



BERGISCHE  
UNIVERSITÄT  
WUPPERTAL

# **Zum Torsionstragverhalten vorgespannter Segmenttürme**

Ein Nachweismodell für überdrückte und klaffende  
Segmentfugen mit Kreisringquerschnitt

**Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
Dr.-Ing.**

an der  
Fakultät für Architektur und Bauingenieurwesen  
der  
**Bergischen Universität Wuppertal**

vorgelegt von  
**Lutz Loh**  
aus Soest

Wuppertal 2023

Veröffentlicht als Heft 27 in der Schriftenreihe des  
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau  
Fakultät für Architektur Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Herausgeber**

Der Geschäftsführende Direktor  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal

### **Fachgebiet**

Stahlbau und Verbundkonstruktionen  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Bernd Naujoks  
Fakultät für Architektur Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Organisation und Verwaltung**

Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal  
Pauluskirchstraße 11  
42285 Wuppertal  
Telefon: (0202) 439-4039

© **Dr.-Ing. Lutz Loh**

ISBN 978-3-940795-26-7

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institute of Innovative Structures der Hochschule Mainz in Kooperation mit der Bergischen Universität Wuppertal. Gefördert wurde dieses Forschungsvorhaben von der Europäischen Union aus dem Europäischen Fonds für regionale Entwicklung, dem Land Rheinland-Pfalz und der Hochschule Mainz.

Zunächst danke ich Herrn Dr. Jürgen Becker für seine Empfehlung, die Promotionsstelle an der Hochschule Mainz anzunehmen. Auch den Professoren, Dozenten und wissenschaftlichen Mitarbeitern der Hochschule Mainz, insbesondere vom Institute of Innovative Structures, gilt mein Dank für den regen wissenschaftlichen Austausch und die mir entgegengebrachte Unterstützung. Mein besonderer Dank gilt hier meinem Betreuer Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Garg für seine hervorragende wissenschaftliche Unterstützung und sein persönliches Engagement bei der Betreuung und Erstellung der Dissertation. Auch den Herrn Robert Füllmann und Thilo Schemmann von der Tubularis GmbH gilt mein Dank, da ohne ihr Engagement diese Arbeit nicht angefangen worden wäre.

Des Weiteren danke ich Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Mark und Univ.-Prof. Dr.-Ing. Bernd Naujoks für ihre wertvollen Anmerkungen und ihre Bereitschaft, als Doktorvater dieser kooperativen Promotion zu fungieren. Weiterhin danke ich meiner Frau Hannah Loh für ihre moralische und seelische Unterstützung und für ihr Verständnis, wenn ich wiederum bis spät abends oder am Wochenende an meiner Dissertation gearbeitet habe.

Abschließend möchte ich noch meinen größten Kritikern, Herrn Dr.-Ing. Steffen Hartwig und Herr Univ.-Prof. Dr.-Ing. Steffen Marx, danken. Hartwig führte im Rahmen seiner Dissertation mehrere Versuchsreihen durch, auf die in großem Maße in dieser Arbeit Bezug genommen wird. Marx betreute die Arbeit von Hartwig und verfasste eine, meine Veröffentlichungen [1, 2] betreffende, Zuschrift. Diese ist inklusive unserer Erwiderung im Heft 11 der Zeitschrift Beton- und Stahlbetonbau von 2011 zu finden. Auch wenn hier die Kommunikation nicht immer einfach war, so hat der Austausch rückblickend sehr dazu beigetragen, die Qualität dieser Arbeit zu steigern.

Wuppertal, im Mai 2023

Lutz Loh

Tag der Einreichung: 18. Januar 2023

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Mai 2023

Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. Bernd Naujoks

Prof. Dr.-Ing. Andreas Garg

Prof. Dr.-Ing. Arndt Goldack

Vorsitz der Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. Steffen Anders

## Kurzdarstellung

Beim Bau von Segmentbrücken oder Türmen von Windenergieanlagen werden Betonfertigteile häufig trocken gestoßen und die Fugen mit einer Vorspannung überdrückt. Durch trockene Reibung müssen die meist glatten Betonoberflächen auch Schubspannungen aus Querkraft und Torsion übertragen. Gleichzeitig ist es durchaus üblich, dass im Grenzzustand der Tragfähigkeit klaffende Fugen zugelassen werden. Bestehende Modelle zur Berechnung der Torsionstragfähigkeit von Trockenfugen haben es bisher nicht geschafft, eine stringente Lösung zur Torsionstragfähigkeit in Kombination mit Biegung darzulegen. Zudem konzentrieren sich die vorherrschenden Modelle ausschließlich auf den Reibwiderstand in der Fuge und lassen den Schubwiderstand der angrenzenden Segmente unbeachtet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neues Modell zur Ermittlung der Torsionstragfähigkeit von Trockenfugen entwickelt. Es beruht auf der Theorie der Wölbkrafttorsion und berücksichtigt, neben dem Reibwiderstand in der Fuge, auch den Schubwiderstand der angrenzenden Segmente. Zur Verifikation werden Berechnungen mit der Finiten-Element-Methode sowie Versuche aus der Literatur herangezogen. Anhand der Versuche und FE-Berechnungen werden die Grenzen des Modells identifiziert. Ein Teil der Modellentwicklung und Verifikation wurde bereits in [1, 2, 3] vorab veröffentlicht.

Abschließend wird ein Bemessungsmodell vorgestellt, mit dem Segmentfugen auf Normalkraft, Biegung und Torsion nachgewiesen werden können. Eine zusätzliche Beanspruchung durch Querkraft wird zwar diskutiert, ist aber nicht Bestandteil dieser Arbeit. Um dennoch eine vollständige Bemessungsgrundlage zu liefern, wird analog zum neuen Torsionsbemessungsmodell zusätzlich ein Bemessungsmodell unter Normalkraft, Biegung und Querkraft vorgestellt. Ein Anwendungsbeispiel zur Verwendung des Berechnungsmodells rundet die Arbeit ab.

## **Abstract**

During the construction of segmental bridges or towers of wind turbines precast concrete elements are often met dry, and the joints get prestressed. By dry friction the mostly smooth concrete surfaces have to transfer shear stresses from lateral force and torsion. At the same time it is quite common that gaping joints are allowed in the ultimate limit state. Existing models for calculating the torsional load-bearing capacity of dry joints have not yet succeeded in presenting a stringent solution for torsional load-bearing capacity in combination with bending. Moreover, the prevailing models focus exclusively on the frictional resistance in the joint and disregard the shear resistance of the adjacent segments.

In this thesis, a new model is developed to determine the torsional resistance of dry joints. It is based on the theory of warping torsion and considers not only the frictional resistance in the joint but also the shear resistance of the adjacent segments. For verification, calculations with the finite element method as well as experiments obtained from the literature are employed. The limitations of the model are identified by the basis of these experiments and FE calculations. Some part of the model development and verification has already been published in [1, 2, 3] in advance.

Finally, a design model to calculate segment joints under a combination of normal force, bending and torsion is presented. An additional shear force is discussed but is not part of this work. Nevertheless, in order to provide a complete basis, a design model under normal force, bending and shear force is also presented in analogy to the torsion design model. An application example for the use of the model completes the work.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Die Segmentbauweise . . . . .	1
1.2	Türme für Windenergieanlagen . . . . .	1
1.3	Problemstellung und Motivation . . . . .	3
1.4	Zielsetzung und Vorgehensweise . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Einleitung . . . . .	7
2.2	Materialeigenschaften von Beton . . . . .	7
2.2.1	Spannungs-Dehnungs-Beziehungen . . . . .	7
2.2.2	Versagenshypothesen im dreiaxialen Spannungsraum . . . . .	9
2.2.2.1	Allgemeines . . . . .	9
2.2.2.2	Ein-Parameter-Kriterien . . . . .	11
2.2.2.3	Zwei-Parameter-Kriterien . . . . .	13
2.2.2.4	Drei-Parameter-Kriterien . . . . .	15
2.2.2.5	Kriterien mit mehr als drei Parametern . . . . .	18
2.3	Das Coulomb'sche Reibungsgesetz . . . . .	19
2.4	Grundlagen der Festigkeitslehre . . . . .	20
2.4.1	Spannungsdefinitionen am Volumenelement . . . . .	20
2.4.2	Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement . . . . .	22
2.4.3	Geometrische Zusammenhänge am Volumenelement . . . . .	23
2.5	Querkraft . . . . .	26
2.5.1	Allgemeines zum Schubspannungsverlauf . . . . .	26
2.5.2	Ableitung der Dübelformel . . . . .	28
2.5.3	Einheitsschubflüsse . . . . .	30
2.6	Torsion . . . . .	31
2.6.1	Grundlegende Zusammenhänge . . . . .	31
2.6.2	St. Venant'sche Torsion . . . . .	34
2.6.3	Wölbkrafttorsion dünnwandiger Querschnitte . . . . .	43
2.6.4	Torsionsschnittgrößen an Stäben mit unstetigem Querschnitt . . . . .	46
2.7	Zusammenfassung . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Stand von Wissenschaft und Technik</b>	<b>51</b>
3.1	Einleitung . . . . .	51
3.2	Torsionsbeanspruchte Balken . . . . .	51
3.2.1	Das Fachwerkmodell . . . . .	51
3.2.2	Theorie der schiefen Bruchfläche . . . . .	52
3.3	Torsionsbeanspruchte Fugen . . . . .	53
3.3.1	Grundlagen . . . . .	53

3.3.2	Theorie von Grünberg und Göhlmann . . . . .	53
3.3.3	Theorie von Hartwig . . . . .	56
3.4	Zusammenfassung . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Modellentwicklung zum Torsionstragverhalten überdrückter und klaffender Segmentfugen</b>	<b>61</b>
4.1	Einleitung . . . . .	61
4.2	Torsionstragverhalten nach Elastizitätstheorie . . . . .	61
4.2.1	Vollständig überdrückte Segmentfugen . . . . .	61
4.2.2	Klaffende Segmentfugen . . . . .	62
4.2.3	Schnittgrößeninteraktion nach Elastizitätstheorie . . . . .	68
4.2.4	Diskussion der Modellannahmen . . . . .	69
4.3	Umlagerung der Torsionsschubspannungen . . . . .	70
4.3.1	Grundsätzliche Überlegungen . . . . .	70
4.3.2	Analytischer Lösungsansatz . . . . .	71
4.3.2.1	Vorgehensweise . . . . .	71
4.3.2.2	Sekundäre Torsionsschubspannungen am verallgemeinerten Kreisringausschnitt . . . . .	71
4.3.2.3	Spannungsumlagerung . . . . .	74
4.3.2.4	Einfluss der Materialfestigkeit auf die Torsionstragfähigkeit . . . . .	80
4.3.3	Diskussion der Modellannahmen . . . . .	82
4.4	Zusammenfassung . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Verifikation und Versuchsauswertung</b>	<b>87</b>
5.1	Einleitung . . . . .	87
5.2	Verifikation der Modellentwicklung . . . . .	88
5.3	Nachrechnung von Versuchen aus der Literatur . . . . .	94
5.3.1	Kleinstbauteilversuche mit Aluminiumrohren . . . . .	94
5.3.2	Großbauteilversuche mit Stahlbetonrohren . . . . .	100
5.3.3	FE-Simulation . . . . .	107
5.3.4	Diskussion der Versuchsergebnisse . . . . .	115
5.4	Praxisbeispiel . . . . .	125
5.4.1	Geometrie- und Materialkennwerte . . . . .	125
5.4.2	Vollständig überdrückte Fugen . . . . .	127
5.4.3	Klaffende Fugen . . . . .	135
5.4.4	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	142
5.5	Zusammenfassung . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Bemessungsmodell überdrückter und klaffender Segmentfugen</b>	<b>147</b>
6.1	Einleitung . . . . .	147
6.2	Torsionstragfähigkeit . . . . .	147
6.3	Querkrafttragfähigkeit . . . . .	150
6.4	Zusammenfassung . . . . .	151
<b>7</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>153</b>
7.1	Fazit . . . . .	153
7.2	Ausblick . . . . .	155

---

<b>A Anwendungsbeispiel</b>	<b>157</b>
A.1 Ausgangssituation . . . . .	157
A.2 Querschnittswerte des überdrückten Fugenbereichs . . . . .	158
A.3 Bemessung der Torsionstragfähigkeit . . . . .	159
A.4 Bemessung der Querkrafttragfähigkeit . . . . .	161
A.5 Vollständige Schnittgrößeninteraktion . . . . .	162



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Erste Windenergieanlage zur Stromgewinnung [5] . . . . .	2
2.1	Spannungs-Dehnungs-Beziehung für kurzzeitig wirkende, einaxiale Druckbeanspruchungen gemäß DIN EN 1992-1-1 [11] und Model Code 2010 [13] . . . . .	8
2.2	Bezeichnungen an einer Versagenshülle im Hauptspannungsraum . . . . .	10
2.3	Versagenshülle nach Tresca und von Mises in der Deviatorebene . . . . .	12
2.4	Versagenshülle nach Drucker-Prager im Hauptspannungsraum . . . . .	14
2.5	Versagenshülle des modifizierten Drucker-Prager-Kriterium nach Hintze im Hauptspannungsraum . . . . .	15
2.6	Versagenshülle nach Willam und Warnke im Hauptspannungsraum . . . . .	16
2.7	Versagenshülle nach Menétrey und Willam im Hauptspannungsraum . . . . .	17
2.8	Versagenskriterium von Speck und Menétrey-Willam in drei Deviatorebenen . .	18
2.9	Reibbeiwerte $\mu$ in Abhängigkeit vom Anpressdruck $\sigma$ aus den Versuchen von [19, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] . . . . .	20
2.10	Spannungen am Volumenelement . . . . .	21
2.11	Zusammenhang zwischen Dehnung und Verschiebung nach [48] . . . . .	25
2.12	Zusammenhang zwischen Gleitung und Verschiebung nach [48] . . . . .	26
2.13	Schubspannungen in Rand- und Eckpunkten . . . . .	27
2.14	Gleichgewicht am Teil eines Stabes zur Veranschaulichung der Dübelformel . .	29
2.15	Koordinatenfläche $z$ und Einheitsschubfluss $T_z$ eines geschlitzten Quadratrohres nach [48] . . . . .	30
2.16	Verschiebungen $v$ und $w$ eines Querschnittspunktes $B$ infolge einer Verdrehung $\vartheta$ nach [48] . . . . .	31
2.17	Gegenüberstellung der Torsionsverformungen eines drillsteifen geschlossenen Rohres und eines drillweichen geschlitzten Rohres gleicher Abmessungen nach [48] . . . . .	32
2.18	Definition der Schubspannungsfunktion $\psi$ nach [48] . . . . .	35
2.19	Verlauf der Schubspannungen und Verwölbungen in einem schmalen Rechteckquerschnitt nach [48] . . . . .	38
2.20	Qualitativer Verlauf primärer Torsionsschubspannungen in einem Rechteckquerschnitt nach [48] . . . . .	39
2.21	Verschiebung $v_t$ eines Elements auf der Profilmittellinie infolge $\vartheta$ nach [48] . .	41
2.22	Die von der Profilmittellinie umschlossene Fläche $A_u$ eines einzelligen Hohlquerschnitts nach [48] . . . . .	42
2.23	Wölbschubfluss $T_W$ und sein resultierender Wölbmomentenanteil nach [48] . .	45
2.24	Träger mit dicht angeordneten Bindeblechen . . . . .	46
2.25	Primäre und sekundäre Torsionsmomente eines mit Bindeblechen verstärkten Trägers . . . . .	47
2.26	Wölbmoment eines mit Bindeblechen verstärkten Trägers . . . . .	48

3.1	Torsionstragfähigkeit geschlossener und klaffender Segmentfugen nach Grünberg und Göhlmann . . . . .	55
3.2	Aufnehmbare Schubspannungen (links) und Kräftegleichgewicht durch Drehpunktverschiebung nach [19] (rechts) . . . . .	56
3.3	Torsionstragfähigkeit geschlossener und klaffender Segmentfugen mit Kreisringquerschnitt gemäß dem Fasermmodell nach Hartwig . . . . .	57
4.1	St. Venant'scher Schubfluss eines Kreisringquerschnitts . . . . .	62
4.2	Torsionssystem einer klaffenden Fuge . . . . .	63
4.3	Primäre und sekundäre Torsionsanteile in einer klaffenden Segmentfuge mit verschiedenen Stabkennzahlen . . . . .	64
4.4	Wölbmomentenverläufe in einer klaffenden Segmentfuge mit verschiedenen Stabkennzahlen, aber gleichbleibender Fugenöffnungsweite $L$ . . . . .	64
4.5	Wölbmomentenverläufe in einer klaffenden Segmentfuge mit verschiedenen Stabkennzahlen, aber gleichbleibendem Verhältnis von Torsions- zur Wölbsteifigkeit . . . . .	65
4.6	Qualitativer Verlauf sekundärer Torsionsschubspannungen und zulässiger Schubspannungen eines bis zur Mitte klaffenden Querschnitts . . . . .	67
4.7	Vergleich sekundärer und zulässiger Torsionsschubspannungen einer klaffenden Segmentfuge mit Kreisrohrquerschnitt . . . . .	68
4.8	Aufnehmbares Torsionsmoment in Abhängigkeit vom Biegemoment – Gegenüberstellung der Nachweismodelle von Hartwig [19], Grünberg und Göhlmann [16] und des vorgestellten Nachweismodells nach Elastizitätstheorie [1] . . . . .	69
4.9	Koordinaten-, Parameter- und Vorzeichendefinition am Kreisringquerschnitt mit klaffender Fuge . . . . .	72
4.10	Klaffender Fugenquerschnitt a) und Umlagerungsbereiche b) bis i) mit deren sekundären Schubspannungen infolge der Spannungsumlagerung . . . . .	75
4.11	Gegenüberstellung der superponierten und zulässigen Schubspannungen . . . . .	76
4.12	Umgelagerte sekundäre Torsionsanteile am klaffenden Kreisrohrquerschnitt mit $\theta = 0^\circ$ bzw. $M_z = M_{Dek}$ . . . . .	76
4.13	Umgelagerte sekundäre und offene Torsionsanteile am klaffenden Kreisrohrquerschnitt mit $M_z = M_{Dek}$ . . . . .	77
4.14	Umgelagerte sekundäre Torsionsanteile am vollständig überdrückten Kreisrohrquerschnitt mit $M_z = 0,5 \cdot M_{Dek}$ . . . . .	78
4.15	Umgelagerte sekundäre und offene Torsionsanteile am vollständig überdrückten Kreisrohrquerschnitt mit $M_z = 0,5 \cdot M_{Dek}$ . . . . .	78
4.16	Torsions-Biegemomenten-Interaktion eines Kreisringquerschnitts mit überdrückter und klaffender Fuge . . . . .	79
4.17	Torsions-Biegemomenten-Interaktion eines Kreisringquerschnitts – Gegenüberstellung der vorgestellten Nachweismodelle . . . . .	80
4.18	Bezogene maximal zulässige Schubspannungen $\tau_{zul,mat}/f_{cm}$ in Abhängigkeit der bezogenen Drucknormalspannungen $\sigma_x/f_{cm}$ . . . . .	81
4.19	Schubfestigkeiten $\tau(s)$ einer Trockenfuge entlang des Umfangs $s_e$ für verschiedene Betonfestigkeiten und $M_z = M_{Dek}/5$ . . . . .	82
4.20	Qualitative Überlagerung primärer und sekundärer Torsionsschubspannungen . . . . .	85
5.1	FE-Modell . . . . .	89

5.2	Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem Fasermodell (Abschnitt 3.3.3) und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch drei a) Tangentialschubspannungen Fasermodell b) Tangentialschubspannungen FE-Modell c) Radialschubspannungen Fasermodell d) Radialschubspannungen FE-Modell . . . . .	90
5.3	Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem Fasermodell (Abschnitt 3.3.3) und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch sechs a) Tangentialschubspannungen Fasermodell b) Tangentialschubspannungen FE-Modell c) Radialschubspannungen Fasermodell d) Radialschubspannungen FE-Modell . . . . .	91
5.4	Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem in dieser Arbeit entwickelten Modell und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch drei a) Zuordnung der zulässigen Schubspannungen $\tau_{zul,\mu}(s)$ b) qualitativer Schubspannungsverlauf $\tau_{x,s}$ c) Tangentialschubspannungen entsprechend Abschnitt 4.3 d) Tangentialschubspannungen FE-Modell . . . . .	92
5.5	Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem in dieser Arbeit entwickelten Modell und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch sechs a) Zuordnung der zulässigen Schubspannungen $\tau_{zul,\mu}(s)$ b) qualitativer Schubspannungsverlauf $\tau_{x,s}$ c) Tangentialschubspannungen entsprechend Abschnitt 4.3 d) Tangentialschubspannungen FE-Modell . . . . .	93
5.6	Versuchsstand der Aluminiumrohrversuche von Hartwig [19] . . . . .	95
5.7	Torsionstragfähigkeiten der ersten Versuchsreihe ( $P_0 = 20\text{kN}$ ) . . . . .	97
5.8	Torsionstragfähigkeiten der zweiten Versuchsreihe ( $P_0 = 30\text{kN}$ ) . . . . .	97
5.9	Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach dem Biegemoment $M_z$ . . . . .	98
5.10	Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach dem Fugenöffnungswinkel $\theta$ . . . . .	99
5.11	Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach der Normalkraft $N$ . . . . .	99
5.12	Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach dem Reibbeiwert $\mu$ . . . . .	100
5.13	Versuchsstand der Stahlbetonrohre von Hartwig [19] . . . . .	101
5.14	Torsionstragfähigkeiten der ersten Versuchsreihe ( $P_0 = 518\text{ kN}$ ) . . . . .	103
5.15	Torsionstragfähigkeiten der zweiten Versuchsreihe ( $P_0 = 263,5\text{ kN}$ ) . . . . .	103
5.16	Torsionstragfähigkeiten der dritten Versuchsreihe ( $P_0 = 385\text{ kN}$ ) . . . . .	104
5.17	Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach dem Biegemoment $M_z$ . . . . .	105
5.18	Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach dem Fugenöffnungswinkel $\theta$ . . . . .	105
5.19	Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach der Normalkraft $N$ . . . . .	106
5.20	Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach dem Reibbeiwert $\mu$ . . . . .	106
5.21	Ver- und Entfestigung im Druckbereich . . . . .	108
5.22	Entfestigung im Zugbereich . . . . .	108
5.23	FE-Torsionstragfähigkeiten der ersten Versuchsreihe ( $P_0 = 518\text{ kN}$ ) . . . . .	110
5.24	FE-Torsionstragfähigkeiten der zweiten Versuchsreihe ( $P_0 = 263,5\text{ kN}$ ) . . . . .	110
5.25	FE-Torsionstragfähigkeiten der dritten Versuchsreihe ( $P_0 = 385\text{ kN}$ ) . . . . .	111

5.26	Torsionsmoment des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe, aufgetragen über die Verdrehung . . . . .	112
5.27	Plastische Dehnungen des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam, bilinear bei $\vartheta_x = 7,5 \cdot 10^{-3}$ [rad] . .	113
5.28	Plastische Dehnungen des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 1,1 \cdot 10^{-3}$ [rad] . . . .	114
5.29	Plastische Dehnungen des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 1,65 \cdot 10^{-3}$ [rad] . . .	115
5.30	Torsionsmoment des sechsten Versuchs der dritten Versuchsreihe, aufgetragen über die Verdrehung . . . . .	117
5.31	Plastische Dehnungen $\varepsilon_{pl} \geq 1 \text{ ‰}$ des sechsten Versuchs der dritten Versuchsreihe bei $\vartheta_x = 15 \cdot 10^{-3}$ [rad] a) Menétrey und Willam bilinear b) Menétrey und Willam H+S . . . . .	118
5.32	Radialschubspannungen im Fugenquerschnitt des unteren Segments der Großbauteilversuche – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs a) Fasermmodell b) FE-Modell, linear elastisch c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S . . . . .	119
5.33	Tangentialschubspannungen im Fugenquerschnitt des unteren Segments der Großbauteilversuche – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs a) Fasermmodell b) FE-Modell, linear elastisch c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S e) Modell gemäß Abschnitt 4.3.2 (Fall 1) .	120
5.34	Plastische Dehnungen des unteren Segments bei $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$ [rad], um den Faktor 200 überhöht – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs a) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear b) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S . . . .	121
5.35	Plastische Dehnungen der Berechnung ohne Ver- und Entfestigung (bilinear) bei $\vartheta_x = 15 \cdot 10^{-3}$ [rad], um den Faktor 30 überhöht – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs a) unteres Segment b) oberes Segment . . . . .	123
5.36	Berechnung ohne Ver- und Entfestigung (bilinear) bei $\vartheta_x = 15 \cdot 10^{-3}$ [rad], um den Faktor 10 überhöht – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs a) plastische Dehnungen des unteren Segments b) Normalspannungen $\sigma_x$ . . . . .	123
5.37	Längsschnitt vom Betonschaft eines Hybridturms einer Windenergieanlage . .	126
5.38	Torsionstragfähigkeiten der Segmentfugen vom Betonschaft eines Hybridturms für Windenergieanlagen im GZG . . . . .	129
5.39	Torsionstragfähigkeit von F4 im GZG, aufgetragen über die Verdrehung . . . .	130
5.40	Plastische Dehnungen von F4 im GZG mit dem bilinearen Fließkriterium von Menétrey und Willam bei $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$ [rad] . . . . .	131
5.41	Plastische Dehnungen von F4 im GZG mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam (H+S) a) bei $\vartheta_x = 1,5 \cdot 10^{-3}$ [rad], vor dem sprunghaften Abfall von $M_T(\vartheta_x)$ b) bei $\vartheta_x = 1,6 \cdot 10^{-3}$ [rad], nach dem sprunghaften Abfall von $M_T(\vartheta_x)$	132
5.42	Radialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZG a) Fasermmodell b) FE-Modell, linear elastisch bei $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$ [rad] c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$ [rad] d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 1,5 \cdot 10^{-3}$ [rad] . . . . .	133

5.43	Tangentialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZG a) Fasermmodell b) FE-Modell, linear elastisch bei $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$ [rad] c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$ [rad] d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 1,5 \cdot 10^{-3}$ [rad] e) Modell gemäß Abschnitt 4.3.2 (Fall 2) und dem Ansatz ohne $M_{T,I,offen}$ . . . . .	134
5.44	Torsionstragfähigkeiten der Segmentfugen vom Betonschaft eines Hybridturms für Windenergieanlagen im GZT . . . . .	136
5.45	Torsionstragfähigkeit von F4 im GZT, aufgetragen über die Verdrehung . . . . .	137
5.46	Plastische Dehnungen von F4 im GZT mit dem bilinearen Fließkriterium von Menétrey und Willam a) bei $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$ [rad], vor dem sprunghaften Abfall von $M_T(\vartheta_x)$ b) bei $\vartheta_x = 4 \cdot 10^{-3}$ [rad], nach dem sprunghaften Abfall von $M_T(\vartheta_x)$	138
5.47	Plastische Dehnungen von F4 im GZT mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam H+S a) bei $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$ [rad] b) bei $\vartheta_x = 2 \cdot 10^{-3}$ [rad] . . . . .	139
5.48	Radialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZT a) Fasermmodell b) FE-Modell, linear elastisch bei $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$ [rad] c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$ [rad] d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$ [rad] . . . . .	140
5.49	Tangentialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZT a) Fasermmodell b) FE-Modell, linear elastisch bei $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$ [rad] c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$ [rad] d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$ [rad] e) Modell gemäß Abschnitt 4.3.2 (Fall 2) und dem Ansatz ohne $M_{T,I,offen}$ . . . . .	141
5.50	Zulässige Torsionsschubspannungen $\tau_{zul,i}$ der Fuge F4 im GZG . . . . .	143
5.51	Zulässige Torsionsschubspannungen $\tau_{zul,i}$ der Fuge F4 im GZT . . . . .	143
5.52	Normalspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZT a) Menétrey und Willam bilinear bei $\vartheta_x = 0$ [rad], nach Lastschritt zwei b) Menétrey und Willam bilinear bei $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$ [rad] c) Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 0$ [rad], nach Lastschritt zwei d) Menétrey und Willam H+S bei $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$ [rad] . . . . .	145
6.1	Definition des Abminderungsbeiwerts $\eta_T$ für Fall 1 bis 3 . . . . .	150
6.2	Definition des Abminderungsbeiwerts $\eta_V$ für Fall 1 bis 3 . . . . .	151
A.1	Querschnittsgeometrie, Schnittgrößen und Betonfestigkeiten des Anwendungs- beispiels . . . . .	157
A.2	Schubfestigkeiten eines Betons der Festigkeitsklasse C50/60 . . . . .	160



# Tabellenverzeichnis

2.1	Spannungsfunktion $\psi$ , Torsionswiderstand $I_T$ und Schubspannung $\tau_{xz,I}$ ausgewählter Querschnitte nach [48] . . . . .	37
2.2	Hilfswerte $n$ . . . . .	37
4.1	Stabkennzahlen eines Kreisringquerschnitts mit verschiedenen Fugenöffnungsweiten $L$ und Fugenöffnungswinkel $\theta$ . . . . .	66
4.2	Fiktiver Öffnungswinkel, Wölbwiderstand und sekundärer Torsionsmomentenanteil der Umlagerungsbereiche a) bis i) . . . . .	74
5.1	Materialeigenschaften der Aluminiumrohrversuche . . . . .	95
5.2	Ermittelte Materialeigenschaften des verwendeten Betons . . . . .	101
5.3	Kalibrierungswerte des Fließkriteriums von Menétrey und Willam . . . . .	107
5.4	Parameterdefinition der Ver- und Entfestigung . . . . .	109
5.5	Geometriekennwerte der vierzehn Fugenquerschnitte sowie die anzusetzenden Betonfestigkeiten und charakteristischen Schnittgrößen im GZG . . . . .	128
5.6	Die Betonfestigkeiten und Design-Schnittgrößen der vierzehn Fugenquerschnitte im GZT sowie der Fugenöffnungswinkel gemäß Gleichung 4.11 . . . . .	135
6.1	Eingangsparameter und ihre Definitionsbereiche . . . . .	148



# Symbolverzeichnis

## lateinische Buchstaben

$A$	Querschnittsfläche
$C_M$	Wölbwiderstand bezogen auf den Schubmittelpunkt
$D$	Drehpunkt
$E$	Elastizitätsmodul
$E_{cm}$	mittlerer Elastizitätsmodul als Sekante
$f_{c2c}$	zweiachse Betondruckfestigkeit
$f_{cc}$	einachse Betondruckfestigkeit
$f_{ck}$	charakteristische einachse Betondruckfestigkeit
$f_{cm}$	mittlere einachse Betondruckfestigkeit
$f_{ct}$	einachse Betonzugfestigkeit
$G$	Schubmodul
$I_T$	St. Venant'scher Torsionswiderstand
$I_z$	Flächenträgheitsmoment um die $z$ -Achse
$k_W$	Wölbfedersteifigkeit
$k_\vartheta$	Torsionsfedersteifigkeit
$L$	Stablänge
$M$	Schubmittelpunkt
$M_{T,I,Bredt}$	primäres Torsionsmoment des geschlossenen Querschnitts – Kreisschubfluss
$M_{T,I,offen}$	primäres Torsionsmoment des offenen Querschnitts
$M_{T,I}$	primäres Torsionsmoment
$M_{T,II}$	sekundäres Torsionsmoment
$M_T$	Torsionsmoment
$M_W$	Wölbmoment

$M_z$	Biegemoment um die $z$ -Achse
$N$	Normalkraft
$P_0$	aufgebrachte Vorspannkraft nach dem Spannen
$r_m$	mittlerer Radius
$r_t^D$	rechtwinkliger Abstand von $D$ zur Profilmittellinie $s$
$S$	Schwerpunkt
$s$	Hilfskoordinate entlang der Profilmittellinie
$s_a$	Anfangspunkt der Hilfskoordinate $s$
$s_e$	Endpunkt der Hilfskoordinate $s$
$S_W$	Torsionseinheitsschubfluss
$t$	Wandstärke
$u$	Verschiebung in Richtung der Stablängsachse (Verwölbung)
$v, w$	Verschiebungen in Richtung der Achsen $y$ und $z$
$x$	Stablängskoordinate
$y, z$	Querschnittsachsen
$y_0$	$y$ -Koordinate des Schwerpunkts

### **griechische Buchstaben**

$\eta_T$	Korrekturfaktor zur Berücksichtigung von $\tau_{zul,mat}$ bei der Torsionstragfähigkeit
$\eta_V$	Korrekturfaktor zur Berücksichtigung von $\tau_{zul,mat}$ bei der Querkrafttragfähigkeit
$\gamma$	Gleitung entsprechend Abbildung 2.12
$\mu$	Reibungskoeffizient
$v_t(s)$	Verschiebung entlang der Tangente zur Profilmittellinie an der Stelle $s$
$\omega^D$	Einheitsverwölbung bezogen auf den Drehpunkt $D$
$\pi$	Kreiszahl
$\psi$	Spannungsfunktion St. Venant'scher Torsion, siehe Tabelle 2.1
$\sigma$	Normalspannung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\sigma_{oct}$	Oktaedernormalspannung

---

$\tau$	Schubspannung
$\tau_I$	primäre Torsionsschubspannung
$\tau_{II}$	sekundäre Torsionsschubspannung
$\tau_{\text{oct}}$	Oktaederschubspannung
$\tau_{\text{zul,mat}}$	zulässige Schubspannungen entsprechend der Schubfestigkeit des Materials
$\tau_{\text{zul},\mu}$	zulässige Schubspannungen entsprechend der ansetzbaren Reibung
$\theta$	Fugenöffnungswinkel gemäß Abbildung 4.9
$\varepsilon_{c1}$	Dehnung des Betons unter der Maximalspannung $f_{cc}$
$\varepsilon_{cu}$	rechnerische Bruchdehnung des Betons
$\varepsilon_c$	Dehnung des Betons
$\varepsilon_{pl}$	plastische Dehnung
$\vartheta$	Verdrehung
$\xi, \rho, \vartheta$	Haigh-Westergaard-Koordinaten, siehe Abbildung 2.2
$\zeta$	Verhältnis der zulässigen Schubspannungen gemäß Abbildung 6.1

**weitere Symbole**

$\hat{\nu}$	Querdehnzahl
$\hat{s}$	Hilfskoordinate gemäß Abbildung 4.9
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen und die Null
$\tilde{y}, \tilde{z}$	Hauptachsen der Querschnittsebene



# 1 Einführung

## 1.1 Die Segmentbauweise

Bauwerke, die in Segmentbauweise errichtet werden, setzen sich aus einer Vielzahl vorgefertigter Stahlbetonelemente, den sogenannten «Segmenten», zusammen. Die Segmente umfassen idealerweise den gesamten Querschnitt des Bauwerks und sorgen nach dem Zusammenbau für die Tragfähigkeit. Eine Ortbetonergänzung ist nicht erforderlich. Zusammengehalten werden die Segmente durch Spannglieder, die in der Regel extern geführt sind. Die Segmentbauweise wird hauptsächlich bei Türmen für besonders hohe onshore Windenergieanlagen und Segmentbrücken verwendet, aber auch bei Funktürmen oder anderen Turmbauwerken. Mitte der 1940er Jahre wurden die ersten Segmentbrücken entlang des Flusses Marne in Frankreich von Eugène Freyssinet, einem Pionier des Spannbetons, errichtet [4]. In Deutschland stellt die Verwendung von Fertigteilen im Brückenbau grundsätzlich eine etablierte Bauweise dar. Bis auf wenige Ausnahmen beschränkt man sich derzeit jedoch noch auf Trägerfertigteile mit Ortbetonergänzung. Langfristig ist aber davon auszugehen, dass sich auch in Deutschland die Segmentbrücke, aufgrund ihrer kürzeren Bauzeit, besonders bei Ersatzneubauten für bestehende Brücken, durchsetzen wird [4]. Türme für onshore Windenergieanlagen hingegen werden erst seit einigen Jahren in Segmentbauweise erstellt. Trotz der vielen möglichen Turmbauweisen hat sich der Hybridturm für Nabenhöhen größer 100 m als wirtschaftlichste Bauweise etabliert [5]. Das betrifft in Deutschland mehr als die Hälfte der Anlagen [6]. Hierbei wird ein Stahlrohrturm auf einen Segmentturm aus Stahlbetonfertigteilen aufgesetzt [5].

Segmentfugen werden bei Türmen für Windenergieanlagen und Segmentbrücken trocken oder verklebt ausgeführt. Eine fugenübergreifende Bewehrung oder Verschraubung kommt nicht zum Einsatz. Während im Brückenbau üblicherweise Schubnocken im Fugenquerschnitt angeordnet werden, sind die Fugen bei Windenergieanlagen meist eben. Ihre Tragfähigkeit erhält die Segmentfuge aus der Anpresskraft und dem Reibbeiwert der kontaktierenden Oberflächen. Eine Verklebung hat keine Kraftübertragungs- sondern eine Dichtfunktion.

Der Vorteil segmentierter Bauten liegt in der großen Vorfertigung und der damit einhergehenden schnellen Montage. Dadurch reduziert sich nicht nur die Bauzeit vor Ort, auch die Baustelleneinrichtung benötigt weniger Platz im Vergleich zum Bau mit Ortbeton, und die Ausführung ist unabhängiger vom Wetter. Der größere Transportaufwand der Fertigteile rechtfertigt nur selten eine monolithische Bauweise. Ein weiterer, nicht zu unterschätzender Vorteil der Segmentbauweise, ist der Rückbau einer Konstruktion. Dieser vollzieht sich ebenfalls deutlich schneller, erzeugt weniger Emissionen in Form von Staub und erleichtert die Rezyklierung.

## 1.2 Türme für Windenergieanlagen

Die erste Windenergieanlage (WEA) zur Stromgewinnung wurde 1885 von Poul La Cour, einem dänischen Professor einer Volkshochschule in Askov, errichtet, Abbildung 1.1. Die Firma Lykkesgard erkannte das Potential der Experimentalanlage und errichtete bis 1908 bereits 72 weitere

Anlagen mit einer Leistung von 10 kW bis 35 kW und einem Rotordurchmesser bis zu 20 m. Diese Türme der ersten Generation wurden als Stahlgittertürme errichtet. Die Fachwerkkonstruktion macht Stahlgittertürme sehr effizient. Ihr Materialverbrauch an Stahl ist nur etwa halb so groß wie bei Stahlrohtürmen, allerdings werden zur Montage viele Arbeitsstunden benötigt, weshalb sie sich bis heute nur in Regionen mit niedrigen Lohnkosten etabliert haben. Die ersten Türme aus Ortbeton wurden in den 1940er Jahren von der Firma F. L. Smidth errichtet, die ebenfalls die WEA-Technik für sich entdeckte. Smidth baute Anlagen mit einer Leistung von 50 kW bis 70 kW und einem Rotordurchmesser von 17,5 m bis 24 m, wobei einige Anlagen mit Stahlgittertürmen, die meisten jedoch mit Ortbetontürmen, gebaut wurden. [5]

Seither werden WEA größer, höher und leistungstärker. So wurde 2019 eine Anlage mit einer Leistung von 12 MW errichtet [7]. Gerade onshore werden dabei besonders hohe Anlagen gebaut, um stärkere und stetigere Winde in höheren Lagen zu erreichen. Mit einer Nabenhöhe von 178 m ragt die derzeit höchste Anlage der Welt in Gaildorf bei Stuttgart in den Himmel [7]. Mit zunehmender Nabenhöhe wächst auch der Turmfußdurchmesser. Stahlrohtürme, die aus Abschnitten von 20 m bis 30 m zusammengesetzt sind, können aufgrund von Brückendurchfahrten nur bis zu einem Durchmesser von 4 m transportiert werden. Daher hat sich die Hybridbauweise für besonders hohe Windenergieanlagen durchgesetzt. Während es für Einzelanlagen meist wirtschaftlicher ist, den Betonschaft von Hybridtürmen in Ortbeton zu errichten, rücken bei größeren Stückzahlen die Vorteile der Segmentbauweise in den Vordergrund.

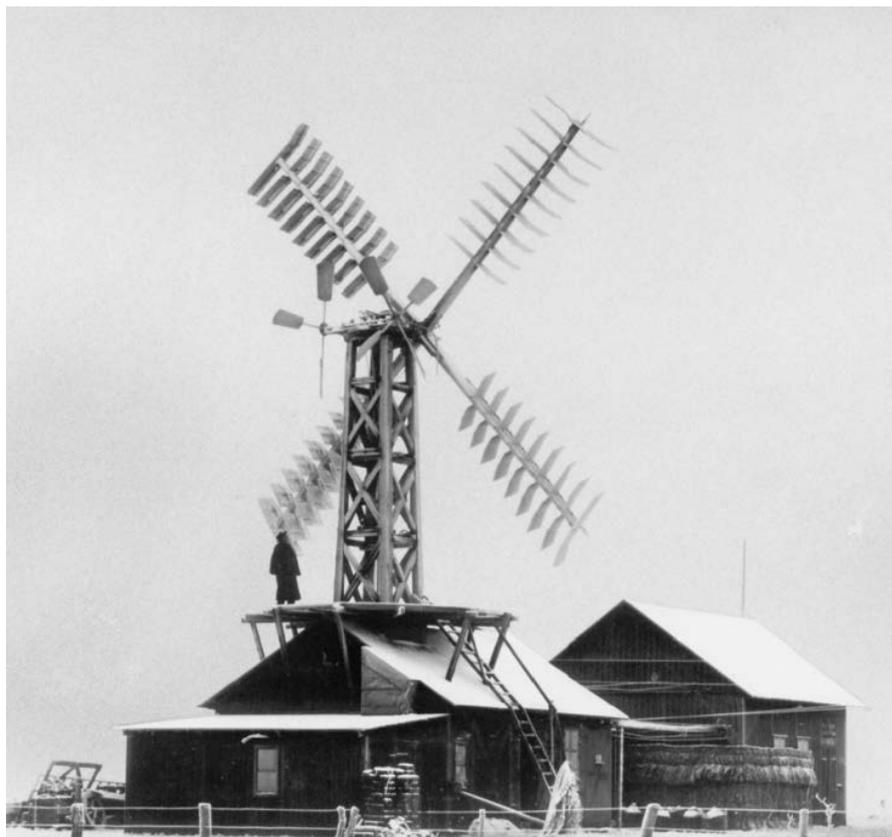


Abbildung 1.1: Erste Windenergieanlage zur Stromgewinnung [5]

## 1.3 Problemstellung und Motivation

Der klassische Fall des segmentierten Stahlbetonstabs mit Hohlquerschnitt, welcher im Ingenieurbau vor allem beim Bau von Windenergieanlagen und Segmentbrücken vorkommt, stellt im Hinblick auf Torsion eine besondere Herausforderung dar. Brücken erfahren Torsion, wenn Verkehrslasten einseitig den Brückenquerschnitt belasten, während Windenergieanlagen vordergründig durch Windböen, die nur auf eine Hälfte des vom Rotor überstrichenen Durchmessers wirken, Torsion erfahren. Da Torsion im Bauwesen praktisch immer durch eine exzentrisch angreifende Kraft hervorgerufen wird, ist stets eine Kombination aus Biegung, Querkraft und Torsion zu berücksichtigen. Im Segmentbau müssen diese Einwirkungen über unbewehrte Fugen übertragen werden, welche allein durch die Normalkraft aus Vorspannung ihre Tragfähigkeit erhalten. Während der Abtrag von Normalkraft und Biegung sehr genau über die Zugkraft in den Spanngliedern und der zugehörigen Reaktion in der Druckzone bestimmt werden kann, stellt eine Kombination mit Querkraft und Torsion eine bisher noch ungenügend erforschte Situation dar.

Das Tragverhalten und die Bemessung von Segmentbrücken basiert international vordergründig auf der amerikanischen Richtlinie «Guide Specifications for Design and Construction of Segmental Concrete Bridges» [8], die von der American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) herausgegeben wird. In Deutschland hingegen gelten die «Empfehlungen für Segmentfertigteilterbrücken mit externen Spanngliedern» [9] vom Bundesministerium für Digitales und Verkehr. Zur Ermittlung von Einwirkungen und für Standsicherheitsnachweise von Windtürmen wird in Deutschland die «Richtlinie für Windenergieanlagen» [10] vom Deutschen Institut für Bautechnik herangezogen. Außerdem gelten im europäischen Raum die Bemessungsvorschriften der DIN EN 1992-1-1 [11] und DIN EN 1993-1-1 [12] parallel zu etwaigen Empfehlungen oder Richtlinien.

Auch wenn die internationalen Normen [8, 10, 13, 14] sich in verschiedenen Punkten unterscheiden, so basiert der Torsionsnachweis einer unbewehrten Fuge international auf dem gleichen Modell. Es handelt sich um das räumliche Fachwerkmodell, welches 1929 von Rausch [15] im Rahmen seiner Dissertation entwickelt und seither stetig erweitert wurde. Das räumliche Fachwerkmodell legt geschlossenen, dünnwandigen Querschnitten einen konstanten Kreisschubfluss, den sogenannten «Bredt'schen Schubfluss», zu Grunde. Etwaige Torsionsschubflüsse aus Verwölbung werden auch bei nicht wölbefreien Querschnitten vernachlässigt. Kommt es infolge hoher Biegebeanspruchung zu einer klaffenden Fuge, so entsteht lokal ein offener Querschnitt. Ein räumliches Fachwerk über den gesamten Querschnitt kann nun nicht mehr ausgebildet werden. Klare Vorgaben zur Bemessung sind in DIN EN 1992-1-1 [11] nicht zu finden. Es wird allerdings darauf hingewiesen, dass eine Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion erforderlich sein kann. Eine konsistente Bemessung von Segmentfugen unter kombinierter Biege- und Torsionsbeanspruchung ist also gemäß dem aktuellen Stand der Technik so nicht möglich.

Zum Stand der Wissenschaft veröffentlichten Grünberg und Göhlmann [16] einen ausführlichen Bericht zu Windenergieanlagen im Betonkalender 2011. Dabei befassten sie sich auch mit dem Schubübertrag infolge Querkraft und Torsion in Segmentfugen. Ihr Nachweismodell wurde in Anlehnung an DIN 1045-1 [17] erstellt und basiert damit ebenfalls auf dem räumlichen Fachwerkmodell von Rausch [15]. Auch international wurde 2011 von Algorafi et al. [18] ein Nachweismodell veröffentlicht, dass qualitativ dem Modell von Grünberg und Göhlmann [16] entspricht. Algorafi et al. entwickelten ihr Modell unabhängig von Grünberg und Göhlmann, basierend auf den Richtlinien der AASHTO [8], womit auch dieses Modell auf Rausch [15]

zurückgeht.

Die Problematik, dass im Falle einer klaffenden Fuge kein Bredt'scher Schubfluss vorliegen kann, und das räumliche Fachwerkmodell somit nicht mehr anwendbar ist, umgehen Grünberg und Göhlmann [16] sowie Algorafi et al. [18], indem sie einen St. Venant'schen Schubfluss für offene Querschnitte unterstellen. Dadurch fällt die Torsionstragfähigkeit jedoch im Vergleich zum geschlossenen Querschnitt stark ab. Eine konsistente Nachweisführung ist somit am Übergang zwischen klaffender und vollständig überdrückter Fuge nicht möglich.

Einen ganz anderen Ansatz verfolgte Hartwig [19], der den Forschungsbedarf dieser Thematik erkannte, und Anfang 2020 an der Universität Hannover ein Nachweismodell zur Torsionstragfähigkeit von Segmentfugen im Rahmen seiner Dissertation veröffentlichte. Hartwig unterstellt in seinem Modell defacto eine Starrkörperverschiebung. Über eine Gleichgewichtsbetrachtung ermittelt er einen Schubfluss, aus dem er ein aufnehmbares Torsionsmoment errechnet. Der von Hartwig angesetzte Schubfluss wirkt allerdings nicht wandparallel, was zu Unverträglichkeiten bei dünnwandigen Querschnitten führt, die von Hartwig eigentlich auch vorausgesetzt werden. Anhand von Versuchen zeigte er, dass einerseits die Torsionstragfähigkeiten nach Grünberg und Göhlmann [16] bzw. Algorafi et al. [18] bei klaffenden Fugen viel zu gering sind, andererseits sein Modell die Torsionstragfähigkeit teils stark überschätzt. Auch wenn das Modell von Hartwig [19] bei dünnwandigen Querschnitten nur inkonsistent anwendbar ist und gemäß seiner eigenen Versuche die Torsionstragfähigkeit überschätzt, so kann es dennoch als eine Verbesserung zu vorherigen Ansätzen angesehen werden, da diese noch größere Abweichungen zu den von Hartwig durchgeführten Versuchen zeigen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die bisherigen Nachweismodelle für Torsion im Massivbau entweder lediglich primäre Torsionsschubspannungen berücksichtigen und sekundäre Anteile aus Verwölbung vernachlässigen, oder Schubflüsse voraussetzen, die mit der allgemein anerkannten Theorie der Wölbkrafttorsion unvereinbar sind. Dass die Theorie der Wölbkrafttorsion nur im Stahlbau und nicht im Massivbau angewendet wird, ist wohl damit zu begründen, dass Stahlbetontragwerke in der Regel im Zustand II nachgewiesen werden, und die Theorie der Wölbkrafttorsion auf linear elastischen Werkstoffen beruht. Es ist nicht bekannt, dass jemand bisher versucht hätte, die Theorie der Wölbkrafttorsion zur Nachweisführung im Massivbau bzw. in Segmentfugen anzuwenden. Diese Herausforderung im Zusammenspiel mit der Gegebenheit, dass die Nachweismodelle nach aktuellem Stand von Wissenschaft und Technik in Teilen inkonsistent sind, stellt die Motivation für diese Arbeit dar.

