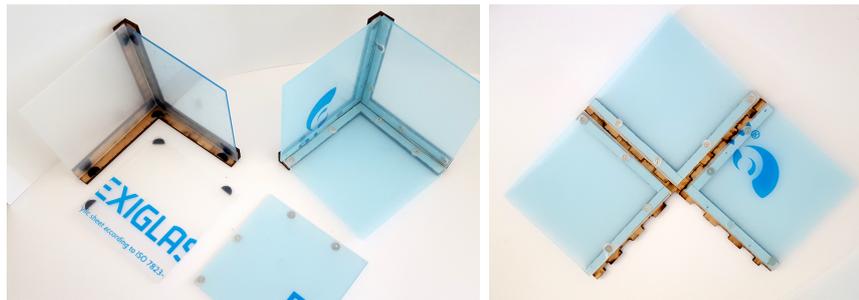


(b) Entwurf mit Maßen



(c) Pappmodell und Holzmodelle

Abb. 8.3.1 Entwicklung der Raumecke als Puzzle aus drei Teilen



(a) Zwei verschiedene Halterungssysteme (b) Die Ebenen in der Anordnung der Dreitafelprojektion

Abb. 8.3.2 Das Holzgestell mit Acrylglasplatten

Nach der ursprünglichen Idee sollten die Acrylglasplatten mithilfe von kleinen Magneten befestigt werden. Die ersten Magnete waren allerdings nicht stark genug, um die Platten zu halten, weshalb auf stärkere Neodym-Magnete mit einem Durchmesser von 10 mm zurückgegriffen wurde. Die Verwendung dieser ist nach der Verpackung erst ab 16 Jahren erlaubt und wäre daher für den Einsatz in der Mittelstufe unpraktisch gewesen. Zudem zogen sich die runden Magnete gegenseitig stärker an als auf der Metallleiste haften zu bleiben. Daher wurde die Idee mit den Magneten verworfen und stattdessen der Einsatz von Klettspunkten versucht.

Hierzu wurden runde Kreise halbiert und an drei Stellen auf das Holz geklebt. Analog wurde mit den Platten verfahren. Nachteil dieses Systems war, dass die Scheiben erhöhter als geplant auf dem Holz lagen und nicht einfach entfernt werden konnten, da die Haftung teilweise so stark war, dass das Gestell auseinander genommen werden musste, um die Platten abziehen zu können.

Die Idee mit den Magneten wurde daher wieder aufgegriffen. Diese sind 1 mm dick, die Platten mit 2 mm doppelt so stark, sodass diese angebohrt wurden, um die Magnete darin zu versenken. Dies lieferte zwei Vorteile: zum einen wurden die Magnete fixiert, sodass die Anziehung untereinander verhindert wurde, zum anderen können die Schülerinnen und Schüler diese nicht mehr entfernen. Die Verwendung dieser starken Magnete sollte somit für unter 16-Jährige unbedenklich sein. Der verringerte Abstand zum Metallband sorgte ebenfalls für eine stärkere Haftung. Die Platten fielen nicht ab und konnten dennoch leicht durch wegziehen entfernt werden.

Da die Leisten nur ineinander gesteckt sind, können diese leicht auseinander geklappt werden, um eine vergleichbare Anordnung der Risse mit der Raumecke aus dem vorherigen Abschnitt zu ergeben (Abb. 8.3.3).

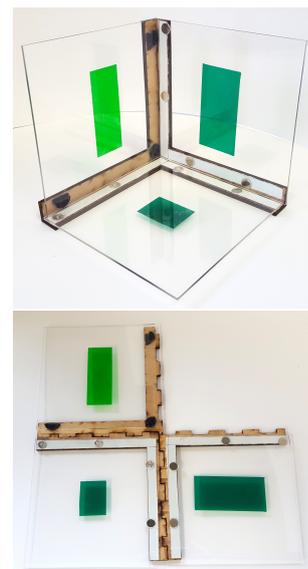


Abb. 8.3.3 Die Risse ergeben einen Quader.