## 1.4 Zielsetzung und Vorgehensweise

Entsprechend der in Abschnitt 1.3 beschriebenen Problemstellung hat diese Arbeit zum Ziel, ein konsistentes Nachweismodell für unbewehrte Segmentfugen auf Grundlage der Theorie der Wölbkrafttorsion zu entwickeln. Um dies zu erreichen, soll zunächst eine allgemeine Methode entwickelt werden, mit der beliebige dünnwandige Querschnitte mit vollständig überdrückter bzw. klaffender Fuge, unter einer Kombination aus Normalkraft, Biegung, Querkraft und Torsion, nachgewiesen werden können. Aus dieser Methode wird anschließend ein Modell abgeleitet. Um dabei den Umfang dieser Arbeit für den Leser auf ein angenehmes Maß zu begrenzen, müssen gewisse Vereinfachungen getroffen werden. So wird nachfolgend stets eine trocken ausgeführte Segmentfuge betrachtet und an angemessener Stelle auf andere unbewehrte Fugenausbildungen in qualitativer Form eingegangen. Des Weiteren wird zwar ein beliebiger dünnwandiger, einzelliger Hohlquerschnitt zur Herleitung der Methode herangezogen, das am Ende dieser Ar-

beit stehende Nachweismodell soll sich jedoch ausschließlich auf einen Kreisringquerschnitt mit konstanter Wandstärke beziehen. Aus diesem Grund werden sich alle Berechnungsbeispiele ebenfalls nur auf Kreisringquerschnitte beziehen. Außerdem wird vordergründig eine Kombination aus Normalkraft, Biegung und Torsion betrachtet. Eine zusätzliche Beanspruchung durch Querkraft wird im Rahmen der Modellentwicklung nur qualitativ behandelt. Am Ende der Arbeit wird ein vereinfachtes, konsistentes Bemessungsmodell für Segmentfugen unter Torsion- bzw. Querkraftbeanspruchung vorgestellt.

Der wissenschaftliche Mehrwert dieser Arbeit liegt, gemäß der oben beschriebenen Zielsetzung, in der Beantwortung folgender Forschungsfragen:

- Wie wird Torsion in ungleichmäßig überdrückten oder klaffenden Fugen übertragen?
- Welche Mechanismen auf der Widerstandsseite gibt es, und wie beeinflussen diese den Torsionsübertrag?
- Welchen Einfluss hat eine zusätzlich wirkende Querkraft auf den Torsionsübertrag, und wie kann die Tragfähigkeit beider Schubbeanspruchungen nachgewiesen werden?

In den Fachaufsätzen [1, 2, 3] wurden bereits erste Antworten auf die ersten beiden Forschungsfragen geliefert, wobei der Anteil des Zweitautors Garg sich auf redaktionelle und beratende Aspekte beschränkte. In dieser Arbeit gliedert sich die Vorgehensweise in fünf Bereiche. Als Erstes werden die theoretischen Grundlagen aufgearbeitet. Dazu gehören auf der Widerstandsseite die Materialeigenschaften von Beton und die Kontaktmechanik trockener Fugen. Auf der Beanspruchungsseite stehen Normal- und Schubspannungen, welche infolge plastischer Effekte wiederum mit der Widerstandsseite interagieren. Hierfür müssen die Grundlagen der Festigkeitslehre und die Theorie der Wölbkrafttorsion behandelt werden. Dies ist erforderlich, um bestehende Modelle bewerten und das eigene Modell entwickeln zu können. Entsprechend folgt als Zweites der Stand von Wissenschaft und Technik. Hier werden, wie bereits in Abschnitt 1.3 angesprochen, vordergründig das räumliche Fachwerkmodell sowie die Theorien von Grünberg und Göhlmann [16] und Hartwig [19] detailliert vorgestellt. Als Drittes wird eine vom Autor hergeleitete Methode zur Ermittlung der Torsionstragfähigkeit dargestellt und ein darauf aufbauendes Modell entwickelt. Im vierten Schritt folgt eine Verifikation des entwickelten Modells anhand von Versuchen aus der Literatur und FE-Berechnungen. Zu den FE-Berechnungen gehört außerdem der Betonschaft eines Hybridturms mit praxisüblichen Dimensionen und Beanspruchungen, an dem der Definitionsbereich des entwickelten Modells überprüft wird. Im fünften und letzten Schritt wird, auf Grundlage der bis dahin gewonnenen Erkenntnisse, ein vereinfachtes Bemessungsmodell, entsprechend der oben genannten Zielsetzung, vorgestellt und dessen Anwendungsgrenzen diskutiert.



## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Einleitung

Um ein Modell zur Ermittlung der Torsionstragfähigkeit von Segmentfugen entwickeln zu können, müssen zunächst die Grundlagen der Einwirkungsseite und der Widerstandsseite behandelt werden. Zur Widerstandsseite gehört dabei das Werkstoffverhalten von Beton und die Kontaktmechanik trockener Fugen. So wird zu Beginn von Abschnitt 2 auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton eingegangen, wobei vordergründig Inhalte der DIN EN 1992-1-1 [11] wiedergegeben werden. Im Anschluss werden einige Versagenshypothesen vorgestellt, bevor auf die Kontaktmechanik näher eingegangen wird. Zu den Grundlagen der Einwirkungsseite gehören, neben allgemeinen Spannungsbetrachtungen am Volumenelement, die Schubflüsse infolge Querkraft und Torsion, wobei die Ausführungen zur Torsion im Hinblick auf das hier behandelte Thema deutlich ausführlicher gehalten sind.

Anwendung finden die hier behandelten Grundlagen in Abschnitt 4, wo ein Modell zur Ermittlung der Torsionstragfähigkeit ungleichmäßig überdrückter bzw. klaffender Fugen entwickelt wird. Auch Abschnitt 5, wo es um die Verifikation des entwickelten Modells geht, baut in großem Maße auf den hier behandelten Grundlagen auf. So nutzen viele der zur Verifikation herangezogenen FE-Berechnungen die hier vorgestellte Versagenshypothese von Menétrey und Willam [20].

### 2.2 Materialeigenschaften von Beton

#### 2.2.1 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton wird in der Regel für kurzzeitig wirkende, einaxiale Druckbeanspruchungen angegeben. So gibt die DIN EN 1992-1-1 [11] für nichtlineare Verfahren der Schnittgrößenermittlung und für Verformungsberechnungen eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton gemäß Gleichung 2.1 an.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (2.1)$$

$$\text{mit: } \eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$$

$$k = \frac{1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}$$

Dabei steht  $\varepsilon_{c1}$  für die Stauchung beim Höchstwert der Betondruckspannung. Für den Definitionsbereich von Gleichung 2.1 gilt  $0 < |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu1}|$ , wobei  $\varepsilon_{cu1}$  die theoretische Bruchdehnung beschreibt. Der Model Code 2010 [13] gibt ebenfalls Gleichung 2.1 für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton unter kurzzeitig wirkenden, einaxialen Druckbeanspruchungen

an. Allerdings wird im Model Code 2010 [13] das Verhältnis  $k$  zwischen E-Modul und Sekantenmodul nicht mit einem Faktor von 1,05, sondern 1,0 versehen. Des Weiteren bestehen leichte Unterschiede in der Berechnung des E-Moduls  $E_{cm}$  und den Dehnungen  $\varepsilon_{c1}$  und  $\varepsilon_{cu1}$ . Der Zusammenhang zwischen  $\sigma_c$  und  $\varepsilon_c$  sowie die angesprochenen Unterschiede können qualitativ Abbildung 2.1 entnommen werden.

DIN EN 1992-1-1 [11] gibt außerdem zwei weitere Spannungs-Dehnungs-Linien an, die jedoch lediglich eine Vereinfachung des in Abbildung 2.1 angegebenen Verlaufs darstellen und nur für Querschnittsbemessungen verwendet werden dürfen. Das sind zum einen das Parabel-Rechteck-Diagramm und zum anderen ein bilinearer Verlauf. Beide Verläufe weisen ein durch  $f_{cd}$  begrenztes Fließplateau auf, welches bei einer vorgegebenen Bruchdehnung  $\varepsilon_{cu2}$  bzw.  $\varepsilon_{cu3}$  endet. Dabei gilt  $\varepsilon_{cu2} = \varepsilon_{cu3} < \varepsilon_{cu1}$ . Nähere Informationen sind DIN EN 1992-1-1 [11] zu entnehmen.

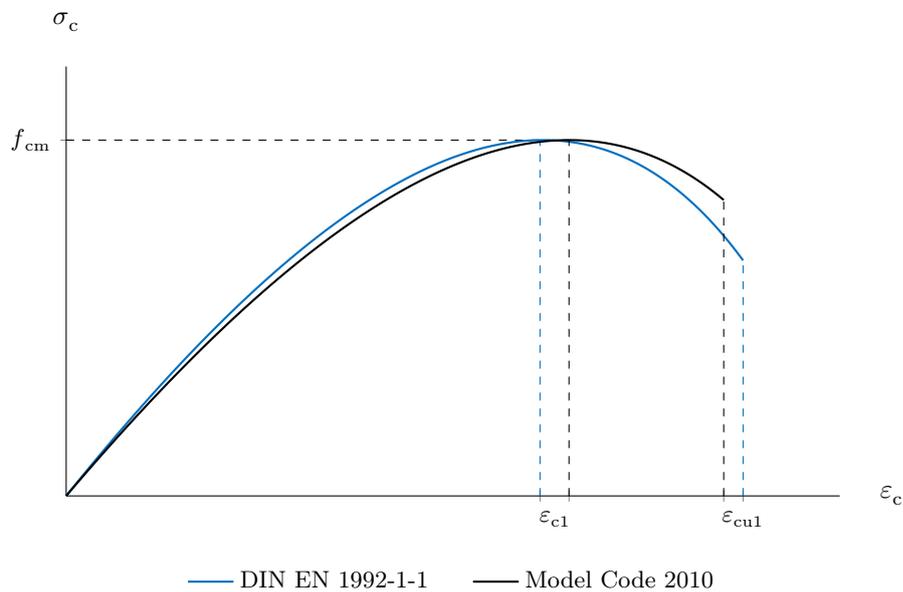


Abbildung 2.1: Spannungs-Dehnungs-Beziehung für kurzzeitig wirkende, einaxiale Druckbeanspruchungen gemäß DIN EN 1992-1-1 [11] und Model Code 2010 [13]

Im Zugbereich wird der Bruch mit  $\sigma_c = f_{ctm}$  erreicht. Eine entsprechende Bruchdehnung  $\varepsilon_{cut}$  wird in DIN EN 1992-1-1 [11] nicht angegeben. Der Model Code 2010 [13] setzt  $\varepsilon_{cut} = 0,15\%$  und gibt einen bilinearen Spannungs-Dehnungs-Verlauf gemäß den Gleichungen 2.2 und 2.3 an.

$$\sigma_{ct} = E_{cm} \cdot \varepsilon_{ct} \quad \text{wenn} \quad \sigma_{ct} \leq 0,9 \cdot f_{ctm} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \cdot \left( 1 - 0,1 \cdot \frac{0,00015 - \varepsilon_{ct}}{0,00015 - 0,9 \cdot f_{ctm}/E_{cm}} \right) \quad \text{wenn} \quad 0,9 \cdot f_{ctm} < \sigma_{ct} \leq f_{ctm} \quad (2.3)$$

Zusammenfassend wird für kurzzeitig wirkende, einaxiale Beanspruchungen der Versagenspunkt erreicht, wenn eine der Bruchspannungen  $f_{ctm}$  oder  $f_{cm}$  bzw. eine der Bruchdehnungen  $\varepsilon_{cut}$  oder  $\varepsilon_{cu}$  erreicht wird. Liegt eine mehraxiale Beanspruchung vor, erhält man im Hauptspannungsraum eine Versagenshülle. Die Form einer solchen Versagenshülle wird allgemein über

eine sogenannte «Versagenshypothese» beschrieben. Nachfolgend sollen in Abschnitt 2.2.2 mehrere Versagenshypothesen für den Hauptspannungsraum vorgestellt werden. Dabei werden teils auch klassische Versagenshypothesen vorgestellt, die das Verhalten von Beton nur unzureichend wiedergeben. Da sie jedoch in Teilen als Grenzbedingung in andere Modelle eingehen, werden sie der Vollständigkeit halber ebenfalls dargestellt.

## 2.2.2 Versagenshypothesen im dreiaxialen Spannungsraum

### 2.2.2.1 Allgemeines

Für praktisch alle Werkstoffe kann die Spannungs-Dehnungs-Kurve in verschiedene Bereiche unterteilt werden. Allgemein spricht man von elastischen und plastischen Verformungsbereichen, von denen die plastischen Bereiche ferner in Fließ-, Verfestigungs- und Entfestigungsbereiche eingeteilt werden. Viele verschiedene Hypothesen wurden aufgestellt, um die Beanspruchung an einer bestimmten Grenze zu beschreiben. Je nach gewählter Grenze spricht man von Fließ- bzw. Bruchhypothesen. Die Funktion, mit der die Beanspruchung an einer bestimmten Stelle beschrieben wird, bezeichnet man als Kriterium. Am häufigsten wird dementsprechend vom Fließkriterium bei zähen Werkstoffen, sowie vom Bruchkriterium bei spröden Werkstoffen gesprochen. Unterteilt werden Versagenshypothesen teilweise danach, ob ein Bruch- oder Fließkriterium verwendet wurde [21]. Es ist jedoch, zumindest für Beton, gebräuchlicher, eine Einteilung nach der Parameterzahl des verwendeten Kriteriums [22, 23] zu verwenden. Nachfolgend sollen einige wenige Versagenshypothesen näher vorgestellt werden, andere werden lediglich kurz angesprochen. Nähere Informationen können stets den angegebenen Literaturquellen entnommen werden. Auch wenn hier vordergründig auf Beton eingegangen wird, werden teils auch Versagenshypothesen vorgestellt, die Beton nur ungenügend beschreiben bzw. nie für den Werkstoff Beton entwickelt wurden. Geschichtlich spielen diese jedoch eine entscheidende Rolle, da sie häufig als Vorgänger bzw. Inspiration besserer Hypothesen für Beton dienten.

Versagenshypothesen werden oft über ihre Hüllfläche im Spannungsraum visualisiert. Dabei ist zu beachten, dass hier für  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  keine Sortierung erfolgt. Dementsprechend können die Indizes beliebig vertauscht werden. Die daraus folgende dreizählige Symmetrie ergibt sich um die hydrostatische Achse  $\xi$ , welche wiederum die Normale der Deviatorebene beschreibt, wie in Abbildung 2.2 dargestellt. In der Deviatorebene, auch Oktaederebene genannt, liegen die Polarkoordinaten  $\rho$  und  $\vartheta$ . Der Winkel  $\vartheta$  bezieht sich dabei stets auf einen der Zugmeridiane. Gleichzeitig gilt auf Grund der Symmetrie  $0^\circ \leq \vartheta \leq 60^\circ$ .

Die Zug- und Druckmeridiane werden folgendermaßen definiert:

$$\text{Druckmeridian} \quad \sigma_i = \sigma_j > \sigma_k \quad \text{für} \quad \sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k \quad (2.4)$$

$$\text{Zugmeridian} \quad \sigma_i > \sigma_j = \sigma_k \quad \text{für} \quad \sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k \quad (2.5)$$

In Abbildung 2.2 werden die oben genannten Begriffe am Beispiel der Versagenshülle eines Beton C50/60, gemäß des im Model Code 2010 [13] vorgestellten Versagenskriteriums, visuell dargestellt. Formell wird auf dieses Versagenskriterium in Abschnitt 2.2.2.5 unter dem Namen Speck näher eingegangen. Um die Außen- und Innenflächen der Versagenshüllen besser unterscheiden zu können, werden in dieser Arbeit die Außenflächen in Grautönen und die Innenflächen farbig wiedergegeben. Darstellungen, die auf die Deviatorebene schauen, blicken dabei stets in  $-\xi$  Richtung, zeigen also immer die Außenfläche der Versagenshülle.

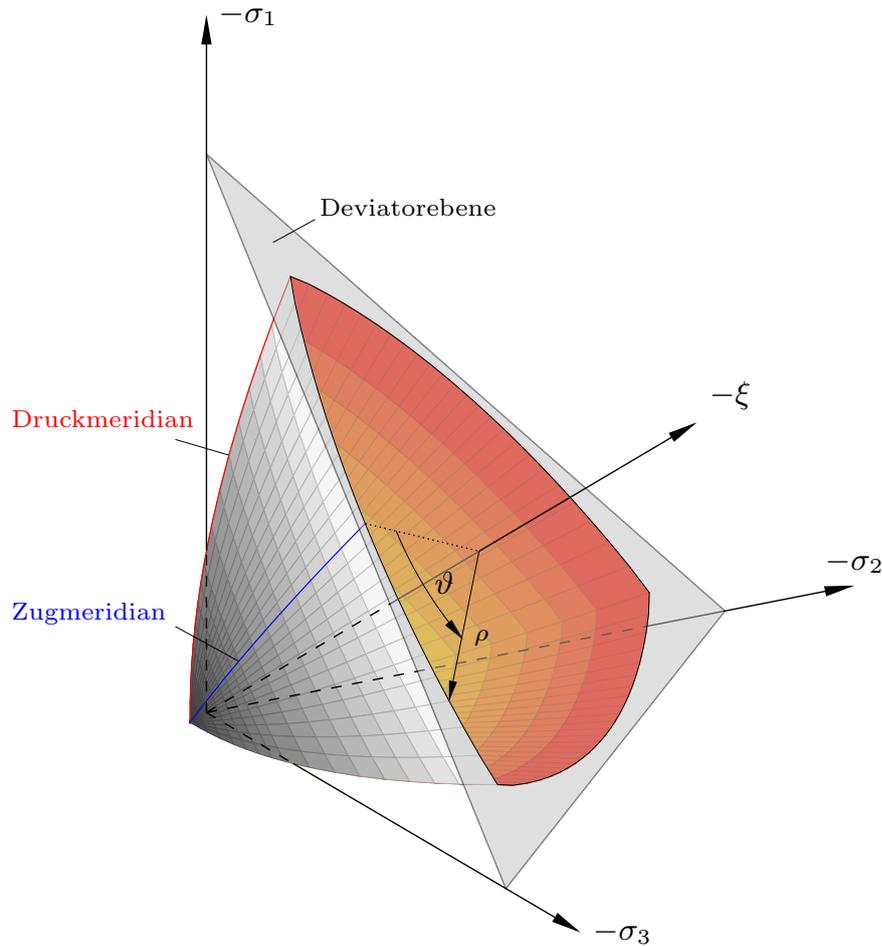


Abbildung 2.2: Bezeichnungen an einer Versagenshülle im Hauptspannungsraum

Es folgt eine Auflistung einiger mathematischer und geometrischer Zusammenhänge. Diese werden für die formelle Darstellung der nachfolgenden Versagenshüllen benötigt. Auf ihre Herleitung soll an dieser Stelle verzichtet werden. Nähere Informationen sind der einschlägigen Literatur zu entnehmen [23].

- Die Oktaederspannungen  $\sigma_{\text{oct}}$  und  $\tau_{\text{oct}}$

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3} \cdot I_1 \quad (2.6)$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot J_2 \quad (2.7)$$

- Die Haigh–Westergaard-Koordinaten  $\xi$ ,  $\rho$  und  $\vartheta$ .

$$\xi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sigma_{\text{oct}} \quad (2.8)$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3} \cdot \tau_{\text{oct}} \quad (2.9)$$

$$\cos(3 \cdot \vartheta) = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot \sqrt{J_2^3}} \quad (2.10)$$

- lineare Spannungsinvariante  $I_1$  des Spannungstensors sowie die quadratische und kubische Invarianten  $J_2$  und  $J_3$  des deviatorischen Spannungstensors.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.11)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{3}{2} \cdot \tau_{\text{oct}}^2 \quad (2.12)$$

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_{\text{oct}}) \cdot (\sigma_2 - \sigma_{\text{oct}}) \cdot (\sigma_3 - \sigma_{\text{oct}}) \quad (2.13)$$

### 2.2.2.2 Ein-Parameter-Kriterien

#### Kriterium der größten bzw. kleinsten Hauptspannung

Dieses Kriterium stellt die einfachste Form eines Kriteriums dar und kann als eines der ersten aufgestellten Versagenskriterien der Festigkeitslehre betrachtet werden. Die Namen Galilei, Leibniz und Navier treten im Zusammenhang mit diesem Kriterium in Erscheinung [23]. Für den Anwendungsbereich Beton ist jedoch die Arbeit von Rankine [24] besonders hervorzuheben. Rankine [24] bemerkte, dass Beton immer versagt, sobald eine der drei Hauptspannungen die Zugfestigkeit überschreitet, unabhängig von der Größe der beiden anderen Hauptspannungen. Da das Rankine-Kriterium sich sehr gut eignet, die Versagenshülle im Zugbereich zu beschreiben, ist es in vielen nachfolgenden Kriterien als sogenanntes «tension-cut-off» Kriterium integriert.

Formell wird das Kriterium der größten bzw. kleinsten Hauptspannung wie folgt beschrieben:

$$\sqrt{2} \cdot \rho \cdot \cos(\vartheta) + \xi - \sqrt{3} \cdot \sigma_v \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.14)$$

bzw. über die Spannungsinvarianten

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot J_2 \cdot \cos(\vartheta) + I_1 - 3 \cdot \sigma_v \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.15)$$

Die Vergleichsspannung  $\sigma_v$  in Gleichung 2.14 bzw. 2.15 steht hier für die maximale Zug- bzw. Druckspannung und ist inklusive Vorzeichen einzusetzen. Im Spannungsraum beschreibt das Kriterium der größten bzw. kleinsten Hauptspannung einen Würfel.

### Kriterium der maximalen Schubspannung

Das Kriterium der maximalen Schubspannung wurde 1864 von Henri Edouard Tresca [25] vorgestellt und wird auch als Tresca-Kriterium bezeichnet. Eine Vergleichsschubspannung  $\tau_v$  definiert hier die maximalen Schubspannungen, dadurch ist das Kriterium unabhängig von der hydrostatischen Achse  $\xi$ . Formell kann das Kriterium durch Gleichung 2.16 beschrieben werden.

$$\rho \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} \cdot \tau_v \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.16)$$

In der Deviatorebene stellt das Tresca-Kriterium, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, ein regelmäßiges Sechseck dar. Im Spannungsraum nimmt die Versagenshülle somit die Form eines sechseckigen Prismas an, welches sich entlang der hydrostatischen Achse  $\xi$  unendlich ausdehnt.

### Kriterium der Gestaltänderungshypothese

Das Kriterium der Gestaltänderungshypothese wurde 1904 von Thomas Huber [26] aufgestellt. Neun Jahre später stellte Richard von Mises [27] fest, dass unter hydrostatischer Beanspruchung keine plastische Verformung und keine Volumenänderung auftreten. Weitere elf Jahre später, 1924 leitete Heinrich Hencky [28] ebenfalls dieses Kriterium her. Huber, von Mises und Hencky stellten aus jeweils unterschiedlichen mechanischen Blickwinkeln das Kriterium der Gestaltänderungshypothese auf. In einigen Literaturquellen [23, 28] wird daher auch vom Huber-Mises-Hencky-Kriterium berichtet. Allgemein ist es jedoch vor allem als von Mises-Kriterium bekannt.

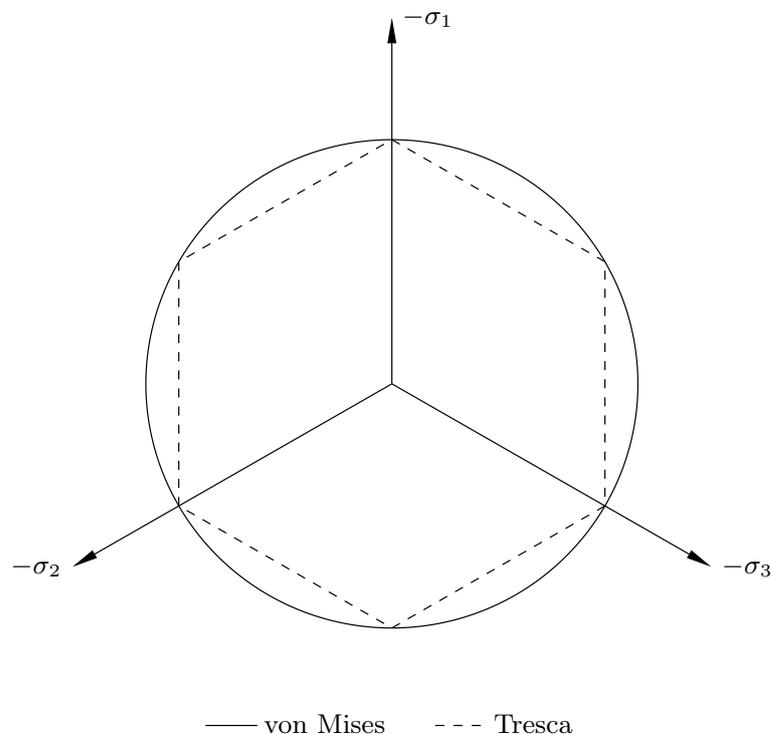


Abbildung 2.3: Versagenshülle nach Tresca und von Mises in der Deviatorebene

Durch die Vorgabe, die Gestaltänderungsarbeit  $f$  konstant zu halten, ist auch hier die Versagenshülle unabhängig von der hydrostatischen Achse  $\xi$ . In der Deviatorebene zeigt sie einen Kreis, der das Tresca-Kriterium genau umschließt, wie in Abbildung 2.3 dargestellt. Im Spannungsraum zeigt sich demnach ein unendlich langer Zylinder. Formell kann das Kriterium wie in Gleichung 2.17 dargestellt werden.

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \stackrel{!}{=} f \quad (2.17)$$

Für Beton sind die in Abbildung 2.3 dargestellten Kriterien nahezu unbrauchbar, was besonders auf der Zugseite deutlich wird. Drucker und Prager entwickelten das von Mises-Kriterium weiter, sodass es auch für Werkstoffe brauchbar wurde, die ein deutlich unterschiedliches Verhalten unter einachsialer Zug- bzw. Druckbeanspruchungen zeigen. Wie auch einige andere Zwei-Parameter-Kriterien bezog sich diese Weiterentwicklung jedoch vordergründig auf Böden.

### 2.2.2.3 Zwei-Parameter-Kriterien

#### Kriterium von Mohr-Coulomb

Das Kriterium von Mohr-Coulomb definiert den Versagenszustand anhand der Scherfestigkeit des Werkstoffs. Sobald die Schubspannung aus äußerer Belastung diese erreicht, ist das Kriterium erfüllt. Mohr [29] stellte dieses Kriterium vor, da es jedoch stark auf Arbeiten von Coulomb aufbaute, trägt es heute beide Namen. Formell kann es durch die Spannungsinvarianten  $I_1$ ,  $J_2$  und  $\vartheta$  bzw. Haigh–Westergaard-Koordinaten  $\xi$ ,  $\rho$  und  $\vartheta$  wie folgt dargestellt werden.

$$\frac{1}{3} \cdot I_1 \cdot \sin(\varphi) + \sqrt{J_2} \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi) - c \cdot \cos(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.18)$$

bzw.

$$\sqrt{2} \cdot \xi \cdot \sin(\varphi) + \sqrt{3} \cdot \rho \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) + \rho \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi) - \sqrt{6} \cdot c \cdot \cos(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.19)$$

Die Parameter  $c$  und  $\varphi$  sind durch Versuche zu bestimmen. Die Meridiane der Versagenshülle sind geradlinig. In der Deviatorebene bildet das Kriterium ein unregelmäßiges Sechseck. Das Materialverhalten von Beton wird von diesem Kriterium allerdings nur unzureichend widergespiegelt.

#### Kriterium von Drucker-Prager

Das Kriterium von Drucker-Prager [30] wurde 1952 von Daniel Charles Drucker und William Prager vorgestellt und kann als Weiterentwicklung des von Mises-Kriteriums für Werkstoffe wie Böden oder Beton, oder als Annäherung an das Mohr-Coulomb-Kriterium, angesehen werden. Durch die Einführung eines linearen, von der hydrostatischen Spannung abhängigen Terms lässt sich das Kriterium wie folgt darstellen.

$$\sqrt{6} \cdot \alpha \cdot \xi + \rho - \sqrt{2} \cdot k \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.20)$$

oder über die Spannungsinvarianten

$$\alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} - k \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.21)$$

Die Parameter  $\alpha$  und  $k$  können durch Versuche ermittelt werden. Abbildung 2.4 zeigt die Versagenshülle im Hauptspannungsraum, die sich aus Gleichung 2.20 bzw. 2.21 ergibt. Sie stellen einen Kegel mit geradlinigen Meridianen und kreisförmiger Grundfläche dar.

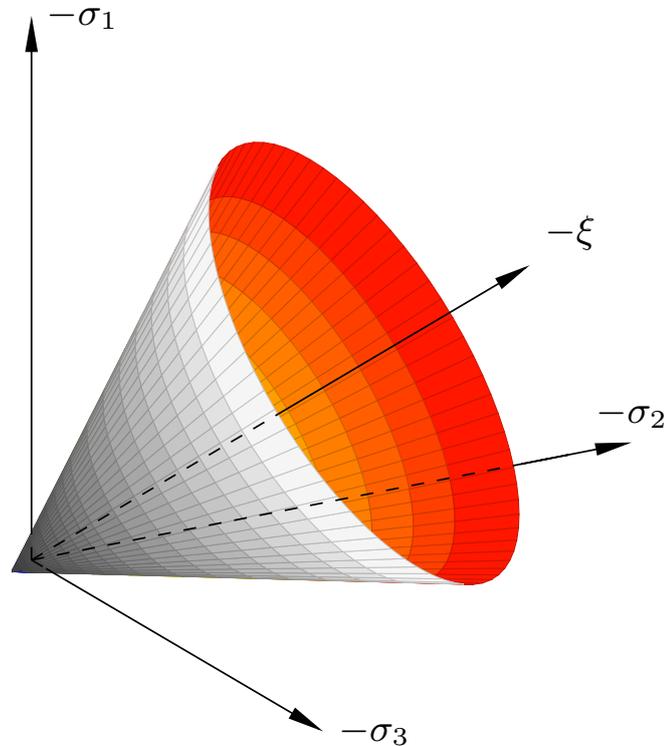


Abbildung 2.4: Versagenshülle nach Drucker-Prager im Hauptspannungsraum

Dass das Kriterium von Drucker-Prager das Verhalten von Beton jedoch nur unzureichend widerspiegelt, äußert sich laut Zhou [23] in zwei Aspekten:

- Der Radius  $\rho$  der deviatorischen Ebene ist linear abhängig von der hydrostatischen Achse  $\xi$ , was geradlinige Meridiane zur Folge hat.
- In der Deviatorebene bildet das Drucker-Prager-Kriterium einen Kreis und ist somit unabhängig vom Winkel  $\vartheta$ .

Zur Kalibrierung der Kriteriums-Parameter nutzt man typischerweise die leicht zu ermittelnde einachsiale Zugfestigkeit, die einachsiale Druckfestigkeit sowie die zweiachsiale Druckfestigkeit. Dass diese nicht auf der in Abbildung 2.4 dargestellten Versagenshülle liegen, ist der Hintergrund für die von Zhou [23] angesprochenen Kritikpunkte.

Eine Modifizierung des Drucker-Prager-Kriteriums wurde 1986 von Hintze [31] im Rahmen ihrer Dissertation vorgestellt. Das modifizierte Kriterium ist immer noch unabhängig von  $\vartheta$ , nutzt aber zwei Bruchkriterien, wodurch die Meridiane einen Knick erhalten, welcher sich an der einachsialen Druckfestigkeit orientiert, wie in Abbildung 2.5 dargestellt.

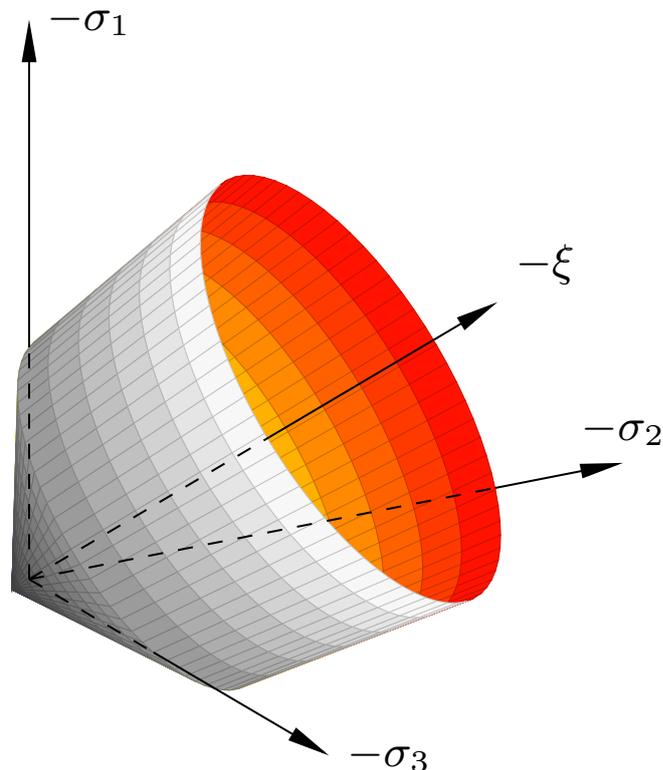


Abbildung 2.5: Versagenshülle des modifizierten Drucker-Prager-Kriterium nach Hintze im Hauptspannungsraum

Die Finite-Elementen-Software Ansys® Academic Research Mechanical Version 2021 R2 stellt das Bruchkriterium von Hintze [31] unter dem Namen Drucker-Prager zur Verfügung. In vorhergegangenen Versionen empfahl Ansys dieses Kriterium für die Modellierung von Beton. Seit 2021 rät Ansys dazu, das Kriterium von Menétrey und Willam zu verwenden [32].

#### 2.2.2.4 Drei-Parameter-Kriterien

##### Kriterium von Willam und Warnke

Im Gegensatz zu Hintze [31], die einen Lösungsweg für das Problem der geradlinigen Meridiane suchte, stellten Willam und Warnke [33] 1974 ein von  $\vartheta$  abhängiges Kriterium für Beton auf. Das Kriterium ist gut geeignet, das Verhalten von Beton unter Zug und niedrigem Druck vorherzusagen. Hohe Druckbeanspruchungen können jedoch aufgrund der geradlinigen Meridiane nur mäßig berücksichtigt werden. Formell lautet das Kriterium

$$\frac{\sigma_{\text{oct}}}{a \cdot f_c} + \frac{\tau_{\text{oct}}}{\rho(\vartheta) \cdot f_c} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.22)$$

wobei der Parameter  $a$  den Einfluss der hydrostatischen Achse  $\xi$  darstellt. Die anderen beiden Parameter  $\rho_c$  und  $\rho_t$  stellen den Abstand der einachsialen Druck- bzw. Zugfestigkeit zur hydrostatischen Achse dar und sind in der Funktion  $\rho(\vartheta)$  in Gleichung 2.23 enthalten.

$$\rho(\vartheta) = \frac{2 \cdot \rho_c \cdot (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cdot \cos(\vartheta)}{4 \cdot (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cdot \cos(\vartheta)^2 + (\rho_c - 2 \cdot \rho_t)^2} + \frac{\rho_c \cdot (2 \cdot \rho_t - \rho_c) \cdot \sqrt{4 \cdot (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cdot \cos(\vartheta)^2 + 5 \cdot \rho_t^2 - 4 \cdot \rho_c \cdot \rho_t}}{4 \cdot (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cdot \cos(\vartheta)^2 + (\rho_c - 2 \cdot \rho_t)^2} \quad (2.23)$$

Anhand von Versuchsdaten stellen Willam und Warnke [33] die Parameter  $a$ ,  $\rho_c$  und  $\rho_t$  über die ein- bzw. zweiachiale Druckfestigkeit sowie die einaxiale Zugfestigkeit dar. In der Deviatorebene entsteht so eine dreiecksähnliche Versagenslinie, wie Abbildung 2.6 zu entnehmen ist. Der Verlauf des Kriteriums in der Deviatorebene ist dabei stetig und differenzierbar. Durch eine Anpassung der drei Parameter kann das Kriterium von Willam und Warnke [33] in das Kriterium von Drucker Prager [30] bzw. von Mises [27] überführt werden.

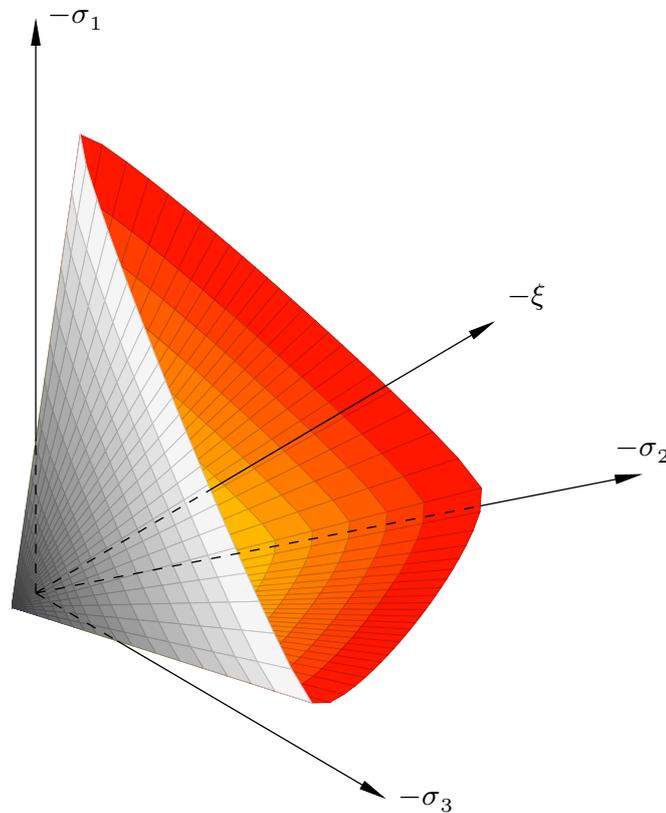


Abbildung 2.6: Versagenshülle nach Willam und Warnke im Hauptspannungsraum

### Kriterium von Menétrey und Willam

Das Kriterium von Menétrey und Willam [20] von 1995 basiert auf dem empirisch ermittelten Versagenskriterium von Hoek und Brown [34] und enthält des Weiteren das Rankine- [24] (tension-cut-off) und das Mohr-Coulomb-Kriterium [29]. Gemäß Buzas [21] zeigt das Kriterium

von Menétrey und Willam gute Übereinstimmungen mit Versuchsdaten. Formell kann es wie folgt dargestellt werden:

$$\left[ \sqrt{1.5} \cdot \frac{\rho}{f_{cc}} \right]^2 + m \cdot \left[ \frac{\rho}{\sqrt{6} \cdot f_{cc}} \cdot r(\vartheta, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3} \cdot f_{cc}} \right] - c \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.24)$$

Die Materialparameter  $c$  und  $m$  beschreiben die Kohäsion sowie die Haftscherfestigkeit des Betons und sind über Versuche zu ermitteln.  $f_{cc}$  steht für die einaxiale Druckfestigkeit von Beton. Die Funktion  $r(\vartheta, e)$  beschreibt den elliptischen Verlauf des Kriteriums in der Deviatorebene. Der Parameter  $e$  definiert dabei maßgeblich die Ellipsenform. Für  $e = 0,5$  beschreibt die Versagenslinie in Deviatorebene ein gleichseitiges Dreieck, während für  $e = 1,0$  ein Kreis vorliegt. Es gilt  $0,5 \leq e \leq 1,0$ . Die Funktion  $r(\vartheta, e)$  ist wie folgt definiert:

$$r(\vartheta, e) = \frac{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\vartheta)^2 + (2e - 1)^2}{2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\vartheta) + (2e - 1) \cdot [4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\vartheta)^2 + 5e^2 - 4e]^{0.5}} \quad (2.25)$$

Die Versagenshülle von Menétrey und Willam hat parabolische Meridiane. Ihr Verlauf in der Deviatorebene wechselt von einem Dreieck im triaxialen Zugbereich (tension-cut-off) zu einem Kreis im hohen triaxialen Druckbereich. Abbildung 2.7 zeigt die Versagenshülle für einen Beton C50/60 bis zur Deviatorebene  $\xi = -130$  MPa.

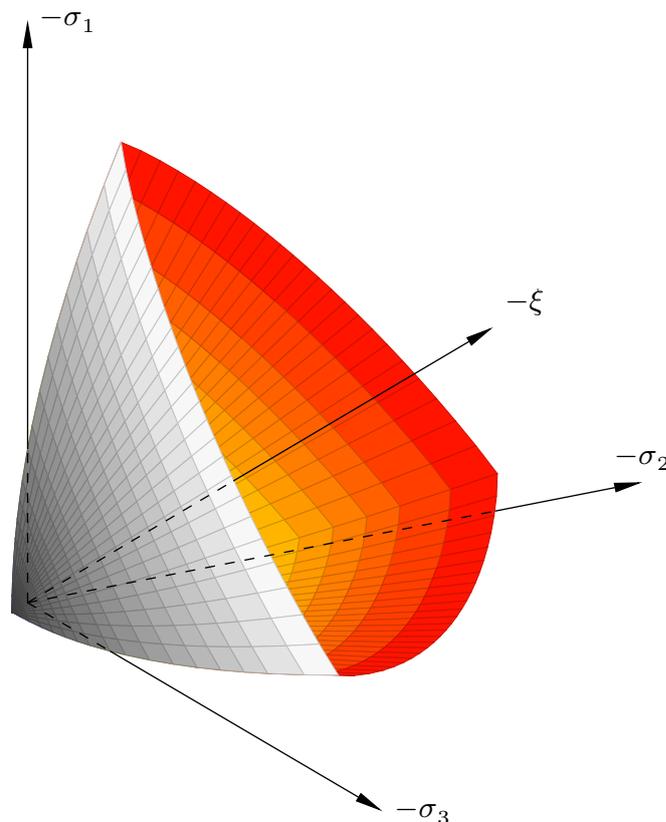


Abbildung 2.7: Versagenshülle nach Menétrey und Willam im Hauptspannungsraum

### 2.2.2.5 Kriterien mit mehr als drei Parametern

#### Kriterium von Speck

Das Kriterium von Kerstin Speck [22], welches 2008 im Rahmen ihrer Dissertation veröffentlicht wurde, baut auf dem Kriterium von Ottosen [35] auf. Es zeigt gute Übereinstimmungen mit Versuchsdaten und wurde 2010 vom Model Code [13] als Kriterium für Beton unter mehraxialer Beanspruchung übernommen. Es handelt sich um ein Vier-Parameter-Modell welches wie folgt formell dargestellt werden kann:

$$\alpha \cdot \frac{J_2}{f_{cc}^2} + \lambda(\vartheta) \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cc}} + \beta \cdot \frac{I_1}{f_{cc}} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.26)$$

$$\text{mit: } \lambda(\vartheta) = c_1 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \cdot \arccos \left( c_2 \cdot \cos(3\vartheta) \right) \right]$$

Die Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  und  $c_2$  sind abhängig von der einaxialen Druckfestigkeit  $f_{cc}$ , der einaxialen Zugfestigkeit  $f_{ct}$  sowie der zweiaxialen Druckfestigkeit  $f_{c2c}$ . Sie sind anhand von Versuchen zu ermitteln, können aber auch theoretisch wie im Model Code 2010 [13] dargestellt ermittelt werden.

Die Versagenshülle wurde bereits in Abbildung 2.2 dargestellt und ist bei gleicher Kalibrierung augenscheinlich nicht von der Versagenshülle nach Menétrey und Willam zu unterscheiden. In Abbildung 2.8 wird deutlich, dass die Unterschiede vernachlässigbar klein sind.

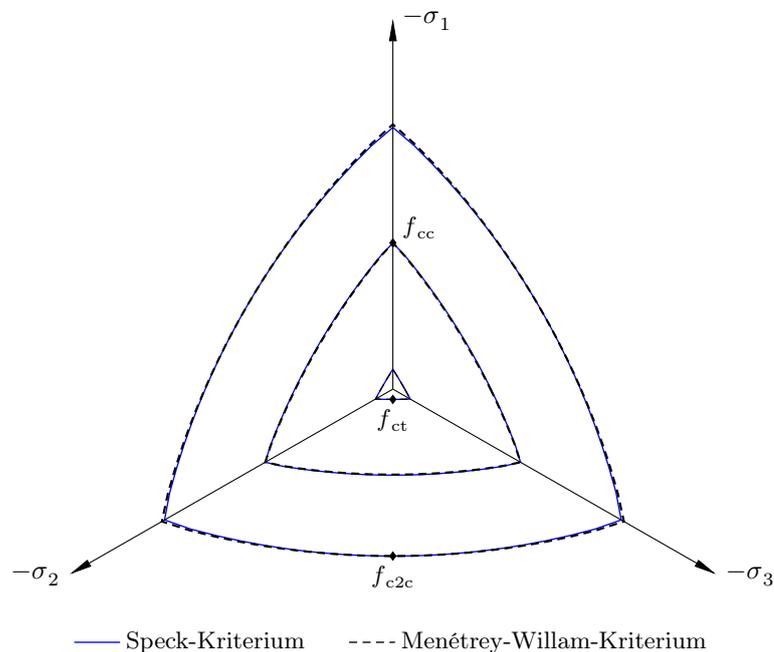


Abbildung 2.8: Versagenskriterium von Speck und Menétrey-Willam in drei Deviatorebenen

## 2.3 Das Coulomb'sche Reibungsgesetz

Der maximale Schubübertrag zwischen zwei kontaktierenden Körpern kann über die angesetzte Reibung in der Kontaktzone bestimmt werden. Die Coulomb'sche oder auch trockene Reibung zwischen festen Körpern stellt dabei ein außerordentlich kompliziertes physikalisches Phänomen dar. Neben elastischen und plastischen Deformationen, Mikrorissen und etwaigen Wechselwirkungen diverser Zwischenschichten sorgt die Oberflächenbeschaffenheit der kontaktierenden Körper für ein stets veränderliches Verhältnis zwischen realer und scheinbarer Kontaktfläche [36]. So ist die reale Kontaktfläche zwischen zwei kontaktierenden Körpern kleiner als die scheinbare, da nicht an allen Stellen eine volle Berührung vorliegt. Umso erstaunlicher ist es, dass das allgemein bekannte und sehr einfache Reibungsgesetz der Haft- und Gleitreibung den Zusammenhang zwischen Reibkraft und Normalkraft für viele Ingenieur Anwendungen in guter Näherung beschreibt. Bereits im 18. Jahrhundert führte Coulomb detaillierte experimentelle Untersuchungen zur Reibkraft durch und stellte dabei fest, dass die Reibkraft  $F_R$  in grober Näherung proportional zur Anpresskraft  $N$  ist.

$$F_R = \mu \cdot N \quad (2.27)$$

Eine Abhängigkeit von der scheinbaren Kontaktfläche und der Rauigkeit der Oberflächen besteht dagegen fast nicht. Laut Popov [36] sind Bezeichnungen der technischen Mechanik wie «rau» oder «glatt» für Flächen, in denen Reibung auftritt, aus tribologischer Sicht unzutreffend. Die Unterschiede in den angegebenen Reibbeiwerten der technischen Mechanik resultieren dagegen aus einer Vielzahl anderer Faktoren, die mit der Oberflächentopologie im Zusammenhang stehen.

Beim Proportionalitätsfaktor  $\mu$ , auch Reibbeiwert oder Reibungskoeffizient genannt, wird manchmal zwischen einem statischen sowie einem kinetischen Wert unterschieden. Der statische sowie der kinetische Reibungskoeffizient sind dabei näherungsweise gleich groß, da sie auf den gleichen physikalischen Ursachen beruhen. Gleichzeitig sind sie stark miteinander verflochten und treten selten getrennt voneinander auf, da der Übergang vom statischen zum kinetischen Reibkontakt kontinuierlich erfolgt. So tritt in der Regel bei tangentialer Beanspruchung stets auch ein partielles Gleiten ein, obwohl ein globales Gleiten noch nicht eingesetzt hat [36].

Beeinflusst werden die Reibbeiwerte durch eine Vielzahl von Faktoren. Wie bereits Coulomb feststellte, hat die Kontaktzeit einen gewissen Einfluss [36]. Erklärt werden kann dieses Phänomen über Krieeffekte im mikroskopischen Bereich, wodurch die reale Kontaktfläche der kontaktierenden Körper sich mit der Zeit der scheinbaren Kontaktfläche annähert. Des Weiteren ist der Reibbeiwert je nach Material auch von der einwirkenden Normalkraft abhängig. Bei metallischen Stoffen können zwar die Reibbeiwerte für Anpresskräfte über mehrere Dezimalgrößenordnungen nahezu konstant bleiben, jedoch ist dies nicht mehr der Fall, wenn die reale Kontaktfläche sich der scheinbaren Kontaktfläche annähert. Dies gilt laut Popov [36] besonders für weiche Metalle. Eine starke Abhängigkeit von der Anpresskraft haben hingegen die Reibbeiwerte zwischen Stahl und Teflon. Hier kann die Reibungskraft laut Popov [36] in guter Näherung zu  $N^{0,85}$  gesetzt werden. Der Reibbeiwert nimmt also mit steigender Normalkraft ab.

Eine Abhängigkeit des Reibbeiwerts von der Normalkraft stellten auch Schaarschmidt und Flederer [37] für den Reibkontakt zwischen glatten, ebenen und mittig belasteten Betonfertigteilen fest. Schaarschmidt und Flederer [37] führten teils eigene Versuche durch und stellten Ergebnisse anderer Autoren [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45] zu Schubversuchen zusammen. Diese Zusammenstellung lässt sich noch mit den Versuchen von Hartwig [19], Fiedler [46] und Franz

[47] ergänzen, sodass sich die Punktwolke in Abbildung 2.9 ergibt.

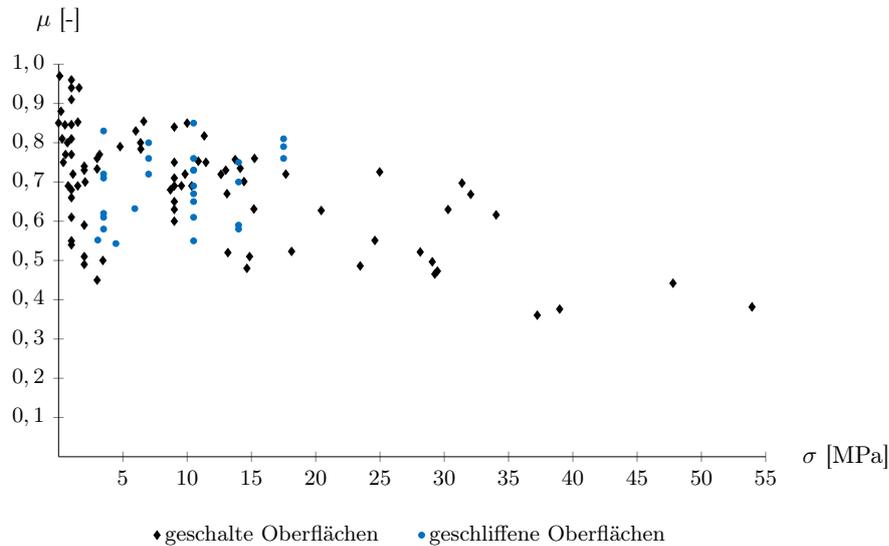


Abbildung 2.9: Reibbeiwerte  $\mu$  in Abhängigkeit vom Anpressdruck  $\sigma$  aus den Versuchen von [19, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]

Die Streuweite des Reibbeiwerts  $\mu$  ist nach Abbildung 2.9 besonders für kleine Normalspannungen groß. Eine Abhängigkeit von der Normalspannung ist tendenziell erkennbar, jedoch ist die Datenlage für höhere Normalspannungen wenig aussagekräftig. Hinzu kommt, dass die Kohäsion in den angegebenen Reibbeiwerten inkludiert ist und die Werte für geringe Normalspannungen stärker beeinflusst. Mohamad et al. [40] führten ihre Push-off-Versuche an kleinen Betonquadraten mit Normalspannungen kleiner 1,5 MPa durch. Im Vorfeld tasteten sie die kontaktierenden Oberflächen mit einem taktilen Rauheitsmessgerät ab, womit die Oberflächenrauigkeit bis auf ein Tausendstel Millimeter aufgenommen wurde. Aus 60 Einzelversuchen fanden sie so einen empirischen Zusammenhang zwischen dem Reibbeiwert  $\mu$  (ohne Kohäsion) und der mittleren Glättungstiefe  $R_{pm}$  im Fugenbereich gemäß Gleichung 2.28.

$$\mu = 0,8766 \cdot R_{pm}^{0,3978} \quad (2.28)$$

Für fünf ebene glatte Fugenoberflächen ermittelten Mohamad et al. [40] experimentell einen Reibbeiwert von 0,84. Über die mittlere Glättungstiefe prognostizierten sie gemäß Gleichung 2.28 Reibbeiwerte  $\mu_{calc}$  zwischen 0,78 und 0,98. Gemäß DIN EN 1992-1-1 [11] wird ein Reibbeiwert für sehr glatte, gegen Stahlschalung betonierete Flächen von 0,5 und für glatte abgezogene Flächen von 0,6 angegeben. Der Model Code 2010 [13] empfiehlt für glatte Oberflächen einen Reibbeiwert zwischen 0,5 und 0,7.

## 2.4 Grundlagen der Festigkeitslehre

### 2.4.1 Spannungsdefinitionen am Volumenelement

Das dritte Newton'sche Axiom besagt, dass jede Aktion eine gleich große Reaktion hervorruft. So stehen beispielsweise die äußeren Lasten eines Systems mit den Auflagerreaktionen im

Gleichgewicht. Auch die inneren Kräfte eines Balkens links und rechts einer gedachten Schnittfläche folgen diesem Axiom und stehen miteinander im Gleichgewicht. Allgemein stellt man sich einen beliebig belasteten Körper unterteilt in Volumenelemente vor, deren Beanspruchung durch die inneren Kräfte zwischen dem jeweils betrachteten Element und seinen Nachbarelementen ausgedrückt wird. Die Bezeichnung der in den Schnittflächen vorherrschenden Spannungen und ihre Vorzeichendefinition zeigt Abbildung 2.10 anhand eines einzelnen, herausgeschnittenen Volumenelements.

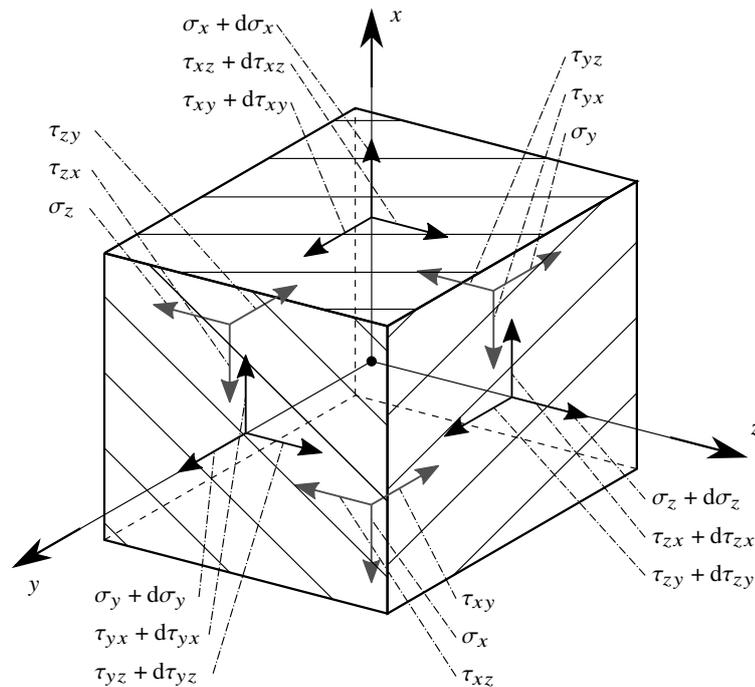


Abbildung 2.10: Spannungen am Volumenelement

Wie in Abbildung 2.10 dargestellt, sei das Volumenelement so ausgerichtet, dass seine Kanten jeweils parallel zu einer der Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  des rechtsdrehenden Koordinatensystems verlaufen. Die Kantenlängen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  eines solchen Volumenelements werden als infinitesimal klein vorausgesetzt. Die Schnittflächen, deren Normalen in Koordinatenrichtung verlaufen, werden als positive Schnittflächen (positives Schnittufer) bezeichnet, während die jeweils anderen die negativen Schnittflächen (negatives Schnittufer) darstellen. Eine in einer Schnittfläche wirkende Kraft kann über drei Kraftkomponenten beschrieben werden. Bezogen auf die Schnittfläche des unendlich kleinen Würfels werden die Kraftkomponenten zu Spannungskomponenten, welche auf Grund der Ausrichtung zwischen Volumenelement und Koordinatensystem auf folgende Art bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= \sigma_i \\ \sigma_{ij} &= \tau_{ij} \\ \sigma_{ik} &= \tau_{ik}\end{aligned}\tag{2.29}$$

Während der erste Index  $i$  die Koordinatenrichtung ( $x$ ,  $y$  oder  $z$ ) der Flächennormalen angibt,

kennzeichnet der zweite Index  $i, j$  bzw.  $k$  die Wirkungsrichtung der Spannung. Dabei hat sich etabliert, die Normalspannungen  $\sigma_{ii}$  vereinfacht als  $\sigma_i$  und die zwei Schubspannungen mit  $\tau_{ij}$  und  $\tau_{ik}$  zu bezeichnen. Die positiven Spannungen in der positiven Schnittfläche wirken in Richtung der Koordinatenachsen, die der zweite Index angibt.

#### 2.4.2 Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement

In der mathematischen Elastizitätstheorie werden die Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Volumenelement formuliert. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Verzerrungen des Elements infolge seiner Beanspruchung vernachlässigbar klein sind und somit die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Element aufgestellt werden können.

##### Kräftegleichgewicht

Spannungszuwächse, die zwischen allen negativen und positiven Schnittflächen eines Elements auftreten, werden entsprechend Abbildung 2.10 der positiven Schnittfläche zugeordnet. Für eine Gleichgewichtsbetrachtung, beispielsweise in  $x$ -Richtung, heben sich dabei die Spannungen selbst heraus, und es verbleiben nur die differentiellen Spannungsänderungen entsprechend Gleichung 2.30.

$$d\sigma_x \cdot dy \cdot dz + d\tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + d\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz = 0 \quad (2.30)$$

Dividiert man Gleichung 2.30 durch das Produkt  $dx \cdot dy \cdot dz$ , so erhält man unmittelbar die partielle Differentialgleichung für die Spannungszuwächse in  $x$ -Richtung gemäß Gleichung 2.31. Für die anderen beiden Richtungen ergeben sich die Gleichungen 2.32 und 2.33.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = 0 \quad (2.33)$$

##### Momentengleichgewicht

Zu den Gleichgewichtsbedingungen gehört neben dem Kräftegleichgewicht auch das Momentengleichgewicht, das um alle drei Koordinaten erfüllt sein muss. Wählt man als Drehpunkt den Koordinatenursprung, haben die Normalspannungen keinen Hebelarm, und es fließen nur die Schubspannungen in die Gleichgewichtsaussage ein.

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 &= \left[ \tau_{zy} + (\tau_{zy} + d\tau_{zy}) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} \\ &- \left[ \tau_{yz} + (\tau_{yz} + d\tau_{yz}) \right] \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Da die Spannungszuwächse im Vergleich zu den Schubspannungen selbst verhältnismäßig klein sind, können diese in den Momentengleichungen vernachlässigt werden. Somit liefern die drei Momentengleichungen die Gleichheit der Schubspannungen mit gleichen, aber in umgedrehter Reihenfolge stehenden Indizes.

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz}\end{aligned}\tag{2.35}$$

Die Bedeutung dieser Gleichgewichtsaussagen nach Gleichung 2.35 ist für das Verständnis der späteren Herleitungen von außerordentlicher Wichtigkeit. Zusammengefasst können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Die jeweils vier gleichen Schubspannungen  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  wirken in einer durch die Achsen  $i$  und  $j$  aufgespannten Ebene und bilden einen sogenannten «Schubspannungsring».
2. Schubspannungen in benachbarten Schnittflächen eines Rings laufen auf die gemeinsame Kante zu, wenn beide Schnittflächen positiv oder negativ sind. Andernfalls laufen sie von der Kante weg.
3. In einem Volumenelement können bis zu drei voneinander unabhängige und rechtwinklig zueinander stehende Schubspannungsringe verlaufen.
4. Ein Schubspannungsring muss aus Gleichgewichtsgründen immer vollständig sein. Kann beispielsweise eine der vier Schubspannungen aufgrund äußerer Randbedingungen nicht ausgebildet werden, so ist der gesamte Ring gleich null.

### 2.4.3 Geometrische Zusammenhänge am Volumenelement

Verformungen eines Volumenelements werden in zwei Kategorien unterschieden. Als Dehnungen  $\varepsilon$  werden jene Verformungen bezeichnet, bei denen sich die Kantenlängen des Volumenelements verändern, und die Winkel zwischen den Schnittflächen erhalten bleiben. Ändern sich hingegen die Winkel zwischen den Schnittflächen, und die Kantenlängen behalten ihre Ausgangslänge, so liegt eine Gleitung  $\gamma$  vor. Allgemein werden Dehnungen und Gleitungen zusammenfassend als Verzerrungen bezeichnet.

In der Elastizitätstheorie wird von einem unbeschränkt linear elastischen, isotropen Werkstoff ausgegangen, auch «Hooke'scher Werkstoff» genannt. Nach dem Hooke'schen Gesetz sind Spannungen und Dehnungen gemäß Gleichung 2.36 einander proportional.

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \varepsilon_i \cdot E \iff \varepsilon_i = \frac{1}{E} \cdot \sigma_i \\ \varepsilon_j &= \varepsilon_k = -\hat{\nu} \cdot \varepsilon_i = -\frac{\hat{\nu}}{E} \cdot \sigma_i\end{aligned}\tag{2.36}$$

Dabei steht  $E$  für den Elastizitätsmodul und  $\hat{\nu}$  für die Querdehnzahl des Werkstoffs. Die Querdehnzahl wird in der Literatur normalerweise durch den griechischen Buchstaben  $\mu$  oder  $\nu$  dargestellt. Während der Buchstabe  $\mu$  in dieser Arbeit bereits für den Reibbeiwert verwendet

wird, ist das griechische  $\nu$  kaum vom lateinischen  $\nu$  zu unterscheiden. Da das lateinische  $\nu$  nachfolgend als Verschiebung in  $y$ -Richtung verwendet wird, sei die Querdehnzahl hier als  $\hat{\nu}$  gekennzeichnet.

Durch eine Überlagerung von Beanspruchungen, die in unterschiedlichen Achsen wirkenden, erhält man die vollständigen Hooke'schen Beziehungen gemäß Gleichung 2.37.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_x - \hat{\nu} \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_y - \hat{\nu} \cdot (\sigma_z + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_z - \hat{\nu} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right]\end{aligned}\tag{2.37}$$

Liegt ein Schubspannungsring vor, so wird das rechtwinklige Volumenelement zu einem schiefwinkligen Parallelogramm verzerrt. Die resultierende Winkeländerung ist gemäß Gleichung 2.38 proportional zur Schubspannung.

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz}\end{aligned}\tag{2.38}$$

Für die geometrischen Zusammenhänge am Volumenelement sind nun sowohl die Dehnungen  $\varepsilon_i$  als auch die Gleitungen  $\gamma_i$  in Abhängigkeit von den Verschiebungen  $u$ ,  $v$  und  $w$  in Richtung der Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  zu betrachten. Hierbei seien die Verzerrungen als kleine Größen vorausgesetzt, sodass die geometrischen Zusammenhänge linearisiert und alle Produkte und Quadrate als vernachlässigbar klein angesehen werden können. Dehnt sich ein Volumenelement durch eine Normalspannung  $\sigma_x$  und wird gleichzeitig in Richtung  $x$  verschoben, so wird gemäß Abbildung 2.11 die positive Schnittfläche insgesamt um  $u + du$  verschoben. Die Dehnung ist demnach identisch mit dem Zuwachs der Verschiebung:

$$du = \varepsilon_x \cdot dx\tag{2.39}$$

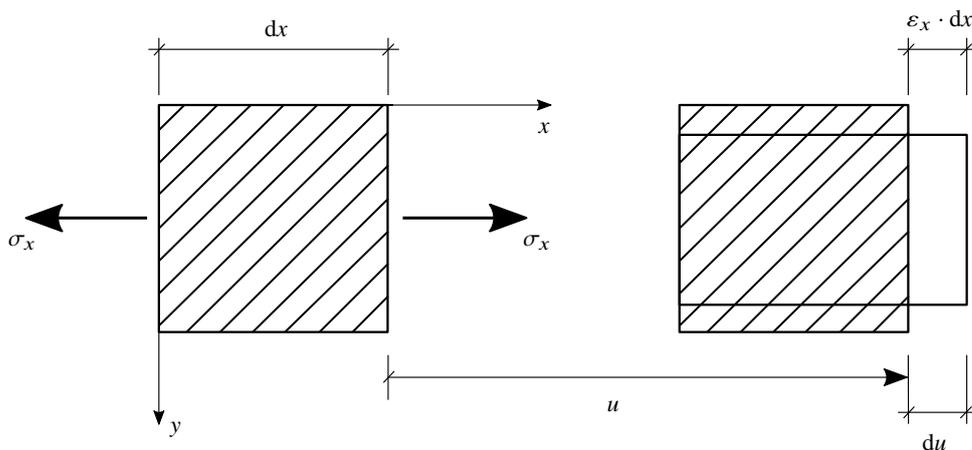


Abbildung 2.11: Zusammenhang zwischen Dehnung und Verschiebung nach [48]

Gemäß Gleichung 2.39 ergeben sich so die Dehnungen  $\varepsilon_i$  der drei Koordinatenrichtungen  $x, y, z$  über die partielle Ableitung entsprechend Gleichung 2.40.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Analog ergibt sich der Zusammenhang zwischen Gleitung und Verschiebung. Das Element in Abbildung 2.12 zeigt ein um  $u$  und  $v$  verschobenes Volumenelement, das infolge einer Schubbeanspruchung verzerrt ist. Die Gleitung  $\gamma_{xy}$  des Elements setzt sich aus den Anteilen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zusammen, welche wiederum die Verschiebungsänderung  $du$  entlang  $dy$  bzw.  $dv$  entlang  $dx$  darstellen. Für die Gleitungen der drei Schubspannungsringe erhält man entsprechend Gleichung 2.41.

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.41)$$

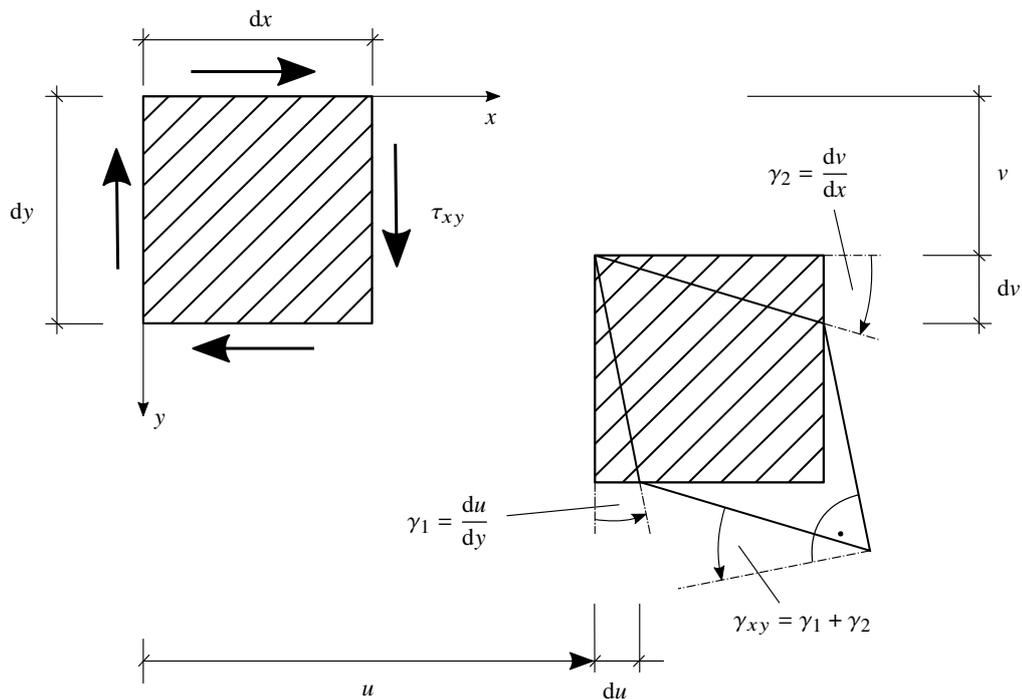


Abbildung 2.12: Zusammenhang zwischen Gleitung und Verschiebung nach [48]

## 2.5 Querkraft

### 2.5.1 Allgemeines zum Schubspannungsverlauf

In diesem Abschnitt werden einige grundsätzliche Aussagen über den Verlauf von Schubspannungen getroffen, die allgemein gültig sind und somit auch für Torsionsschubspannungen gelten. Dabei wird immer ein dünnwandiger Querschnitt vorausgesetzt. Vorlage der hier dargestellten Zusammenhänge ist das Buch «Schub und Torsion in geraden Stäben» von Francke und Friemann [48].

1. Schubspannungen wirken an allen Querschnittsrändern immer parallel zum Rand.

In Abschnitt 2.4.2 wurde anhand von Gleichgewichtsaussagen am Volumenelement aufgezeigt, dass im Raum drei unabhängige Schubspannungsringe vorliegen können. Jeder dieser Schubspannungsringe muss aufgrund der Gleichgewichtsaussagen vollständig sein. Da die Profiloberflächen eines Stabes spannungsfrei sind, kann nur am Querschnittsrand der Schubspannungsring ausgebildet werden, der keine Komponente in der freien Oberfläche aufweist, wie Abbildung 2.13 anhand von Randpunkt 1 zeigt. Somit können dort nur randparallele Schubspannungen auftreten.

Im Fall einer ausspringenden Ecke, Randpunkt 2, liegen zwei freie Oberflächen vor, was zu einem singulären Nullpunkt führt, in dem keine Schubspannungen vorliegen können. Randpunkt 3 befindet sich in einer einspringenden Ecke. Gemäß der genaueren mathematischen Elastizitätstheorie ergibt sich hier eine unendlich große Spannungsspitze (singulärer Unendlichkeitspunkt). Eine Ausrundung würde die unendlich große Spannungsspitze zwar

auf endliche Werte verringern, diese werden jedoch in der Technischen Elastizitätstheorie nicht erfasst.

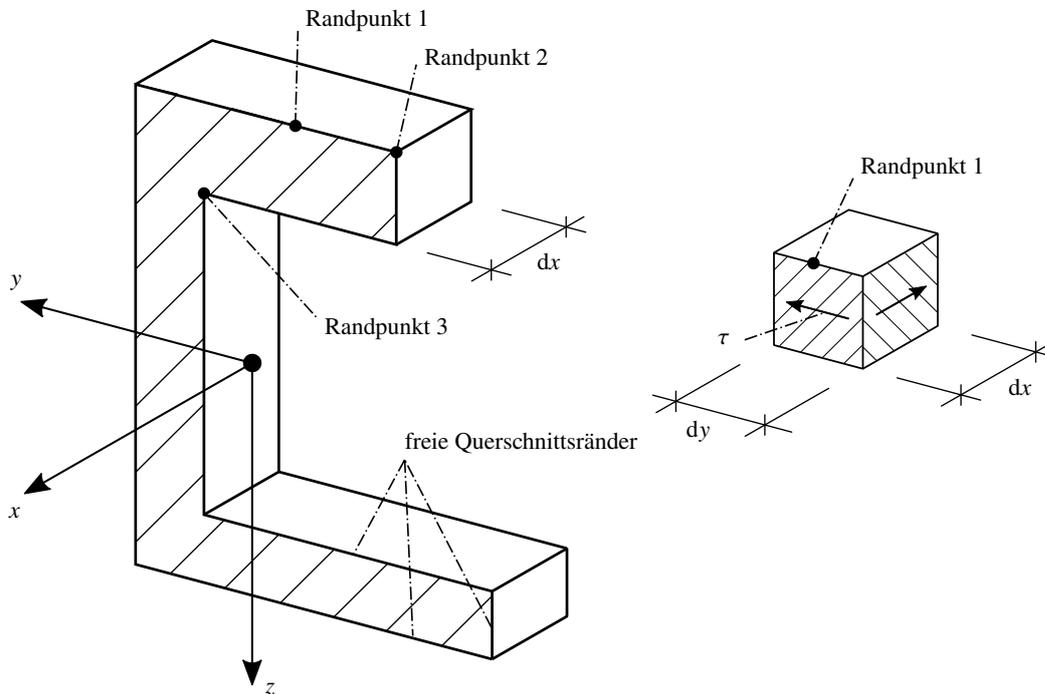


Abbildung 2.13: Schubspannungen in Rand- und Eckpunkten

2. Es werden ausschließlich Schubspannungen in Richtung der Profilmittellinie berücksichtigt.

Nach obiger Aussage müssen die Schubspannungen an den Querschnittsrändern randparallel verlaufen. Gemäß der mathematischen Elastizitätstheorie bauen sich über die Wanddicke zwar orthogonal zum Rand wirkende Schubspannungen auf, da diese an den Rändern aber gleich Null sind, ist ihre Größe auf der Profilmittellinie dünnwandiger Querschnitte vernachlässigbar klein. In der Technischen Elastizitätstheorie werden daher keine orthogonal zum Rand wirkenden Schubspannungen berücksichtigt. Somit verlaufen in der Technischen Elastizitätstheorie alle maßgebenden Schubspannungen parallel zur Profilmittellinie. Daher wird üblicherweise eine Laufvariable  $s$  entlang der Profilmittellinie definiert, auf die sich die Schubspannungen  $\tau_{xs}$  beziehen.

3. Querkraftschubspannungen sind konstant über die Wanddicke  $t$  verteilt.

Gemäß der mathematischen Elastizitätstheorie sind die randparallelen Schubspannungen eines dünnwandigen Rechtecks nahezu konstant über die Wanddicke  $t$  verteilt. Für die Technische Elastizitätstheorie wird dieser Schubspannungsverlauf auf alle dünnwandigen Querschnitte übertragen, da jeder dünnwandige Querschnitt als eine Zusammensetzung schmaler Rechtecke angesehen werden kann. Daher werden die Schubspannungen in der Regel je Längeneinheit  $ds = 1$  zu einer resultierenden Kraft, dem Schubfluss  $T(s)$ , zusammengefasst. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$T(s) = \tau_{xs} \cdot t(s) \Leftrightarrow \tau_{xs}(s) = \frac{T(s)}{t(s)} \quad (2.42)$$

Da der über den gesamten Querschnitt verteilte Schubfluss  $T(s)$  das direkte Ergebnis aller Berechnungsverfahren der Technischen Elastizitätstheorie für den Querkraftschub darstellt und sich einzig auf die Profilmittellinie bezieht, ist es ausreichend, anstelle des Querschnitts, lediglich das Netzwerk der Profilmittellinien  $s$  mit dem Systemparameter  $t(s)$  zu verwenden. In der Literatur [48] spricht man allgemein vom Profilmittellinienmodell.

4. An freien Querschnittsenden sind keine Schubspannungen vorhanden.

An freien Querschnittsenden kann, aufgrund der spannungsfreien Oberfläche, kein Schubspannungsring in  $xs$ -Ebene vorliegen. Die Schubspannungen  $\tau_{xs}$  und somit auch der Schubfluss  $T(s)$  müssen folglich zu Null werden.

### 2.5.2 Ableitung der Dübelformel

In der Technischen Elastizitätstheorie werden die Querkraftschubspannungen mit Hilfe der Dübelformel ermittelt. Die Bezeichnung «Dübelformel» stammt aus dem Holzbau, wo die Längsverdübelung von Holzbalken mit dieser Formel erfolgt. Die Dübelformel ermittelt die Querkraftschubspannungen über Gleichgewichtsaussagen und erfordert kein Elastizitätsgesetz. Gleitungen  $\gamma$  infolge einer Schubbeanspruchung werden vernachlässigt.

Zur Veranschaulichung der Herleitung der Dübelformel dient Abbildung 2.14. Dargestellt ist ein Stabelement der Länge  $dx$ , von dem ein Teil in Längsrichtung abgeschnitten wurde. Beginnend am freien Querschnittsende läuft die Koordinate  $+s$  entlang der Profilmittellinie den Querschnitt ab. Der Schubfluss  $T$  ist positiv, wenn seine Fließrichtung mit der positiven Richtung der  $s$ -Koordinate übereinstimmt.

Die Normalspannungen  $\sigma_x$ , die infolge Normalkraft und Biegung im Querschnitt wirken, werden als bekannt vorausgesetzt. Für die Teilfläche  $A_1$  können die Normalspannungen zu einer Teilresultierenden  $R_x$ , entsprechend Gleichung 2.43 zusammengefasst werden.

$$R_x = \int_{s_a}^{s_1} \sigma_x(x, s) \cdot t(s) \cdot ds = \int_{A_1} \sigma_x(x, s) \cdot dA \quad (2.43)$$

$$\text{mit: } \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{\tilde{y}}}{I_{\tilde{y}}} \cdot \tilde{z} - \frac{M_{\tilde{z}}}{I_{\tilde{z}}} \cdot \tilde{y} \quad (2.44)$$

Darin sind:

$t$  Querschnittsdicke,

$A$  Querschnittsfläche,

$I_{\tilde{y}}$  und  $I_{\tilde{z}}$  auf die Hauptachsen  $\tilde{y}$  und  $\tilde{z}$  bezogene Flächenträgheitsmomente



Die Querkraftschubspannungen  $\tau_{xs}(x, s)$  können nun mit Gleichung 2.42 über den Schubfluss  $T(x, s)$  berechnet werden.

### 2.5.3 Einheitsschubflüsse

Mit Hilfe der Dübelformel aus Abschnitt 2.5.2 kann der Schubfluss  $T(s)$  an jeder Stelle  $s$  der Profilmittellinie ermittelt werden. Wie es Gleichung 2.47 zu entnehmen ist, enthält die Dübelformel last- und querschnittsabhängige Größen. Da diese nicht miteinander gekoppelt sind, ist der qualitative Verlauf des Schubflusses allein von der Geometrie des Querschnitts abhängig. Die Querkräfte  $V_y$  und  $V_z$  bestimmen lediglich die Absolutwerte des Schubflusses. Es bietet sich daher an, die Vorfaktoren von  $S_{\bar{y}}$  und  $S_{\bar{z}}$  auf eins zu setzen und somit die Schubflüsse, die dann mit den statischen Momenten identisch sind, zu Einheitsschubflüssen zu machen.

$$T_{\bar{y}}(s) \equiv S_{\bar{z}}(s) = T(x, s) \quad \text{mit } V_{\bar{y}} = I_{\bar{z}} \text{ und } V_{\bar{z}} = 0 \quad (2.48)$$

$$T_{\bar{z}}(s) \equiv -S_{\bar{y}}(s) = T(x, s) \quad \text{mit } V_{\bar{z}} = I_{\bar{y}} \text{ und } V_{\bar{y}} = 0$$

Die Querkräfte  $V$  und die Flächenträgheitsmomente  $I$  werden dabei nur dem Betrag nach gleichgesetzt. Die Einheitsschubflüsse haben somit die Einheit  $\text{m}^3$ . Den wahren Schubfluss  $T$  mit der Einheit  $\text{kN/m}$  erhält man erst durch Multiplikation mit den Vorfaktoren  $V_{\bar{z}}/I_{\bar{y}}$  bzw.  $V_{\bar{y}}/I_{\bar{z}}$ .

Ein Beispiel soll die Berechnung des Schubflusses verdeutlichen. Gegeben ist ein geschlitztes Quadratrohr gemäß Abbildung 2.15. Entsprechend Gleichung 2.48 entspricht der Schubfluss  $T_z$  dem negativen statischen Moment  $-S_y$ . Da  $S_y$  gleich dem Integral der  $z$ -Fläche ist, bietet es sich an, zunächst die  $z$ -Fläche zu zeichnen, wie in Abbildung 2.15 links dargestellt.

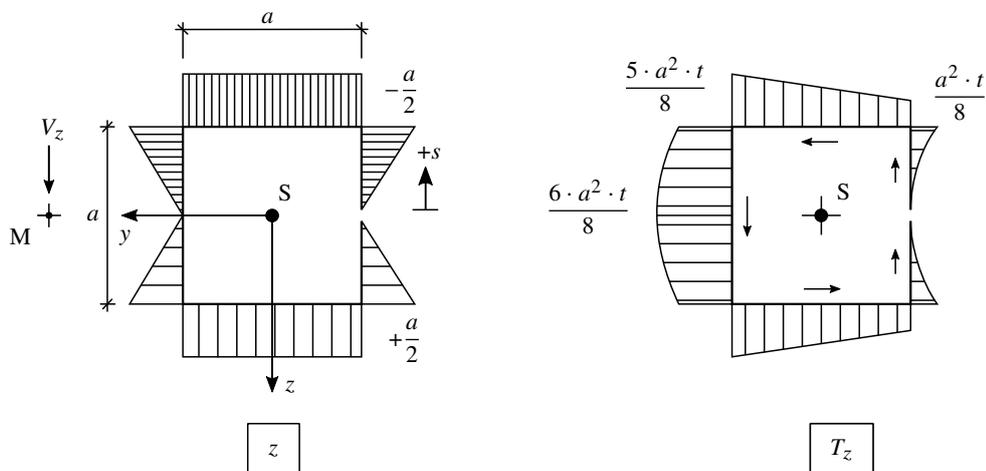


Abbildung 2.15: Koordinatenfläche  $z$  und Einheitsschubfluss  $T_z$  eines geschlitzten Quadratrohrs nach [48]

Der Schubfluss kann nun leicht über die Integration der  $z$ -Fläche erfolgen, wie in Abbildung 2.15 rechts dargestellt. Folgende Kontrollen eignen sich, den Schubfluss zu überprüfen:

- An allen freien Querschnittsenden muss der Schubfluss den Wert null annehmen.
- Die gesamtresultierende Kraft des Schubflusses muss in Ihrer Größe und Wirkungsrichtung mit der einwirkenden Querkraft übereinstimmen.

- An allen Querschnittsenden, an denen die  $y$ - oder  $z$ -Flächen positiv sind, laufen die zugehörigen Schubflüsse auf das freie Querschnittsende zu.

Bezogen auf den Schwerpunkt entsteht infolge des Schubfluss  $T_z$  aus Abbildung 2.15 rechts ein Torsionsmoment. Würde die Querkraft  $V_z$  nicht im Schubmittelpunkt  $M$ , sondern im Schwerpunkt  $S$  angreifen, würde der Stab noch eine zusätzlich Torsionsbeanspruchung erfahren. Was unter Torsion zu verstehen ist, und was die Theorie der Wölbkrafttorsion besagt, kann Abschnitt 2.6 entnommen werden.

## 2.6 Torsion

### 2.6.1 Grundlegende Zusammenhänge

Eine Torsionsbeanspruchung liegt vor, wenn ein Träger eine Verdrehung  $\vartheta(x)$  um seine Längsachse erfährt, deren Größe sich entlang der Längskoordinate  $x$  ändert. Der Träger verdrillt. Die Kreisbahn, auf der sich jeder Querschnittspunkt infolge der Verdrehung um den Pol  $D$  verschiebt, kann bei sehr kleinen Winkeln  $\vartheta$  linearisiert werden. Die Verschiebungsgrößen in Richtung der Koordinatenachsen ergeben sich somit gemäß Abbildung 2.16 zu:

$$-v = r \cdot \vartheta(x) \cdot \sin \phi = (z - z_D) \cdot \vartheta(x) \quad (2.49)$$

$$w = r \cdot \vartheta(x) \cdot \cos \phi = (y - y_D) \cdot \vartheta(x) \quad (2.50)$$

$$u = u(x, y, z) \quad (2.51)$$

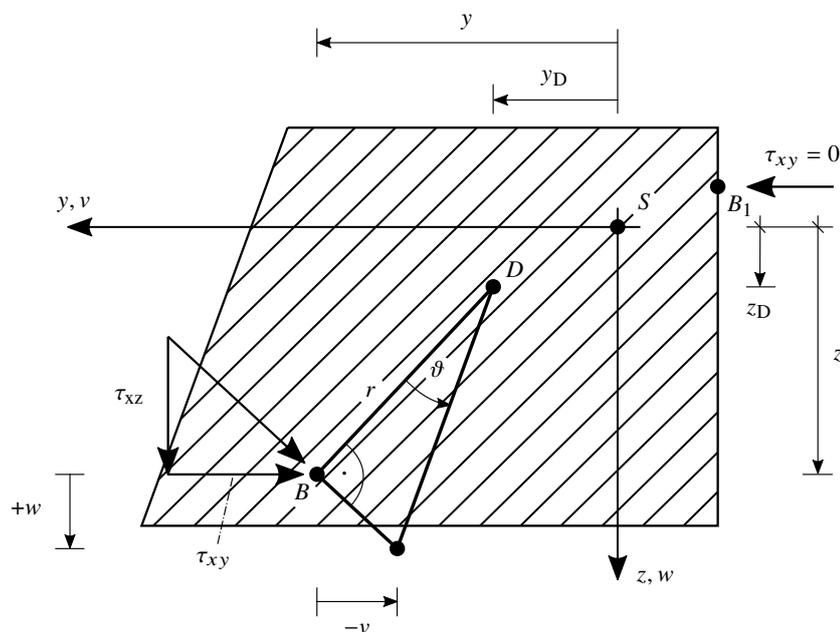


Abbildung 2.16: Verschiebungen  $v$  und  $w$  eines Querschnittspunktes  $B$  infolge einer Verdrehung  $\vartheta$  nach [48]

Dass eine Axialverschiebung  $u$  infolge einer Verdrehung auftritt, ist über die Anschauung nur schwierig einzusehen. Daher ist diese in Gleichung 2.51 zunächst nur in allgemeiner Form dargestellt. Dass aber dennoch Verschiebungen  $u$  infolge Verdrehung  $\vartheta$  bzw. Verdrillung  $\vartheta'$  entstehen, soll nachfolgend anhand eines Beispiels von Francke und Friemann [48] vorgestellt werden. Dieser klassische Fall des geschlossenen und offenen Kreisrohres, gemäß Abbildung 2.17, kann leicht mit Hilfe eines gerollten Blatts Papier nachvollzogen werden. Es zeigt anschaulich, dass sich eine Axialverschiebung infolge Torsion einstellt, da die freien Enden des offenen Kreisrohrs in Axialrichtung auseinander driften. Der Querschnitt verwölbt. Zudem wird deutlich, dass das geschlossene Rohr eine sehr viel höhere Drillsteifigkeit als ein geschlitztes Rohr aufweist.

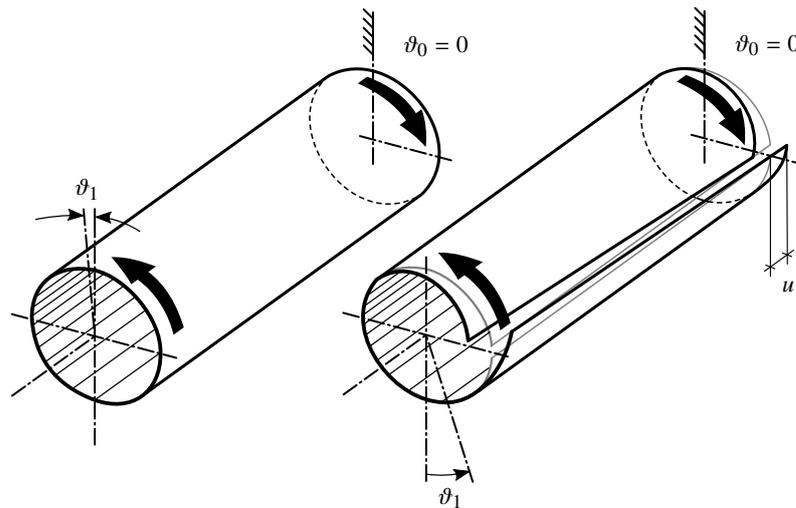


Abbildung 2.17: Gegenüberstellung der Torsionsverformungen eines drillsteifen geschlossenen Rohres und eines drillweichen geschlitzten Rohres gleicher Abmessungen nach [48]

Um allgemein nachzuweisen, dass eine Verdrillung mit einer Verwölbung verbunden ist, wird ein Stabelement der Länge  $dx$  eines allgemeinen Vollquerschnitts (Abbildung 2.16) herausgegriffen. Die Verschiebungen  $v$  und  $w$  eines beliebigen Punktes  $B$  ändern sich vom negativen zum positiven Schnittufer entsprechend Gleichung 2.52 und Gleichung 2.53 um:

$$\frac{dv}{dx} = -(z - z_D) \cdot \vartheta'(x) \quad (2.52)$$

$$\frac{dw}{dx} = (y - y_D) \cdot \vartheta'(x) \quad (2.53)$$

Gemäß Gleichung 2.41 stellen diese Verschiebungsänderungen Gleitungen  $\gamma_{xy}$  und  $\gamma_{xz}$  dar, die über das Hook'sche Gesetz (Gleichung 2.38) Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  im Punkt  $B$  zur Folge haben. Die Resultierende dieser Schubspannungskomponenten steht, wie in Abbildung 2.16 dargestellt, rechtwinklig auf der Verbindungslinie  $\overline{DB}$ . Betrachtet man hingegen einen Punkt  $B_1$  am Querschnittsrand, so kann laut Aussage 4 aus Abschnitt 2.4.2 nur ein randparalleler Schubspannungsring vorhanden sein. Die Schubspannungsringe orthogonal zum Querschnittsrand müssen null sein, da die Oberfläche des Stabes spannungsfrei ist. Für den Punkt  $B_1$  in

Abbildung 2.16 bedeutet dies, dass die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{yz}$  gleich null sind, und sich nur ein Schubspannungsring  $\tau_{xz}$  einstellen kann. Folglich liegt auch keine Gleitung in  $xy$ -Ebene vor:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.54)$$

Aus Gleichung 2.54 ergibt sich, dass der Betrag des ersten Teilwinkels  $\gamma_1$  gleich dem des zweiten Teilwinkel  $\gamma_2$  sein muss:

$$\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\gamma_2 = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.55)$$

Das Volumenelement  $B_1$  dreht sich also aus der  $x, y$ -Ebene heraus – der Querschnitt verwölbt. Die Verwölbung  $du$  ist für jeden Querschnittspunkt unterschiedlich und wird in den Abschnitten 2.6.2 und 2.6.3 näher behandelt.

Für einen allgemeinen Querschnittspunkt  $B$  erhält man über die geometrischen Zusammenhänge aus den Gleichungen 2.40 und 2.41, den Hooke'schen Gleichungen 2.37 und 2.38 und der vereinfachenden Annahme einer Querdehnzahl von  $\hat{\nu} = 0$  folgende Spannungen:

$$\sigma_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.56)$$

$$\sigma_y = E \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.57)$$

$$\sigma_z = E \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.58)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} - (z - z_D) \cdot \vartheta'(x) \right) \quad (2.59)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = G \cdot (-\vartheta + \vartheta) = 0 \quad (2.60)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial z} + (y - y_D) \cdot \vartheta'(x) \right) \quad (2.61)$$

Damit lassen sich die drei Gleichgewichtsaussagen der Gleichungen 2.31 bis 2.33 in folgende Form umschreiben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} - (z - z_D) \cdot \vartheta''(x) \right) = 0 \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = G \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial z} + (y - y_D) \cdot \vartheta''(x) \right) = 0 \quad (2.64)$$

Die Schubspannungen aus Gleichung 2.62 lassen sich in zwei Anteile aufspalten, die jeweils für sich zu null werden müssen:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy,II}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,II}}{\partial z}} + \boxed{\frac{\partial \tau_{xy,I}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,I}}{\partial z}} = 0 \quad (2.65)$$

Die mit dem Index I versehenen Schubspannungen beschreiben einen reinen Schubspannungszustand in  $yz$ -Ebene. Sie sind unabhängig von etwaig wirkenden Normalspannungen und werden als St. Venant'sche oder primäre Schubspannungen bezeichnet. Mit dem Index II sind Spannungen versehen, die in Abhängigkeit mit einer Verwölbung stehen. Hier spricht man allgemein von Wölbnormal- und Wölbschubspannungen bzw. sekundären Schubspannungen.

Aus Gleichung 2.65 geht klar hervor, dass im Allgemeinen eine Überlagerung primärer und sekundärer Schubspannungen erforderlich ist. Die St. Venant'sche Torsionstheorie, die einen reinen primären Schubspannungszustand zu Grunde legt, stellt somit einen Sonderfall innerhalb der übergeordneten Theorie der Wölbkrafttorsion (TdWö) dar.

## 2.6.2 St. Venant'sche Torsion

Die nachfolgende Herleitung der St. Venant'schen Torsionstheorie gliedert sich im Wesentlichen nach den Ausführungen von Francke und Friemann [48], deren Buch für eine detailliertere Darstellung zu empfehlen ist. Es wird hier zunächst ausführlich auf die Herleitung der Theorie für einen allgemeinen Vollquerschnitt eingegangen, die im Anschluss in vereinfachter Form auf dünnwandige, offene Querschnitte übertragen wird. Abschließend werden noch zusätzliche Besonderheiten dünnwandiger, geschlossener Querschnitte thematisiert.

### Vollquerschnitte

Die St. Venant'sche Torsionstheorie wurde Mitte des 19. Jahrhunderts von Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, einem französischen Universalgelehrten, entwickelt. Sie unterstellt einem torsionsbeanspruchten Träger einen reinen Schubspannungszustand, wodurch der jeweils erste Term der Gleichgewichtsbedingungen 2.62 bis 2.64 entfällt:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -G (z - z_D) \cdot \vartheta''(x) = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = G (y - y_D) \cdot \vartheta''(x) = 0 \quad (2.68)$$

Gleichung 2.66 stellt eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für die Verwölbung  $u(y, z)$  dar. Dies zeigt, dass in der St. Venant'schen Torsionstheorie durchaus Verwölbungen auftreten, welche sich jedoch frei einstellen können, was der Grund dafür ist, dass keine Normalspannungen entstehen, und die Theorie ihre Gültigkeit bewahrt. Eine weitere Voraussetzung der St. Venant'schen Torsion ergibt sich aus den Gleichgewichtsaussagen 2.67 und 2.68. Diese können nur erfüllt sein, wenn die Verdrillung  $\vartheta'$  konstant und somit die zweite Ableitung der Verdrehung  $\vartheta''$  gleich null ist. Auch diese Aussage ist im Grunde daran gekoppelt, dass sich Verwölbungen unbehindert einstellen können. Beide gelten jedoch nicht für wölbfreie Querschnitte, da sie ohnehin keine Verwölbung erfahren. Zu den wölbfreien Querschnitten gehören:

- rotationssymmetrische Querschnitte (Vollkreis, Kreisrohr)
- dünnwandige Querschnitte, die aus mehreren, sich in einem Punkt schneidenden, geraden Rechtecken bestehen (L-, T-Profile)
- regelmäßige, polygonale Hohlquerschnitte mit konstanter Wanddicke (Quadratrohr)

Für die Bestimmung der primären Schubspannungen bietet es sich an, die auf den Querschnitt bezogenen Anteile aus Gleichung 2.67 und Gleichung 2.68 in einer Spannungsfunktion  $\psi(y, z)$  zu vereinen.

$$\tau_{xs,I} = G \cdot \vartheta'(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (2.69)$$

$\psi(y, z)$  stellt also eine reine Querschnittsfunktion dar, welche abgeleitet nach  $n$  und multipliziert mit den last- und werkstoffabhängigen Faktoren  $G$  und  $\vartheta'(x)$ , die Schubspannung in Richtung  $s$  liefert, wie in Abbildung 2.18 dargestellt.