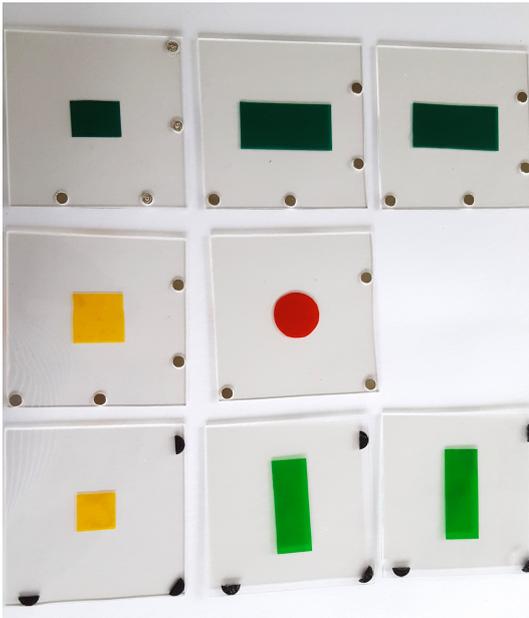


Abb. 8.3.4 Ebene Figuren als Risse für einfache Körper. Hierfür wurde gelb für Quadrate, grün für Rechtecke und rot für Kreise verwendet.

Die Scheiben wurden mit Fensterfolie beklebt. Die Risse entsprechen verschiedenen große Rechtecke, Quadrate und Kreise. Die Figuren wurden so geklebt, dass ihre Mittelpunkte mit denen der quadratischen Acrylglasplatten übereinstimmten. Die Abb. 8.3.4 stellt einige Beispiele dar. Die Farbe richtet sich nach der Form der Figur. Rechtecke sind grün, Quadrate gelb und Kreise rot.

Die Abbildung 8.3.5 zeigt Lösungen von zwei Aufgaben. Die erste befasst sich mit der Eindeutigkeit von Körpern. Zwei Risse sind vorgegeben und die Schülerinnen und Schüler sollen nun überlegen, welche dritte Platte sie ergänzen können, damit sich ein Körper ergibt. So zeigt Abb. 8.3.5 ein Beispiel, wo der Auf- und Seitenriss durch ein Rechteck vorgegeben ist. Diese Kombination erfüllt sowohl ein Quader mit quadratischer Grundfläche sowie ein Zylinder. Die zweite Aufgabe fragt nach der Existenz von Körpern, denn nicht jede beliebige Zusammenstellung von Rissen beschreibt einen Körper. In dem Gegenbeispiel ist eine gemeinsame Kante in Grund- und Aufriss unterschiedlich lang.

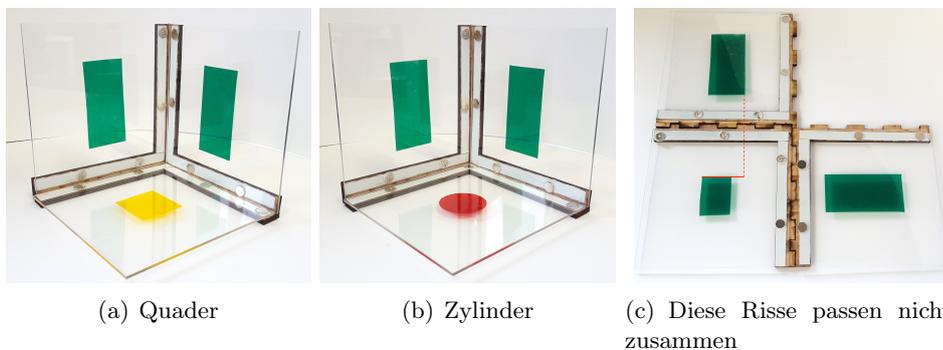


Abb. 8.3.5 Aufgabenbeispiele zur Eindeutigkeit und Existenz von Körpern



Teil IV

Ausblick



Ziel dieser Arbeit war es, die Zentral- und Parallelprojektion zum einen aus rein mathematischer Sicht zu untersuchen und zum anderen Einsatzmöglichkeiten für den Unterricht an Gesamtschulen und Gymnasien zu erarbeiten.

Wir haben gezeigt, dass die Projektion nicht nur in der Kunst ein Thema ist, sondern auch in der Mathematik im Bereich der Darstellenden und Projektiven Geometrie. In Hinblick auf fächerübergreifendes Unterrichten wurden Aufgaben entwickelt, welche u.a. die Konstruktionen der Fluchtpunktperspektive aus dem Kunstunterricht mit Methoden aus dem Mathematikunterricht untersuchen und zeigen, warum diese zu einem zentralprojektiven Bild führen. Den Bezug zum Informatikunterricht haben wir durch die Verwendung einer Programmiersprache erreicht. Mit Kenntnissen aus der analytischen Geometrie im Mathematikunterricht der Oberstufe wurden Formeln zur Berechnung von Bildpunkten unter einer Zentralprojektion hergeleitet, welche dann in der Sprache *Processing* eingepflegt wurden, um Animationen von Rot-Grün-Bildern zu erzeugen. Mit einer entsprechenden Brille lässt sich dann das Ergebnis überprüfen.