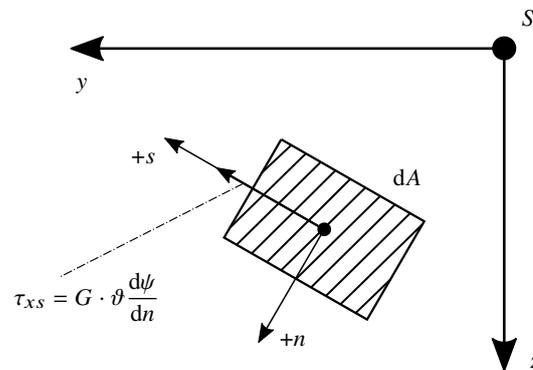


Abbildung 2.18: Definition der Schubspannungsfunktion  $\psi$  nach [48]

Die Richtungskoordinate  $s$  bildet mit der orthogonal dazu ausgerichteten Achse  $n$  und der Stabachse  $x$  ein Rechtskoordinatensystem. Die Schubspannungen in Richtung der ursprünglichen Koordinatenachsen  $y$  und  $z$  berechnen sich zu:

$$\tau_{xy,I} = G \cdot \vartheta'(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.70)$$

$$\tau_{xz,I} = G \cdot \vartheta'(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.71)$$

Die Schubspannungen aus den Gleichungen 2.70 und 2.71, bezogen auf den Drehpunkt  $D$ , müssen mit dem primären Torsionsmoment  $M_{T,I}$  im Gleichgewicht stehen. Der Ausdruck für  $M_{T,I}$  teilt sich dabei in zwei Faktoren gemäß Gleichung 2.72.

$$M_{T,I} = -G \cdot \vartheta' \cdot \int_A \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot (y - y_D) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot (z - z_D) \right] dA \quad (2.72)$$

Während das Produkt  $G \cdot \vartheta'$  wieder eine last- und werkstoffabhängige Größe darstellt, beschreibt das Integral in Gleichung 2.72 eine reine Querschnittsgröße, die den St. Venant'schen Torsionswiderstand  $I_T$  beschreibt. Durch partielle Integration und Berücksichtigung von Randbedingungen der Spannungsfunktion  $\psi_{\text{Rand}}$  wird der Torsionswiderstand  $I_T$  unabhängig vom Drehpunkt  $D$  [48]. Der St. Venant'sche Torsionswiderstand  $I_T$  ergibt sich so zu:

$$I_T = 2 \cdot \int_y \int_z \psi(y, z) \cdot dz \cdot dy \quad (2.73)$$

Damit verkürzt sich Gleichung 2.72 zur allgemein bekannten elastostatischen Grundgleichung der St. Venant'schen Torsion:

$$M_{T,I} = G \cdot I_T \cdot \vartheta' \quad (2.74)$$

Die zur Lösung eines St. Venant'schen Torsionsproblems benötigten Größen lassen sich nun in zwei Kategorien einteilen. Da wären zum einen die lastunabhängigen Parameter  $\psi$  und  $I_T$ , die reine Querschnittsgrößen darstellen, und zum anderen die lastabhängige Verdrehung  $\vartheta$  sowie die Spannungen  $\tau_I$  infolge  $M_{T,I}$ . In der Literatur wird gemäß Francke und Friemann [48] vordergründig die Berechnung der Spannungsfunktion  $\psi$  und des Torsionswiderstands  $I_T$  als eigentliche Lösung der St. Venant'schen Torsion angesehen. Da dies reine Querschnittswerte sind, können sie für bestimmte Profile in tabellarischer Form dargestellt werden, siehe Tabelle 2.1.

Wie oben dargestellt fällt der Drehpunkt aus allen benötigten Größen heraus, wodurch sich theoretisch jede Drehachse unter St. Venant'scher Torsion einstellen kann. Durch die Verwölbung, die sich nach der St. Venant'schen Torsionstheorie frei einstellen muss, wird jedoch eine zusätzliche Formänderungsenergie in das System eingebracht, deren Größe durch die Lage der Drehachse beeinflusst wird. So wird sich die Drehachse einstellen, bei der die Formänderungsenergie minimal wird. Diese spezielle Drehachse wird als Drillruheachse bezeichnet und ist identisch mit der Schubmittelpunktachse. Stellt sich beispielsweise aus konstruktiven Gründen eine andere Drehachse ein, so hat dies Auswirkungen auf die Verwölbung, beeinflusst aber nicht die St. Venant'sche Torsion.

Berechnet werden kann die Verwölbung über die Gleichgewichtsbedingungen der Gleichungen 2.63 und 2.64. Über die Gleichung 2.70 bzw. Gleichung 2.71 kann so ein direkter Zusammenhang mit der Spannungsfunktion  $\psi$  hergeleitet werden.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \vartheta'(x) \cdot \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} + (z - z_D) \right] \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\vartheta'(x) \cdot \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + (y - y_D) \right] \quad (2.76)$$

Den Klammerausdruck der beiden Gleichungen 2.75 und 2.76 fasst man zur sogenannten «Einheitsverwölbung»  $\omega^D$  zusammen:

$$u(x, y, z) = \vartheta' \cdot \omega^D(y, z) \quad (2.77)$$

Tabelle 2.1: Spannungsfunktion  $\psi$ , Torsionswiderstand  $I_T$  und Schubspannung  $\tau_{xz,I}$  ausgewählter Querschnitte nach [48]

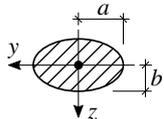
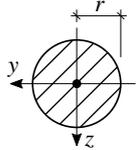
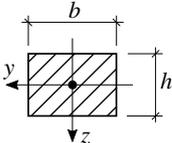
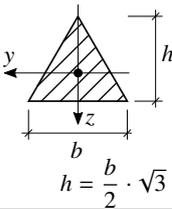
Querschnitt	Spannungsfunktion $\psi$	Torsionswiderstand $I_T$	Schubspannung $\tau_{xz,I}$
	$\frac{-a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left[ \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right]$	$\frac{a^3 \cdot b^3 \cdot \pi}{a^2 + b^2}$	$\frac{M_T}{a^3 \cdot b \cdot \pi} \cdot 2 \cdot y$
	$\frac{1}{2} \cdot [r^2 - y^2 - z^2]$	$\frac{1}{2} \cdot r^4 \cdot \pi$	$\frac{M_T}{r^4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot y$
	$\frac{1}{4} \cdot b^2 - y^2 + \phi(y, z)$	$\frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot h \cdot n$	$\frac{M_T}{I_T} \cdot \left[ 2 \cdot y - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$
	$\frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \left[ -\frac{z^3}{h^3} - \frac{y^2}{h^2} - \frac{z^2}{h^2} + 3 \cdot \frac{y^2 \cdot z}{h^3} + \frac{4}{27} \right]$	$\frac{1}{80} \cdot b^4 \cdot \sqrt{3}$	$-\frac{M_T}{b^5} \cdot 160 \cdot \left[ y \cdot z - \frac{h \cdot y}{3} \right]$
mit			
$\phi(y, z) = 8 \cdot b^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{\alpha_i^3 \cdot \cosh\left(\alpha_i \cdot \frac{h}{2 \cdot b}\right)} \cdot \cos\left(\alpha_i \cdot \frac{y}{b}\right) \cdot \cosh\left(\alpha_i \cdot \frac{z}{b}\right)$			
$\alpha_i = (2 \cdot i + 1) \cdot \pi$			
$n \text{ über Gleichung 2.73 oder angenähert mit Tabelle 2.2}$			

Tabelle 2.2: Hilfwerte  $n$ 

$h/b$	1	1,5	2	3	4	5	6	8	10	$\infty$
$n$	0,422	0,587	0,686	0,790	0,842	0,874	0,895	0,921	0,937	1

Die Einheitsverwölbung ist ebenso wie die Spannungsfunktion eine reine Querschnittsgröße und beschreibt die relative Größe der Wölbfläche für eine vorgegebene Verwindung  $\vartheta'(x) = 1$ . Der hochgestellte Index  $D$  gibt an, dass sich die Verwölbung auf einen allgemeinen Drehpunkt  $D$

bezieht. Warum die Einheitsverwölbung mit einem hochgestellten Index und nicht, wie beispielsweise der Einheitsschubfluss, durch einen tiefgestellten Index versehen wird, ist nicht bekannt. Da in der Literatur [48, 49, 50, 51] diese Schreibweise gebräuchlich ist, wird sie auch hier verwendet.

Für einen allgemeinen Rechteckquerschnitt, wie in Tabelle 2.1, berechnet sich die Einheitsverwölbung  $\omega^D$  zu:

$$\omega^D(y, z) = y \cdot z + 8 \cdot b^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{\alpha_i^3 \cdot \cosh\left(\alpha_i \cdot \frac{h}{2 \cdot b}\right)} \cdot \sin\left(\alpha_i \cdot \frac{y}{b}\right) \cdot \sinh\left(\alpha_i \cdot \frac{z}{b}\right) + y_D \cdot z - z_D \cdot y \quad (2.78)$$

### Dünnwandige, offene Querschnitte

Im Rahmen dieser Arbeit werden vordergründig dünnwandige Querschnitte betrachtet. Als dünnwandig gelten Querschnitte, deren Wanddicken  $t_i$  klein gegenüber anderen Querschnittsabmessungen sind. Für einen einfachen Rechteckquerschnitt, bei dem die Breite  $b$  als Wanddicke  $t$  aufgefasst wird, muss demnach  $t \ll h$  sein. Unabhängig vom wahren Verhältniss  $t/h$  wird ein als dünnwandig betrachteter Querschnitt stets auf seine Profilmittellinie reduziert und ein Verhältnis  $t/h = 0$  angenommen. Durch diese Vereinfachung wird die in Tabelle 2.1 angegebene Hilfsfunktion  $\phi$  zu null, sodass sich in einem Rechteck der bekannte St. Venant'sche Schubspannungsfluss offener Profile gemäß Abbildung 2.19 einstellt.

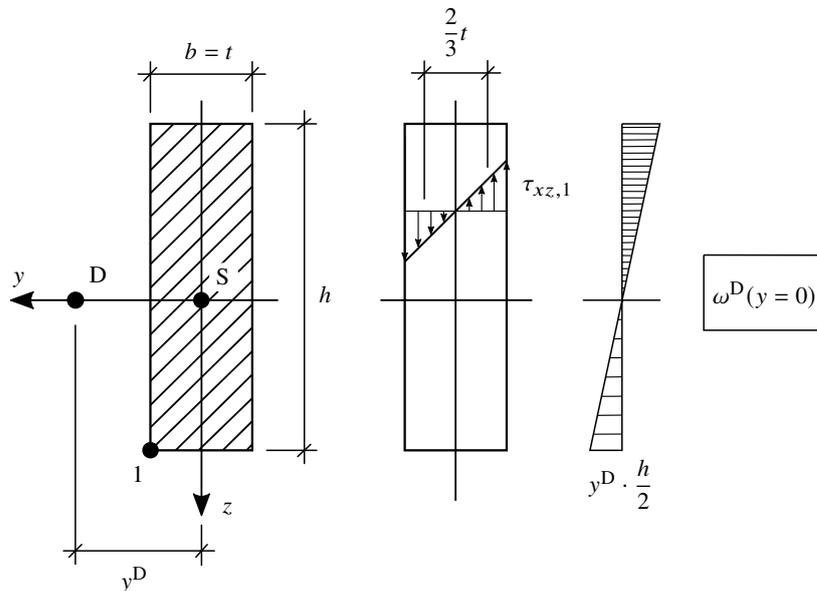


Abbildung 2.19: Verlauf der Schubspannungen und Verwölbungen in einem schmalen Rechteckquerschnitt nach [48]

Die zur Lösung des St. Venant'schen Torsionsproblems benötigten Größen ergeben sich für ein dünnwandiges Rechteck zu:

$$\psi = \frac{1}{4} \cdot t^2 - y^2 \quad (2.79)$$

$$I_T = \frac{1}{3} \cdot h \cdot t^3 \quad (2.80)$$

$$\tau_{xy,I} = 0 \quad (2.81)$$

$$\tau_{xz,I} = \frac{M_T}{I_T} \cdot 2 \cdot y \quad (2.82)$$

Aufgrund des angenommenen Verhältnisses  $t/h = 0$  sind, gemäß den Gleichungen 2.81 und 2.82, Schubspannungen rechtwinklig zur Profilmittellinie nicht vorhanden, während Schubspannungen entlang der Profilmittellinie linear über die Wanddicke  $t$  verteilt sind. Der Maximalwert von  $\tau_{xz,I}$  tritt jeweils links und rechts an den Profilrändern auf, sodass die Profilmittellinie spannungsfrei ist. Da das wahre Verhältnis von  $t/h$  jedoch nicht dem Grenzwert von null entsprechen kann, führt diese Näherungslösung zu folgenden zwei Widersprüchen:

- Es ergeben sich Schubspannungen  $\tau_{xz,I}$  an den freien Enden  $z = \pm h/2$  des Querschnitts, obwohl die Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement dort keine Schubspannungen  $\tau_{xz}$  erlauben, siehe Abschnitt 2.4.2 Momentengleichgewicht Aussage 4.
- Integriert man die Schubspannungen  $\tau_{xz,I}$  auf, entsprechen diese nur dem halben Torsionsmoment  $M_{T,I}$ .

Beide Widersprüche gründen auf der Vereinfachung  $t/h = 0$  und lassen sich durch die genaue Reihenlösung mit dem wahren Verhältnis  $t/h$  beheben. Bei der genauen Lösung werden, wie in Abbildung 2.20 dargestellt, die Schubspannungen  $\tau_{xz,I}$  an den freien Enden zu null. In Dickenrichtung stellen sich ebenfalls Schubspannungen  $\tau_{xy,I}$  ein, die an den freien Enden auf der Profilmittellinie eine vergleichbare Größenordnung wie  $\tau_{xz,I}$  aufweisen, aber mit zunehmendem Abstand von den freien Enden schnell zu null werden. Eine Integration dieser Schubspannungen ergibt dann exakt das Torsionsmoment  $M_{T,I}$ , da die Schubspannungen an den freien Enden über einen hohen Hebelarm verfügen. Damit ist zu erkennen, dass die Näherungslösung für alle praktischen Belange ausreichend genau ist, und die genaue Lösung nicht den rechnerischen Mehraufwand rechtfertigt.

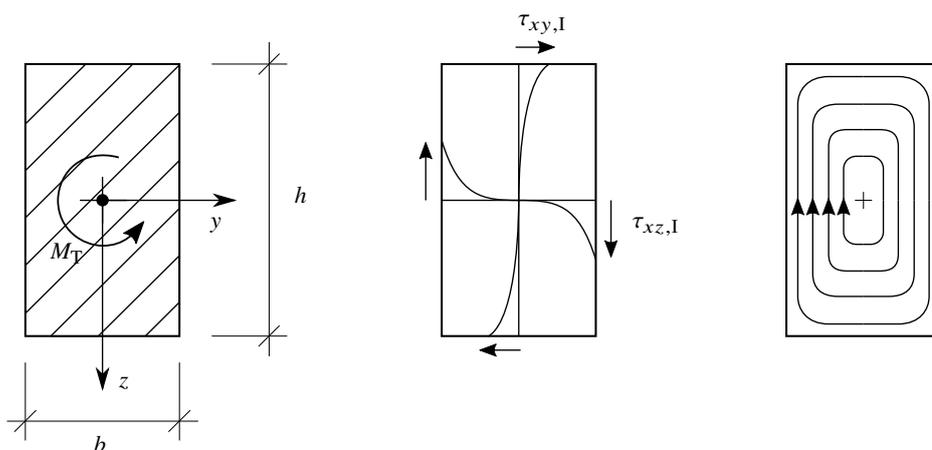


Abbildung 2.20: Qualitativer Verlauf primärer Torsionsschubspannungen in einem Rechteckquerschnitt nach [48]

In der St. Venant'schen Torsionstheorie, wie auch in der übergeordneten Theorie der Wölbkraft-torsion, werden dünnwandige Querschnitte als Aneinanderreihung schmaler Rechtecke mit den Wanddicken  $t_i$  aufgefasst. Unter der Voraussetzung, dass die Querschnittsform erhalten bleibt, erfährt jedes dieser schmalen Rechtecke die gleiche Verwindung  $\vartheta'$  und nimmt entsprechend seiner Torsionssteifigkeit  $I_{T,i}$  einen Anteil des Torsionsmoments  $M_{T,i}$  auf. Am Gesamtquerschnitt können die Torsionssteifigkeit  $I_{T,Ges}$  und das primäre Torsionsmoment  $M_{T,I,Ges}$  demnach wie folgt berechnet werden:

$$I_{T,Ges} = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3 \quad (2.83)$$

$$M_{T,I,Ges} = \sum_i M_{T,I,i} = G \cdot \vartheta'(x) \cdot I_{T,Ges} \quad (2.84)$$

Die Randschubspannungen berechnet man nach Gleichung 2.71, welche sich für dünnwandige, offene Querschnitte allgemein zu Gleichung 2.85 vereinfacht.

$$\tau_I = \frac{M_{T,I}}{I_T} \cdot t_i \quad (2.85)$$

Auf die Verwölbung dünnwandiger Querschnitte soll an dieser Stelle nur kurz eingegangen werden, da sie wichtig für das Verständnis St. Venant'scher Torsion geschlossener Querschnitte ist. Eine genauere Betrachtung folgt dann anschließend in Abschnitt 2.6.3.

Für die Betrachtung eines dünnwandigen Rechtecks vereinfacht sich Gleichung 2.78 zu:

$$\omega^D = y \cdot z + y_D \cdot z - z_D \cdot y \quad (2.86)$$

Aber dadurch, dass  $t/h \rightarrow 0$  gilt, ist der Unterschied zwischen den Verwölbungen der Profilmittellinie  $s$  und denen der Profilaußenkante  $y = \pm t/2$  so gering, dass er vernachlässigt wird. Die zwei  $y$  enthaltenden Terme in Gleichung 2.86 können daher entfallen, und die Einheitsverwölbung eines dünnwandigen Rechtecks berechnet sich folglich zu:

$$\omega^D = y_D \cdot z \quad (2.87)$$

Ein einfaches, dünnwandiges Rechteck erfährt also nur dann Verwölbung, wenn sich der Drehpunkt nicht auf der Profilmittellinie befindet. Da sich als Drehpunkt aber in der Regel der Schubmittelpunkt einstellt, welcher sich bei einem Rechteck auf der Profilmittellinie befindet, gilt das schmale Rechteck als quasi wölbfrei.

Für allgemein dünnwandige Querschnitte, die aus mehreren Rechtecken zusammengesetzt sind, ergeben sich immer dann Verwölbungen, wenn kein gemeinsamer Schnittpunkt aller Profilmittellinien vorliegt, der mit dem Drehpunkt identisch ist. Die Verwölbungen der Profilmittellinie werden als konstant über die Wanddicke vorausgesetzt. Bei der Berechnung macht man sich zunutze, dass die Profilmittellinie in der St. Venant'schen Torsionstheorie spannungsfrei ist, weshalb alle Elemente der Profilmittellinie verzerrungsfrei bleiben. Verschiebungen der Querschnittsebene können daher auch nur reine Verschiebungen dieser Elemente hervorrufen.

Definiert man für die Mittellinienkoordinate  $s$  den Anfangspunkt  $s = 0$  an einem beliebigen freien Ende und lässt  $+s$  zu allen anderen freien Profilen positiv hin verlaufen, so ergibt sich die Verschiebung  $v_t$  eines Elements in Richtung  $s$  infolge einer Verdrehung  $\vartheta$  zu:

$$v_t(s) = r_t^D(s) \cdot \vartheta \cdot \cos(\alpha) \approx r_t^D(s) \cdot \vartheta \quad (2.88)$$

Der  $\cos(\alpha)$  wird für kleine Winkel zu eins, und  $r_t^D(s)$  beschreibt den Hebelarm zum Drehpunkt  $D$  an der Stelle  $s$  gemäß Abbildung 2.21. Der Hebelarm  $r_t^D$  wird positiv angesetzt, wenn der Vektor  $+s$  bezogen auf  $D$  mit der Drehrichtung von  $\vartheta$  übereinstimmt.

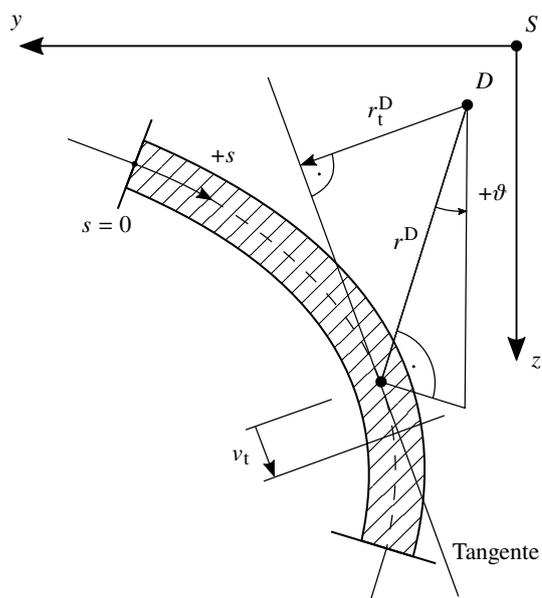


Abbildung 2.21: Verschiebung  $v_t$  eines Elements auf der Profilmittellinie infolge  $\vartheta$  nach [48]

Da die Gleitung  $\gamma_{xs}$  entlang der Profilmittellinie null sein muss, gilt analog zu Gleichung 2.54 folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \gamma_{xs} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \vartheta'(x) \cdot \omega^D(s) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \vartheta(x) \cdot r_t^D(s) \right] \\ &\rightarrow \omega^D = - \int r_t^D \cdot ds \end{aligned} \quad (2.89)$$

Bei der Lösung von Gleichung 2.89 tritt eine Integrationskonstante  $\omega_0^D$  auf, die gleich der Verwölbung am Koordinatenanfangspunkt  $s = 0$  ist. Die, zunächst ohne Berücksichtigung dieser Integrationskonstante angegebene Wölbordinate  $\omega^D(s)$ , wird als Grundverwölbung bezeichnet. Hinzu kommt die Integrationskonstante, die als Verschiebung der Bezugsfläche aufgefasst werden kann, sodass positive und negative Wölbflächen gleich groß werden. Entsprechend berechnet sich die Integrationskonstante zu:

$$\omega_0^D = -\frac{1}{A} \cdot \int_A \omega^D(s) \cdot dA \quad (2.90)$$

Die Summe aus Grundverwölbung und Integrationskonstante wird als Hauptverwölbung bezeichnet und wird durch einen Querstrich gekennzeichnet.

$$\bar{\omega}^D(s) = \omega^D(s) + \omega_0^D = - \int r_t^D \cdot ds + \omega_0^D \quad (2.91)$$

Die endgültigen Verschiebungen in Stablängsrichtung erhält man durch Multiplikation mit der Verwindung:

$$u(s) = \bar{\omega}^D(s) \cdot \vartheta' \quad (2.92)$$

### Dünnwandige, geschlossene Querschnitte

Die Torsionsschubspannungen eines dünnwandigen, geschlossenen Querschnitts können analog zu Querkraftschubspannungen berechnet werden. Dabei geht man so vor, dass der Hohlkasten «aufgeschnitten» wird, sodass ein einfach zusammenhängender Querschnitt entsteht. Für diesen gedachten offenen Querschnitt berechnet man die Differenzverschiebungen an der Schnittstelle und korrigiert diese durch einen konstanten Kreisschubfluss. Da lediglich die Differenzverschiebung benötigt wird, fällt die Integrationskonstante heraus, sodass sich folgende Gleichung für die Differenzverschiebungen ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta u^0 &= u_1 - u_0 \\ &= \vartheta' \cdot (\bar{\omega}_1^D - \bar{\omega}_0^D) = \vartheta' \cdot \omega_1^D = -\vartheta' \cdot \oint r_t^D \cdot ds \end{aligned} \quad (2.93)$$

Wie Abbildung 2.22 zeigt, entspricht das Umlaufintegral aus Gleichung 2.93 dem doppelten Wert der durch die Profilmittellinie umschlossenen Fläche. Dies macht deutlich, dass die Differenzverschiebung ebenfalls unabhängig von der Drehachse ist.

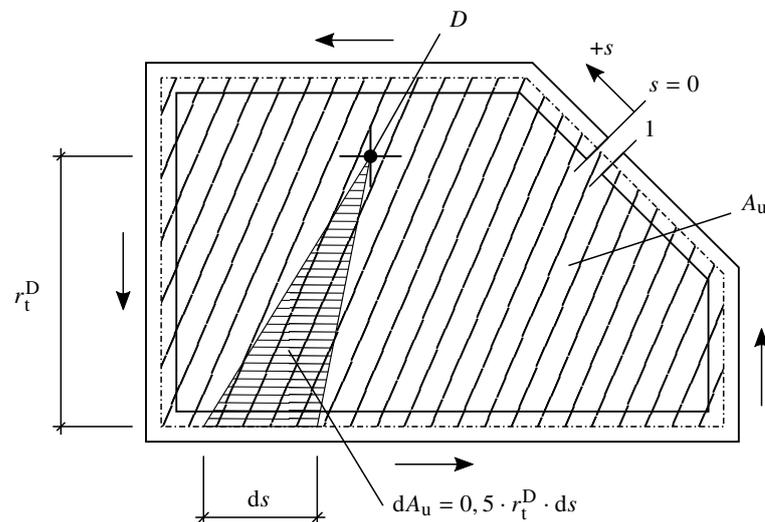


Abbildung 2.22: Die von der Profilmittellinie umschlossene Fläche  $A_u$  eines einzelligen Hohlquerschnitts nach [48]

Die Korrekturverschiebung  $\Delta u^1$  berechnet sich über die aufintegrierte Gleitung, die mit dem

konstanten Kreisschubfluss verbunden ist zu:

$$\Delta u^1 = \oint \frac{T^1}{G \cdot t(s)} \cdot ds \quad (2.94)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Verschiebungen  $\Delta u^0 = \Delta u^1$  erhält man für einen konstanten Schubmodul den Bredt'schen Kreisschubfluss  $T^1$ :

$$T^1 = \frac{2 \cdot \oint r_t^D \cdot ds}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \cdot G \cdot \vartheta' = \frac{2 \cdot A_u}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \cdot G \cdot \vartheta' \iff \frac{T^1}{G \cdot \vartheta'} = \frac{2 \cdot A_u}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \quad (2.95)$$

Die St. Venant'schen Torsionsschubspannungen eines dünnwandigen, geschlossenen Querschnitts stellen somit eine Überlagerung zweier Anteile dar: Zum Einen die über die Wanddicke linear verteilten Schubspannungen des geschnittenen Querschnitts und zum Anderen die konstant über die Wanddicke verteilten Schubspannungen aus dem Bredt'schen Kreisschubfluss. Jeder dieser Anteile entspricht einem Torsionsmoment, wobei der offene Anteil in der Literatur häufig als sehr klein vernachlässigt wird [48, 49]. Werden jedoch beide Anteile verwendet, so werden diese meist mit den Indizes «offen» und «Bredt» gekennzeichnet. Das primäre Torsionsmoment berechnet sich also für geschlossene, dünnwandige Querschnitte zu:

$$\begin{aligned} M_{T,I} &= G \cdot I_{T,\text{offen}} \cdot \vartheta' + T^1 \cdot \oint r_t^M \cdot ds = G \cdot \vartheta' \cdot \left( I_{T,\text{offen}} + \frac{4 \cdot A_u^2}{\oint \frac{ds}{t}} \right) \\ &= G \cdot \vartheta' \cdot (I_{T,\text{offen}} + I_{T,\text{Bredt}}) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Die Schubspannungsanteile berechnen sich über die jeweiligen Torsionsmomentenanteile zu:

$$\tau_{I,\text{offen}} = \frac{M_{T,I,\text{offen}}}{I_{T,\text{offen}}} \cdot t_i \quad (2.97)$$

$$\tau_{I,\text{Bredt}} = \frac{M_{T,I,\text{Bredt}}}{2 \cdot A_u \cdot t_i} \quad (2.98)$$

### 2.6.3 Wölbkrafttorsion dünnwandiger Querschnitte

Dass Torsionsbeanspruchungen in Stäben im Allgemeinen Verwölbungen hervorrufen, wurde bereits in Abschnitt 2.6.2 dargestellt. Können sich diese Verwölbungen nicht frei einstellen, entstehen gemäß Gleichung 2.56 Normalspannungen im Querschnitt, auch Wölbnormalspannungen genannt.

$$\sigma_x = \sigma_W = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = E \cdot \vartheta''(x) \cdot \bar{\omega}^M \quad (2.99)$$

Eine Behinderung der Verwölbung entsteht beispielsweise durch eine Einspannung des Trägers, eine Querschnittsänderung oder auch durch eine veränderliche Torsionsschnittgröße. Dies hat zur Folge, dass die Verdrillung  $\vartheta'$  veränderlich ist, wodurch die St. Venant'sche Torsionstheorie ungültig wird. Der Träger muss in einem solchen Fall nach der Theorie der Wölbkrafttorsion

berechnet werden. Ausnahmen stellen Träger mit wölbfreien bzw. wölbarmen Querschnitten dar. Diese erfüllen immer die Voraussetzung der St. Venant'schen Torsion.

Wie man Gleichung 2.99 entnehmen kann, verlaufen die Wölbnormalspannungen  $\sigma_W$  affin zur Einheitsverwölbung  $\bar{\omega}^M$ , die hier auf den Schubmittelpunkt  $M$  bezogen ist. Demnach sind die Wölbnormalspannungen  $\sigma_W$  bei dünnwandigen Querschnitten auch konstant über die Wanddicke  $t$  verteilt, und sie erzeugen weder eine resultierende Normalkraft  $N$ , noch Biegemomente  $M_y$  oder  $M_z$ . Die Wölbnormalspannungen  $\sigma_W$  fasst man zu einer eigenen Schnittgröße, dem Wölbmoment  $M_W$ , zusammen. Das Wölbmoment  $M_W$  entspricht einem Torsionsmoment um eine im Querschnitt liegende Achse und ist, außer bei I-Querschnitten, nicht anschaulich nachzuvollziehen.

$$\begin{aligned} M_W &= - \int_A \sigma_W \cdot \bar{\omega}^M \cdot dA = -E \cdot \vartheta''(x) \cdot \int_A [\bar{\omega}^M]^2 \cdot dA \\ &= -E \cdot \vartheta''(x) \cdot C_M \end{aligned} \quad (2.100)$$

Das Integral über das Quadrat der Hauptverwölbung wird als Wölbwiderstand  $C_M$  definiert. Das  $M$  im Index gibt an, dass der Wölbwiderstand sich auf den Schubmittelpunkt bezieht. Damit die Gleichgewichtsbedingung 2.65 erfüllt ist, müssen infolge einer Wölbbehinderung neben den Wölbnormalspannungen  $\sigma_W$  auch Wölb Schubspannungen  $\tau_{II}$  vorhanden sein, die ebenfalls konstant über die Wanddicke  $t$  verteilt sind. Die Wölb Schubspannungen  $\tau_{II}$  sind mit den St. Venant'schen Schubspannungsanteilen  $\tau_{I, \text{offen}}$  bzw.  $\tau_{I, \text{Bredt}}$  zu überlagern, und sie erzeugen keine resultierenden Schubkräfte  $V_y$  oder  $V_z$ . Dadurch ist die Voraussetzung zur Berechnung der Verwölbung in Gleichung 2.89, dass die Profilmittellinie schubspannungsfrei ist, streng genommen nicht mehr gegeben. Dennoch wird diese Voraussetzung in der allgemeinen Theorie der Wölbkrafttorsion vereinfachend beibehalten.

Durch diese Vereinfachung nimmt die Theorie der Wölbkrafttorsion an, dass infolge einer behinderten Verwölbung keine Gleitungen  $\gamma_{xs}$  entstehen bzw. diese vernachlässigbar klein bleiben. Somit werden Wölb Schubspannungen analog zu Querkraftschubspannungen, die mit der Dübelformel ermittelt werden, nur aus einer Gleichgewichtsbedingung (Gleichung 2.65) berechnet. Nun ergibt sich für einen offenen Querschnitt, bei dem der Integrationsanfang an einem freien Ende beginnt, folgender Wölb Schubfluss  $T_W$ :

$$T_W(x, s) = -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \int_0^s \bar{\omega}^M(s) \cdot dA = -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot S_W \quad (2.101)$$

In Analogie zu den statischen Momenten wird das Integral in Gleichung 2.101 mit  $S_W$  abgekürzt, da man es in gleicher Weise zu den statischen Momenten über die  $\bar{\omega}^M$ -Fläche anstelle der  $y$ - bzw.  $z$ -Fläche integriert. Für  $S_W$  gibt es in der Literatur keinen festen Begriff. Im Rahmen dieser Arbeit wird  $S_W$  daher in Analogie zur Einheitsverwölbung  $\omega^D$  als Einheitswölb Schubfluss bezeichnet. Ein positiver Schubfluss  $T_W$  wirkt in positiver  $s$ -Richtung. Es bietet sich aber an, immer positive Werte zu verwenden und die Wirkungsrichtung anzutragen. Die Wölb Schubspannungen  $\tau_{II}$  berechnen sich zu:

$$\tau_{xs, II} = \frac{T_W}{t} \quad (2.102)$$

Am Beispiel eines Z-Profiles zeigt Abbildung 2.23 die Wölbfläche  $\bar{\omega}^M$ , den Einheitswölbschubfluss  $S_W$  sowie die Wirkungsrichtungen der Teilschubflüsse  $R_W$ .

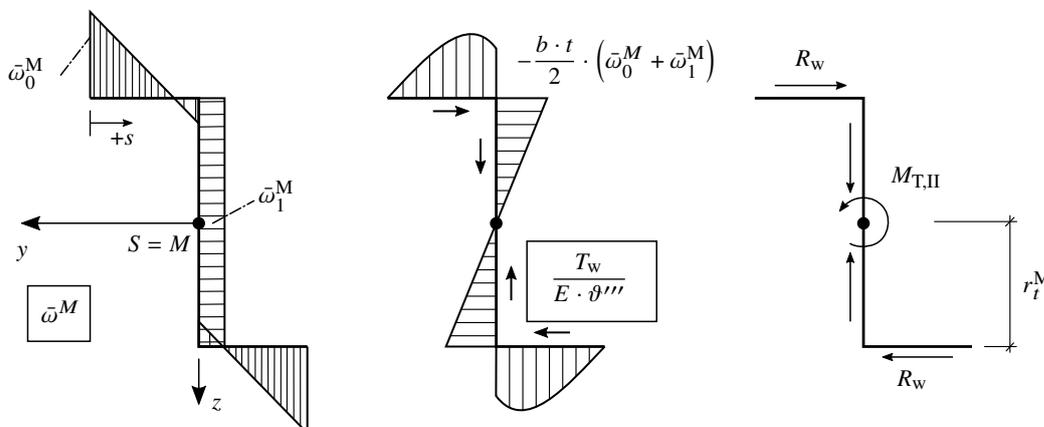


Abbildung 2.23: Wölbschubfluss  $T_W$  und sein resultierender Wölbmomentenanteil nach [48]

Wie aus Abbildung 2.23 hervorgeht, resultiert der Wölbschubfluss in einem zusätzlichen Torsionsmoment. Allgemein setzt sich also ein Torsionsmoment aus zwei Anteilen zusammen:

$$M_T = M_{T,I} + M_{T,II} \quad (2.103)$$

Wobei der erste Anteil  $M_{T,I}$  dem St. Venant'schen Torsionsmoment nach Abschnitt 2.6.2 entspricht. Das sekundäre Torsionsmoment  $M_{T,II}$  berechnet sich allgemein über den Wölbschubfluss  $T_W$  und seinen Hebelarm zum Schubmittelpunkt  $M$ , der die natürliche Drillruheachse darstellt. Das Integral über  $r_t^M$  kann nach Gleichung 2.91 durch  $\bar{\omega}^M$  ausgedrückt werden. So ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} M_{T,II} &= \int T_W(x, s) \cdot r_t^M(s) \cdot ds = -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \int_A [\bar{\omega}^M(s)]^2 \cdot dA \\ &= -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot C_M \end{aligned} \quad (2.104)$$

Damit sind nun entsprechend Gleichung 2.74 und Gleichung 2.104 sowohl primäre als auch sekundäre Torsionsanteile definiert, und es ergibt sich folgende Gleichung für das Gesamttorsionsmoment:

$$M_T = G \cdot I_T \cdot \vartheta' - E \cdot \vartheta'''(x) \cdot C_M \quad (2.105)$$

Um die Verdrehung  $\vartheta(x)$  in Abhängigkeit der Einwirkungen zu erhalten, differenziert man Gleichung 2.105 noch einmal nach  $x$  und erhält die allgemein bekannte Differenzialgleichung der Wölbkrafttorsion:

$$G \cdot I_T \cdot \vartheta'' - E \cdot \vartheta''''(x) \cdot C_M = m_T(x) \quad (2.106)$$

Die Differenzialgleichung wird in der Regel über einen  $e$ -Ansatz gelöst, was zu einem sehr standardisierten Vorgehen führt, welches hier nicht näher vorgestellt wird. Nähere Ausführungen sind der einschlägigen Literatur [48, 49, 50] zu entnehmen.

### 2.6.4 Torsionsschnittgrößen an Stäben mit unstetigem Querschnitt

Auf Torsion beanspruchte Träger weisen oft punktuelle Querschnittswchsel auf. Im Stahlbau werden häufig aufgeschweißte Bindebleche, Hohlsteifen oder Kopfplatten verwendet, deren lokale Querschnittserweiterung die Torsionssteifigkeit deutlich erhöhen soll. Im Massivbau hingegen sind es vor allem Fugen oder Öffnungen, die eher mit einer Querschnittsschwächung verbunden sind.

Sind bei einem Stahlträger, wie in Abbildung 2.24, Bindebleche sehr dicht angeordnet, liegt eine Kombination aus geschlossenem und offenem Querschnitt vor. Wie der Autor bereits in [2] darstellte, kann ein Segmentturm mit geschlossenem Querschnitt und klaffenden Fugen in gleicher Weise interpretiert werden, wodurch ein Vergleich der Torsionsschnittgrößen sinnvoll erscheint.

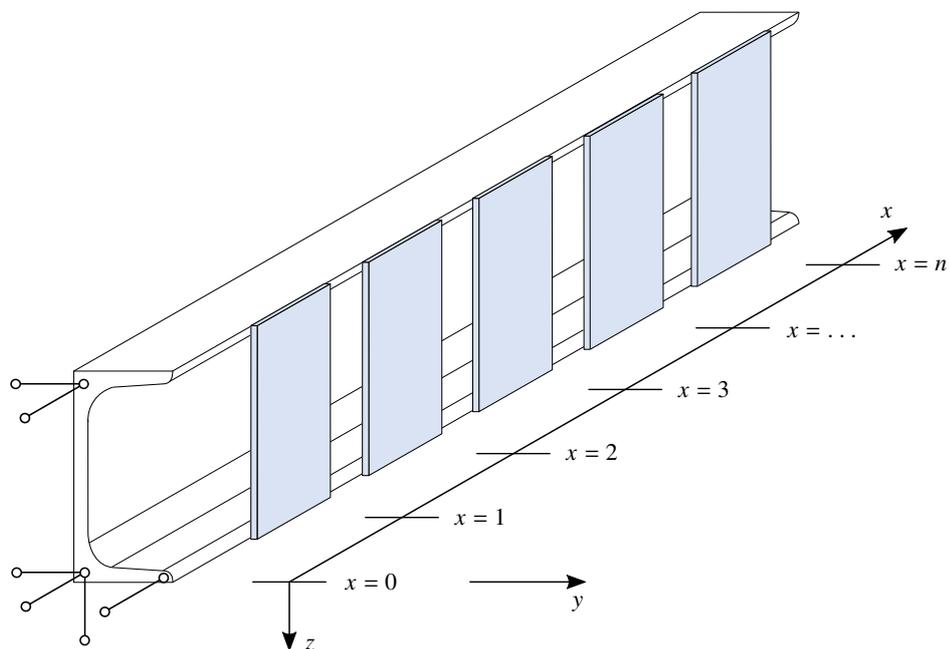


Abbildung 2.24: Träger mit dicht angeordneten Bindeblechen

Für die Berechnung der Torsionsschnittgrößen stellt jedes Bindeblech eine statisch Überzählige dar, die mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens bestimmt werden kann. Alle der Theorie der Wölbkrafttorsion zugrunde gelegten Voraussetzungen werden dabei unverändert beibehalten. Francke und Friemann [48] zeigen sehr anschaulich, dass die statisch Überzählige eines Bindebleches einem Einzelwölbmoment  $M_W$  entspricht, welches sich für ein rechteckiges Bindeblech wie folgt berechnet:

$$M_{W,i}(x_i) = -2 \cdot b \cdot h \quad (2.107)$$

Das Wölbmoment aus Gleichung 2.107 bewirkt eine Verdrehung des Trägers, woraus sich folgende Verschiebung  $\delta_{ii}$  der Schnitтуer berechnen lässt:

$$\delta_{ii} = \bar{\delta}_{ii} + \vartheta'_i(x_i) \cdot 2 \cdot b \cdot h \quad (2.108)$$

Der Wert  $\bar{\delta}_{ii}$  berücksichtigt dabei die Schubverformung des Bindeblechs  $i$ . In der Regel kann dieser Term vernachlässigt werden, da jedes praxisüblich-dimensionierte Bindeblech eine quasistarre Wölbfeder darstellt [48]. Für den Fall mehrerer Bindebleche ergeben sich die Verschiebungen  $\delta_{ik}$  im Schnitt  $k-k$  infolge des Wölbmoments  $M_{W,i}$  des Bindeblechs  $i$  zu:

$$\delta_{ik} = \vartheta'_i(x_k) \cdot 2 \cdot b \cdot h \quad (2.109)$$

Abschließend fehlen noch die Verschiebung  $\delta_{i0}$  im Schnitt  $i-i$  infolge äußerer Beanspruchungen. Diese können wie folgt berechnet werden:

$$\delta_{i0} = \vartheta'_0(x_i) \cdot 2 \cdot b \cdot h \quad (2.110)$$

Die genaue Herleitung der Gleichungen 2.107 bis 2.110 sowie Beispiele können dem Buch «Schub und Torsion in geraden Stäben» [48] entnommen werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird nachfolgend, in Anlehnung an Segmenttürme für Windenergieanlagen, ein Kragarm mit einem am freien Ende angreifenden Einzeltorsionsmoment betrachtet. Der Kragarm sei ein mit Bindeblechen verstärkter Träger mit einer über die Stablänge konstanten St. Venant'schen Torsionssteifigkeit  $G \cdot I_T$  und einer ebenfalls konstanten Wölbsteifigkeit  $E \cdot C_M$ . Jedes Bindeblech wird bei der Berechnung auf seine Schwerachse idealisiert. Während die Verläufe der primären und sekundären Torsionsmomente Abbildung 2.25 zu entnehmen sind, ist der Verlauf des Wölbmoments in Abbildung 2.26 abgebildet. Beide Abbildungen zeigen normierte Schnittkraftverläufe für einen Stab mit nur einem Bindeblech am freien Kragarmende sowie für einen Stab mit sieben gleichmäßig verteilten Bindeblechen.

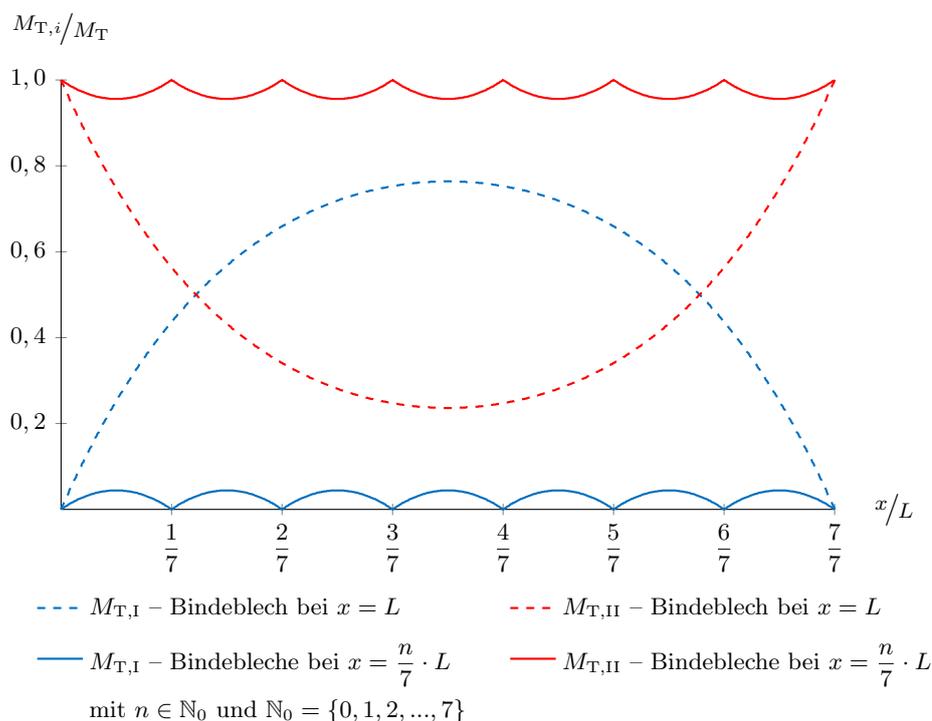


Abbildung 2.25: Primäre und sekundäre Torsionsmomente eines mit Bindeblechen verstärkten Trägers

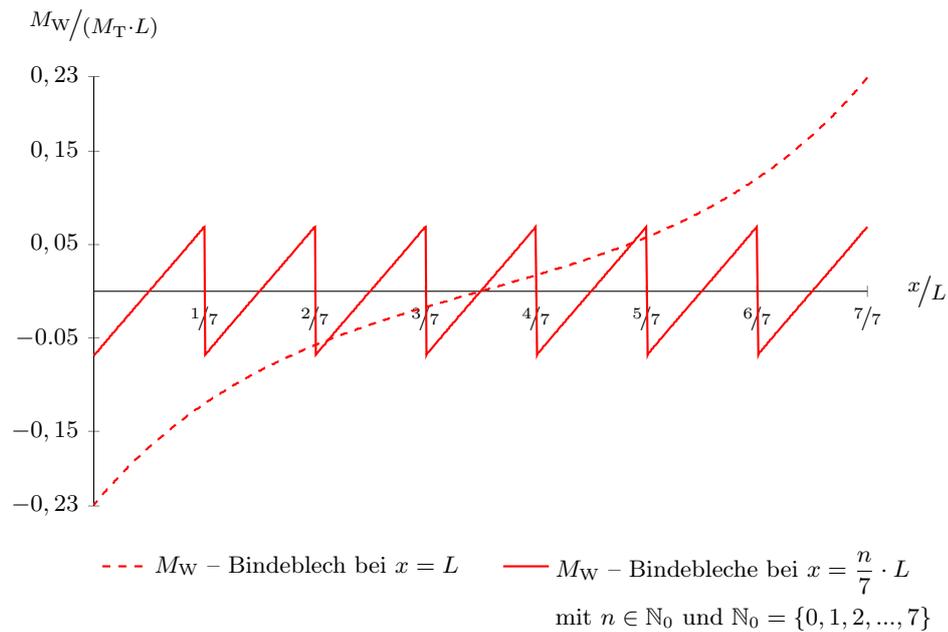


Abbildung 2.26: Wölbmoment eines mit Bindeblechen verstärkten Trägers

Qualitativ sind die Schnittkraftverläufe zwischen zwei Bindeblechen und denen eines Kragarms mit einem Bindeblech am freien Kragarmende identisch. Eine höhere Bindeblechanzahl ist dabei gleichzustellen mit einem entsprechend kürzeren Träger mit nur einem Bindeblech am Kragarmende. Während Abbildung 2.25 deutlich zeigt, dass mit zunehmender Bindeblechanzahl das Torsionsmoment hauptsächlich über sekundäre Torsionsmomente abgetragen wird, wird aus Abbildung 2.26 ersichtlich, dass das Wölbmoment im Bereich zwischen den Bindeblechen gegen null geht. Das Wölbmoment weist einen alternierenden Zickzack-Verlauf mit nahezu konstanten Ober- und Untergrenzen auf. Mit zunehmender Bindeblechanzahl bzw. dichter angeordneten Bindeblechen bleibt der Wölbmomentenverlauf qualitativ gleich, jedoch nähern sich die Extremwerte immer weiter der Null an. Zusätzlich ist das Wölbmoment im Bereich zwischen den Bindeblechen aufgrund des Vorzeichensprungs gleich null.