Die Validierung von Resultaten war gleichfalls ein Bestreben in dieser Arbeit. Eine Aufgabe sollte für Schülerinnen und Schüler nicht beendet sein, wenn sie ein Ergebnis erzielt haben, sondern sie sollten auch die Möglichkeit erhalten, dieses zu überprüfen. Hierfür wurden Materialien im Unterricht entwickelt. U.a. lässt sich auf einer Plexiglasplatte ein zentralprojektives Bild konstruieren, welches dann in eine Halterung gesteckt wird. Durch eine Lochscheibe, welches sich an der Position des Zentrums befindet, lässt sich überprüfen, ob Original und Konstruktion übereinstimmen, denn der Sehvorgang ist ebenfalls zentralprojektiv.

Zusätzlich sollte eine Vernetzung von verschiedenen Inhalten aus dem Mathematikunterricht ermöglicht werden. Bei der Besprechung der Schulbuchaufgaben durch Schrägbilddarstellung und Dreitafelprojektion fiel auf, dass der Bezug zur Parallelprojektion fehlte. Generell scheinen geometrische Abbildungen aus den Schulbüchern in NRW zu verschwinden, denn auch Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen werden nur noch indirekt benannt. Stattdessen liegt der Fokus auf den Bildern und ihren Eigenschaften, z.B. der Symmetrie. Dieser Aspekt erschwert vor allem die Behandlung von Invarianten geometrischer Abbildung, wenn die Grundidee einer Abbildung als Zuordnung von Punkten oder überhaupt die Konstruktionsmethoden fehlen. Eine Person kann die Achsensymmetrie einer Figur untersuchen ohne Kenntnisse über die Achsenspiegelung an sich zu besitzen. Damit wird allerdings kein vernetztes Wissen gefördert, wenn solche Zusammenhänge nicht mehr geliefert werden. Ohne die Grundkenntnisse einer geometrischen Abbildung wird die sinnvolle Beschäftigung mit Invarianten erschwert. Kongruenzsätze an Dreiecken werden in den Schulbüchern besprochen, ohne den Bezug zur Kongruenzabbildung zu verwenden. Denn

die Deckungsgleichheit der Dreiecke wird über die, bis auf Lage und Orientierung, eindeutige Konstruktion erklärt. Der Satz, dass zwei Dreiecke kongruent zueinander sind, weil es eine Verkettung von Drehung, Spiegelung und Verschiebung gibt, welche das eine auf das andere abbildet, fehlte in den untersuchten Schulbüchern. Ein Aspekt, der nicht verwundert, wenn schon bei den Symmetrien die Abbildungen nur indirekt erwähnt werden.

Die Verwendung der beschriebenen Aufgaben in der Oberstufe wird ähnlich erschwert. Geradengleichungen aufzustellen und den Durchstoßpunkt mit einer Ebene zu bestimmen, sind Vorgaben des Lehrplans. Aber die Weiterführung über lineare Abbildungsmatrizen zu homogenen Koordinaten ist nicht mehr möglich. Nach dem Lehrplan 2014 für den Mathematikunterricht der Oberstufe sind Matrizen nur noch Teil der Stochastik, um Übergangsprozesse zu beschreiben [25]. Lineare Abbildungen sind dagegen im Inhaltsfeld der analytischen Geometrie verschwunden. Es war daher überraschend gewesen, dass geometrische Abbildungen und Projektionsmatrizen in einem Buch der Oberstufe als eigenes Kapitel gefunden wurden.

Wie ließe sich diese Arbeit nun weiter fortführen? In der Einleitung wurde schon erwähnt, dass die entwickelten Aufgaben im Sinne einer empirischen Studie nicht untersucht wurden. Da aber schon die inhaltlichen Grundlagen für die Beschäftigung mit der Zentralprojektion weitestgehend fehlen bzw. im Lehrplan nicht berücksichtigt werden, müsste der Unterricht neu ausgerichtet werden, um solche Aufgaben an Schülerinnen und Schüler erproben zu können. Grund- und Aufriss kennen sie von der Dreitafelprojektion. Somit können die Konstruktionsbeispiele im Unterricht besprochen werden. Aber für ihre Begründung benötigten wir Invarianten wie Parallelen- oder Teilverhältnistreue. Und da beginnt wieder das Problem mit dem fehlenden Kenntnissen über geometrische Abbildungen, da der Mathematikunterricht laut Lehrplan und Schulmaterial darauf nicht ausgelegt ist.

Schrägbilder von Würfel und Quader sind nach Lehrplan in der Gesamtschule Teil der Kompetenzerwartungen nach der sechsten Klasse und nach der zehnten kommen noch Schrägbilder von Pyramiden, Zylinder und Kegel hinzu. Auffällig ist jedoch, dass Kongruenzabbildungen, wie Drehung oder Achsenspiegelung, nicht explizit genannt werden. Hier wird nur das Erkennen von Symmetrien in einer ebenen Figur in den Kompetenzerwartungen am Ende der sechsten Klasse vorgegeben [24, 22]. Daher ist es nicht überraschend, dass sowohl Schrägbilder als auch die Dreitafelprojektion ohne den Bezug zur Parallelprojektion in den untersuchten Schulbüchern thematisiert wurden. Hier liegt der Fokus auf der Konstruktion von Rissen und Schrägbildern rein nach Anleitung, ohne diese zu Begründen oder in einen größeren Zusammenhang mit der Projektion zu stellen.

Dieser Aspekt wirft folgende Fragen auf: Wie hat sich der Mathematikunterricht im Laufe der Zeit geändert? Wurde früher mehr Abbildungsgeometrie betrieben und hat sich der Fokus auf andere Inhalte wie Arithmetik oder Funktionen verschoben?

Welche Gründe gab es dafür?

Der Umgang mit Materialien zur Unterstützung der Raumvorstellung war ebenfalls ein wichtiger Teil dieser Arbeit. Hierfür wurden drei verschiedene Hilfsmittel entwickelt, welche als reine Prototypen zu werten sind, da sie noch verbesserungsfähig sind. Die Umsetzung des Perspektographen von *Lambert* war nicht erfolgreich, da das verwendete Material nicht geeignet war. Der Kunststoff war nicht stabil genug, als Material wäre Holz oder Metall vielversprechender gewesen. Der Perspektograph konnte somit nicht verwendet werden. Es blieb bei einer theoretischen Erklärung, warum er aus einer ebenen Figur in der Objektebene ein zentralprojektives Bild erzeugen kann.

Auch diese Materialien oder auch der Programmcode zur Erstellung von Anaglyphenbildern wurden von Schülerinnen und Schülern nicht getestet, da jene noch ganz am Anfang ihrer Entwicklung stehen, sowie in Umfang und Zeit dieses Dissertationsprojektes eine Studie darüber nicht eingeplant war.



# Literatur

- [1] H.-G. Weigand et al. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. 2. Aufl. Berlin und Heidelberg: Springer Spektrum, 2014.
- [2] Willy A. Bärtschi. *Perspektive. Geschichte, Konstruktionsanleitung und Erscheinungsformen in Umwelt und bildender Kunst*. Ravensburg: Otto Maier Verlag, 1976.
- [3] M. Baum, M. Bellstedt und D. Brandt. *Lambacher Schweizer 9. Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen*. 1. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 2009.
- [4] Arnold Baur. *Einführung in die projektive Geometrie. Teil 1: Die projektive Verwandtschaft; homogene Koordinaten*. Stuttgart: Ernst Klett Verlage, 1966.
- [5] Harald Berns. *Zeichnerische Darstellungsmethoden*. München: Carl Hanser Verlag, 1962.
- [6] H. Böer, U. Kietzmann und S. Kliemann. *Mathe live 9 Grundkurs. Mathematik für Gesamtschulen*. Stuttgart: Klett, 2004.
- [7] Frank Büttner. „Der Blick auf das Bild. Betrachter und Perspektive in der Renaissance“. In: *Anblick / Augenblick. Ein interdisziplinäres Symposium*. Hrsg. von Michael Neumann. Würzburg, 2005, S. 131–163.
- [8] Frank Büttner. „Rationalisierung der Mimesis. Anfänge der konstruierten Perspektive bei Brunelleschi und Alberti“. In: *Mimesis und Simulation*. Hrsg. von Andreas Kablitz und Gerhard Neumann. Freiburg: Rombach Wissenschaften, 1998, S. 55–87.
- [9] J. Cukrowicz und Prof. B. Zimmermann. *MatheNetz 8. Gymnasium, Ausgabe N*. Westermann, 2000.
- [10] Hans M. Dietz. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Band 2: Lineare Algebra und Optimierung*. 3. Aufl. Berlin: Springer Spektrum, 2019.
- [11] J. Encarnação und W. Straßer. *Computer Graphics. Gerätetechnik, Programmierung und Anwendung graphischer Systeme*. 3. Aufl. München Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1988.