Für die klaffende Fuge eines Segmentturms kann demnach das Wölbmoment als vernachlässigbar klein angenommen werden. Das Torsionsmoment wird im Fugenquerschnitt nach dieser Analogie hauptsächlich über sekundäre Anteile abgetragen, primäre Torsionsmomente können in der Regel vernachlässigt werden.

## 2.7 Zusammenfassung

Abschnitt 2 befasst sich mit den theoretischen Grundlagen, die für das in dieser Arbeit entwickelte Modell benötigen werden. So wird auf einen kleinen, aber entscheidenden Teil der nahezu unzähligen Versagenshypothesen eingegangen, sodass ihre geschichtliche Entwicklung erkennbar wird. Am Ende dieser Entwicklung stehen das Versagenskriterium von Menétrey und Willam [20], welches von der Finite-Elementen-Software Ansys® Academic Research Mechanical Version 2021 R2 empfohlen wird sowie das Kriterium von Speck [22]. Beide sind gut geeignet, den Bruchzustand von Beton vorherzusagen, was sich auch darin widerspiegelt, dass das Kriterium von Speck im Model Code 2010 [13] herangezogen wurde, um Beton unter mehraxialer Beanspruchung abzubilden.

Des Weiteren wird auf die Kontaktmechanik trockener Fugen eingegangen. Als Primärquelle diente hier das Buch «Kontaktmechanik und Reibung» von Popov [36]. Auch wenn es verschiedene Modelle zur Reibung gibt, so wird im Rahmen dieser Arbeit nur auf die Coulomb'sche Reibung eingegangen. Dieses Modell ist für die meisten Ingenieur Anwendungen ausreichend genau, was aufgrund seines schlichten Aufbaus erstaunlich ist, da das physikalische Phänomen der Reibung aus tribologischer Sicht außerordentlich kompliziert ist. Diese Komplexität trägt wahrscheinlich dazu bei, dass der Reibbeiwert  $\mu$  bei glatten, mittig belasteten Fugen großen Streuungen unterliegt, was anhand zahlreicher Studien in Abbildung 2.9 dargestellt wird. Eine akkurate Bestimmung des Reibbeiwerts ist laut Mohamad et al. [40] über die mittlere Glättungstiefe  $R_{pm}$  möglich. Diese muss allerdings zunächst mit einem taktilen Rauheitsmessgerät auf der Oberfläche der Fuge bestimmt werden.

Auch auf einige Grundlagen der Festigkeitslehre wird eingegangen. Im Fokus stehen hier Volumenelemente, anhand derer beispielsweise die partiellen Differentialgleichungen der Spannungszuwächse, aber auch die Gleichheit der Schubspannungen hergeleitet wird. Auch die Hooke'schen Beziehungen sowie der Zusammenhang zwischen Gleitung und Verschiebung werden am Volumenelement entwickelt.

Auf den am Volumenelement hergeleiteten Beziehungen bauen anschließend die Abschnitte zu Querkraft- und Torsionsbeanspruchungen auf. Es wird gezeigt, dass Schubspannungen in dünnwandigen Querschnitten immer randparallel wirken, da Spannungsanteile orthogonal hierzu vernachlässigbar klein sind. Des Weiteren wirken Querkraftschubspannungen konstant über die Wanddicke und werden an freien Querschnittsenden zu null.

In den Ausführungen zur Torsion werden zunächst grundlegende Zusammenhänge aufgezeigt, aus denen hervorgeht, dass infolge Torsion auch Verwölbungen auftreten können. Des Weiteren wird gezeigt, dass Torsionsschubspannungen im allgemeinen aus primären und sekundären Anteilen zusammengesetzt sind. Es ist jedoch auch möglich, dass in einem Querschnitt ausschließlich primäre Torsionsschubspannungen vorliegen, welche keine Verwölbungen erzeugen. Dies bezeichnet man auch als St. Venant'sche Torsion, was einen Sonderfall der übergeordneten Theorie der Wölbkrafttorsion darstellt. Geschichtlich wurde die St. Venant'sche Torsion vor der Theorie der Wölbkrafttorsion entwickelt, so wird auch in dieser Arbeit zunächst ausführlich auf die St. Venant'sche Torsion eingegangen, bevor anschließend die Theorie der Wölbkrafttorsion vorgestellt wird. Am Beispiel eines Trägers mit dicht angeordneten Bindeblechen, als Analogie für einen segmentierten Stab mit klaffenden Fugen, wird dargelegt, dass im Bereich einer klaffenden Fuge vorwiegend sekundäre Torsionsschubspannungen vorliegen, und Wölbnormalspannungen vernachlässigbar klein werden, was entscheidend für die spätere Modellentwicklung ist.



## 3 Stand von Wissenschaft und Technik

### 3.1 Einleitung

Wie in Abschnitt 1.3 bereits angesprochen basieren einige Nachweismodelle zur Torsionstragfähigkeit von Segmentfugen auf dem räumlichen Fachwerkmodell, mit dem die Torsionstragfähigkeit monolithischer Balken ermittelt werden kann. Zudem ist davon auszugehen, dass eine vollständig überdrückte Segmentfuge je nach Auslegung die gleiche Torsionstragfähigkeit aufweist, wie ein monolithischer Balken. Daher werden im Folgenden Nachweismodelle torsionsbeanspruchter Balken vorgestellt, bevor auf torsionsbeanspruchte Fugen näher eingegangen wird. Zu jedem Modell folgt eine Bewertung, in der die Vor- und Nachteile des jeweiligen Modells hervorgehoben werden.

### 3.2 Torsionsbeanspruchte Balken

#### 3.2.1 Das Fachwerkmodell

Das räumliche Fachwerkmodell stellt international die Grundlage der Querkraft- und Torsionsbemessung im Massivbau dar. Das erstmals 1929 von Rausch [15] entwickelte und seither stetig erweiterte Modell idealisiert Spannungsflüsse im gerissenen Bauteil durch ein räumliches Fachwerk. So werden die geneigten Betondruckspannungen als gebündelte Druckstreben angesetzt, die mit der Bewehrung als Zugpfosten im Gleichgewicht stehen. Die im Massivbau üblichen Kompaktquerschnitte tragen eine Torsionsbeanspruchung weitestgehend über die äußere bewehrte Randschale ab, was zahlreiche Versuche aus den 1960er bis 1980er Jahren, u.a. [52, 53, 54, 55] zeigen. Somit entspricht die Torsionstragfähigkeit von Kompaktquerschnitten in etwa der eines Hohlquerschnitts gleicher Außenabmessungen mit entsprechender effektiver Wandstärke. Abweichend von der TdWö wird hierbei davon ausgegangen, dass Torsion bei einem geschlossenen Querschnitt und praxisüblichen Querschnittsabmessungen maßgeblich über den Bredt'schen Kreisschubfluss abgetragen wird. Offene oder sekundäre Torsionsanteile werden vernachlässigt.

Den aktuellen Stand der Forschung zum räumlichen Fachwerkmodell fasst Zedler [56] in seiner Dissertation umfänglich zusammen. Wie bei den meisten vorherigen Arbeiten [53, 54, 55, 57, 58] ist seine Arbeit auf die Parameter des räumlichen Fachwerkmodells fokussiert. Zedler [56] führt hierzu eine Versuchsreihe mit neun Stahlbetonbalken durch, die rein auf Torsion beansprucht werden. Dabei variiert er die Bewehrungsführung, die Betondeckung und die Schlankheit der Balken. Aus seinen gesammelten Erkenntnissen entwickelt er ein Bemessungskonzept, bei dem die fünf maßgebenden Parameter, welche das räumliche Fachwerkmodell beschreiben, für vier verschiedene Querschnittstypen ausgewertet bzw. neu definiert werden. Seine Ausführungen basieren auf den Arbeiten von Görtz [59] sowie dem Querkraftbemessungsmodell der DIN 1045-1 [17], welches wiederum auf dem von Rausch [15] ausgearbeiteten Fachwerkmodell gründet.

## Bewertung

Das semiempirische Nachweismodell vom räumlichen Fachwerk vermag das Torsionstragverhalten praxisüblicher, monolithischer Stahlbeton- und Spannbetonbalken relativ gut abbilden. Folglich konnte sich das sehr anschauliche Modell vom räumlichen Fachwerk als Grundlage der Torsionsbemessung von Massivbauteilen in den internationalen Normenwerken [14, 11, 8, 13, 17] durchsetzen. Gleichzeitig bestehen große Unterschiede in der Formulierung der einzelnen Parameter. Somit ist eine einheitliche Auffassung bezüglich der Einflussfaktoren, die das Torsionstragverhalten maßgeblich bestimmen, international offenbar nicht gegeben. Ein Teil der Abweichungen zwischen experimentellen und theoretischen Torsionstragfähigkeiten ist vermutlich der grundlegenden Annahme des räumlichen Fachwerkmodells geschuldet, dass Torsionsbeanspruchungen in geschlossenen Querschnitten allein über den Bredt'schen Schubfluss abgetragen werden. Diese Aussage findet sich in zahlreichen Normen und Veröffentlichungen [11, 48, 16]. Auch Zedler [56] legt diese Annahme seinem Modell zugrunde. Im Rahmen seiner Arbeit erkannte er allerdings einen Widerspruch hinsichtlich des Einflusses der Querschnittsschlankheit auf das Tragvermögen der Torsionsdruckstrebe sowie dem Bredt'schen Schubfluss und hält schlussfolgernd eine umfassende Betrachtung der Grundgedanken des Modells für erforderlich.

Eine Anwendung des räumlichen Fachwerkmodells auf Segmentfugen ist ohne durchgehende Bewehrung nicht direkt möglich. Auch für offene, dünnwandige Querschnitte und klaffende Fugen kann das klassische räumliche Fachwerkmodell nicht ausgebildet werden. Dennoch dient das räumliche Fachwerkmodell als Orientierung bzw. Vorlage der Fugenbemessung, auf die in Abschnitt 3.3 näher eingegangen wird.

### 3.2.2 Theorie der schiefen Bruchfläche

Ein alternatives Bemessungsmodell zum räumlichen Fachwerk beschreibt die Theorie der schiefen Bruchfläche (Engl. skew bending theory), die vor allem in Russland, aber auch in Australien und den USA Anwendung findet [60]. Betrachtet wird hier ein Stahlbetonbalken unter kombinierter Beanspruchung im Bruchzustand. Es wird angenommen, dass ein Riss sich spiralförmig über drei Seiten des Balkens erstreckt. Die vierte Seite definiert die Druckzone, die mit den Kraftreaktionen der im Riss befindlichen Bewehrungseisen im Gleichgewicht steht. Dabei setzte Lessig [61], der Ende der 1950er Jahre das Modell in Russland erstellte, das Fließen der im Riss befindlichen Bewehrung voraus.

Die Theorie der schiefen Bruchfläche unterscheidet drei Brucharten. Die erste und zweite Bruchart unterscheiden sich durch die Lage der Druckzone. Während für Bruchart 1 die Druckzone, entsprechend einer überwiegenderen Biegebeanspruchung, auf der Seite der Biegedruckzone angenommen wird, wird für Bruchart 2 im Fall einer hohen Torsionsbeanspruchung eine Seitenfläche (Seite zwischen Biegedruck- und -zugzone) des Trägers als Druckzone vorausgesetzt. Die Bruchart 3 ist vergleichbar mit Bruchart 1, setzt aber in der Druckzone ein Fließen in der Bewehrung voraus. Bruchart 3 wird von Falkner et al. [62] vernachlässigt, da sie in der Regel größere Bruchschnittgrößen hervorruft als die beiden anderen Brucharten.

Über die Jahre wurde die ursprünglich von Lessig [61] aufgestellte Theorie sowohl von ihr selbst, als auch von anderen erweitert und verbessert. Für eine ausführliche Darstellung der Theorie selbst sowie einiger wichtiger Überarbeitungen ist die Arbeit von Ojha und Kordina [63] zu empfehlen. Sie untersuchten Stahlbetonrechteckbalken unter kombinierter Beanspruchung aus Torsion, Biegung und Querkraft. Sie stellten beispielsweise fest, dass die Bruchart 1 am häufigsten auftrat, gefolgt von der Bruchart 2. Die Bruchart 3 hingegen konnte nur erzeugt

werden, wenn die Längsbewehrung in der Biegezugzone sehr schwach ausgeprägt war.

### Bewertung

Die Theorie der schiefen Bruchfläche stellt eine Alternative zum räumlichen Fachwerkmodell dar. Beide Theorien gründen auf reinen Gleichgewichtsaussagen und liefern laut Ojha und Kordina [63] bei gleichen Randbedingungen auch die gleichen Ergebnisse. Wie auch das räumliche Fachwerkmodell ist die Theorie der schiefen Bruchfläche auf durchgehende Bewehrung angewiesen, was eine Übertragung auf segmentierte Balken schwierig gestaltet.

## 3.3 Torsionsbeanspruchte Fugen

### 3.3.1 Grundlagen

Segmentfugen stellen aufgrund der fehlenden durchgehenden Bewehrung eine Besonderheit im Massivbau dar. Eine Vielzahl wissenschaftlicher Arbeiten zum Lastübertrag in Segmentfugen betrachten eine Kombination aus Normalkraft, Biegung und Querkraft [64, 65, 66, 67, 68, 62]. Huang und Liu [68], Falkner et al. [62] und andere stellten fest, dass, solange die Fugen vollständig überdrückt sind, ein segmentierter Stab quasi die gleiche Tragfähigkeit aufweist wie ein monolithischer Stab. Sobald zusätzlich eine Torsionsbeanspruchung aufgebracht wird, reduziert sich jedoch die allgemeine Tragfähigkeit des segmentierten Stabes. Zu ähnlichen Schlussfolgerungen kommen auch Algorafi et al. [69, 70]. Algorafi et al. [18] haben Versuche zum Querkraft- und Torsionsabtrag von segmentierten Stäben mit Hohlquerschnitt durchgeführt. Sie erweiterten die von der American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) [8] angegebene Gleichung zum Querkraftabtrag in Segmentfugen und gaben an, wie eine Kombination aus Querkraft und Torsion nachgewiesen werden kann.

Qualitativ entspricht das Berechnungsmodell von Algorafi et al. [18] bzw. AASHTO [8] der in Deutschland veröffentlichten Theorie von Grünberg und Göhlmann [16]. Der Schubfluss aus Querkraft wird mit einem St. Venant'schen Schubfluss aus Torsion überlagert und gemäß dem Coulomb'schen Reibungsgesetz über die Normalkraft und den ansetzbaren Reibbeiwert abgetragen. Wie auch beim räumlichen Fachwerkmodell wird bei geschlossener Fuge ausschließlich ein Bred'scher Kreisschubfluss gemäß der 1. Bredt'schen Formel nach Gleichung 3.1 angesetzt. So wie Grünberg und Göhlmann [16] unterstellen Algorafi et al. [18] einer klaffenden Fuge einen offenen Torsionsschubfluss. Sekundäre Torsionsschubspannungen finden keine Berücksichtigung.

$$t_{\text{Bredt}} = \frac{M_T}{2 \cdot A_u} \quad (3.1)$$

Nachfolgend wird im Detail auf die Theorie von Grünberg und Göhlmann [16], stellvertretend für die prinzipielle Modellidee der internationalen Normen [8, 11] und wissenschaftlicher Arbeiten [16, 18], eingegangen. Des Weiteren wird das Torsionstragmodell von Hartwig [19] vorgestellt, welcher 2020 seine Dissertation zu diesem Thema veröffentlicht hat und dabei einen ganz anderen Ansatz verfolgt.

### 3.3.2 Theorie von Grünberg und Göhlmann

Der Bemessungsansatz von Grünberg und Göhlmann [16] basiert auf dem räumlichen Fachwerkmodell und wurde in Anlehnung an DIN 1045-1 [17] zur Bemessung von Segmentfugen

von Windenergieanlagen erstellt. Gemäß dem Coulomb'schen Reibungsgesetz definieren Grünberg und Göhlmann [16] den Schubwiderstand  $v_{\text{Res}}$  einer trockenen, ebenen Segmentfuge über den Reibbeiwert  $\mu$  der kontaktierenden Fugenflächen und der im Fugenquerschnitt wirkenden Normalkraft  $N$  nach Gleichung 3.2.

$$v_{\text{Res}} = -\mu \cdot \sigma_N \cdot t = \frac{-\mu \cdot N}{U_m} \quad (3.2)$$

Im Konsens mit dem räumlichen Fachwerkmodell unterstellen Grünberg und Göhlmann [16], dass Torsion bei vollständig überdrückter Fuge und geschlossenem Querschnitt ausschließlich über den Bredt'schen Kreisschubfluss gemäß Gleichung 3.1 abgetragen wird. Diesen überlagern Grünberg und Göhlmann [16] mit dem maximalen Schubfluss aus Querkraft  $v_{\text{max}}$ , woraus Gleichung 3.3 resultiert.

$$v_{\text{max}} + t_{\text{Bredt}} \leq v_{\text{Res}} \quad (3.3)$$

Für einen Kreisringquerschnitt mit konstanter Wandstärke  $t$ , wie er häufig beim Bau von Windenergieanlagen verwendet wird, kann Gleichung 3.3 wie folgt umgeformt werden:

$$v_{\text{max}} + t_{\text{Bredt}} = \frac{V}{\pi \cdot r_m} + \frac{M_T}{2 \cdot \pi \cdot r_m^2} \leq v_{\text{Res}} \quad (3.4)$$

bzw.

$$V + \frac{M_T}{2 \cdot r_m} \leq \frac{\mu \cdot N}{2} \quad (3.5)$$

Liegt aufgrund eines hohen Biegemoments eine klaffende Fuge vor, kann ein Bredt'scher Kreisschubfluss nicht mehr ausgebildet werden. Gemäß Grünberg und Göhlmann [16] wird Torsion in diesem Fall allein über St. Venant'sche Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts nach Gleichung 3.6 abgetragen. Anstelle einer Schubflussüberlagerung, wie bei vollständig überdrückten Fugen, empfehlen Grünberg und Göhlmann [16] eine quadratische Interaktion, wie in Gleichung 3.7.

$$M_{T,\text{Res}} = -\mu \cdot N \cdot \frac{t}{3} \quad (3.6)$$

$$\left( \frac{V}{V_{\text{Res}}} \right)^2 + \left( \frac{M_T}{M_{T,\text{Res}}} \right)^2 \leq 1 \quad (3.7)$$

An dieser Stelle weichen Grünberg und Göhlmann [16] von den Empfehlungen der DIN 1045-1 [17] ab. Die Norm [17] sieht eine quadratische Interaktion für Vollquerschnitte und eine lineare Interaktion für Hohlquerschnitte vor. Torsion wird zwar bei Vollquerschnitten ebenfalls durch einen Ersatzhohlkasten abgetragen, jedoch darf durch die günstigere quadratische Interaktion der Kern für den Querkraftabtrag angerechnet werden.

Setzt man die Querkraftbeanspruchung gleich null, so ergibt sich das zulässige Torsionsmoment einer Segmentfuge mit geschlossenem Querschnitt, aufgetragen über das Biegemoment, qualitativ wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Da die Gleichungen 3.3 und 3.7 keine Interaktion mit dem Biegemoment vorsehen, besteht eine konstante, wenn auch unstetige, Beziehung zwischen dem zulässigen Torsionsmoment und dem Biegemoment. Grünberg und Göhlmann [16] weisen zwar eine Differenz-Zugkraft  $\Delta N_T$  aus, mit der eine Interaktion von Biegung und

Torsion berücksichtigt werden soll, jedoch ist diese nicht konsistent auf ein Modell ohne durchgehende Bewehrung anwendbar.  $\Delta N_T$  entspricht der Zugkraft der Längsbewehrung und kann mit DIN 1045-1 [17] bzw. DIN EN 1992-1-1 [11] berechnet werden. Sie verringert aber nicht die Normalkraft in der Fuge.

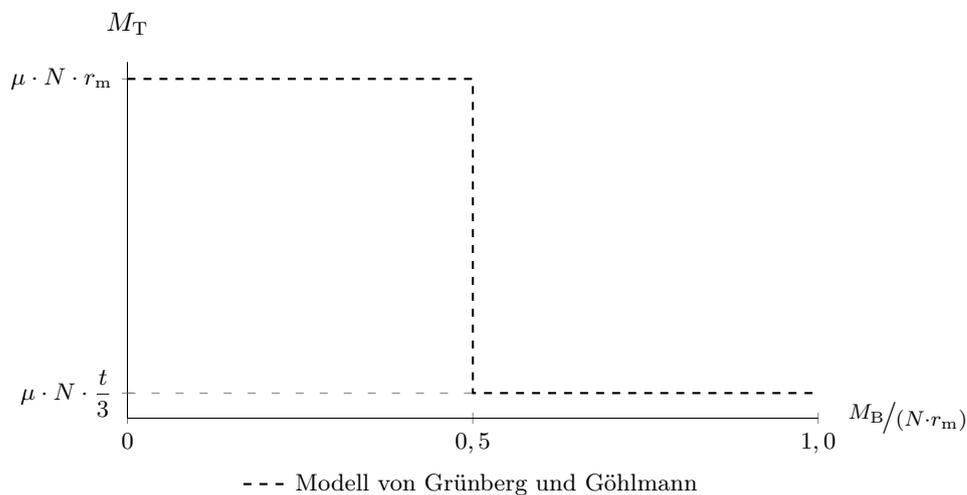


Abbildung 3.1: Torsionstragfähigkeit geschlossener und klaffender Segmentfugen nach Grünberg und Göhlmann

### Bewertung

Das Nachweismodell von Grünberg und Göhlmann [16] orientiert sich klar an den Vorgaben der DIN 1045-1 [17] und zeichnet sich besonders durch eine einfache Anwendung aus. Die wichtigsten im Modell enthaltenen Annahmen können wie folgt zusammengefasst werden:

- Es wird ein dünnwandiger Querschnitt vorausgesetzt.
- Bei geschlossenen Querschnitten werden offene Torsionsanteile vernachlässigt ( $M_{T,I,offen} = 0$ ).
- Torsionsschnittgrößen aus Verwölbung werden allgemein vernachlässigt ( $M_{T,II} = M_w = 0$ ).
- Eine Interaktion mit dem Biegemoment besteht nicht.

Die fehlende Interaktion mit dem Biegemoment sorgt in Abbildung 3.1 für den konstanten, aber unstetigen Verlauf des zulässigen Torsionsmoments. In Kombination mit der Vernachlässigung von sekundären Torsionsanteilen schränken diese Vereinfachungen die Brauchbarkeit des Nachweismodells stark ein. Einerseits stellen die geringen, nur auf Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts beruhenden, Torsionstragfähigkeiten bei klaffenden Fugen für die Praxis eine hohe Sicherheit dar. Andererseits ist es dadurch deutlich unwirtschaftlicher, klaffende Fugen auf planerischer Ebene überhaupt zuzulassen. Bei vollständig überdrückten Segmentfugen hingegen ist davon auszugehen, dass die erforderlichen Tragreserven bei hohen Biegemomenten womöglich nur noch durch das Sicherheitskonzept erreicht werden.

### 3.3.3 Theorie von Hartwig

Anfang 2020 hat Hartwig [19] seine Dissertation zum Torsionstragverhalten vorgespannter Kreisringsegmente mit trockenen Fugen veröffentlicht. Den Schubwiderstand definiert er über das Coulomb'sche Reibungsgesetz. Im Kontrast zum Nachweismodell von Grünberg und Göhlmann [16] setzt Hartwig allerdings die resultierende Normalspannungsverteilung aus Normalkraft und Biegung an. Den Querschnitt unterteilt er in  $n$  Querschnittsfasern ( $\hat{=}$  Querschnittsteile) und weist jeder Querschnittsfaser  $i$  eine zulässige Schubspannung zu, die laut Hartwig auch voll angesetzt werden kann, siehe Abbildung 3.2 links. Um das Kräftegleichgewicht zu wahren, wird die Reaktionskraft einer jeden Querschnittsfaser so zu einem neuen Drehpunkt ausgerichtet, dass die Verbindungslinie  $e_i$  zwischen Querschnittsfaser und Drehpunkt den jeweiligen Hebelarm darstellt, wie in Abbildung 3.2 rechts abgebildet. Die Position des neuen Drehpunkts  $y_D$  kann über Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Diese Herangehensweise kann sowohl auf einen klaffenden als auch vollständig überdrückten Fugenquerschnitt angewendet werden. [19]

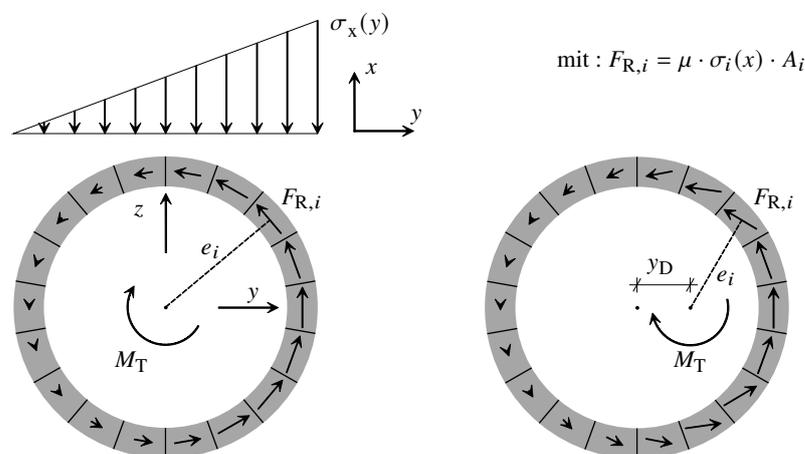


Abbildung 3.2: Aufnehmbare Schubspannungen (links) und Kräftegleichgewicht durch Drehpunktverschiebung nach [19] (rechts)

Das aufnehmbare Torsionsmoment  $M_T$  definiert Hartwig über eine Summenformel gemäß Gleichung 3.8. Dabei bezieht Hartwig die mittlere Normalspannung  $\sigma_i(x)$  einer Faser sowie den Hebelarm  $e_i$  auf den Mittelpunkt des mittleren Radius einer jeden Faser [19]. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der Bezugspunkt von  $\sigma_i(x)$  und  $e_i$  jeweils im Schwerpunkt einer Faser liegen sollte. Dass die Definition des von Hartwig gewählten Bezugspunkts inkonsistent ist, wird besonders deutlich, wenn man den Querschnitt beispielsweise in dreieckige Fasern aufteilt.

$$M_{T,\text{Hartwig}} = \mu \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \cdot A_i \cdot e_i \quad (3.8)$$

In seinen Publikationen bezieht Hartwig [19, 71, 72] sich explizit auf einen Kreisringquerschnitt. Für den Fall, dass dieser gleichmäßig überdrückt ist, spricht für ein Biegemoment gleich null, gibt Hartwig an, dass sein Modell das gleiche Ergebnis liefert, wie die St. Venant'sche Torsionstheorie für dünnwandige, geschlossene Querschnitte. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn lediglich eine Querschnittsfaser über die Wanddicke angeordnet wird, und der Bezugspunkt von  $\sigma_i$  und  $e_i$  auf den mittleren Radius gelegt wird. Sobald man hingegen mehrere Querschnitts-

fasern über die Wanddicke ansetzt, was auch Hartwig in seiner Dissertation [19] macht, steigt das Torsionsmoment  $M_{T,\text{Hartwig}}$  auf einen Wert größer  $M_{T,I,\text{Bredt}}$  an. Die Differenz ist für dünnwandige Querschnitte vernachlässigbar klein. Ursache dieser Differenz ist, dass das Fasermodell von Hartwig [19], entgegen seiner Angaben, die Theorie dünnwandiger Querschnitte nicht berücksichtigt. Besonders deutlich wird dies, sobald ein ungleichmäßig überdrückter Fugenquerschnitt, wie in Abbildung 3.2 rechts, vorliegt.

Da eine händische Ermittlung des Torsionstragvermögens einer Segmentfuge mit diesem Modell nicht praktikabel ist, muss Gleichung 3.8 EDV-gestützt berechnet werden. Hierfür wurde vom Autor ein Softwareprogramm geschrieben, welches eine Querschnittseinteilung in beliebig viele Fasern in Wanddicken- und Wandlängsrichtung erlaubt. Die mittlere Normalspannung  $\sigma_i(x)$  sowie der Hebelarm  $e_i$  einer jeden Faser  $i$  beziehen sich in der vorliegenden Arbeit aber auf den jeweiligen Schwerpunkt der Fasern. Liegt eine klaffende Fuge vor, so wird eine Faser nur dann in Gleichung 3.8 berücksichtigt, wenn alle ihre Eckpunkte überdrückt sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Fasermodell stets mit mindestens vier Fasern in Wanddickenrichtung verwendet. Die Einteilung in Wandlängsrichtung wird dabei so gewählt, dass die radiale und tangentielle Ausdehnung der Fasern möglichst gleich ist.

Für eine konstante Normalkraft ergibt sich für einen Kreisringquerschnitt eine Torsions-Biegemomenten-Interaktion (ohne Querkraft), wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Verlauf ist stetig und zeigt mit zunehmendem Biegemoment eine kontinuierliche Abminderung des zulässigen Torsionsmoments. Wie bereits erwähnt liegt das maximal aufnehmbare Torsionsmoment leicht über dem Bredt'schen Kreisschubfluss mit  $M_T = M_{T,I,\text{Bredt}} = \mu \cdot N \cdot r_m$ . Das Dekompressionsmoment, bei dem die äußerste Randfaser zu klaffen beginnt, ist in Abbildung 3.3 durch eine graue, gestrichelte Linie angegeben. Unter der Annahme dünnwandiger Querschnitte läge das theoretische Dekompressionsmoment bei  $M_B = M_{\text{Dek}} = 0,5 \cdot N \cdot r_m$ .

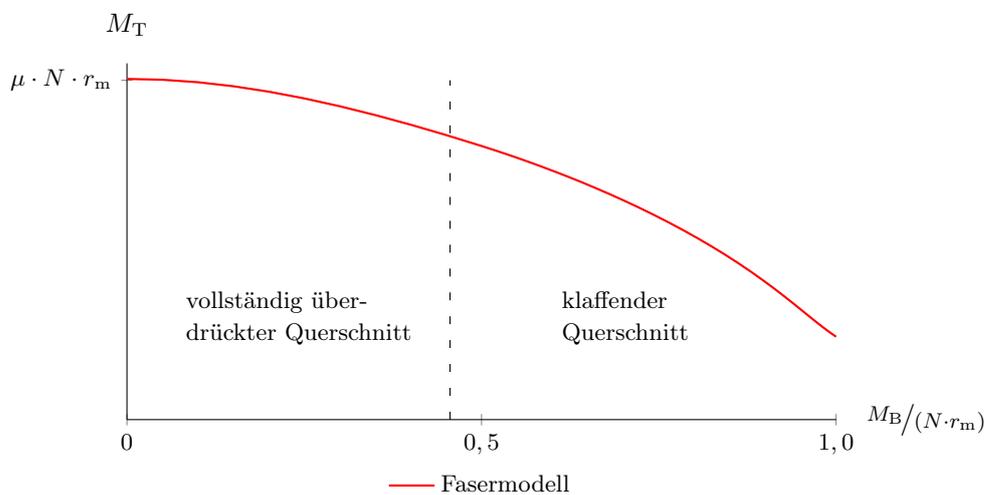


Abbildung 3.3: Torsionstragfähigkeit geschlossener und klaffender Segmentfugen mit Kreisringquerschnitt gemäß dem Fasermodell nach Hartwig

Eine zusätzliche Kombination mit einer Querkraft wird in Hartwig's Dissertation [19] nicht thematisiert. Diesem Thema nimmt sich aber Middendorf [73], mit Hartwig als Betreuer, im Rahmen ihrer Abschlussarbeit an. Aufbauend auf dem Nachweismodell von Hartwig [71] stellt Middendorf fest, dass sich der Drehpunkt durch eine Querkraftbeanspruchung zusätzlich ortho-

gonal zur Wirkungsrichtung der Querkraft verschiebt. Publiziert wurde diese Modellerweiterung von Hartwig und Middendorf [72] im August 2021.

### **Bewertung**

Das Fasermodell von Hartwig [19] macht sich die Lage des Drehpunkts zunutze, um auf das aufnehmbare Torsionsmoment zu schließen. Es handelt sich hierbei jedoch nicht um den Dreh- bzw. Drillruhepunkt, wie er auch in der TdWö in Abschnitt 2.6 verwendet wird, sondern um einen fiktiven Querschnittspunkt, der sich aus Gleichgewichtsbedingungen unter der von Hartwig aufgestellten Theorie ergibt. Dieser Theorie legt Hartwig [19] vordergründig folgende Annahmen zugrunde:

- Es wird ein dünnwandiger Querschnitt vorausgesetzt.
- Die Verbindungslinie einer jeden Querschnittsfaser zum Drehpunkt beschreibt den Hebelarm der jeweiligen Kraftreaktion.
- Eine Kombination aus Torsion und Biegung bzw. Querkraft ruft eine Drehpunktverschiebung hervor.
- Die zulässigen Schubspannungen können an jeder Stelle voll angesetzt werden.

Die ersten beiden Annahmen weisen eine Unverträglichkeit auf. Wird ein dünnwandiger Querschnitt vorausgesetzt, so muss dieser allein über seine Mittellinie berechnet werden können. Dabei müssen alle Schubflüsse tangential zu dieser Mittellinie verlaufen, da der orthogonal zur Mittellinie verlaufende Schubspannungsring nicht geschlossen werden kann, wie in Abschnitt 2.4.2 dargestellt.

Zusammenfassend kann man sagen, dass das Fasermodell sehr anschaulich ist. Prinzipiell setzt Hartwig eine Starrkörperverschiebung der kontaktierenden Segmente voraus, was daran zu erkennen ist, dass die im Fugenquerschnitt angenommenen Schubspannungen orthogonal zum Drehpunkt ausgerichtet sind. Entsprechend liefern auch Berechnungen mit der Finiten-Element-Methode ähnliche Ergebnisse, wenn linear elastische Segmente verwendet werden, wie Hartwig in seiner Dissertation [19] zeigt. Gleichzeitig bestehen allerdings große Unterschiede zwischen der Torsionstragfähigkeit nach dieser Theorie und den von Hartwig [19] durchgeführten Versuchen. In Abschnitt 5 wird im Detail auf das Fasermodell in der oben beschriebenen abgewandelten Form eingegangen. So werden die von Hartwig durchgeführten Versuche erneut ausgewertet. Außerdem werden die noch offenen Modellgrenzen definiert und verifiziert.

### 3.4 Zusammenfassung

Der Stand von Wissenschaft und Technik wird zunächst in kurzer Form für torsionsbeanspruchte Balken dargelegt, bevor genauer auf torsionsbeanspruchte Fugen eingegangen wird. Für monolithische Balken unter Torsionsbeanspruchung werden das räumliche Fachwerkmodell und die Theorie der schiefen Bruchfläche vorgestellt. Das räumliche Fachwerkmodell wurde 1929 von Rausch [15] im Rahmen seiner Dissertation entwickelt und seither stets erweitert. Heute stellt es die Grundlage vieler internationaler Normenwerke [14, 11, 8, 13, 17] dar. Die Theorie der schiefen Bruchfläche kommt vor allem in Russland, Australien und den USA zur Anwendung [60]. Sie wurde 1958 von Lessig [61] entwickelt und seither ebenfalls mehrfach erweitert und überarbeitet.

Bei den Modellen und Theorien zu torsionsbeanspruchten Fugen orientierte man sich zunächst stark am räumlichen Fachwerkmodell. So entwickelten Algorafi et al. [69] und Grünberg und Göhlmann [16] unabhängig voneinander nahezu identische Nachweismodelle überdrückter und klaffender Fugen. Sie übernehmen Annahmen aus dem räumlichen Fachwerkmodell. So unterstellen sie beispielsweise, dass im Fugenquerschnitt ausschließlich St. Venant'sche Torsionsschubspannungen vorliegen. Dabei werden vollständig überdrückte Fugen anders nachgewiesen als klaffende Fugen, wodurch eine Unstetigkeit am Übergang zwischen überdrückter und klaffender Fuge entsteht. Ein für überdrückte und klaffende Fugen einheitliches Nachweismodell stellt Hartwig [19] im Rahmen seiner Dissertation vor. Hartwig teilt den Fugenquerschnitt in Querschnittsfasern ein, denen er entsprechend der vorliegenden Normalspannung und dem Reibbeiwert eine Schubkraft zuordnet. Unter der Bedingung, dass all diese Schubkräfte orthogonal zur Verbindungslinie eines gedachten Drehpunkts ausgerichtet sind, kann über ein Kräftegleichgewicht die Drehachse bestimmt und die Torsionstragfähigkeit ermittelt werden.



# 4 Modellentwicklung zum Torsionstragverhalten überdrückter und klaffender Segmentfugen

## 4.1 Einleitung

Die Elastizitätstheorie stellt den Grundpfeiler vieler Bemessungskonzepte dar. Durch das Superpositionsprinzip und der Annahme eines linear elastischen Werkstoffs können Spannungen und Dehnungen beliebiger Schnittgrößenkombinationen, in Längs- und Querrichtung, mit Hilfe der allgemeinen technischen Biegelehre und der TdWö, auf analytischem Weg berechnet werden. Je nach Qualität der verwendeten Versagenshypothese liegt ein Nachweis gemäß dieser Grundprinzipien in der Regel auf der sicheren Seite, da mögliche Reserven aus Umlagerung nicht aktiviert werden. Ein Nachweis gemäß Elastizitätstheorie ist demnach gut geeignet, eine Untergrenze eines Tragfähigkeitsnachweises zu bestimmen. Aus diesem Grund wird zunächst im Abschnitt 4.2 ein Nachweismodell für Segmentfugen unter kombinierter Beanspruchung nach Elastizitätstheorie vorgestellt. Im nachfolgenden Abschnitt 4.3 wird dieser Nachweis dann weiterentwickelt, um realitätsnähere Vorhersagen treffen zu können.

## 4.2 Torsionstragverhalten nach Elastizitätstheorie

### 4.2.1 Vollständig überdrückte Segmentfugen

Türme von Windenergieanlagen werden in der Regel mit einem Kreisringquerschnitt errichtet. Andere Varianten sehen regelmäßige, polygonale Querschnittsformen wie z.B. Quadrate oder Sechsecke vor. Diese Querschnittsformen sind gemäß Abschnitt 2.6.2 wölbfrei. Somit rufen Torsionsbeanspruchungen in monolithischen Türmen von Windenergieanlagen nur St. Venant'sche Torsionsschubspannungen hervor. Da sich ein segmentierter Turm mit vollständig überdrückten Segmentfugen, unter der Annahme, dass kein partielles Gleiten im Fugenquerschnitt auftritt, nicht von einem monolithischen Turm unterscheidet, werden hier für vollständig überdrückte Segmentfugen zunächst ebenfalls nur St. Venant'sche Torsionsschubspannungen berücksichtigt.

Bei Hohlquerschnitten setzen sich die resultierenden St. Venant'schen Torsionsschubspannungen aus einem konstanten Bredt'schen und einem über die Wanddicke linear verteilten offenen Torsionsanteil zusammen. Die Schubspannungen sind somit trapezförmig über die Wanddicke verteilt. Der konstante Bredt'sche Anteil wird auf der Außenkante durch den offenen Torsionsanteil verstärkt, während auf der Innenkante eine Reduzierung erfolgt. Zur Illustration stellt Abbildung 4.1 den St. Venant'schen Schubfluss am Beispiel eines Kreisringquerschnitts dar.

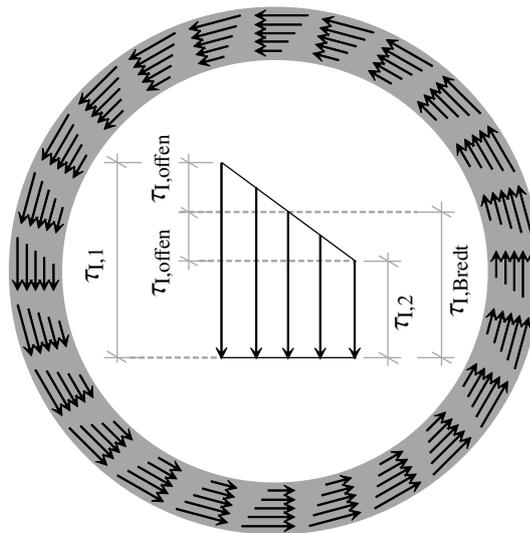


Abbildung 4.1: St. Venant'scher Schubfluss eines Kreisringquerschnitts

Für einen Kreisringquerschnitt mit konstanter Wanddicke können die St. Venant'schen Schubspannungen allgemein zu Gleichung 4.1 zusammengefasst werden.

$$\tau_{I,1,2} = \frac{3 \cdot M_{T,I} \cdot (r_m \pm t)}{2 \cdot \pi \cdot r_m \cdot t \cdot (3 \cdot r_m^2 + t^2)} \quad (4.1)$$

Auf der Widerstandsseite stehen die zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}$  nach Gleichung 4.2, die gemäß dem Coulomb'schen Reibungsgesetz (Abschnitt 2.3) über den Reibbeiwert  $\mu$  und die vorherrschende Normalspannung  $\sigma$  infolge Normalkraft und Biegung berechnet wird.

$$\pm \tau_{zul,\mu}(s) = \mu \cdot \sigma(s) \quad (4.2)$$

Die Laufvariable  $s$  fährt die Profilmittellinie des dünnwandigen Querschnitts ab.

#### 4.2.2 Klaffende Segmentfugen

Ein segmentierter Stab mit klaffenden Segmentfugen kann wie ein Stab mit Querschnittswechsel im Fugenbereich aufgefasst werden. Die auftretenden Torsionsschnittgrößen sind, wie in Abschnitt 2.6.4 dargestellt, vergleichbar mit denen eines mit Bindeblechen verstärkten Trägers. Demnach sind im Fugenquerschnitt vordergründig sekundäre Torsionsschubspannungen zu erwarten. Das Wölbmoment hingegen ist gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.6.4 vernachlässigbar klein.

Zum gleichen Schluss gelangt man über die in Abbildung 4.2 dargestellte Betrachtung. Im Gegensatz zur Herangehensweise in Abschnitt 2.6.4 wird in Abbildung 4.2 allein der Fugenbereich betrachtet. Dabei beschreibt  $\theta$  den Öffnungswinkel der Fuge in der Querschnittsebene, während  $L$  die Öffnungsweite in Stablängsrichtung beschreibt. In Abbildung 2.24 als Analogie zum segmentierten Stab mit klaffenden Fugen wäre die Öffnungsweite  $L$  der Abstand zwischen den Bindeblechen. Der Öffnungswinkel  $\theta$  wäre in Abbildung 2.24 der Winkel, den das Bindeblech überbrückt um den Querschnitt zu schließen. Unterstellt man den fugenangrenzenden Segmenten, sie seien wölbfrei, stellen diese an beiden Enden des Stabes eine starre Wölbfeder

( $k_{w,i} = \infty$ ) dar. Die Steifigkeit der Torsionsdrehfeder  $k_{\vartheta}$  ist abhängig vom Turmquerschnitt und der Höhenlage des betrachteten Fugenquerschnitts. Da sie jedoch lediglich die Verdrehung, aber nicht die Torsionsschnittgrößen beeinflusst, ist sie für die nachfolgenden Berechnungen irrelevant.

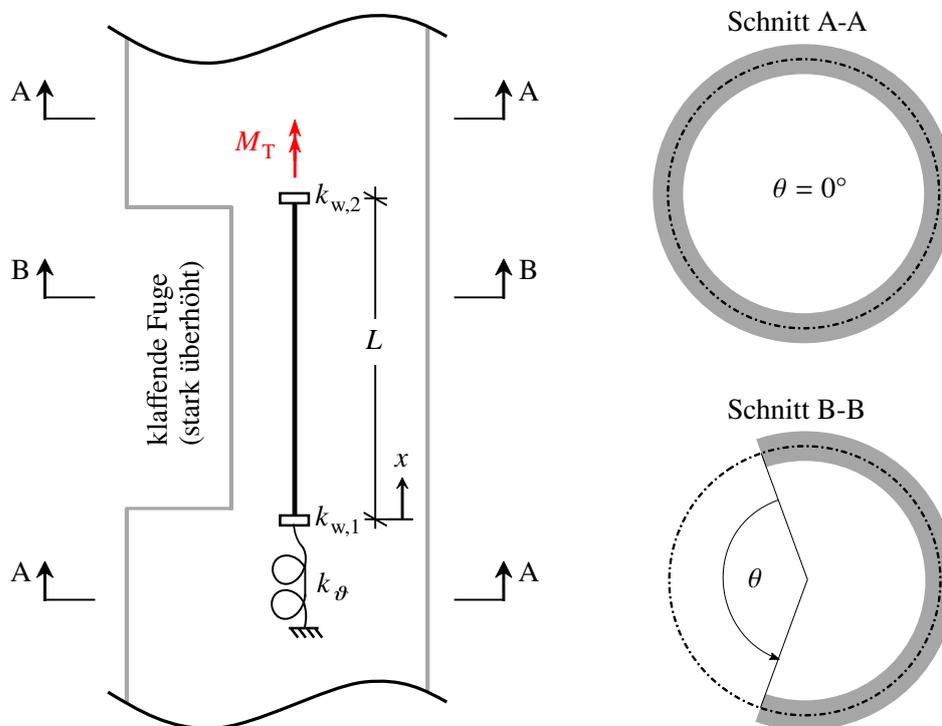


Abbildung 4.2: Torsionssystem einer klaffenden Fuge

Mithilfe der Differentialgleichung der Theorie der Wölbkrafttorsion, Gleichung 2.106, können die Torsionsschnittgrößen über die Fugenweite hergeleitet werden. Sie ergeben sich für das System in Abbildung 4.2 zu:

$$\begin{bmatrix} M_W \\ M_{T,I} \\ M_{T,II} \end{bmatrix} = M_T \cdot \begin{bmatrix} \frac{L}{\varepsilon_W} \cdot \sinh\left(\varepsilon_W \cdot \frac{x}{L}\right) \\ 1 - \cosh\left(\varepsilon_W \cdot \frac{x}{L}\right) \\ \cosh\left(\varepsilon_W \cdot \frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} + \frac{1 - \cosh \varepsilon_W}{\sinh \varepsilon_W} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L}{\varepsilon_W} \cdot \cosh\left(\varepsilon_W \cdot \frac{x}{L}\right) \\ - \sinh\left(\varepsilon_W \cdot \frac{x}{L}\right) \\ \sinh\left(\varepsilon_W \cdot \frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\text{mit: } \varepsilon_W = L \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot C_M}} \quad I_T \text{ und } C_M \text{ vom Querschnitt im Schnitt B-B}$$

Auch wenn die Öffnungsweite  $L$  der Fuge nicht explizit bestimmt werden kann, so zeigt sich dennoch für kleine Öffnungsweiten ein eindeutiger Trend der primären und sekundären Torsionsmomentenanteile, wie in Abbildung 4.3 dargestellt.

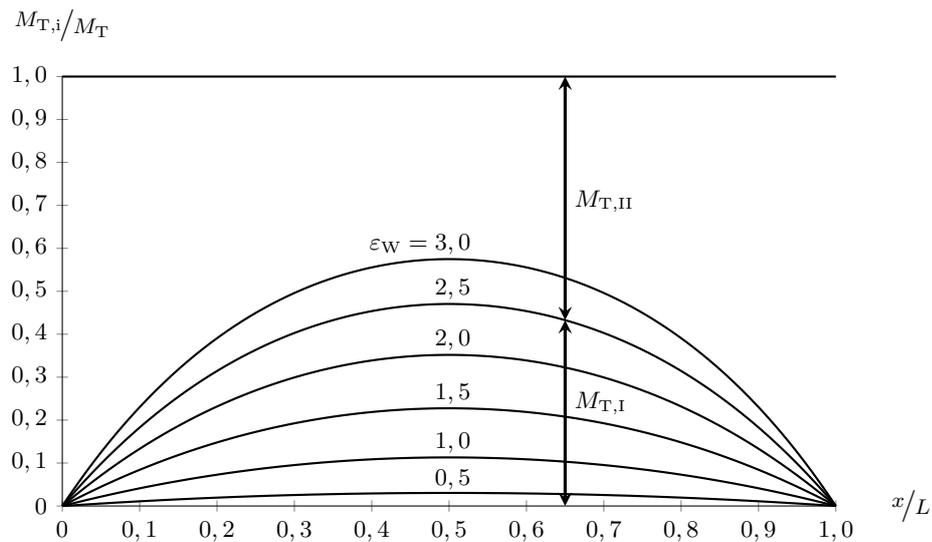


Abbildung 4.3: Primäre und sekundäre Torsionsanteile in einer klaffenden Segmentfuge mit verschiedenen Stabkennzahlen

Es ist gut zu erkennen, wie der primäre Torsionsmomentenverlauf  $M_{T,I}$  für kleine Stabkennzahlen  $\epsilon_W$  gegen null geht, während das Torsionsmoment  $M_T$  fast vollständig über sekundäre Torsionsmomentenanteile  $M_{T,II}$  abgetragen wird. Die Bedeutung der Wölbkrafttorsion nimmt demnach mit kleiner werdenden Stabkennzahlen  $\epsilon_W$  zu.

Der Wölbmomentenverlauf ist hingegen weniger eindeutig. Dieser kann den Abbildungen 4.4 und 4.5 für unterschiedliche Stabkennzahlen  $\epsilon_W$  entnommen werden.

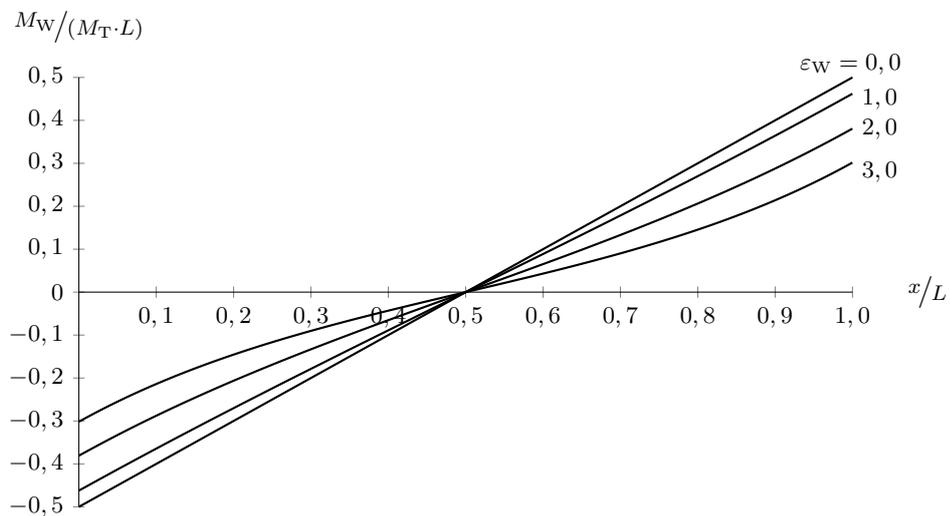


Abbildung 4.4: Wölbmomentenverläufe in einer klaffenden Segmentfuge mit verschiedenen Stabkennzahlen, aber gleichbleibender Fugenöffnungsweite  $L$

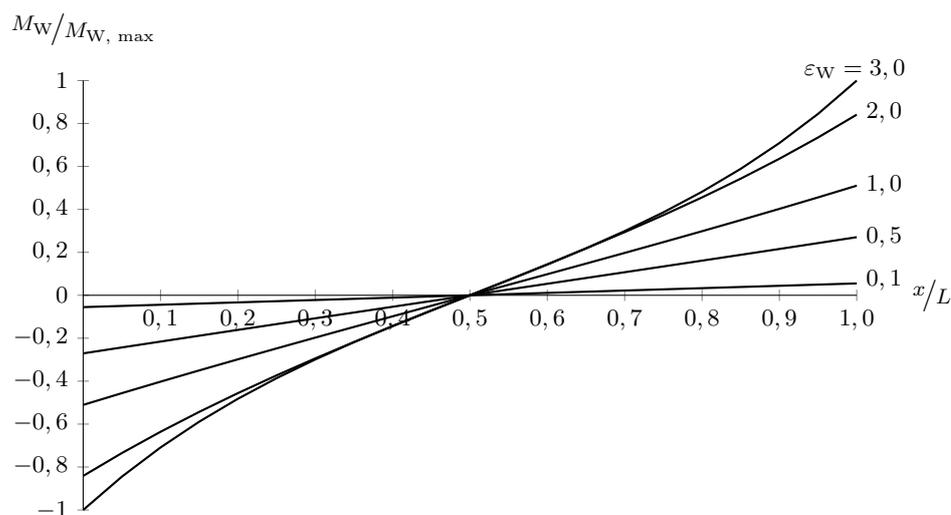


Abbildung 4.5: Wölbmomentenverläufe in einer klaffenden Segmentfuge mit verschiedenen Stabkennzahlen, aber gleichbleibendem Verhältnis von Torsions- zur Wölbsteifigkeit

Während in Abbildung 4.4 das Wölbmoment mit kleiner werdender Stabkennzahl  $\varepsilon_W$  zunimmt, nimmt es in Abbildung 4.5 mit kleiner werdender Stabkennzahl  $\varepsilon_W$  ab. In beiden Abbildungen weisen die Wölbmomentenverläufe eine Nullstelle innerhalb der klaffenden Fuge auf, was bereits darauf schließen lässt, dass absolut gesehen keine großen Wölbmomente entstehen können. Entsprechend Gleichung 4.3 gehen neben der Öffnungsweite  $L$  auch die Torsionssteifigkeit  $G \cdot I_T$  und die Wölbsteifigkeit  $E \cdot C_M$  in die Stabkennzahl  $\varepsilon_W$  ein. Dies sind material- und querschnittsabhängige Größen. Somit stehen sie im direkten Zusammenhang mit dem Fugenöffnungswinkel  $\theta$ . Allgemein gilt: Je größer der Öffnungswinkel  $\theta$ , desto größer wird das Verhältniss  $I_T/C_M$  und somit auch die Stabkennzahl  $\varepsilon_W$ . Für die Öffnungsweite  $L$  ist es genauso: Je größer die Öffnungsweite  $L$ , desto größer wird die Stabkennzahl  $\varepsilon_W$ . Da hier jedoch nur sehr kleine Öffnungsweiten  $L < 1\text{ cm}$  betrachtet werden und der Öffnungswinkel  $\theta$  erst für unrealistisch große Öffnungswinkel ( $\theta > 300$ ) einen merklichen Einfluss auf die Stabkennzahl hat, erhält man für alle praktischen Belange nur sehr kleine Stabkennzahlen  $\varepsilon_W$ . Somit erhält man, aufgrund der kleinen Öffnungsweite  $L$ , auch in Abbildung 4.4 absolut gesehen kleine Wölbmomente im Fugenbereich.

Um die Größenordnungen der eingehenden Parameter zu verdeutlichen, sind in Tabelle 4.1 am Beispiel eines klaffenden Kreisringquerschnitts die Stabkennzahlen  $\varepsilon_W(L, \theta)$  für verschiedene Fugenöffnungsweiten  $L$  und Fugenöffnungswinkel  $\theta$  angegeben.

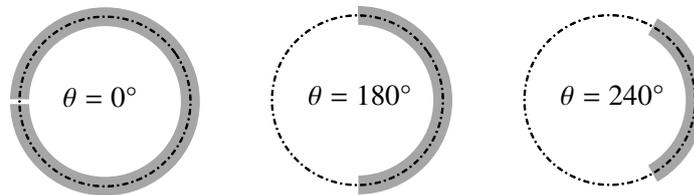
Tabelle 4.1: Stabkennzahlen eines Kreisringquerschnitts mit verschiedenen Fugenöffnungsweiten  $L$  und Fugenöffnungswinkel  $\theta$ 

$$E = 41000 \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \hat{\nu})} = 17083,33 \text{ MPa} \quad \text{mit } \hat{\nu} = 0,2$$

$$r_m = 1,80 \text{ m}$$

$$t = 0,40 \text{ m}$$



$I_T \text{ [m}^4\text{]}$	0,2413	0,1206	0,0804
$C_M \text{ [m}^6\text{]}$	61,2559	0,2825	0,0146
$\varepsilon_W(L = 50 \text{ cm})$	0,0203	0,2109	0,7570
$\varepsilon_W(L = 20 \text{ cm})$	0,0081	0,0844	0,3028
$\varepsilon_W(L = 1 \text{ cm})$	0,0004	0,0042	0,0151

Trotz einer unrealistisch großen Fugenöffnungsweite  $L = 50 \text{ cm}$  bleibt die Stabkennzahl kleiner eins und der primäre Torsionsanteil gemäß Abbildung 4.3 damit unter 10%. Für eine Fugenöffnungsweite von 1 cm beträgt der sekundäre Torsionsanteil bereits nahezu 100%.

Zur Nachweisführung ist es demnach allgemein ausreichend, primäre Torsionsschubspannungen in klaffenden Fugen zu vernachlässigen, solange der klaffende Querschnitt nicht wölbfrei ist. Die Schubspannungen aus sekundärer Torsion können mit denen aus Querkraft superponiert werden, wie in Gleichung 4.4 dargestellt. Für geschlossene oder wölbfreie Querschnitte ist  $\tau_{II}(s)$  durch  $\tau_{I,1}(s)$  zu ersetzen.

$$\tau_V(s) + \tau_{II}(s) \leq \tau_{zul,\mu}(s) = -\mu \cdot \sigma(s) \quad (4.4)$$

Betrachtet man allerdings den qualitativen Verlauf sekundärer Torsionsschubspannungen  $\tau_{II}(s)$  klaffender Querschnitte mit den zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}(s)$  infolge Coulomb'scher Reibung, so wird eine Unverträglichkeit beider Verläufe deutlich, wie in Abbildung 4.6 beispielhaft gezeigt. Der sekundäre Torsionsschubfluss steigt immer mindestens quadratisch an. Gleichzeitig wachsen die zulässigen Schubspannungen am freien Querschnittsende maximal linear an, wodurch die sekundären Torsionsschubspannungen am freien Querschnittsende schneller

ansteigen als die zulässigen Schubspannungen.

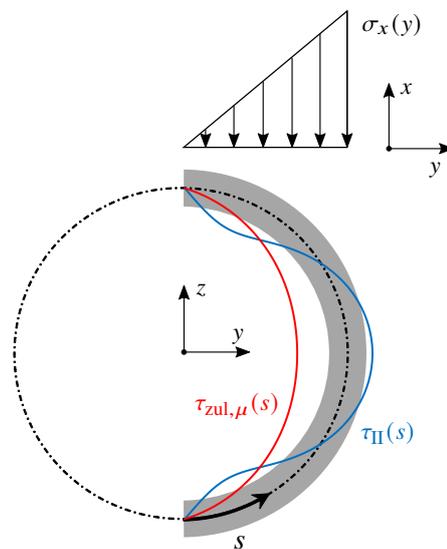


Abbildung 4.6: Qualitativer Verlauf sekundärer Torsionsschubspannungen und zulässiger Schubspannungen eines bis zur Mitte klaffenden Querschnitts

Das aufnehmbare Torsionsmoment ist daher streng genommen nahe null. Weicht man an dieser Stelle leicht vom Vorgehen einer linear elastischen Berechnung ab und setzt für den Schubabtrag einen reduzierten Querschnitt an, können Torsionsmomente rechnerisch aufgenommen werden. Dabei wird der ursprüngliche, klaffende Querschnitt zum Abtrag von Normalkraft und Biegemoment herangezogen, während für den Torsionsnachweis die freien Enden des klaffenden Querschnitts unberücksichtigt bleiben.

Am deutlichsten zeigt sich dies am Beispiel eines gerade noch klaffenden Kreisringquerschnitts. Abbildung 4.7 zeigt die zulässigen Schubspannungen sowie die sekundären Torsionsschubspannungen verschiedener Torsionsmomente.

In der Biegezugzone bei  $\hat{s} = 0$  können keine Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}$  zugelassen werden, da die Normalspannung hier gegen null geht. Der Verlauf der zulässigen Schubspannungen bildet dabei eine horizontale Tangente aus, wodurch quasi keine sekundären Torsionsschubspannungen aufnehmbar sind, wenn der gesamte Querschnitt für den Abtrag des Torsionsmoments herangezogen wird. Setzt man für den Torsionsabtrag hingegen einen reduzierten Querschnitt an, umgeht man dieses Problem, wie Abbildung 4.7 deutlich macht. Das maximale Torsionsmoment  $M_{T,II,max}$  ergibt sich für einen reduzierten Querschnitt, der einem fiktiven Öffnungswinkel von  $\theta = 90^\circ$  entspricht. Die Normalspannungen aus Normalkraft und Biegung werden unverändert über den gesamten Querschnitt abgetragen.

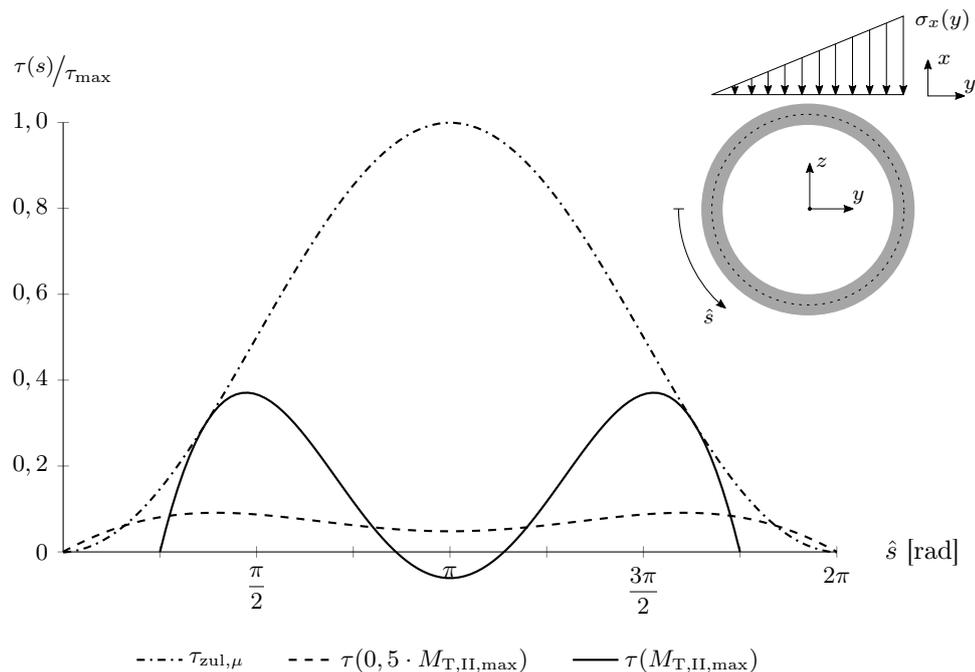


Abbildung 4.7: Vergleich sekundärer und zulässiger Torsionsschubspannungen einer klaffenden Segmentfuge mit Kreisrohrquerschnitt

#### 4.2.3 Schnittgrößeninteraktion nach Elastizitätstheorie

Wertet man das oben vorgestellte Nachweismodell für eine Interaktion aus Normalkraft, Biegung und Torsion (ohne Querkraft) aus, erhält man die Torsionstragfähigkeiten in Abhängigkeit vom Biegemoment entsprechend Abbildung 4.8. Mit zunehmendem Biegemoment fällt das zulässige Torsionsmoment des vorgestellten Nachweismodells linear ab. Beim Dekompressionsmoment liegt eine Unstetigkeit vor, da das Torsionsmoment sowohl nach Abschnitt 4.2.1 als vollständig überdrückt, als auch nach Abschnitt 4.2.2 als klaffende Fuge berechnet werden kann.

Für ein Biegemoment von Null ergeben sich für das Modell nach Elastizitätstheorie [1] signifikant geringere Torsionstragfähigkeiten im Vergleich zum Fasermodell [19] sowie dem Modell von Grünberg und Göhlmann [16]. Ursächlich hierfür ist, dass das vorgestellte Modell nach Elastizitätstheorie, neben den Bredt'schen Torsionsschubspannungen, die konstant über die Wanddicke verlaufen, auch St. Venant'sche Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts, die verschränkt über die Wanddicke verlaufen, voraussetzt. Die anderen Modelle in Abbildung 4.8 unterstellen hingegen einen konstanten Schubfluss über die Wanddicke, wenn eine konstant überdrückte Fuge vorliegt.

Auch wenn der unstetige Verlauf des vorgestellten Modells so nicht der Realität entsprechen kann, definiert er dennoch eine Untergrenze. Des Weiteren können wichtige Schlussfolgerungen getroffen werden, die im nachfolgenden Abschnitt diskutiert und in Abschnitt 4.3 umgesetzt werden.

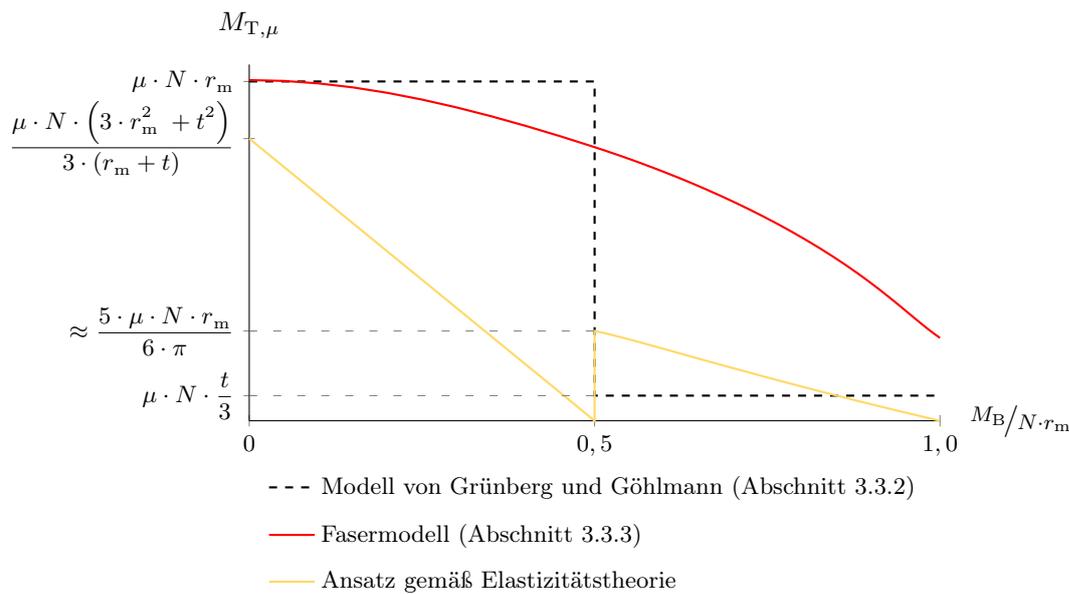


Abbildung 4.8: Aufnehmbares Torsionsmoment in Abhängigkeit vom Biegemoment – Gegenüberstellung der Nachweismodelle von Hartwig [19], Grünberg und Göhlmann [16] und des vorgestellten Nachweismodells nach Elastizitätstheorie [1]

#### 4.2.4 Diskussion der Modellannahmen

Wie auch das Modell von Grünberg und Göhlmann [16] legt das Modell nach Elastizitätstheorie verschiedene Berechnungsarten für vollständig überdrückte und klaffende Segmentfugen zugrunde. Dadurch kommt es in Abbildung 4.8 zu den unstetigen Verläufen der zulässigen Torsionsmomente beider Ansätze. Daran ist zu erkennen, dass manche tragfähigkeitssteigernde bzw. -abmindernde Effekte der überdrückten oder klaffenden Fuge noch nicht berücksichtigt wurden, um einen stetigen Verlauf des zulässigen Torsionsmoments zu erhalten. Während das Modell von Grünberg und Göhlmann [16] das zulässige Torsionsmoment vollständig überdrückter Fugen unter hohen Biegemomenten sicherlich überschätzt, so unterschätzt das vorgestellte Modell nach Elastizitätstheorie in diesem Bereich die zulässigen Torsionsmomente.

Allgemein beschreibt das Modell nach Elastizitätstheorie eine Untergrenze der zulässigen Torsionsmomente, da tragfähigkeitssteigernde Umlagerungen in die Biegedruckzone unberücksichtigt bleiben. Der Tragfähigkeitssprung zu klaffenden Segmentfugen erklärt sich zum einen über die unterschiedlichen Berechnungsarten und zum anderen über die in Abschnitt 4.2.2 beschriebene Berücksichtigung eines reduzierten Querschnitts für den Schubabtrag. Dies entspricht bereits einer ersten Umlagerung von Torsionsschubspannungen von der Biegezugzone hin zur Biegedruckzone. Dadurch verschiebt sich der Schubmittelpunkt der überdrückten Fuge, was wiederum die Bedingungen der Wölbfreiheit und damit auch die Annahme reiner St. Venant'scher Torsion aushebelt.

Was ebenfalls hervorsteicht ist, dass das Modell nach Elastizitätstheorie bei einem Biegemoment von null ein wesentlich geringeres zulässiges Torsionsmoment im Vergleich zu den anderen Modellen angibt. Dies liegt offensichtlich an der Berücksichtigung von Torsionsanteilen des offenen Querschnitts, wodurch die zulässigen Schubspannungen nicht vollständig ausgeschöpft werden können. In der Literatur [48, 50] werden Torsionsanteile des offenen Querschnitts bei

geschlossenen Querschnitten häufig vernachlässigt, da das zugehörige Torsionsmoment  $M_{T,I,offen}$  in der Regel, im Vergleich zum Bredt'schen Torsionsmoment  $M_{T,I,Bredt}$ , sehr klein ist. Diese Aussage ist zunächst erst einmal korrekt, jedoch «belegt»  $M_{T,I,offen}$  in diesem Zusammenhang Schubspannungen, die andernfalls von  $M_{T,I,Bredt}$  hätten genutzt werden können. Was ursächlich dafür ist, dass mit dem vorgestellten Modell deutlich geringere Torsionstragfähigkeiten für gleichmäßig überdrückte Fugen erreicht werden, als mit den anderen oben genannten Modellen. Dass es jedoch durchaus gerechtfertigt ist, einen reinen Bredt'schen Torsionsschubfluss für konstant überdrückte Segmentfugen zu verwenden, wird in Abschnitt 4.3.1 näher erläutert.

## 4.3 Umlagerung der Torsionsschubspannungen

### 4.3.1 Grundsätzliche Überlegungen

Sind die Fugenquerschnitte eines segmentierten Stabes vollständig und gleichmäßig überdrückt, so ist dieser nicht von einem monolithischen Stab zu unterscheiden, solange kein partielles Gleiten eintritt. Liegt, wie bei Türmen für Windenergieanlagen, ein geschlossener, wölbfreier Querschnitt vor, stellen sich infolge Torsion im Fugenquerschnitt ausschließlich primäre Torsionsschubspannungen ein. Die Torsionstragfähigkeit der Fuge kann hier direkt über den bekannten Torsionsschubfluss und das Coulomb'sche Reibungsgesetz entsprechend Abschnitt 4.2.1 berechnet werden. Wird das rechnerisch zulässige Torsionsmoment gemäß Abschnitt 4.2.1 überschritten, stellt sich ein partielles Gleiten ein, welches sich ringförmig von außen nach innen über die Wanddicke fortsetzt. Mit zunehmendem Torsionsmoment lagern sich die Torsionsanteile des offenen Querschnitts um, bis im Fugenquerschnitt nur noch ein über die Wanddicke konstanter Kreisringschubfluss vorherrscht. Wächst das Torsionsmoment über diesen Punkt hinaus, führt dies zum direkten Abgleiten der kontaktierenden Segmente. Somit kann über einen reinen Bredt'schen Schubfluss das maximal aufnehmbare Torsionsmoment einer gleichmäßig überdrückten Fuge ermittelt werden.

Sind die Fugenquerschnitte infolge Normalkraft und Biegung ungleichmäßig überdrückt, können in der Biegedruckzone höhere Schubspannungen abgetragen werden als in der Biegezugzone. Solange der Querschnitt vollständig überdrückt ist, erfüllt er zunächst noch die Bedingungen der Wölbfreiheit. Entsprechend stellen sich infolge einer Torsionseinwirkung erneut ausschließlich primäre Torsionsschubspannungen ein, bis die minimale aufnehmbare Schubspannung aus Reibung in der Biegezugzone erreicht ist. Steigt das Torsionsmoment um einen Wert  $\Delta M_T$  weiter an, entsteht im Bereich der Biegezugzone ein partielles Gleiten. Der Zuwachs des Torsionsmoments  $\Delta M_T$  kann nur über den noch haftenden Fugenbereich abgetragen werden, welcher nun im Allgemeinen nicht mehr die Bedingungen eines wölbfreien Querschnitts erfüllt. Somit stagnieren die Schubspannungen im Bereich des partiellen Gleitens, während sich im restlichen Fugenquerschnitt weitere Schubspannungen aufbauen. Mit zunehmendem Torsionsmoment vergrößert sich der Bereich des partiellen Gleitens stetig, bis schlussendlich die kontaktierenden Segmente in ein globales Gleiten übergehen.

Des Weiteren gilt es zu beachten, dass sich ein globales Gleiten im Fugenbereich nur dann einstellt, wenn die zulässigen Schubspannungen gemäß Coulomb'scher Reibung maßgebend sind. Je nach Auslegung kann aber auch die Schubfestigkeit des verwendeten Betons maßgebend sein.

## 4.3.2 Analytischer Lösungsansatz

### 4.3.2.1 Vorgehensweise

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Überlegungen beschreiben qualitativ den Umlagerungsprozess der Torsionsschubspannungen für einen vollständig überdrückten Fugenquerschnitt. Nachfolgend soll dieser Umlagerungsprozess allgemein mit Berechnungsansätzen versehen werden. Auf der Widerstandsseite werden dabei zunächst ausschließlich die zulässigen Schubspannungen gemäß Coulomb'scher Reibung betrachtet. Nachdem ein konsistenter Berechnungsansatz entwickelt wurde, wird dieser um die Schubfestigkeit des fugenangrenzenden Werkstoffs erweitert.

Zur besseren Veranschaulichung soll hier zunächst auf einen bereits klaffenden Fugenquerschnitt eingegangen werden. In diesem sind entsprechend Abschnitt 2.6.4 vordergründig sekundäre Torsionsschubspannungen zu erwarten. In Abschnitt 4.2.2 wurde bereits dargelegt, dass die zulässigen Schubspannungen an den «freien» Querschnittsenden des überdrückten Fugenbereichs langsamer ansteigen, als die infolge sekundärer Torsion hervorgerufenen Schubspannungen. Somit beginnt ein partielles Gleiten an diesen freien Querschnittsenden und wächst mit zunehmendem Torsionsmoment immer weiter an, bis das gesamte Umlagerungspotential ausgeschöpft ist, und die Elemente in ein globales Gleiten übergehen.

### 4.3.2.2 Sekundäre Torsionsschubspannungen am verallgemeinerten Kreisringausschnitt

Abbildung 4.9 zeigt allgemein einen Kreisringquerschnitt, an dem nachfolgend der Umlagerungsprozess händisch vorgerechnet wird. Der Fugenquerschnitt befindet sich in der  $yz$ -Ebene. Der Koordinatenursprung stimmt mit dem Ursprung des Radius  $r_m$  überein. Infolge Biegung klafft der Querschnitt um den Öffnungswinkel  $\theta$  auf. Die Schnittgrößen beziehen sich auf das angegebene Koordinatensystem. Demnach wirkt die Drucknormalkraft (negativ) immer im Koordinatenursprung. Das Biegemoment wirkt stets positiv um die  $z$ -Achse, eine Querkraft wird zunächst nicht berücksichtigt. Da hier ein dünnwandiger Querschnitt betrachtet wird, bietet es sich an, entlang der Profilmittellinie eine Laufvariable  $s$  zu definieren. Diese läuft den überdrückten Bereich des Fugenquerschnitts gegen den Uhrzeigersinn ab und beginnt bei  $s = s_a = 0$  und endet bei  $s = s_e$ . Gleichzeitig wird eine weitere Koordinate  $\hat{s}$  festgelegt, die den gesamten Fugenquerschnitt abläuft. Da  $\hat{s}$  im Rahmen dieser Arbeit nur im Bogenmaß und ausschließlich an Kreisringquerschnitten verwendet wird, ist es ausreichend, ihren Anfang allgemein auf einen Punkt  $(-y|0)$ , entsprechend Abbildung 4.9, festzulegen.

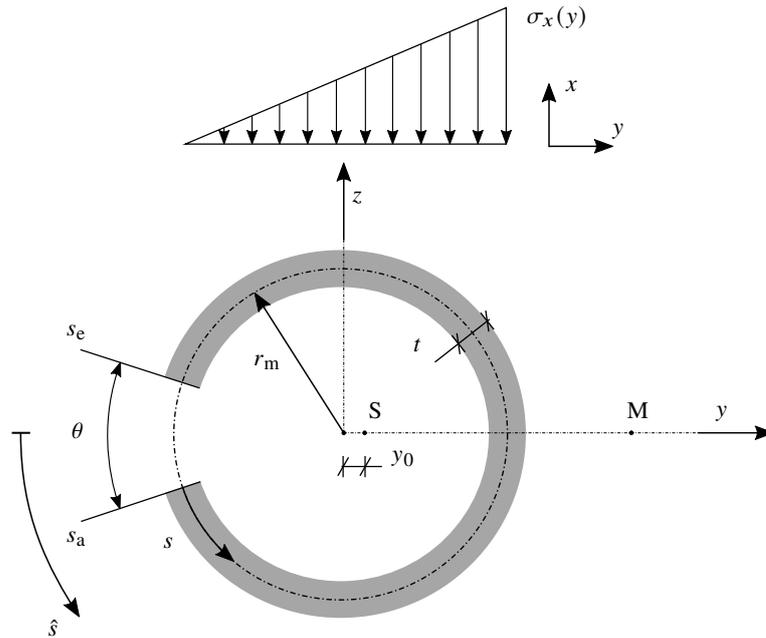


Abbildung 4.9: Koordinaten-, Parameter- und Vorzeichendefinition am Kreisringquerschnitt mit klaffender Fuge

Die Koordinaten der Wandungsmittellinie des überdrückten Fugenbereichs können mit der Laufvariablen  $s$  und dem Öffnungswinkel  $\theta$  wie folgt bestimmt werden:

$$y_s(s, \theta) = -r_m \cdot \cos\left(\frac{s}{r_m} + \frac{\theta}{2}\right) \quad (4.5)$$

$$z_s(s, \theta) = -r_m \cdot \sin\left(\frac{s}{r_m} + \frac{\theta}{2}\right) \quad (4.6)$$

Die Querschnittsfläche des überdrückten Fugenbereichs kann bei konstanter Wandstärke  $t$  mit Gleichung 4.7 berechnet werden.

$$A(\theta) = r_m \cdot t \cdot (2\pi - \theta) \quad (4.7)$$

Der Schwerpunkt des überdrückten Fugenbereichs entspricht bei vollständig überdrückter Fuge dem Koordinatenursprung. Liegt eine klaffende Fuge vor, beschreiben  $y_0$  und  $z_0$  seine Lage. Beim Kreisringquerschnitt gemäß Abbildung 4.9 ergibt sich  $z_0$  aufgrund der Symmetrie automatisch zu null, während  $y_0$  zu

$$y_0(\theta) = \frac{2 \cdot r_m \cdot \sin\frac{\theta}{2}}{2\pi - \theta} \quad (4.8)$$

berechnet wird. Das Flächenmoment 2. Ordnung, bezogen auf die Biegeachse  $z$ , kann für den überdrückten Fugenbereich zu

$$I_z(\theta) = \frac{r_m^3 \cdot t \left( -4 + (\theta - 2\pi)^2 + 4 \cdot \cos\theta + (\theta - 2\pi) \cdot \sin\theta \right)}{4\pi - 2\theta} \quad (4.9)$$

bestimmt werden. Für eine lineare Normalspannungsverteilung in  $xy$ -Ebene können nun die Normalspannungen  $\sigma(s, \theta)$  an der Stelle  $s$  infolge Normalkraft und Biegemoment wie folgt berechnet werden:

$$\sigma(s, \theta) = \frac{M_z + N \cdot y_0(\theta)}{I_z(\theta)} \cdot (y_0(\theta) - y_s(s, \theta)) + \frac{N}{A(\theta)} \quad (4.10)$$

Die vorgestellten Gleichungen 4.5 bis 4.10 sind vom zunächst noch unbekanntem Fugenöffnungswinkel  $\theta$  abhängig. Unter der Bedingung, dass  $\sigma(s_a, \theta > 0) = 0$  ist, erhält man die Iterationsgleichung 4.11 für den gesuchten Öffnungswinkel  $\theta$ .

$$\theta_{n+1} = 2 \cdot \arccos \left( \frac{-I_z(\theta_n) \cdot N - A(\theta_n) \cdot y_0(\theta_n) \cdot M_{z,\text{tot}}}{A(\theta_n) \cdot r_m \cdot M_{z,\text{tot}}} \right) \quad (4.11)$$

$$\text{mit: } M_{z,\text{tot}} = M_z + N \cdot y_0(\theta_n)$$

Die Widerstandsseite kann nun über das Coulomb'sche Reibungsgesetz (Abschnitt 2.3 bzw. Gleichung 4.2) für den Kreisringquerschnitt gemäß Abbildung 4.9 bestimmt werden. Auf der Einwirkungsseite befindet sich der Torsionsschubfluss nach der Theorie der Wölbkrafttorsion. Aus den Gleichungen 2.101, 2.102 und 2.104 können die Torsionsschubspannungen  $\tau_{II}(x, s)$  allgemein wie folgt zusammengefasst werden:

$$\tau_{II}(x, s) = \frac{M_{T,II}(x) \cdot S_W(s)}{C_M \cdot t} \quad (4.12)$$

Für den Kreisringquerschnitt gemäß Abbildung 4.9 können der Torsionseinheitsschubfluss  $S_W(s, \theta)$  und der Wölbwiderstand  $C_M(\theta)$  nach Gleichung 4.13 und Gleichung 4.14 berechnet werden.

$$S_W(s, \theta) = \frac{1}{2} \cdot r_m \cdot t \cdot \left( -2\pi \cdot r_m \cdot s + s^2 + r_m \cdot s \cdot \theta + \frac{4 \cdot r_m^2 \left( -\cos \left( \frac{s}{r_m} + \frac{\theta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \left( \delta \cdot \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + 2 \cdot \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)}{\delta + \sin \theta} \right) \quad (4.13)$$

$$C_M(\theta) = \frac{r_m^5 \cdot t \left( -48 - 12 \cdot \delta^2 + \delta^4 - 12 \cdot (-4 + \delta^2) \cdot \cos \theta + \delta \cdot (-48 + \delta^2) \cdot \sin \theta \right)}{12 \cdot (\delta + \sin \theta)} \quad (4.14)$$

$$\text{mit: } \delta = 2\pi - \theta$$

Der Verlauf sekundärer Torsionsschubspannungen  $\tau_{II}(x, s)$  bzw. der Verlauf des Torsionseinheitsschubflusses  $S_W(s, \theta)$  konnte bereits den Abbildungen 4.6 und 4.7 für verschiedene Öffnungswinkel  $\theta$  entnommen werden. Ein derartiger Spannungsverlauf würde sich infolge eines sekundären Torsionsmoments einstellen, wenn die fugenangrenzenden Segmente linear elastisch sind, und in der Fuge kein partielles Gleiten auftreten würde. Wie sich die Schubspannungen umlagern, wenn partielles Gleiten berücksichtigt wird, zeigt das im Abschnitt 4.3.2.3 vorgestellte Berechnungsbeispiel.

### 4.3.2.3 Spannungsumlagerung

Teile der hier vorgestellten Modellentwicklung wurden vom Autor bereits in der Zeitschrift Beton- und Stahlbetonbau [1, 2] vorab veröffentlicht. Dort wurde ein Berechnungsbeispiel, basierend auf einem Aufsatz von Hartwig und Marx [71] vorgestellt, welches nun auch hier als konkretes Zahlenbeispiel dient. Das Berechnungsbeispiel umfasst eine horizontale Trockenfuge zwischen zwei Kreisringsegmenten mit einem Reibbeiwert  $\mu = 0,5$ . Die Segmente haben einen mittleren Radius  $r_m = 1,8$  m und eine Wandstärke  $t = 0,4$  m. Bei einer Normalkraft  $N = -80$  MN und einem Biegemoment von  $M_z = 72$  MNm erreicht der Querschnitt das Dekompressionsmoment und weist so einen Öffnungswinkel von  $\theta = 0^\circ$  auf.

Wird nun ein Torsionsmoment aufgebracht, erreichen die Torsionsschubspannungen  $\tau_{II}$  bereits für kleine Torsionsmomente die zulässigen Schubspannungen in der Biegezugzone. Das anschließende partielle Gleiten lagert Schubspannungen in die Biegedruckzone um. Das Torsionsmoment kann entsprechend um  $\sum_{i=0}^n \Delta M_{T,II,i}$  gesteigert werden. Geht man vereinfachend von acht ( $n = 8$ ) Umlagerungsbereichen mit den fiktiven Öffnungswinkeln  $\langle \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_8 \rangle = \langle 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots, 240^\circ \rangle$  (Abbildung 4.10 b) bis i) aus, ergeben sich zusammen mit dem anfänglichen Fugenquerschnitt  $\theta_{i=0} = 0^\circ$  (Abbildung 4.10 a)) neun sich überlagernde Fugenbereiche für den Torsionsabtrag. Der Umlagerungsprozess beeinflusst dabei nur die Schubspannungen, sodass die Normalspannungsverteilung nach Gleichung 4.10 unberührt bleibt.

Mit den Gleichungen 4.12 bis 4.14 können nun die Torsionsschubspannungen der neun Fugenbereiche berechnet werden. Dabei muss das sekundäre Torsionsmoment  $M_{T,II}$  aus Gleichung 4.12 jeweils so gewählt werden, dass die zulässigen Schubspannungen an keiner Stelle überschritten werden. Die gewählten sekundären Torsionsmomente  $\Delta M_{T,II}$  sowie die zugehörigen Wölbwiderstände  $C_M$  können Tabelle 4.2 entnommen werden. Die jeweiligen Schubflüsse der einzelnen Bereiche sind in Abbildung 4.10 dargestellt.

Tabelle 4.2: Fiktiver Öffnungswinkel, Wölbwiderstand und sekundärer Torsionsmomentenanteil der Umlagerungsbereiche a) bis i)

Bereich	$\theta$ [°]	$C_M$ [m <sup>6</sup> ]	$\Delta M_{T,II}$ [MNm]
a)	0	61,2559	2,0
b)	30	31,0412	7,0
c)	60	14,5328	6,0
d)	90	6,2966	5,0
e)	120	2,5058	3,5
f)	150	0,8997	3,0
g)	180	0,2825	2,5
h)	210	0,0737	2,0
i)	240	0,0146	1,3

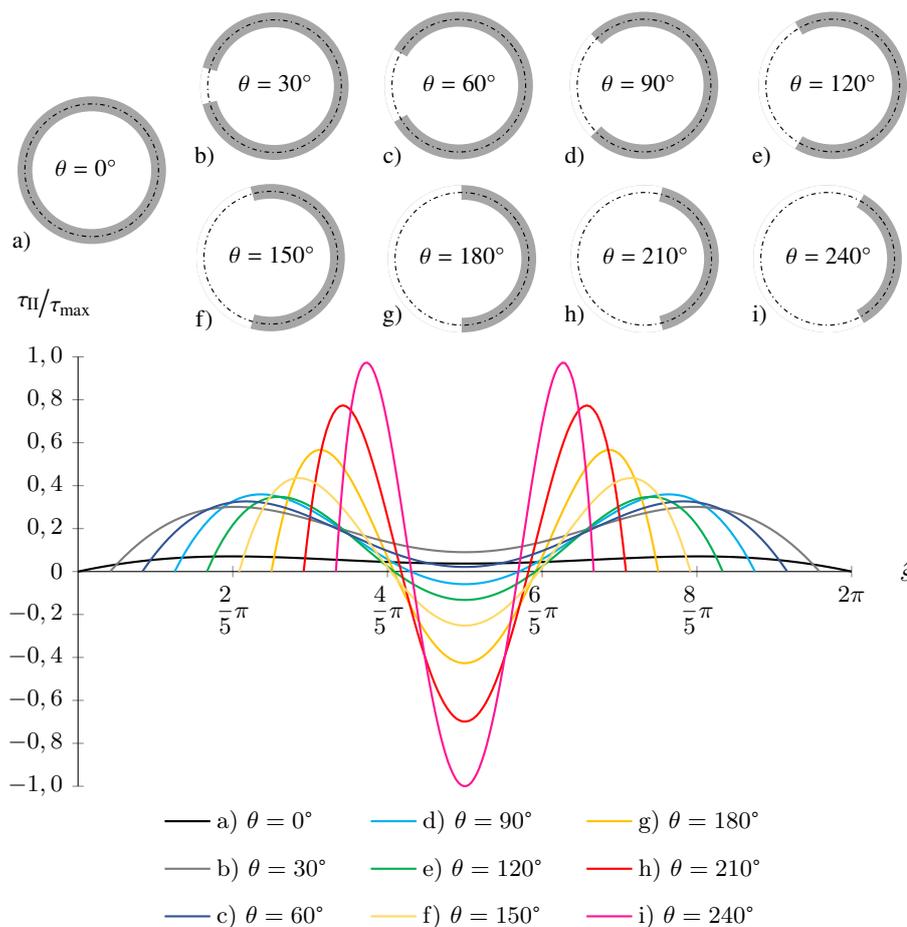


Abbildung 4.10: Klaffender Fugenquerschnitt a) und Umlagerungsbereiche b) bis i) mit deren sekundären Schubspannungen infolge der Spannungsumlagerung

Da jeder Umlagerungsbereich b) bis i) ausschließlich durch sekundäre Torsionsschubspannungen beansprucht wird, wächst der Anteil negativ wirkender Torsionsschubspannungen mit größer werdendem Fugenöffnungswinkel immer stärker an. Dies liegt daran, dass in Folge einer Torsionsschnittgröße im Fugenquerschnitt weiterhin ein Kräftegleichgewicht herrschen muss. Da positive sekundäre Torsionsschubspannungen hier gegen den Uhrzeigersinn entlang der Profilmittellinie wirken und so eine resultierende Kraft in Richtung  $+z$  verursachen, stellen sich auch negative Torsionsschubspannungen ein, die für ein Kräftegleichgewicht in  $z$ -Richtung sorgen.

Die Superposition der Schubspannungsverläufe aus Abbildung 4.10 ist Abbildung 4.11 zu entnehmen. Es ist gut zu erkennen, wie die superponierten Torsionsschubspannungen sich den zulässigen Schubspannungen annähern. Im Bereich der Biegedruckzone kommt es auch hier zu einem Vorzeichenwechsel, der, wie oben bereits dargelegt, aus dem erforderlichen Kräftegleichgewicht herrührt. Betragsmäßig sind die negativen Schubspannungen in Abbildung 4.11 ebenfalls mit den zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}$  zu begrenzen. Für eine infinitesimale Betrachtung und der Annahme, dass das gesamte Umlagerungspotential ausgeschöpft werden kann, gleichen sich die einwirkenden Schubspannungen den zulässigen Schubspannungen vollständig an. Dabei stellen sich in der Biegedruckzone zwei sehr steile Vorzeichenwechsel ein, die in der Grenzbetrachtung als unstetige Vorzeichenwechsel vereinfachend angenommen werden. Abbil-

Abbildung 4.12 zeigt die Schubspannungen für das maximal aufnehmbare Torsionsmoment infolge Verwölbung für einen Kreisringquerschnitt beim Erreichen des Dekompressionsmoments.

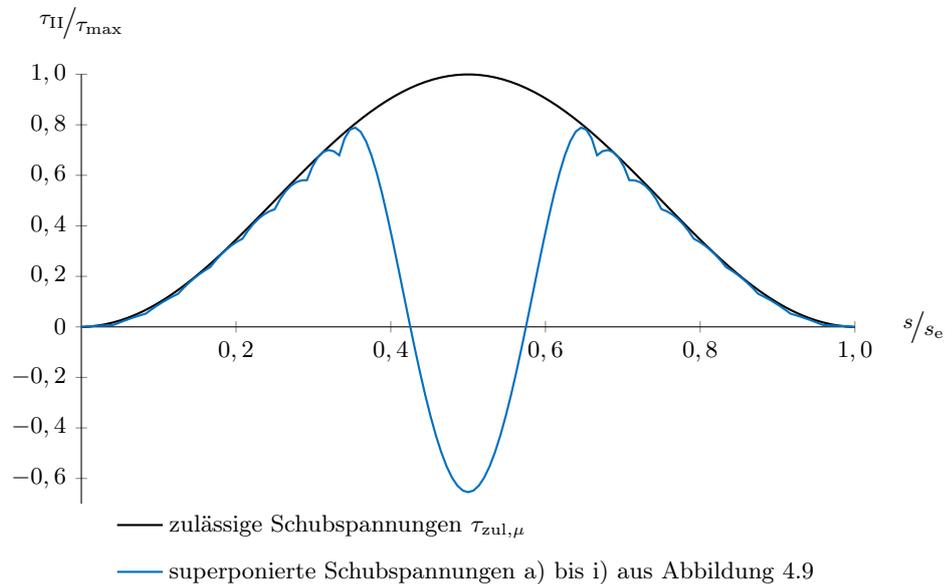


Abbildung 4.11: Gegenüberstellung der superponierten und zulässigen Schubspannungen

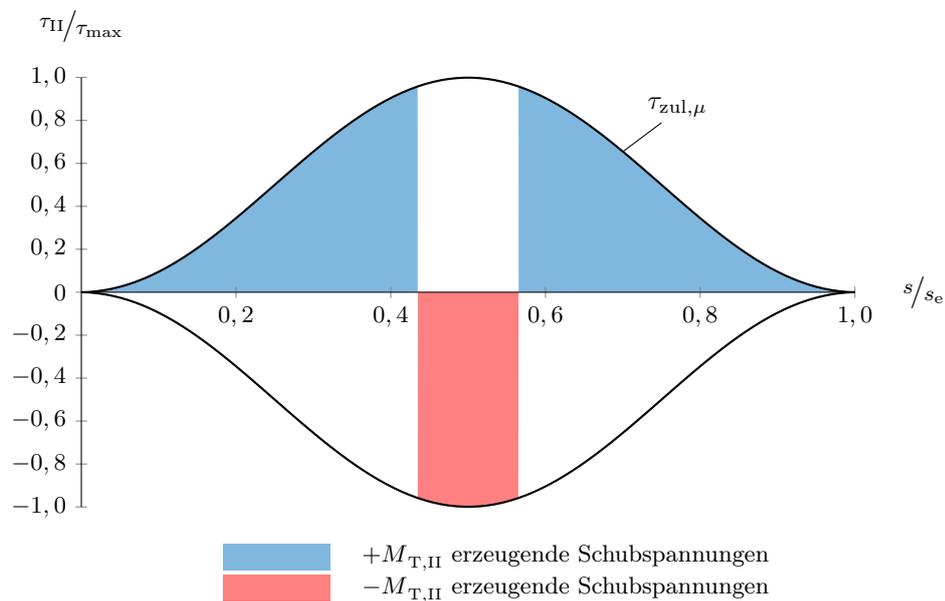


Abbildung 4.12: Umgelagerte sekundäre Torsionsanteile am klaffenden Kreisrohrquerschnitt mit  $\theta = 0^\circ$  bzw.  $M_z = M_{Dek}$

Für den Kreisringquerschnitt hat sich das Fugentorsionsproblem dahingehend vereinfacht, dass lediglich der Bereich des Vorzeichenwechsels gefunden werden muss. Allerdings ist in Abbildung 4.12 noch die Vereinfachung enthalten, dass keine primären Schubspannungen vorhanden sind.

Nach Abschnitt 2.6.4 bzw. Abbildung 4.3 und Tabelle 4.1 ist davon auszugehen, dass primäre Schubspannungen vorliegen, auch wenn das aus ihnen hervorgehende primäre Torsionsmoment sehr klein ist. Es erweist sich im vorliegenden Fall jedoch als außerordentlich schwierig, den genauen Verlauf der primären Schubspannungen zu bestimmen. Unterstellt man den primären Schubspannungen, sie würden bereichsweise vorliegen, ohne sich mit sekundären Schubspannungen zu überlagern, kann mit der Prämisse, das resultierende Torsionsmoment zu maximieren, eine Flächenzuordnung wie in Abbildung 4.13 vorgenommen werden. Die angegebenen Grenzpunkte  $s_j$  und  $s_k$  beschreiben die Übergänge zwischen primären und sekundären Schubspannungen. Sie können über das Kräftegleichgewicht und der Bedingung, das Torsionsmoment zu maximieren, bestimmt werden.