- 
- [12] Rudolf Fucke. *Zwei- und Mehrtafelprojektion*. Frankfurt/M., u.a.: VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1970.
- [13] Helmuth Gericke. *Mathematik im Abendland. Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1990.
- [14] H. Griesel, H. Postel und F. Suhr, Hrsg. *Elemente der Mathematik 5*. Braunschweig: Schroedel, 2006.
- [15] H. Griesel, H. Postel und F. Suhr, Hrsg. *Elemente der Mathematik 8*. Braunschweig: Schroedel, 2008.
- [16] H. Griesel, H. Postel und F. Suhr, Hrsg. *Elemente der Mathematik 9*. Braunschweig: Schroedel, 2009.
- [17] Dietrich Grünwald. *Kunst entdecken. Band 2*. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Verlag, 2003.
- [18] Wolfgang Haack. *Darstellende Geometrie. Axonometrie und Perspektive*. Bd. 3. Berlin: de Gruyter, 1969.
- [19] G. J. Kern. „Die Anfänge der zentralperspektivischen Konstruktion in der italienischen Malerei des 14. Jahrhunderts“. In: *Mitteilungen des kunsthistorischen Instituts in Florenz* 2 (1913), S. 39–65.
- [20] G. J. Kern. „Die Entwicklung der zentralperspektivischen Konstruktion in der europäischen Malerei“. In: *Forschungen und Fortschritte* 13 (1937), 18ff.
- [21] *Kernlehrplan für das Gymnasium in Nordrhein-Westfalen. Sekundarstufe I, Kunst*. 2011.
- [22] *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. 2007.
- [23] *Kernlehrplan für die Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Sekundarstufe I, Kunst*. 2012.
- [24] *Kernlehrplan für die Gesamtschule - Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. 2004.
- [25] *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasien/Gesamtschulen in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. 2014.
- [26] *Kernlehrplan für Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Sekundarstufe II, Kunst*. 2014.
- [27] U. Kietzmann, S. Kliemann und R. Pongs. *Mathe live 8. Mathematik für Sekundarstufe I*. Stuttgart: Klett, 2004.
- [28] M. Klant, R. Spielmann und J. Walch. *Kunst Grundkurs I. Materialien für die Sekundarstufe II*. Braunschweig: Westermann Schroedel, 2016.

- [29] Frank Klawonn. *Grundkurs Computergrafik mit Java. Die Grundlagen verstehen und einfach umsetzen mit Java 3D*. 1. Aufl. Wiesbaden: Vieweg Verlag, 2005.
- [30] Max Kleiber. *Angewandte Perspektive. nebst Erläuterungen über Schattenkonstruktion und Spiegelbilder*. 5. Aufl. Leipzig: J. J. Weber illustrierte Zeitung, 1912.
- [31] Siegfried Krauter und Christine Bescherer. *Erlebnis Elementargeometrie*. 2. Aufl. Berlin und Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.
- [32] Johann H. Lambert. *Schriften zur Perspektive*. Hrsg. von Max Steck. 1943.
- [33] Cornelia Leopold. *Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung*. 5. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015.
- [34] Stefan Liebscher. *Projektive Geometrie der Ebene. Ein klassischer Zugang mit interaktiver Visualisierung*. Berlin: Springer Spektrum, 2017.
- [35] Antonius Lipsmeier. *Technik und Schule*. Wiesbaden: Steiner, 1971.
- [36] A. Nischwitz und M. Fischer et al. *Computergrafik. Band I des Standardwerks Computergrafik und Bildverarbeitung*. 4. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2019.
- [37] Günther Pickert. *Projektive Ebenen*. 2. Aufl. Berlin und Heidelberg: Springer Verlag, 1975.
- [38] Fritz Reutter. *Darstellende Geometrie - Band 1*. 13. Aufl. Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1988.
- [39] Anja Sattelmacher. *Anschauen, Anfassen, Auffassen. Eine Wissenschaftsgeschichte Mathematischer Modelle*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2021.
- [40] Hans-Günter Schiele. *Computergrafik für Ingenieure. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Berlin Heidelberg: Springer Vieweg, 2012.
- [41] Leonhard Schmeiser. *Die Erfindung der Zentralperspektive und die Entstehung der neuzeitlichen Wissenschaft*. München: Wilhelm Fink Verlag, 2002.
- [42] G. Schmidt, M. Zacharias und A. Lergenmüller. *Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien - Lineare Algebra, Analytische Geometrie*. Braunschweig: Westermann Schroedel, 2011.
- [43] Rudolf Schmidt. *Perspektive - Schritt für Schritt*. Wiesbaden und Berlin: Bauverlag GmbH, 1988.
- [44] Hermann A. Schwarz. „Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 63 (1864), S. 309–314.