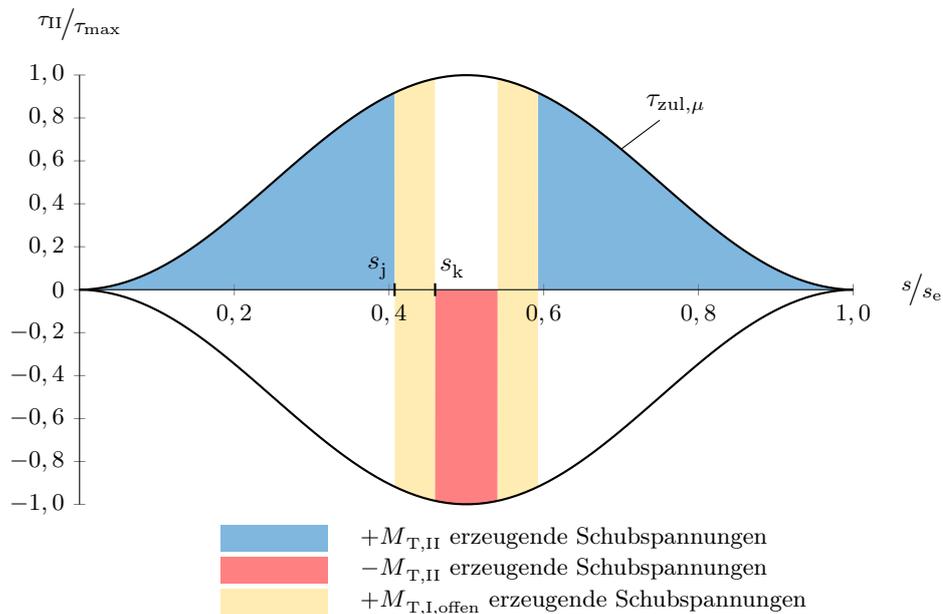


Abbildung 4.13: Umgelagerte sekundäre und offene Torsionsanteile am klaffenden Kreisrohrquerschnitt mit  $M_z = M_{Dek}$

Eine Zuordnung der Schubspannungen vollständig überdrückter Fugen kann analog zu den oben vorgestellten Ausführungen bestimmt werden. Dabei ist jedoch zusätzlich der konstante Bredt'sche Kreisringschubfluss aus St. Venant'scher Torsion entlang des Umfangs zu berücksichtigen. Demnach zeigt Abbildung 4.14 die umgelagerten sekundären Torsionsanteile mit den konstanten Bredt'schen Schubspannungen, während Abbildung 4.15 noch die zusätzlichen St. Venant'schen Schubspannungen des offenen Querschnitts darstellt.

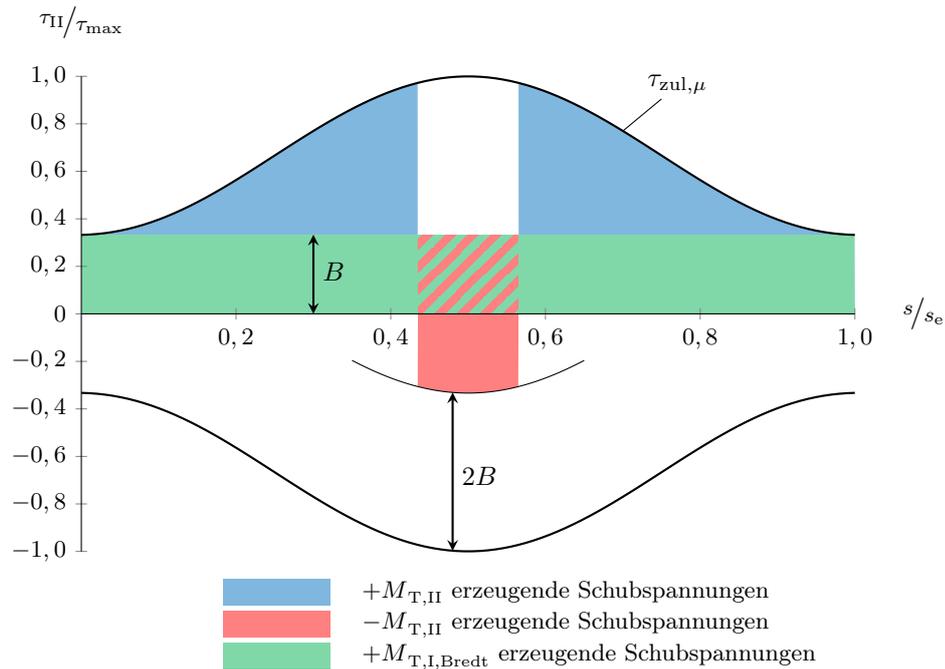


Abbildung 4.14: Umgelagerte sekundäre Torsionsanteile am vollständig überdrückten Kreisrohrquerschnitt mit  $M_z = 0,5 \cdot M_{Dek}$

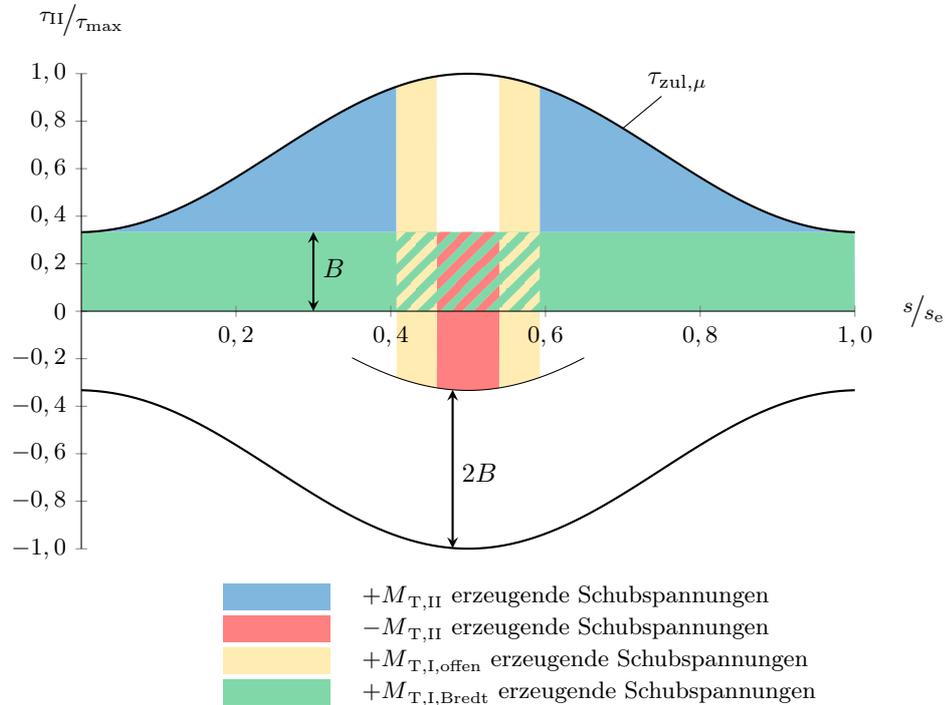


Abbildung 4.15: Umgelagerte sekundäre und offene Torsionsanteile am vollständig überdrückten Kreisrohrquerschnitt mit  $M_z = 0,5 \cdot M_{Dek}$

Stellt man die beiden Ansätze, einmal ohne Berücksichtigung der Torsionsanteile des offenen Querschnitts (Abbildung 4.12 und 4.14) und einmal mit Berücksichtigung der Torsionsanteile des offenen Querschnitts (Abbildung 4.13 und 4.15), in Form einer Torsions-Biegemomenten-Interaktion einander gegenüber, so erhält man Abbildung 4.16.

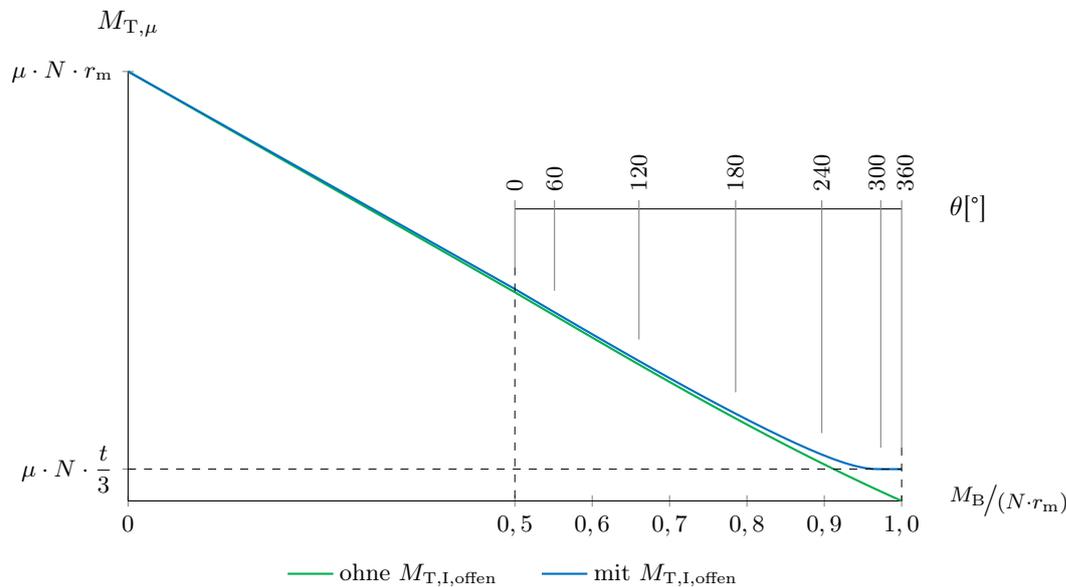


Abbildung 4.16: Torsions-Biegemomenten-Interaktion eines Kreisringquerschnitts mit überdrückter und klaffender Fuge

Das aufnehmbare Torsionsmoment  $M_{T,\mu}$  ist als Ordinate angegeben. Während der Buchstabe T im Index angibt, dass es sich um ein Torsionsmoment handelt, steht das  $\mu$  dafür, dass zur Berechnung ausschließlich die zulässigen Schubspannungen infolge Coulomb'scher Reibung herangezogen wurden.

Bei einer vollständig überdrückten Fuge weisen beide Ansätze einen linearen Verlauf auf. Wird das Dekompressionsmoment überschritten, liegt eine klaffende Fuge vor. Die Torsionstragfähigkeit nimmt zunächst etwas stärker als zum vorherigen linearen Verlauf ab. Während der Ansatz ohne offene Torsionsanteile erwartungsgemäß auf null abfällt, bildet der Ansatz mit offenen Torsionsanteilen ein Plateau aus, welches einem Torsionsabtrag allein über St. Venant'sche Anteile des offenen Querschnitts entspricht und somit dem Modell von Grünberg und Göhlmann [16] für klaffende Fugen. Aus Abbildung 4.16 geht klar hervor, dass  $M_{T,I,offen}$  beim Kreisringquerschnitt für alle praktischen Belange vernachlässigbar klein ist. Dennoch wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit, wenn nicht anders angegeben, stets der Ansatz mit  $M_{T,I,offen}$  verwendet. So zeigt Abbildung 4.17 die Torsionstragfähigkeit des Ansatzes mit  $M_{T,I,offen}$  im Vergleich zu den anderen bisher vorgestellten Modellen. Auffällig ist, dass das Fasermodell (Abschnitt 3.3.3) eine deutlich größere Torsionstragfähigkeit ansetzt, als der hier vorgestellte Ansatz mit  $M_{T,I,offen}$ . Des Weiteren gilt zu beachten, dass die auf Dünnwandigkeit beruhenden Nachweismodelle bei  $M_B = N \cdot r_m$  einen Fugenöffnungswinkel von  $\theta = 360^\circ$  aufweisen, das Fasermodell jedoch nicht. Im Fasermodell geht die Wanddicke mit ein, wodurch bei  $M_B = N \cdot r_m$  erst 90% des Querschnitts klafft. Selbstverständlich handelt es sich hierbei nur um theoretische Werte.

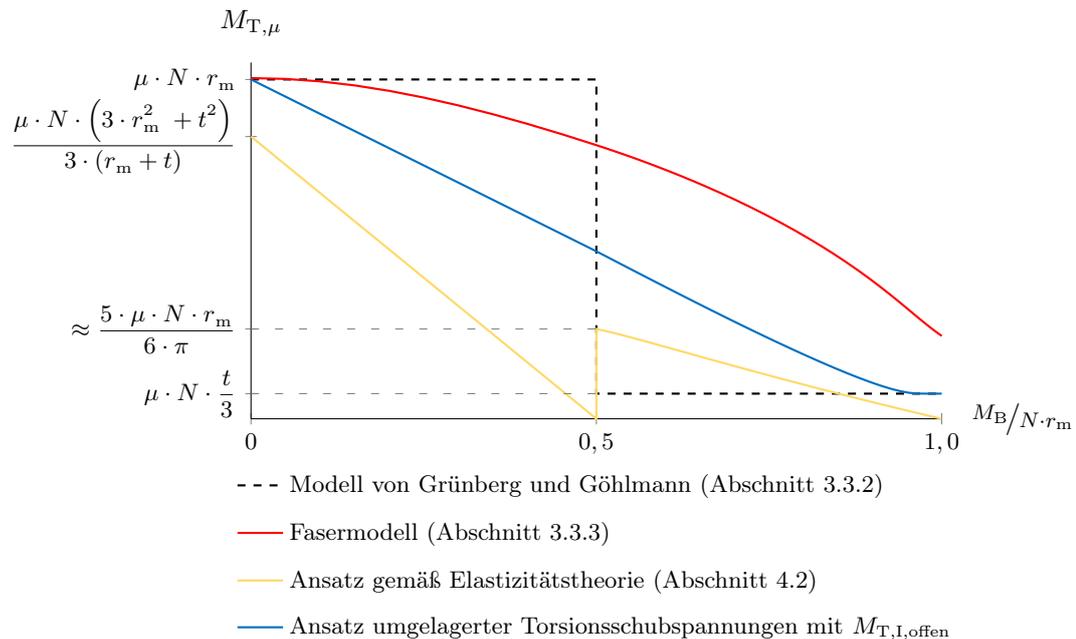


Abbildung 4.17: Torsions-Biegemomenten-Interaktion eines Kreisringquerschnitts – Gegenüberstellung der vorgestellten Nachweismodelle

#### 4.3.2.4 Einfluss der Materialfestigkeit auf die Torsionstragfähigkeit

Bisher wurden die einwirkenden Torsionsschubspannungen allein durch die zulässigen Schubspannungen infolge Coulomb'scher Reibung begrenzt. Solange die Schubfestigkeit des verwendeten Werkstoffs an jeder Stelle größer ist als der Schubwiderstand infolge Coulomb'scher Reibung, behalten die Ansätze in Abbildung 4.16 ihren Verlauf. Jedoch kann, je nach Auslegung, auch die Schubfestigkeit des verwendeten Werkstoffs, hier Beton, bereichsweise maßgebend werden. Um dies näher betrachten zu können, ist es zunächst erforderlich, die Schubfestigkeit des Betons, bzw. seine zulässigen Schubspannungen, darzustellen.

In der Fugenebene des betrachteten dünnwandigen Querschnitts können nur Drucknormalspannungen  $\sigma_x$  und wandparallele Schubspannungen  $\tau_{xs}$  vorliegen. Überführt man jeden Spannungszustand in einen schubfreien Hauptspannungszustand, kann anhand der verwendeten Versagenshypothese (siehe Abschnitt 2.3) überprüft werden, ob jener Spannungszustand noch innerhalb der Versagenshülle liegt. Umgekehrt kann die, sich in der zweiachsialen Hauptspannungsebene befindende, Versagenslinie zur Berechnung der Schubfestigkeit des Betons herangezogen werden. Es ist wichtig zu betonen, dass hierzu eine Transformation der Versagenshülle von Speck [13] bzw. von Menétrey Willam [20] verwendet wird und dies nichts mit den Schubfestigkeiten von Beton zu tun hat, die früher zum Beispiel in der DIN 1045-1 [74] angegeben wurden. Abbildung 4.18 zeigt die zulässigen, auf die Betonfestigkeit bezogenen, Schubspannungen in Abhängigkeit der bezogenen Drucknormalspannungen. Hinterlegt sind in Abbildung 4.18 die Daten eines Beton der Festigkeitsklasse C70/85 für die Versagenshypothesen von Speck [22] und Menétrey Willam [20].

Auch Kupfer [75] definiert im Rahmen seiner Untersuchungen zum Verhalten von Beton unter zweiachsialer Beanspruchung die Schubfestigkeit  $\tau_{zul,mat}$ , so wie in Abbildung 4.18 dargestellt.

Kupfer unterscheidet dabei zwischen Schubzugfestigkeit für  $f_{ctm} \geq \sigma_x \gtrsim 0,56 \cdot f_{cm}$  und Schubdruckfestigkeit für  $f_{cm} \leq \sigma_x \lesssim 0,74 \cdot f_{cm}$ . Den Bereich zwischendrin bezeichnet Kupfer als Übergangsbereich.

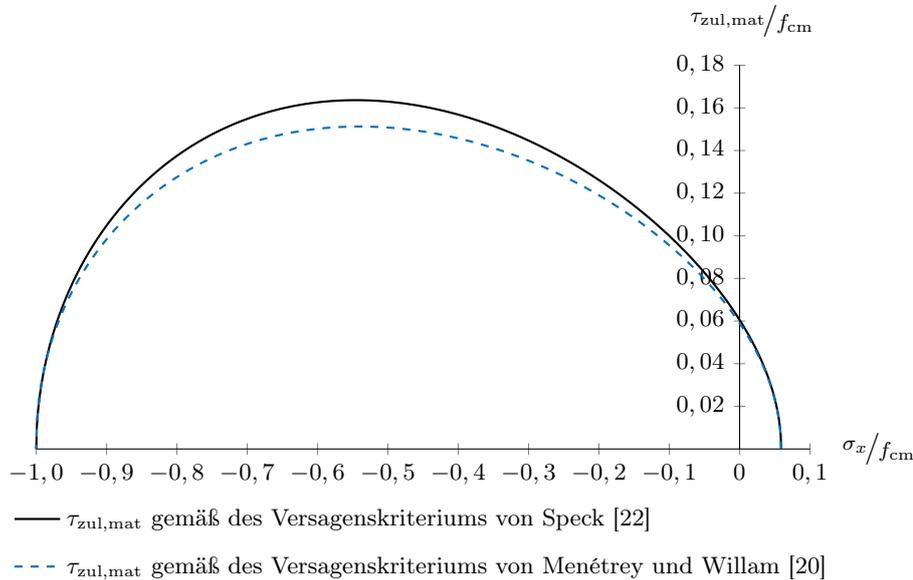


Abbildung 4.18: Bezogene maximal zulässige Schubspannungen  $\tau_{zul,mat}/f_{cm}$  in Abhängigkeit der bezogenen Drucknormalspannungen  $\sigma_x/f_{cm}$

Behält man die vorgestellte Methode zur Berechnung des aufnehmbaren Torsionsmoments bei, so orientiert sich die Umlagerung der Torsionsschubspannungen am betragsmäßigen Minimum der zulässigen Schubspannungen aus Coulomb'scher Reibung und dem Materialgesetz. Je nach Auslegung können dabei drei Fälle unterschieden werden:

**Fall 1:**  $\tau_{zul,mat}(s) \geq \tau_{zul,\mu}(s)$  für  $s_a \leq s \leq s_e$

**Fall 2:**  $\tau_{zul,mat}(s_a) > \tau_{zul,\mu}(s_a)$  und  $\tau_{zul,mat}(s_e/2) < \tau_{zul,\mu}(s_e/2)$

**Fall 3:**  $\tau_{zul,mat}(s) \leq \tau_{zul,\mu}(s)$  für  $s_a \leq s \leq s_e$

In Fall 1 ist die Schubfestigkeit des Werkstoffs  $\tau_{zul,mat}$  an jeder Stelle  $s$  größer-gleich der Reibfestigkeit der Fuge  $\tau_{zul,\mu}$ . In Abbildung 4.19 entspricht dies der Betonfestigkeit  $f_{cc,4}$ . Im Fall 1 ist somit  $\tau_{zul,\mu}$  immer maßgebend. Fall 2 zeichnet sich dadurch aus, dass bei  $s = s_a$  in der Biegezugzone  $\tau_{zul,\mu}$  und bei  $s = s_e/2$  in der Biegedruckzone  $\tau_{zul,mat}$  maßgebend werden. In Abbildung 4.19 zeigt dies die Betonfestigkeit  $f_{cc,3}$ . In Fall 3 ist die Schubfestigkeit des Werkstoffs  $\tau_{zul,mat}$  so gering, dass sie an jeder Stelle maßgebend wird. Abbildung 4.19 zeigt hierfür zwei Beispiele, einmal den Verlauf der Betonfestigkeit  $f_{cc,2}$ , bei dem die Biegedruckzone eine höhere Schubfestigkeit als die Biegezugzone aufweist und einmal den Verlauf der Betonfestigkeit  $f_{cc,1}$ , bei dem es umgekehrt ist. Ursächlich hierfür ist die Lage der korrespondierenden Punkte in Abbildung 4.18. Im Fall von  $f_{cc,2}$  befindet sich sowohl die Biegedruck-, als auch die Biegezugzone rechts des Maximalwerts der Schubfestigkeit, während im Fall von  $f_{cc,1}$  die Biegedruckzone sich in Teilen links davon befindet. Sie unterscheiden sich also dahingehend, ob die Schubzug- oder die Schubdruckfestigkeit maßgebend wird.

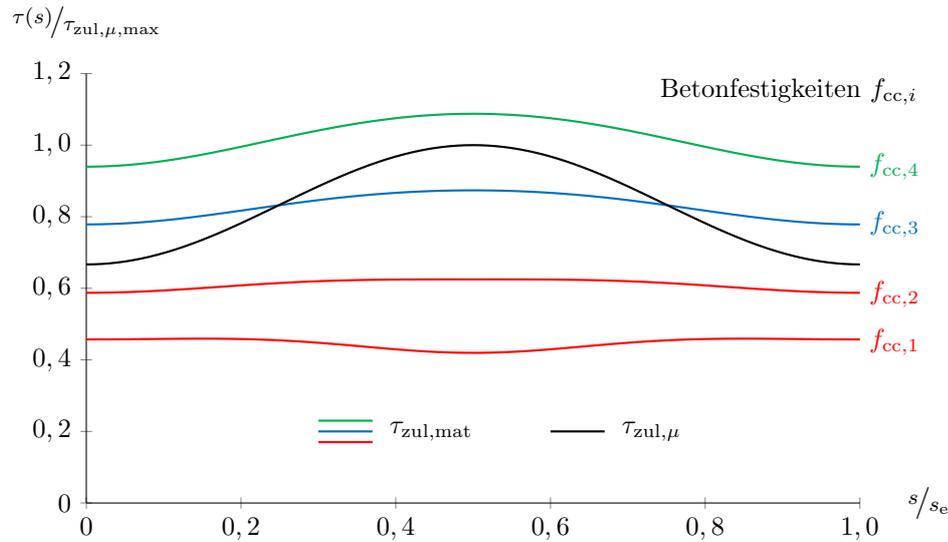


Abbildung 4.19: Schubfestigkeiten  $\tau(s)$  einer Trockenfuge entlang des Umfangs  $s_e$  für verschiedene Betonfestigkeiten und  $M_z = M_{Dek}/5$

Für alle drei Fälle kann, wie in den Abbildungen 4.12 bis 4.15 dargestellt, eine Flächenzuordnung vorgenommen werden, um das maximal aufnehmbare Torsionsmoment  $M_T$  zu bestimmen. Die flächenbegrenzenden, zulässigen Schubspannungen sind dabei gemäß Gleichung 4.15 definiert.

$$\tau_{zul}(s) = \min \begin{cases} \tau_{zul,\mu}(s) \\ \tau_{zul,mat}(s) \end{cases} \quad (4.15)$$

Somit gilt für die zulässigen Schubspannungen im Fall 1  $\tau_{zul}(s) = \tau_{zul,\mu}(s)$  bzw. für das sich ergebende Torsionsmoment  $M_T = M_{T,\mu}$ . Im Fall 3 gilt  $\tau_{zul}(s) = \tau_{zul,mat}(s)$  bzw.  $M_T = M_{T,mat}$ .

### 4.3.3 Diskussion der Modellannahmen

Im vorgestellten Modell zur Berechnung der Torsionstragfähigkeit einer Trockenfuge unter Normalkraft und Biegung werden einige begründete Annahmen getroffen, die nachfolgend diskutiert werden. Die wichtigsten Annahmen können wie folgt zusammengefasst werden:

- Es wird ein dünnwandiger Querschnitt vorausgesetzt.
- Das Wölbmoment im Fugenbereich kann vernachlässigt werden ( $M_W \approx 0$ ).
- Beim Erreichen des Dekompressionsmoments gilt  $M_T \approx M_{T,II}$ .
- Die Normalspannungsverteilung ist linear über den Fugenquerschnitt verteilt.
- Der Reibbeiwert  $\mu$  ist konstant ( $\mu(s) = \mu$ ).
- Der Schubfluss infolge Torsion kann vereinfachend, wie in den Abbildungen 4.12 bis 4.15 dargestellt, als unstetig angenommen werden, ohne große Auswirkungen auf die Torsionstragfähigkeit zu haben.

In vielen Fällen wird ein analytisches Nachweismodell durch die Annahme eines dünnwandigen Querschnitts erst möglich. Gleichzeitig gehen durch Annahme a) aber auch gewisse Einschränkungen einher. So können beispielsweise, wie in Abschnitt 2.5 dargestellt, keine Spannungen orthogonal zur Wandachse wirken. Da der theoretische Zustand der Dünnwandigkeit in der Realität jedoch nie erreicht werden kann, sollte man sich bei der Interpretation von Versuchsergebnissen bzw. FE-Simulationen stets bewusst sein, dass es zu Schubspannungen orthogonal zur Wandachse kommen kann. Einen Grenzwert, wann ein Querschnitt als dünnwandig berücksichtigt werden darf, gibt es nicht. Da es jedoch allgemein anerkannt ist, Querschnitte von Windenergieanlagen als dünnwandig anzusehen, sei dies auch hier gerechtfertigt.

Die Hintergründe der Annahmen b) und c) wurden bereits in Abschnitt 2.6.4 und Abschnitt 4.2.2 eingehend begründet. Es sei jedoch nochmals darauf hingewiesen, dass der Herleitung ein wölbfreier Stabquerschnitt zugrunde liegt. Diese Bedingung ist automatisch bei allen regelmäßigen, polygonalen Querschnitten gegeben. Aber auch für nicht wölbfreie Querschnitte sollten die Annahmen b) und c) annähernd ihre Gültigkeit bewahren, wenn der Wölbwiderstand  $C_M(\theta)$  bei vollständig überdrückter Fuge sehr viel größer ist als bei klaffender Fuge. Ein Sonderfall entsteht, wenn sowohl der Turmquerschnitt als auch der klaffende Fugenquerschnitt wölbfrei sind. Dies ist beispielsweise gegeben, wenn ein Quadratquerschnitt um eine seiner Diagonalen Biegung erfährt und  $\theta \geq 180^\circ$  ist. Die in Abschnitt 4.3.2 vorgestellte Nachweisführung beeinflusst dies jedoch nicht. Folglich würde die Torsions-Biegemomenten-Interaktion für den Ansatz mit offenen Torsionsanteilen bereits bei  $\theta = 180^\circ$  ein Plateau ausbilden und nicht erst bei  $360^\circ$ , wie beim Kreisringquerschnitt. Aus diesem Grund bezieht sich Annahme c) konkret auf das Dekompressionsmoment, da für größere bzw. kleinere Biegemomente primäre Torsionsanteile stärker ins Gewicht fallen. Bei den Annahmen b) und c) gilt es jedoch zu bedenken, dass sie streng genommen nur gültig sind, wenn ausschließlich  $\tau_{zul,\mu}(s)$  maßgebend ist, somit Fall 1 vorliegt. Im Fall 2, bzw. 3 ist davon auszugehen, dass sich mindestens ein Riss parallel zur Hauptdruckspannungsrichtung einstellt. Qualitativ mindert der Riss die Wölbfedersteifigkeiten  $k_{W,1}$  und  $k_{W,2}$  in Abbildung 4.2 ab. Dies hat zur Folge, dass primäre Torsionsanteile zunehmen, während sekundäre Anteile abgebaut werden. Sollte sich aber  $k_{W,1} = k_{W,2}$  einstellen, verbleibt das Wölbmoment im Fugenbereich unverändert bei null. Erhalten die Wölbfedersteifigkeiten unterschiedliche Werte, liegt ein Wölbmoment  $M_W$  im Fugenbereich vor, wodurch Wölbnormalspannungen  $\sigma_W$  hervorgerufen werden. Annahme c) sollte dennoch ihre Gültigkeit bewahren, wenn  $C_M(M_B < M_{Dek}) \gg C_M(M_B > M_{Dek})$  gilt. Dennoch ist davon auszugehen, dass Annahme b) ihre Gültigkeit voraussichtlich verliert. Da die zu erwartenden Wölbnormalspannungen  $\sigma_W$  jedoch keinen Einfluss auf die Normalkraft haben, bleibt die in Abschnitt 4.3.2 vorgestellte Methode unberührt. Gleichzeitig sollte bedacht werden, dass eine akkurate Berücksichtigung des Wölbmoments infolge einer Rissbildung nicht möglich ist. Daher wird empfohlen, Annahme b) beizubehalten, und die im Fugenquerschnitt angesetzten Spannungen als effektive Spannungen zu betrachten.

Annahme d) setzt eine in der Projektion (entsprechend Abbildung 4.9) lineare Normalspannungsverteilung voraus. Dies erfordert, dass die kontaktierenden Fugenflächen eben sind und die zugehörigen Elemente dem Hooke'schen Gesetz genügen. Kommt es zu Plastizierungen in der Biegedruckzone, würde die entstehende teilplastische Normalspannungsverteilung die Torsionstragfähigkeit der Fuge qualitativ steigern. Somit entstehen keine Unsicherheiten für den Fall einer nichtlinearen Normalspannungsverteilung.

Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, weist der Reibbeiwert  $\mu$  eine geringe Abhängigkeit von der Anpresskraft  $N$  auf. Jedoch führen andere, durch das Coulomb'sche Reibungsgesetz nicht ab-

bildbare Einflüsse deutlich größere Streuungen des Reibbeiwerts herbei. Konkret bedeutet dies, dass der Reibbeiwert voraussichtlich entlang des Querschnitts variiert. Da sein Verlauf entlang  $s$  jedoch nicht bekannt ist, muss gemäß Annahme e) der Reibbeiwert vereinfachend als konstant angenommen werden.

Qualitativ sind somit die Annahmen d) und e) gleichwertig. So wie der Verlauf von  $\mu(s)$  unbekannt ist, können ebenso die baupraktisch unvermeidbaren Unebenheiten der Fuge nicht vorab ermittelt werden. Während der Reibbeiwert direkt durch das Coulomb'sche Reibungsgesetz die zulässigen Schubspannungen beeinflusst, wirken sich Unebenheiten auf die Normalspannungsverteilung aus, welche wiederum über das Reibungsgesetz die zulässigen Schubspannungen verändern. Jene Streuungen könnten theoretisch über zufällig generierte Verläufe und einer entsprechenden Schar an Berechnungen berücksichtigt werden. Dies soll jedoch nicht Teil dieser Arbeit sein. Zudem würden Krieeffekte etwaige Unebenheiten über die Zeit ausgleichen. Aus diesem Grund sind die Annahmen d) und e) vorauszusetzen.

Die zuletzt angeführte Annahme f) betrifft die Schubflüsse der Abbildungen 4.12 bis 4.15. Hierin impliziert sind die Annahmen, dass das Umlagerungspotenzial vollständig ausgenutzt werden kann, und dass die primären und sekundären Schubspannungen vereinfachend unstetige Verläufe vorweisen. Vernachlässigt man primäre Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts, erhält man quasi unstetige Schubspannungsverläufe, wie in den Abbildungen 4.12 und 4.14 dargestellt. Jener idealisierte, sprunghafte Verlauf deutet sich bereits in den Abbildungen 4.10 und 4.11 an. Er ist vergleichbar mit den Normalspannungen aus der vollplastischen Biegung eines Stahlträgers. Das Fließvermögen des Stahls entspricht hier der Ausnutzung des Umlagerungspotenzials in der Fuge. Da im Fall 1 jedoch ein reiner Fugennachweis geführt wird, der keinen materialspezifischen Einflüssen unterliegt, kann zumindest theoretisch das Umlagerungspotenzial zu 100% ausgeschöpft werden. Wie bereits erwähnt werden in den anderen beiden Fällen, aufgrund von Rissentwicklungen, effektive Spannungen berücksichtigt. Der Anteil der primären Schubspannungsanteile wird zunehmen. Dennoch wird sich der Großteil der primären Schubspannungen des offenen Querschnitts weiterhin in den Bereichen anhäufen, wo die sekundären Schubspannungen gegen null gehen. In diesen Bereichen würde eine realistischere Verteilung der Schubspannungen fließende Übergänge zwischen den primären und sekundären Torsionsschubspannungen aufweisen. Ein solcher Verlauf ist qualitativ in Abbildung 4.20 dargestellt. Die Ordinate gibt an, welchen Anteil die sekundären bzw. primären Torsionsschubspannungen, gemessen an den insgesamt an der Stelle auftretenden Torsionsschubspannungen, haben. Da es sich hier jedoch nur um eine qualitative Darstellung handelt, ist lediglich die 1,0 an der Ordinatenachse eingetragen. Auf der Abszisse ist ein Ausschnitt der Laufvariablen  $s$ , bezogen auf  $s_e$ , angetragen. Der Ausschnitt zeigt den Bereich des Vorzeichenwechsels, in dem vorwiegend primäre Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts erwartet werden. Die Punkte  $s_j$  und  $s_k$  wurden bereits in Abbildung 4.13 vorgestellt. Sie definieren den Bereich, in dem vereinfachend ausschließlich primäre Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts angesetzt werden, während für  $s \leq s_j$  und  $s \geq s_k$  ausschließlich sekundäre Torsionsschubspannungen vorherrschen.

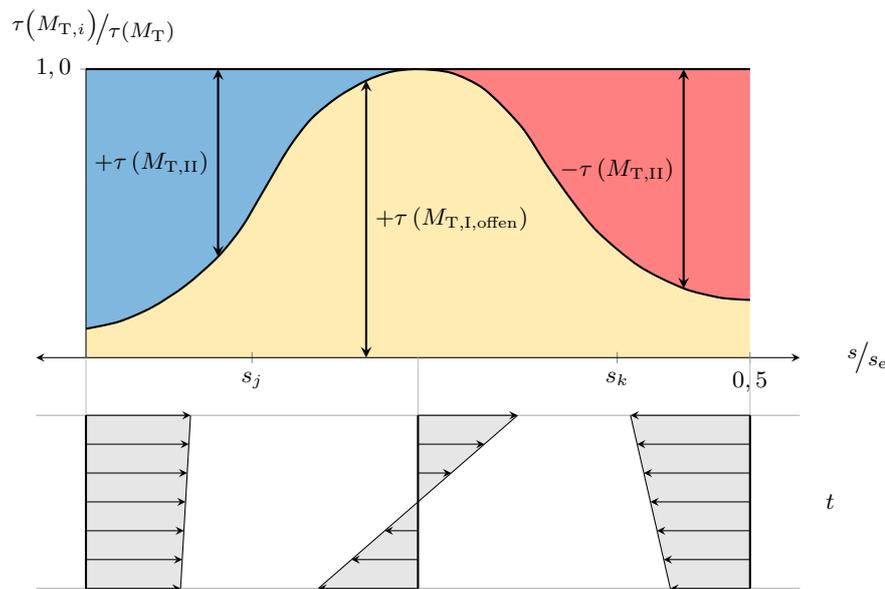


Abbildung 4.20: Qualitative Überlagerung primärer und sekundärer Torsionsschubspannungen

Abbildung 4.20 zeigt anschaulich, dass im Torsionsschubfluss keine Unstetigkeiten vorliegen. Da es jedoch, wie in Abschnitt 4.3.2 bereits erwähnt, außerordentlich schwierig ist, den exakten Verlauf primärer und sekundärer Torsionsschubspannungen über den vorgestellten Umlagerungsprozess zu ermitteln, bedient sich das hier vorgestellte Modell der ingenieurmäßigen Annahme f). Die Unterschiede zwischen dem Ansatz mit und dem Ansatz ohne offene Torsionsanteile in Abbildung 4.16 sind für alle praktisch relevanten Zwecke sehr gering. Somit ist davon auszugehen, dass eine realistischere Berücksichtigung primärer Torsionsanteile, wie in Abbildung 4.20 dargestellt, vernachlässigbare Unterschiede im sich ergebenden zulässigen Torsionsmoment zur Folge haben.

## 4.4 Zusammenfassung

Ein Nachweismodell für das Torsionstragverhalten überdrückter und klaffender Segmentfugen zu entwickeln, birgt, wie die Entwicklung eines jeden analytischen Nachweismodells, schwierige Entscheidungen. Zum einen ist man versucht, nach bestem Wissen und Gewissen ein möglichst realistisches Nachweismodell zu erstellen, zum anderen ist es unerlässlich, Vereinfachungen und Annahmen zu treffen, da die Realität meist zu komplex ist, um jedes Detail zu erfassen. In Abschnitt 4 werden zwei aufeinander aufbauende Nachweismodelle aufgestellt und diskutiert. So wird zunächst ein Nachweismodell vorgestellt, das, in Anlehnung an das Modell von Grünberg und Göhlmann [16], konsequent in vollständig überdrückte und klaffende Fugen unterscheidet. Zugrunde gelegt wird die Theorie der Wölbkrafttorsion, wobei bei vollständig überdrückter Fuge angenommen wird, dass immer der Sonderfall der St. Venant'schen Torsion vorliegt. Im Falle einer klaffenden Fuge werden, wie bereits in Abschnitt 2.6.4 dargelegt, ausschließlich sekundäre Torsionsschubspannungen im Fugenquerschnitt berücksichtigt. In der zugehörigen Diskussion wird eine Unstetigkeit am Übergang zwischen vollständig überdrückter und klaffender Fuge als unplausibel identifiziert und bietet den Anlass, eine Überarbeitung des Nachweismodells zu

erstellen.

Aus dem ersten Nachweismodell kann geschlussfolgert werden, dass bei klaffenden und vollständig, aber ungleichmäßig überdrückten Fugen, sowohl primäre als auch sekundäre Torsionsschubspannungen vorliegen müssen. Entsprechend wird ein neues Nachweismodell hergeleitet, welches über Umlagerungen die Torsionsschubspannungen den zulässigen Schubspannungen annähert. Eine Unterscheidung in vollständig überdrückte bzw. klaffende Fugen ist nicht notwendig. Abschließend werden die zulässigen Schubspannungen, die zuvor ausschließlich infolge Coulomb'scher Reibung  $\tau_{zul,\mu}$  betrachtet wurden, um die Schubfestigkeit  $\tau_{zul,mat}$  der fugenangrenzenden Segmente erweitert. Dabei wird in drei Fälle unterschieden, die angeben, ob der Reibwiderstand, die Schubfestigkeit oder beides maßgebend werden. Die wichtigsten Annahmen des Modells sind, dass ein dünnwandiger Querschnitt vorausgesetzt wird, dass das Wölbmoment im Fugenbereich vernachlässigbar klein ist und, dass bei Biegemomenten in der Nähe des Dekompressionsmoments Torsion nahezu ausschließlich über sekundäre Torsionsschubspannungen abgetragen wird. Außerdem wird dargelegt, dass die Annahme einer linearen Normalspannungsverteilung auf der sicheren Seite liegt, und dass der Reibbeiwert  $\mu$  an jeder Querschnittsstelle gleich ist. Zuletzt wird die Annahme diskutiert, dass der Schubfluss infolge Torsion einen unstetigen Verlauf haben kann. Es wird dargelegt, dass solch ein unnatürlich erscheinender Verlauf eine Vereinfachung ist, die jedoch nur vernachlässigbar andere Ergebnisse liefert, als eine genaue Betrachtung. Zudem wird qualitativ auf einen realistischeren Verlauf eingegangen.

# 5 Verifikation und Versuchsauswertung

## 5.1 Einleitung

Zur Verifikation eines Modells werden häufig FE-Berechnungen herangezogen. Hierbei ist es wichtig, enthaltene Vereinfachungen zu bedenken. So gibt es beispielsweise keine Imperfektionen, der Reibbeiwert hat an jeder Stelle den exakt gleichen Wert, und je nach hinterlegtem Materialgesetz verhalten sich die Segmente zum Beispiel ideal linear elastisch. Daher ist es wichtig, auch immer Versuche für eine Verifikation heranzuziehen. Da FE-Berechnungen jedoch weniger Zeit und Geld beanspruchen als Versuche und gleichzeitig Informationen über Spannungs- und Dehnungsverläufe ermöglichen, die in Versuchen nicht in der Form erfasst werden können, ist es durchaus sinnvoll, sie zur Verifikation heranzuziehen. Auch Hartwig zeigt in seiner Dissertation [19], dass seine FE-Berechnungen nahezu identische Ergebnisse angeben, wie sein Fasermodell. In Abschnitt 5.2 wird ein vergleichbares FE-Modell vorgestellt, anhand dessen gezeigt wird, dass eine Anpassung des Reibkontakts ausreicht, um nahezu identische Ergebnisse wie die von dem in dieser Arbeit entwickelten Modell zu erzeugen. Die in Abschnitt 5.2 verwendeten FE-Modelle sind, aufgrund der in ihnen enthaltenen Vereinfachungen, lediglich dazu geeignet, die Modellentwicklung zu verifizieren. So kann zum Beispiel bestätigt werden, dass sich die in Abschnitt 4.3.2 antizipierten Spannungsumlagerungen einstellen können. Sie belegen jedoch nicht, welches der Modelle realistischere Ergebnisse liefert.

Für die weitere Verifikation werden in Abschnitt 5.3 Versuche vorgestellt. Die Versuchsergebnisse werden den Berechnungsergebnissen des in dieser Arbeit entwickelten Modells und denen des Fasermodells [19] gegenübergestellt. Des Weiteren werden erneut FE-Berechnungen durchgeführt. Im Gegensatz zu den vorherigen FE-Berechnungen mit linear elastischen Segmenten, wird den Segmenten nun das Versagenskriterium von Menétrey und Willam [20], welches in Abschnitt 2.2.2 vorgestellt wurde, hinterlegt. Um die Ergebnisse der Versuche sowie die der FE-Berechnungen möglichst neutral und sachlich darzulegen, werden zunächst lediglich die Ergebnisse ohne etwaige Interpretationen vorgestellt. Eine Diskussion folgt in einem gesonderten Abschnitt. Teile der in Abschnitt 5 vorgestellten Ergebnisse wurden vom Autor bereits in der Zeitschrift Beton und Stahlbetonbau [3] vorab veröffentlicht.

## 5.2 Verifikation der Modellentwicklung

Zur Verifikation der in Abschnitt 4.3.2 vorgestellten Methode werden in erster Instanz Berechnungen mit der Finiten-Elementen-Methode und linear elastischem Materialmodell herangezogen. Es soll gezeigt werden, dass sich die Schubspannungen im Fugenquerschnitt in Folge Torsion umlagern, wie in Abschnitt 4.3.2 dargelegt. Aufgrund des linear elastischen Materials bildet dies den Fall 1  $\tau_{zul,mat}(s) \geq \tau_{zul,\mu}(s)$  ab. Stimmen die Schubspannungen der FE-Berechnung mit denen aus der analytischen Berechnung überein, werden dadurch die Annahmen b), c) und f) aus Abschnitt 4.3.3 auf numerischem Wege verifiziert.

Verwendet wurde die Finite-Elemente-Software Ansys® Academic Research Mechanical Version 2021 R2. Simuliert wurden zwei aufeinander stehende Kreisringsegmente. Die Abmessungen der zwei Segmente wurden so gewählt, dass sie den Großbauteilversuchen von Hartwig [19] mit Stahlbetonrohren gleichen, auf die noch im Detail in Abschnitt 5.3.2 eingegangen wird. Konkret wurden zwei Versuche der zweiten Versuchsreihe simuliert. Als Beispiel für eine vollständig überdrückte Fuge wurde der dritte Versuch mit einer Normalkraft von  $N = -283,5 \text{ kN}$  und einem Biegemoment von  $M_z = 2600 \text{ kNm}$  herangezogen. In Stellvertretung einer klaffenden Fuge diente der sechste Versuch mit einer Normalkraft von  $N = -310,3 \text{ kN}$  und einem Biegemoment von  $M_z = 5350 \text{ kNm}$ . Die Stahlbetonrohren haben einen Außendurchmesser von 60 cm, eine Wandstärke von 5 cm und sind 50 cm hoch. Nähere Informationen können Abschnitt 5.3.2 entnommen werden.

Die Kreisringsegmente wurden mit Solid 186 Elementen abgebildet. Dabei wurden vier Elemente über die Wanddicke und 100 Elemente in Wandlängsrichtung angeordnet. Der Kraftübertrag im Fugenbereich wurde über Kontaktelemente (Target 170 und Conta 174) hergestellt. Die Kontaktbedingung entspricht dem Coulomb'schen Reibungsgesetz. So können nur Drucknormalspannungen und entsprechend des Reibbeiwerts dazu proportionale Schubspannungen übertragen werden. Die kontaktierenden Flächen können sich dabei gegeneinander verschieben. Die freie Stirnfläche des unteren Elements stellt das Auflager dar und wurde mit einer festen Einspannung versehen. Die freie Stirnfläche des oberen Elements diente als Lasteinleitung, die über eine Kopplung vom Mittelpunkt der Stirnfläche aus erfolgte, wie Abbildung 5.1 zeigt.

Die Lasteinleitung erfolgte in drei Lastschritten. Im ersten Lastschritt wurde die Normalkraft aufgebracht, im zweiten Lastschritt das Biegemoment und im dritten und letzten Lastschritt eine Verdrehung um die  $x$ -Achse, was einem Torsionsmoment gleichkommt. Das Torsionsmoment wurde hier weggesteuert über eine Verdrehung aufgebracht, da so eine bessere Konvergenz erreicht wurde. Für die Segmente wurde, entsprechend den Angaben von Hartwig [19], ein Elastizitätsmodul von  $E = 37000 \text{ MPa}$  hinterlegt. Große Verformungen, also geometrische Nichtlinearitäten, wurden zugelassen. Bei der Verwendung von Reibkontakten ist es wichtig, immer große Verformungen zuzulassen, da ansonsten der Reibkontakt nicht korrekt abgebildet werden kann.