- [45] Daniel Shiffman. *Learning Processing. A Beginner's Guide to Programming Images, Animation, and Interaction*. 2. Aufl. United States of America: Morgan Kaufmann (Elsevier Inc.), 2008.
- [46] H. Sowa, A. Glas und F. Seydel. *Kunst. Arbeitsbuch 2*. 1. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 2010.
- [47] Alexander Stolzenburg. *Projektive Geometrie*. Stuttgart: Pädagog. Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen, 2009.
- [48] Reiner Thomae. *Perspektive und Axonometrie*. 4. Aufl. Stuttgart, Berlin und Köln: Verlag W. Kohlhammer GmbH, 1990.
- [49] H. Walloschke, A. Kretzer und A. Müsseler. *Perspektives Zeichnen*. Darmstadt: Verlag Das Beispiel GmbH, 2000.
- [50] Edmund Weitz. *Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2018.
- [51] Georg Wolff. *Mathematik und Malerei*. Leipzig und Berlin: Verlag B. G. Teubner, 1925.

# Stichwortverzeichnis

- 1. Strahlensatz, 41
- 2. Strahlensatz:, 41
  
- Alberti, 19
- Albrecht Dürer, 15
- Anaglyphenverfahren, 264
- axial-perspektiv, 74
- Axonometrie, 210
  
- bijektiv, 35
- Bildebene, 46
- Brunelleschi, 15, 17
  
- Cornelsen, Klett, 230
- Costruzione legittima, 18
  
- Distanzkreis, 124
- Doppelverhältnis, 30
- doppelverhältnistreu, 37
- Dreieck, 74
  
- Ebene, 24
- echt parallel, 24
- Einschneideverfahren, 222
  
- Fernpunkt, 163
- Fernpunkte, 24
- Fixgeraden, 36
- Fixpunkt, 36
- Fluchtpunkt, 5, 143
- Froschperspektive, 104
  
- G. Ubaldi, 19
  
- geometrische Abbildung, 35
- Gerade, 24
- geradentreu, 36
- Girard Désargues, 19
  
- Hauptpunkt, 161
- Horizont, 5
  
- identisch, 24
- ImageJ, 98
- injektiv, 35
- inzidentreu, 36
  
- J. H. Lambert, 19, 107, 318
  
- Kavalierperspektive, 226
  
- längentreu, 37
- Leon Battista Alberti, 17, 18
- linear, 180
  
- Masaccio, 17
- Messpunkte, 130
- Messpunktverfahrens, 130
- Militärperspektive, 226
- Moulton Ebenen, 78
  
- Normalperspektive, 104
  
- Ordner, 64
  
- P. della Francesca, 139
- Parallelprojektion, 50
- paralleltreu, 36, 53

- perspektive Abbildung, 171
- perspektive Abbildungen, 163
- Perspektivität, 56
- Pietro della Francesca, 15
- Processing, 180
- Projektionsgerade, 46
- Projektionszentrum, 46
- projektive Geometrie, 163
- Projektiven Geometrie, 24
- projektiven Geometrie, 73
- Punkten, 24
- punkttreue, 36
- Python, 180
  
- Risse, 58
- Risskante, 64
  
- Schnittpunkt, 24
- Spurpunkten, 258
- streckentreu, 36
  
- streckenverhältnistreu, 37
- surjektiv, 35
  
- Teilungskonstruktion, 15
- Teilungspunkt, 28
- Teilverhältnis, 28
- teilverhältnistreu, 37, 55
  
- Umkehrabbildung, 36
  
- Verbindungsgerade, 25
- Verschwindungsebene, 47, 146, 163
- Vogelperspektive, 104, 226
  
- Weltkoordinatensystem, 290
- winkeltreu, 37
  
- zentral-perspektiv, 74
- Zentralprojektion, 46, 50
- zentrische Streckung, 40