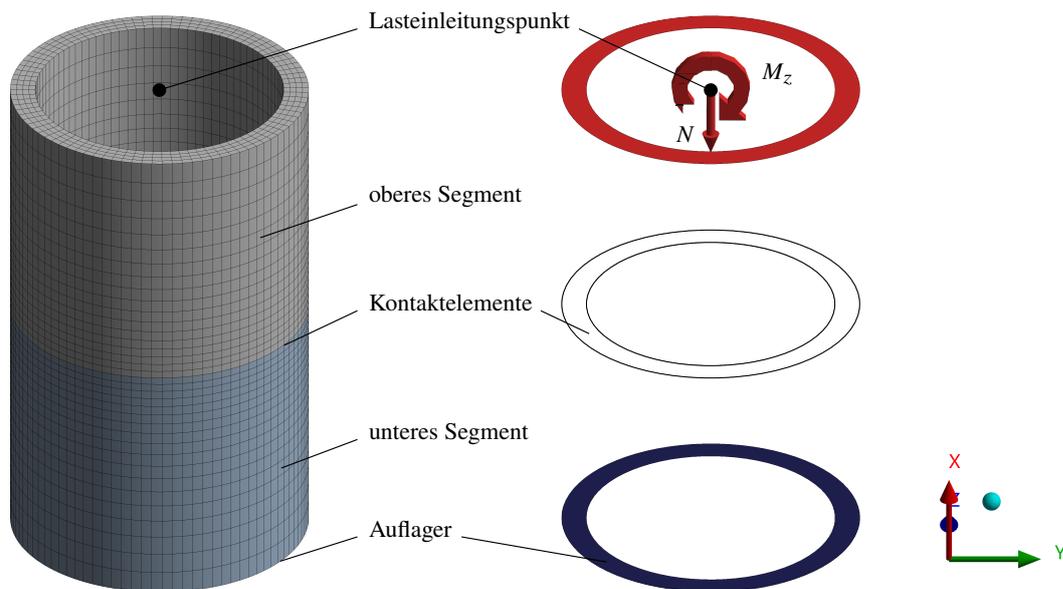


Abbildung 5.1: FE-Modell

Die in der FE-Berechnung ermittelten aufnehmbaren Torsionsmomente passen erwartungsgemäß sehr gut zu denen, die mit dem Fasermmodell bzw. Gleichung 3.8 ermittelt werden können. Auch ein Vergleich der vorherrschenden Schubspannungen ergab eine relativ gute Übereinstimmung, wie die Abbildungen 5.2 und 5.3 zeigen. Es gilt zu beachten, dass die Skalierungen der Schubspannungsverläufe in Abbildung 5.2 a) und c) linear sind. Für die jeweils zugehörigen Schubspannungen der Abbildungen 5.2 b) und d) wurden diese Skalierungen zur besseren Vergleichbarkeit übernommen. An den Enden der Farbskalen wurde daher eine zusätzliche Farbe angeordnet, die alle Über- bzw. Unterschreitungen im Spannungsverlauf im Vergleich zu den Abbildungen 5.2 a) bzw. c) zeigen. Aus diesem Grund sind die Skalierungen der Abbildungen 5.2 b) und d) zu den Enden hin nichtlinear. Gleiches gilt für Abbildung 5.3.

Wenn nicht anders angegeben, werden Spannungsplots, wie hier von den Abbildungen 5.2 und 5.3, in der gleichen Ansicht gezeigt wie Abbildung 4.9. Das Biegemoment dreht also stets positiv um die  $z$ -Achse, welche vertikal nach oben zeigt. Da die  $x$ -Achse positiv aus der Ebene heraus ausgerichtet ist, wirken positive Tangentialschubspannungen gegen den Uhrzeigersinn und negative im Uhrzeigersinn. Die Radialschubspannungen sind positiv nach außen und negative nach innen wirkend definiert.

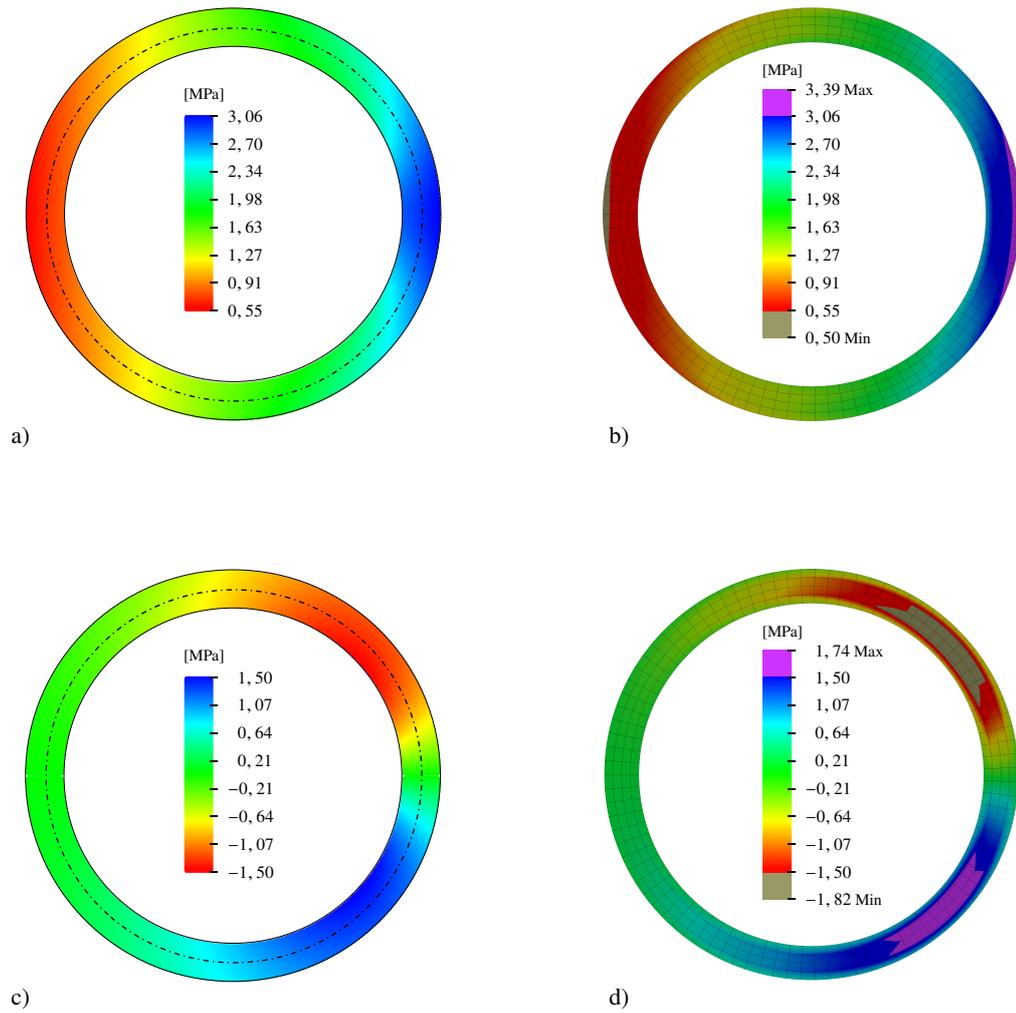


Abbildung 5.2: Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem Fasermodell (Abschnitt 3.3.3) und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch drei

- Tangentialschubspannungen Fasermodell
- Tangentialschubspannungen FE-Modell
- Radialschubspannungen Fasermodell
- Radialschubspannungen FE-Modell

Während die Tangentialschubspannungen in Abbildung 5.2 b) und Abbildung 5.3 b) eher unauffällig sind, fällt auf, dass die Radialschubspannungen in Abbildung 5.2 d) und Abbildung 5.3 d) an den Rändern stark abfallen. Dies liegt daran, dass, wie bereits in Abschnitt 2.5 dargestellt, der Schubring am Querschnittsrand orthogonal zur Wand nicht ausgebildet werden kann. Gleichzeitig wachsen die Radialschubspannungen über die Wanddicke stark an.

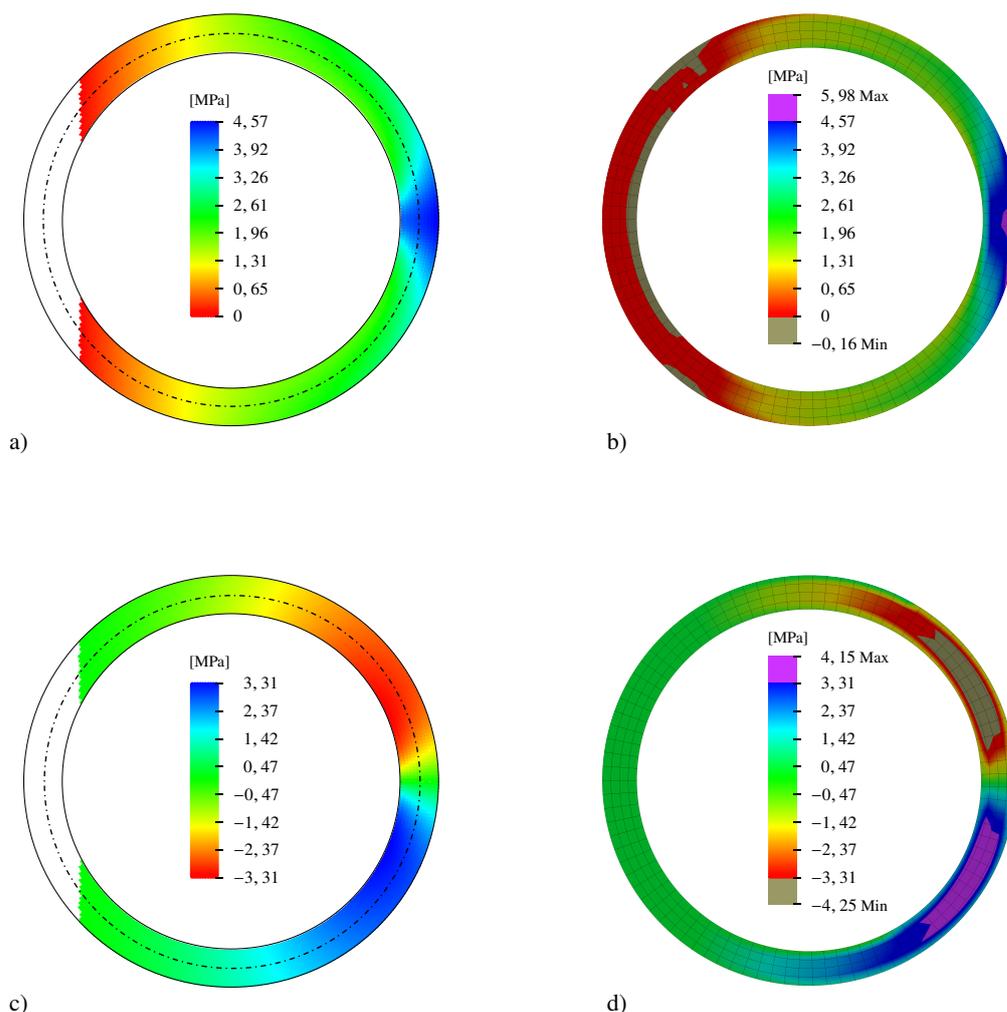


Abbildung 5.3: Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem Fasermodell (Abschnitt 3.3.3) und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch sechs

- a) Tangentialschubspannungen Fasermodell
- b) Tangentialschubspannungen FE-Modell
- c) Radialschubspannungen Fasermodell
- d) Radialschubspannungen FE-Modell

Der sich im Fasermodell einstellende Drehpunkt wandert mit zunehmendem Biegemoment immer weiter aus dem Mittelpunkt des Kreisringquerschnitts heraus. Aus diesem Grund sind die Tangential- und Radialschubspannungen in Abbildung 5.3 größer als in Abbildung 5.2. Bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell wirken die Schubspannungen aufgrund der Dünnwandigkeit ausschließlich wandparallel. Um dem FE-Modell Schubspannungen aufzuzwingen, die dem Gesetz der Dünnwandigkeit folgen, wurde die Kontaktbedingung der Fuge verändert. Anstelle eines isotropen Reibkontakts, der sich in alle Richtungen gleich verhält, wurde ein orthotroper Reibkontakt definiert. Dadurch konnte dem Kontakt ein Reibbeiwert  $\mu_t$  in tangentialer Richtung und ein Reibbeiwert  $\mu_r$  in radialer Richtung zugeordnet werden. Ein geringerer Reibbeiwert in radialer Richtung kann als Steifigkeitsabfall in selbiger Richtung angesehen werden. Solch ein Steifigkeitsabfall könnte sich infolge einer Rissbildung einstellen, was jedoch bei einem

linear elastischen Materialmodell nicht abgebildet werden kann. Setzt man  $\mu_r \approx 0$ , zeigt die FE-Berechnung gute Übereinstimmungen mit dem in Abschnitt 4.3.2 vorgestellten Modell. Dabei stimmt nicht nur die globale Torsionstragfähigkeit überein, auch die Tangentialschubspannungen der FE-Berechnung gleichen sehr den analytisch bestimmten Tangentialschubspannungen, wie die Abbildungen 5.4 und 5.5 zeigen. Gleichzeitig ist gut zu erkennen, dass der überlagerte Verlauf primärer und sekundärer Torsionsschubspannungen in der Biegedruckzone vorliegt, der bereits in Abbildung 4.20 antizipierte wurde.

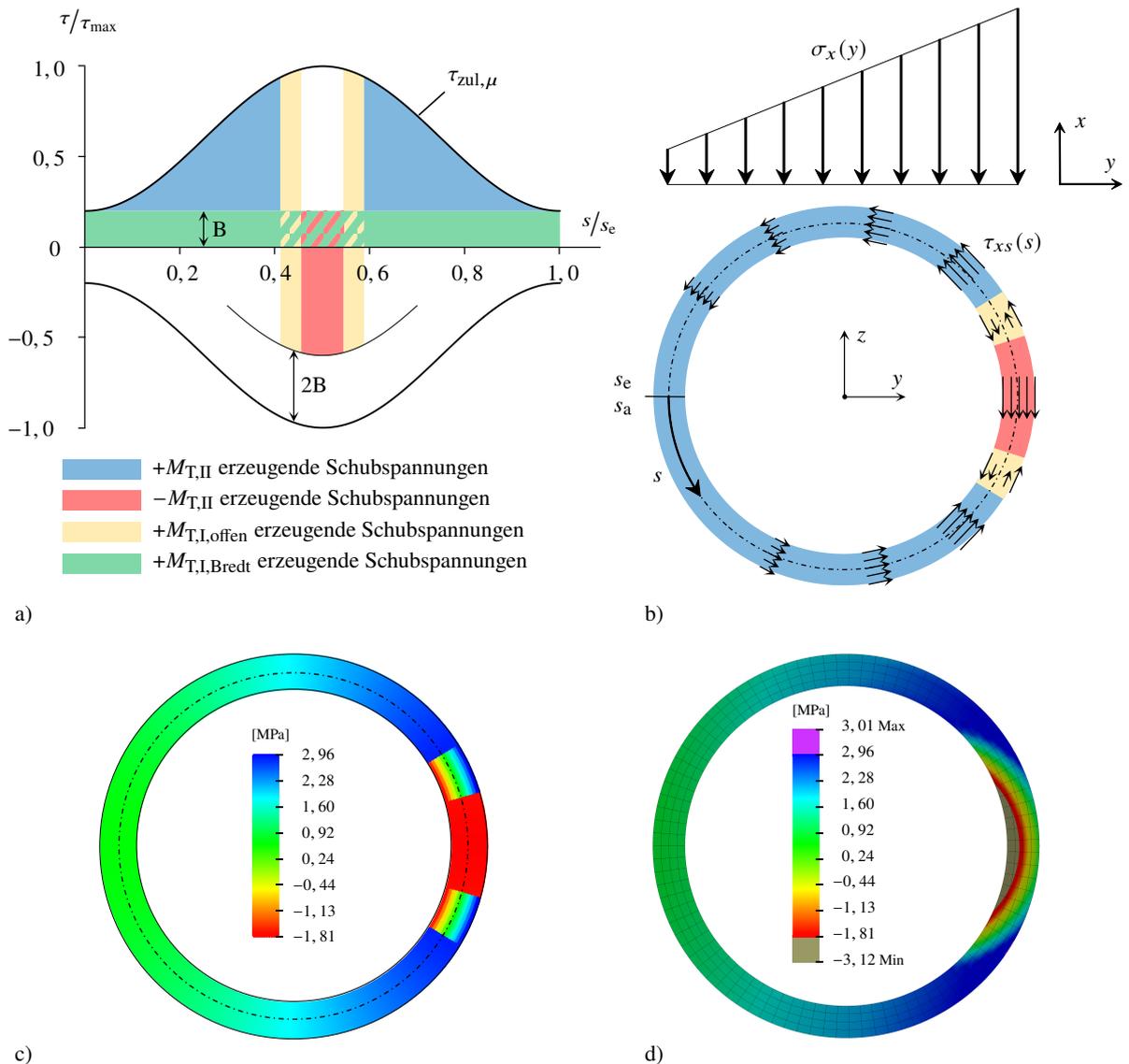


Abbildung 5.4: Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem in dieser Arbeit entwickelten Modell und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch drei

- Zuordnung der zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}(s)$
- qualitativer Schubspannungsverlauf  $\tau_{xs}$
- Tangentialschubspannungen entsprechend Abschnitt 4.3
- Tangentialschubspannungen FE-Modell

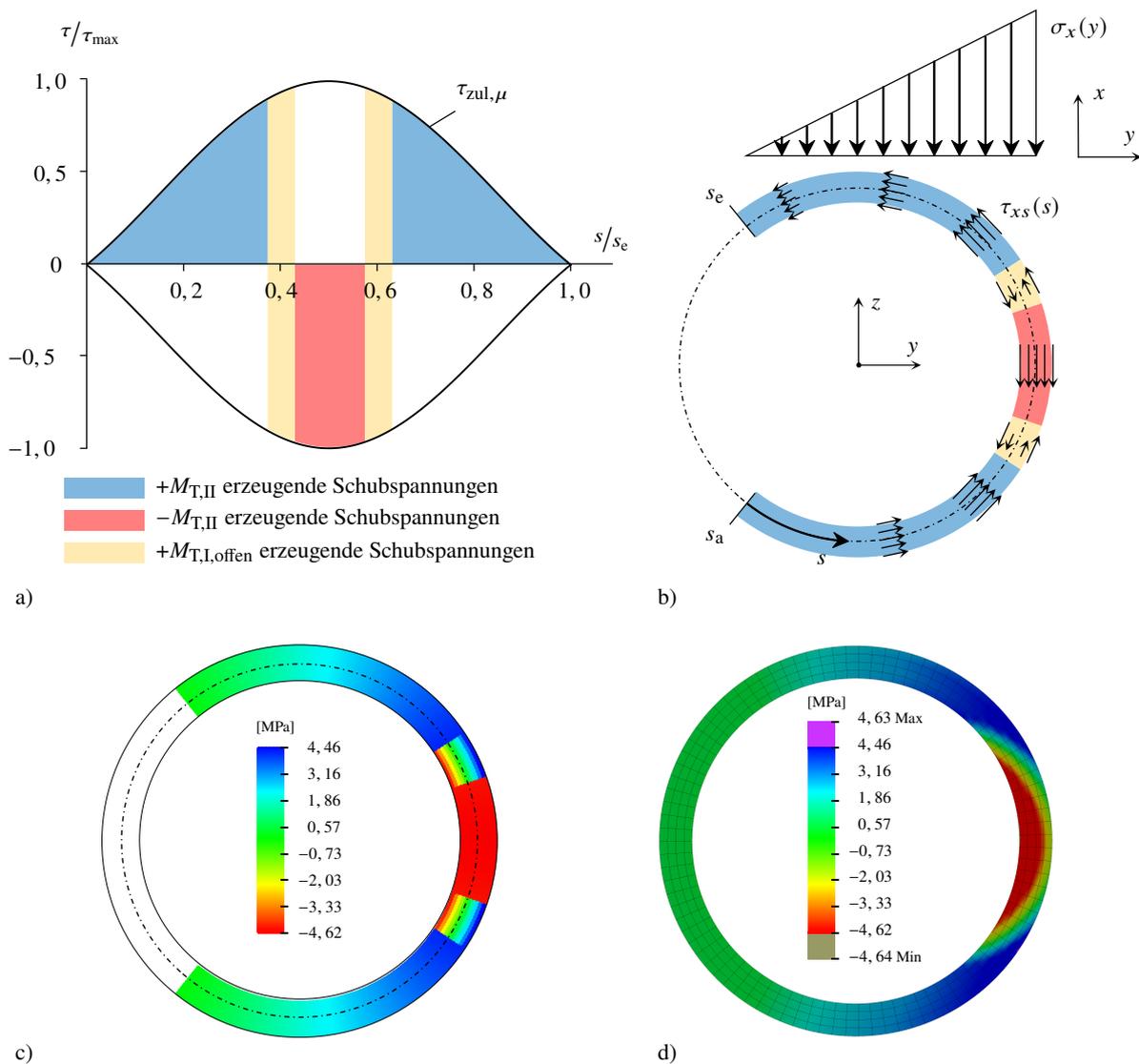


Abbildung 5.5: Schubspannungen im Fugenquerschnitt gemäß dem in dieser Arbeit entwickelten Modell und der FE-Berechnung – zweite Versuchsreihe, Versuch sechs

- Zuordnung der zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}(s)$
- qualitativer Schubspannungsverlauf  $\tau_{xs}$
- Tangentialschubspannungen entsprechend Abschnitt 4.3
- Tangentialschubspannungen FE-Modell

Die guten Übereinstimmungen zwischen den analytisch bzw. numerisch hergeleiteten Schubspannungen in den Abbildungen 5.2 bis 5.5 zeigen, dass die Aufnahmefähigkeit von Radialschubspannungen entscheidend dazu beiträgt, wie Torsion über den Fugenquerschnitt abgetragen wird. So tragen im Fasernmodell alle Schubspannungen direkt zum Übertrag eines Torsionsmoments bei. Im Gegensatz hierzu dienen in dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell manche Schubspannungen, aufgrund ihrer tangential verlaufenden Wirkungslinie, lediglich dem Erhalt des Kräftegleichgewichts, wodurch geringere aufnehmbare Torsionsmomente erreicht werden. Somit hat die Annahme eines dünnwandigen Querschnitts einen großen Einfluss auf die errechnete

Torsionstragfähigkeit. Aber nicht nur die Dünnwandigkeit beeinflusst die Ausrichtung der Schubspannungen, auch das Werkstoffgesetz spielt eine entscheidende Rolle. Als bedeutungsvollste Voraussetzung der Technischen Elastizitätstheorie wird ein linear elastisches Werkstoffgesetz angenommen. Für den Werkstoff Beton ist diese Voraussetzung jedoch nur für ein gewisses Spektrum an Beanspruchungen erfüllt. Zudem hat Beton nur eine verhältnismäßig geringe Zugfestigkeit. In Zugbereichen entstehen daher schnell Risse, wodurch der Querschnitt in Zustand II übergeht. Zugkräfte können nun in diesen Bereichen nicht mehr übertragen werden. Aus diesem Grund geht man normalerweise davon aus, dass Querkräfte bzw. Torsion in Stahlbetonbauteilen nicht über Schubkräfte im Querschnitt abgetragen werden, sondern über Druck- und Zugstreben. Diese ordnet man dem Beton bzw. der Bewehrung zu – ein Tragmodell entsteht. In Abschnitt 3.2.1 wurde dieses Tragmodell als räumliches Fachwerkmodell vorgestellt.

Eine unbewehrte Fuge kann jedoch nicht von einer Zugstrebe gekreuzt werden. Somit müssen Querkräfte bzw. Torsion über Schubkräfte im Fugenquerschnitt abgetragen werden. Risse und plastische Dehnungen beeinflussen diese Schubkräfte und können bei Torsionsbeanspruchungen auch Verwölbungen zur Folge haben.

Die Schlankheit des vorliegenden Querschnitts reicht offenbar nicht aus, die Radialschubspannungen auf ein vernachlässigbares Maß zu begrenzen, wie die FE-Berechnungen oben zeigen. Ursächlich hierfür ist, dass die kontaktierenden Segmente sich relativ zueinander verschieben, wodurch Schubspannungen orthogonal zur Wand quasi aufgezwungen werden. Dies führt zu Schalenbiegung, die gerade bei geringen Wandstärken große lokale Normalspannungen erzeugt. Können diese nicht aufgenommen werden, bilden sich Risse, was geringe Steifigkeit orthogonal zur Wandebene zur Folge hat. Dadurch können die Radialschubspannungen nicht in so ausgeprägter Form aufgenommen werden. Eine Umlagerung in tangentialer Richtung erfolgt. Ein FE-Modell mit linear elastischem Werkstoff kann dies jedoch nicht abbilden. Entsprechend kann festgehalten werden, dass die Auslegung des Turms sowie die Festigkeiten des Werkstoffs bestimmen, welches Modell die Realität besser abbildet.

Die Annahmen b), c) und f) aus Abschnitt 4.3.3 können, aufgrund der guten Übereinstimmungen zwischen dem analytischen Modell und der FE-Berechnung (Abbildung 5.4 und 5.5), als ausreichend genau angesehen werden, wenn Radialschubspannungen eine untergeordnete Rolle spielen.

## 5.3 Nachrechnung von Versuchen aus der Literatur

### 5.3.1 Kleinstbauteilversuche mit Aluminiumrohren

An der Universität Hannover führte Hartwig [19] im Rahmen seiner Dissertation Versuche zur Bestimmung der Torsionstragfähigkeit von Trockenfugen eines segmentierten Aluminiumrohrturms mit Kreisringquerschnitt durch. Die Segmente besaßen einen Außendurchmesser von 200 mm, eine Wandstärke von 12,5 mm und eine Höhe von 100 mm. Der Turm setzte sich aus vier Segmenten und zwei Lasteinleitungsrohren zusammen. Die Lasteinleitungsrohre wiesen die gleichen Querschnittsabmessungen auf, hatten eine Länge von 400 mm und wurden am Turmkopf mit dem Lasteinleitungskreuz, bzw. am Turmfuß mit dem Spannfeld, verschraubt. So entstand ein Turm von 1200 mm Gesamthöhe, der mit einer zentrischen Zugstange in vertikaler Richtung extern vorgespannt wurde. Über das Lasteinleitungskreuz (1000 mm Hebelarm) wurde mit Gewichten ein Einzelbiegemoment und mittels einer hydraulisch gesteuerten Zugvorrichtung ein Kräftepaar und damit ein Torsionsmoment am Turmkopf, entsprechend Abbildung 5.6,

aufgebracht.

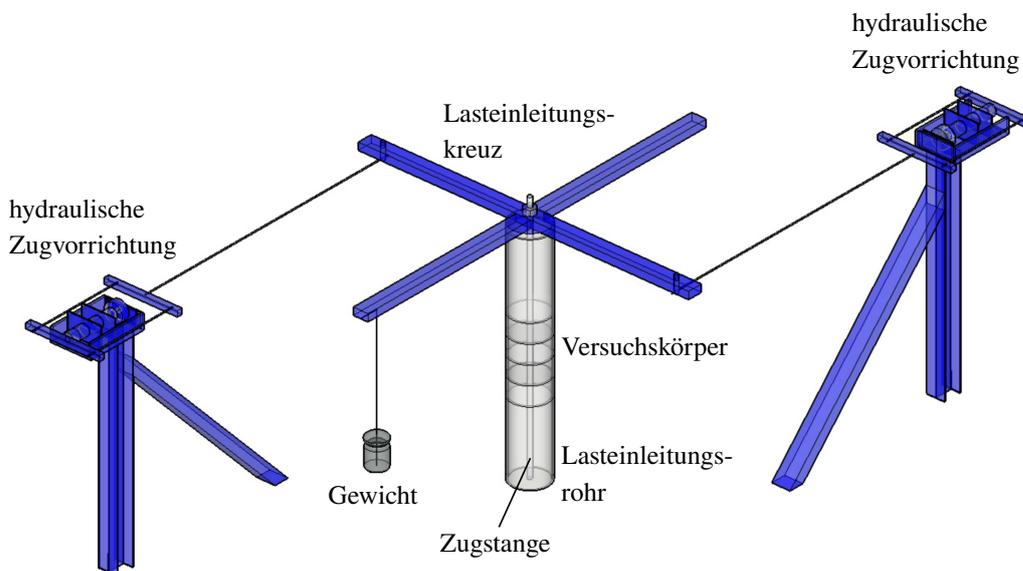


Abbildung 5.6: Versuchsstand der Aluminiumrohrversuche von Hartwig [19]

Die Materialeigenschaften der verwendeten Aluminiumlegierung sind in Tabelle 5.1 angegeben.

Tabelle 5.1: Materialeigenschaften der Aluminiumrohrversuche

Legierung: AlMgSi0,5-6060			
Zugfestigkeit	$R_m$	215	N/mm <sup>2</sup>
Streckgrenze	$R_{p0,2}$	160	N/mm <sup>2</sup>
Elastizitätsmodul	$E$	69.500	N/mm <sup>2</sup>
Schubmodul	$G$	26.100	N/mm <sup>2</sup>
Querdehnzahl	$\hat{\nu}$	0,33	-

Hartwig [19] führte am Aluminiumrohrturm zwei Versuchsreihen durch, die sich in ihrer anfänglichen Vorspannkraft, die jeweils im ersten Lastschritt aufgebracht wurde, unterschieden. Es folgte im zweiten Lastschritt das Aufbringen des Einzelbiegemoments. Dabei stieg durch die verwendeten Gewichte die Normalkraft im System. Eine zusätzliche Steigerung der Normalkraft entstand mit dem Klaffen der Fugen, da eine Fugenöffnung eine Längung der vorspannenden Zugstange verursachte. Erfasst wurde diese Steigerung der Normalkraft mit Dehnmessstreifen. Im letzten Lastschritt wurde ein Torsionsmoment eingeleitet und bis zum Abgleiten der Aluminiumsegmente gesteigert. Innerhalb einer Versuchsreihe wurden so die maximal aufnehmbaren Torsionsmomente für unterschiedliche Biegemomente ermittelt. Dabei variierte aufgrund des Versuchsaufbaus auch die Normalkraft, wie oben beschrieben.

Es sei erwähnt, dass Hartwig in seiner Arbeit [19] die zur Aufbringung des Einzelbiegemoments verwendete Gewichtskraft und das Eigengewicht des Versuchsaufbaus vernachlässigt hat. Besonders für hohe Biegemomente verfälschen diese Vernachlässigungen die theoretisch ermittelten Torsionstragfähigkeiten. In der vorliegenden Arbeit wurden die zur Aufbringung der Einzelbiegemomente verwendeten Gewichtskräfte berücksichtigt. Das Eigengewicht des Versuchsaufbaus setzt sich für die oberste Fuge vordergründig aus dem Lasteinleitungskreuz zusammen, welches hier mit einer Gewichtskraft von 0,45 kN abgeschätzt wurde.

Während die erste Versuchsreihe mit einer anfänglichen Vorspannkraft von  $P_0 = 20$  kN durchgeführt wurde, erhielt die zweite Versuchsreihe eine anfängliche Vorspannkraft von  $P_0 = 30$  kN. Dabei kam es auch schon vor dem Erreichen des Dekompressionsmoments zu geringfügigen Schwankungen der Vorspannkraft, da diese händisch aufgebracht wurde, und gewisse Schwankungen nicht vermieden werden konnten. Der für die analytischen Berechnungen benötigte Reibbeiwert  $\mu$  kann über Gleichung 2.98 ermittelt werden. Für den ersten Versuch der Versuchsreihen kann in guter Näherung  $\tau_{\text{T}} = \tau_{\text{T,Bredt}} = \mu \cdot N/A$  angenommen werden. Hierbei werden die Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts  $\tau_{\text{T,offen}}$  vernachlässigt und der Fuge ein konstanter Normalspannungszustand unterstellt. Der Reibbeiwert  $\mu$  berechnet sich somit für die im Versuch ermittelten, aufnehmbaren Torsionsmomente, wie in Gleichung 5.1 dargestellt.

$$\mu = \frac{M_{\text{T}}}{N \cdot r_{\text{m}}} \quad (5.1)$$

Für die erste Versuchsreihe ergab sich so ein Reibbeiwert von 0,145. Für die zweite Versuchsreihe wurde ein Reibbeiwert von 0,150 ermittelt. Diese Werte unterscheiden sich leicht von den von Hartwig [19] angegebenen Reibbeiwerten, da Hartwig in Gleichung 5.1 anstelle der Normalkraft  $N$  die Vorspannkraft  $P$  verwendet. Des Weiteren sei hier noch einmal erwähnt, dass die Ermittlung des Reibbeiwert in Gleichung 5.1 einen dünnwandigen Querschnitt mit konstanter Normalspannungsverteilung über die Wandstärke unterstellt. Dadurch ist der Reibbeiwert nach Gleichung 5.1 für Hartwig's Fasermodell, mit veränderlicher Normalspannungsverteilung über die Wandstärke, etwas zu groß. Der Unterschied ist jedoch bei den verwendeten Verhältnissen zwischen Wandstärke und Durchmesser der vorliegenden Klein- und Großbauteilversuche vernachlässigbar klein.

Abbildung 5.7 zeigt die im Versuch ermittelten Torsionstragfähigkeiten der ersten Versuchsreihe. Die Torsionstragfähigkeiten der zweiten Versuchsreihe können Abbildung 5.8 entnommen werden. Die analytisch bestimmten Torsionstragfähigkeiten des in dieser Arbeit entwickelten Modells des Ansatzes mit offenen Torsionsanteilen, Abschnitt 4.3.2, sowie die Torsionstragfähigkeiten gemäß des in Abschnitt 3.3.3 vorgestellten Fasermodells, wurden ebenfalls angegeben und mit dem Namen des Autors bzw. dem Modellnamen gekennzeichnet. Die Schubfestigkeit des Werkstoffs war in beiden Versuchsreihen stets größer als die Reibfestigkeit im Fugenquerschnitt. Somit entsprechen alle Versuchsdatenpunkte dem Fall 1 nach Abschnitt 4.3.2.4.

Während die Torsionstragfähigkeit  $M_{\text{T}}$  an der linken vertikalen Achse abzulesen ist, können die Vorspannung  $P$  und die Normalkraft  $N$  an der rechten vertikalen Achse abgelesen werden. Die horizontale, untere Achse gibt das Biegemoment  $M_z$  an. Die horizontale Achse am oberen Rand des Diagramms stellt den Fugenöffnungswinkel  $\theta$  gemäß Gleichung 4.11 dar.

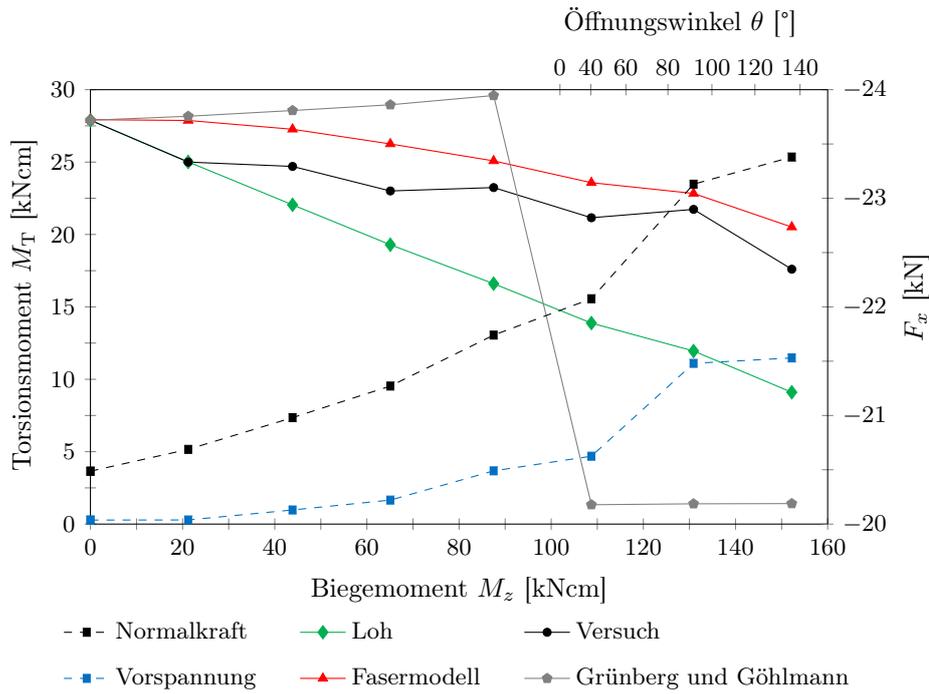


Abbildung 5.7: Torsionstragfähigkeiten der ersten Versuchsreihe ( $P_0 = 20\text{kN}$ )

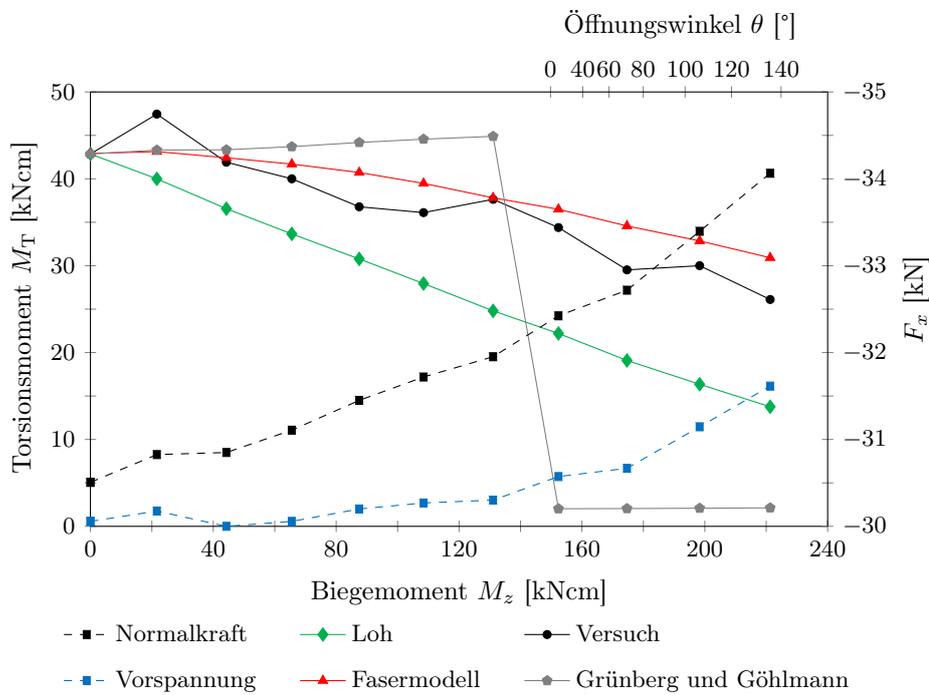


Abbildung 5.8: Torsionstragfähigkeiten der zweiten Versuchsreihe ( $P_0 = 30\text{kN}$ )

Beide Versuchsreihen zeigen, bis auf einen Ausreißer in der zweiten Versuchsreihe, dass das Fasermodell die Torsionstragfähigkeit der Versuche überschätzt, während das in dieser Arbeit entwickelte Modell die Torsionstragfähigkeit unterschätzt. Die Unterschiede zwischen den analytischen Modellen werden dabei mit zunehmendem Biegemoment immer größer. Auch wenn das Fasermodell stets auf der unsicheren Seite liegt, zeigt es dennoch eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, als das in dieser Arbeit entwickelte Modell. Setzt man die in den Versuchen ermittelte Torsionstragfähigkeit  $M_{T,exp}$  ins Verhältnis zur Torsionstragfähigkeit der analytischen Modelle  $M_{T,calc}$ , erhält man je nach Bezugsparameter eine der folgenden Abbildungen.

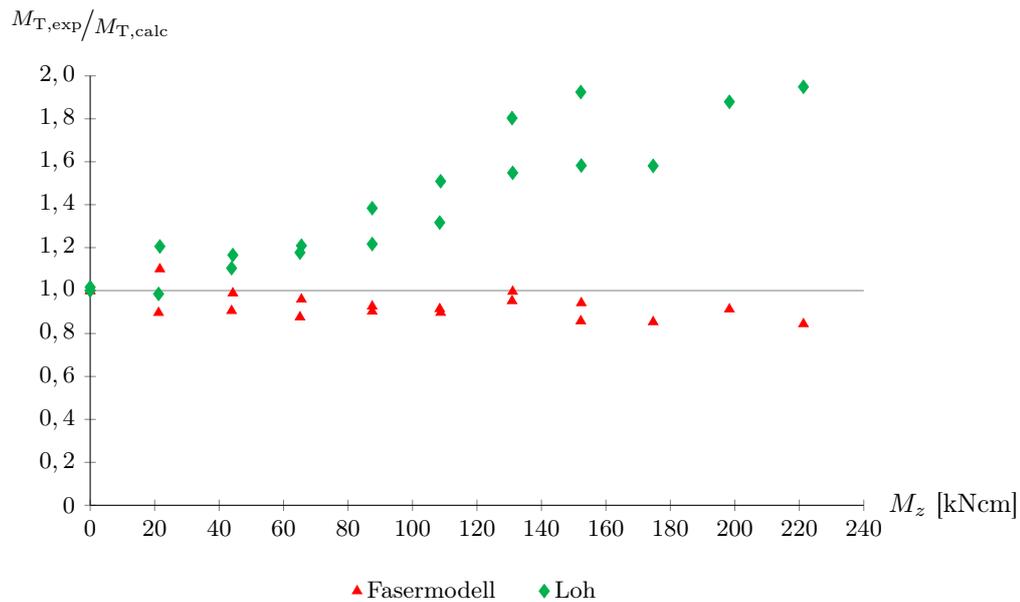


Abbildung 5.9: Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach dem Biegemoment  $M_z$

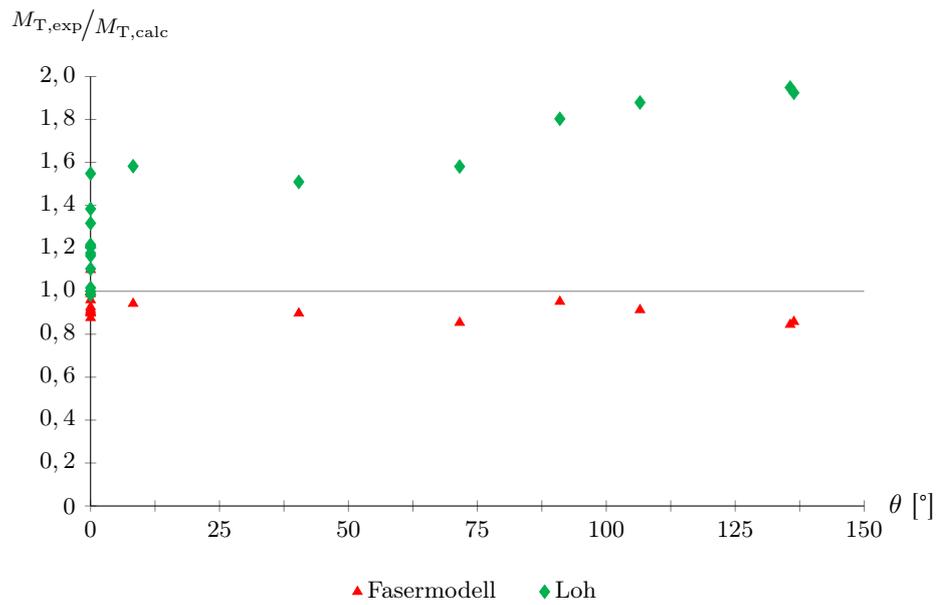


Abbildung 5.10: Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach dem Fugenöffnungswinkel  $\theta$

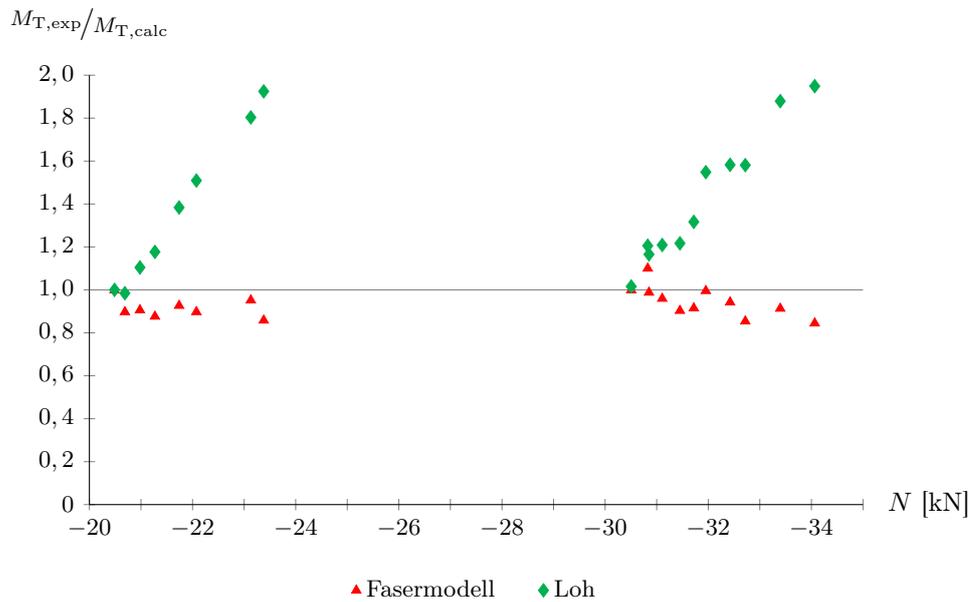


Abbildung 5.11: Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach der Normalkraft  $N$

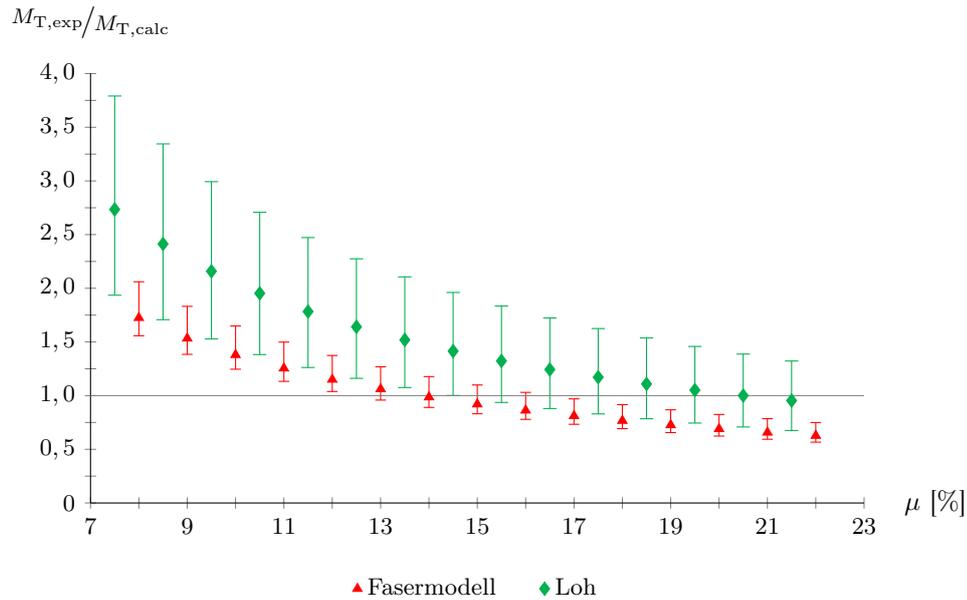


Abbildung 5.12: Auswertung der Torsionstragmodelle beider Versuchsreihen nach dem Reibbeiwert  $\mu$

Die Abbildungen 5.9 bis 5.11 verwenden die mit Gleichung 5.1 ermittelten Reibbeiwerte. In Abbildung 5.12 wird ein Reibbeiwert für beide Versuchsreihen verwendet. Jeder Datenpunkt in Abbildung 5.12 stellt das arithmetische Mittel der normierten Torsionstragfähigkeiten dar. Die verwendeten Fehlerindikatoren zeigen dabei die Streubreite der 19 Versuche beider Versuchsreihen. Für eine bessere Lesbarkeit wurden die verwendeten Reibbeiwerte der analytischen Modelle versetzt zueinander gewählt. Zwischenwerte dürfen interpoliert werden. Eine Diskussion der oben präsentierten Auswertung folgt in Abschnitt 5.3.4.

### 5.3.2 Großbauteilversuche mit Stahlbetonrohren

Neben den Kleinstbauteilversuchen (Abschnitt 5.3.1) führte Hartwig [19] auch Großbauteilversuche mit Stahlbetonrohren durch. Konzeptionell waren die Großbauteilversuche so aufgebaut wie die Kleinstbauteilversuche. Die Segmente hatten einen Kreisringquerschnitt mit einem Außendurchmesser von 60 cm, eine Wandstärke von 5 cm und waren 50 cm hoch. Aus sechs Segmenten setzte Hartwig [19] einen drei Meter hohen Turm zusammen. Das oberste Segment wurde bereits bei der Herstellung mit eingegossenen Gewindestangen versehen, die mit einer Stahlplatte verbunden wurden. Auf dieser Stahlplatte befand sich ein aufgeschweißtes Stahlrohrsegment gleichen mittleren Durchmessers wie die Stahlbetonrohre, auf dem wiederum ein Lasteinleitungskreuz befestigt war. Das unterste Segment wurde über eine Vergussfuge mit einem Fundament verbunden, welches im Spannungsfeld verankert wurde. In der Mitte des Turms befand sich eine Zugstange, mit der der Turm im ersten Lastschritt vertikal vorgespannt wurde. Mit einer weiteren, extern angeordneten Zugstange, folgte im zweiten Lastschritt das Einzelbiegemoment. Im dritten und letzten Lastschritt wurde, mittels einer hydraulisch gesteuerten Zugvorrichtung, ein Kräftepaar und damit ein Torsionsmoment am Turmkopf eingeleitet. Der Aufbau des Versuchsstands ist in Abbildung 5.13 dargestellt.

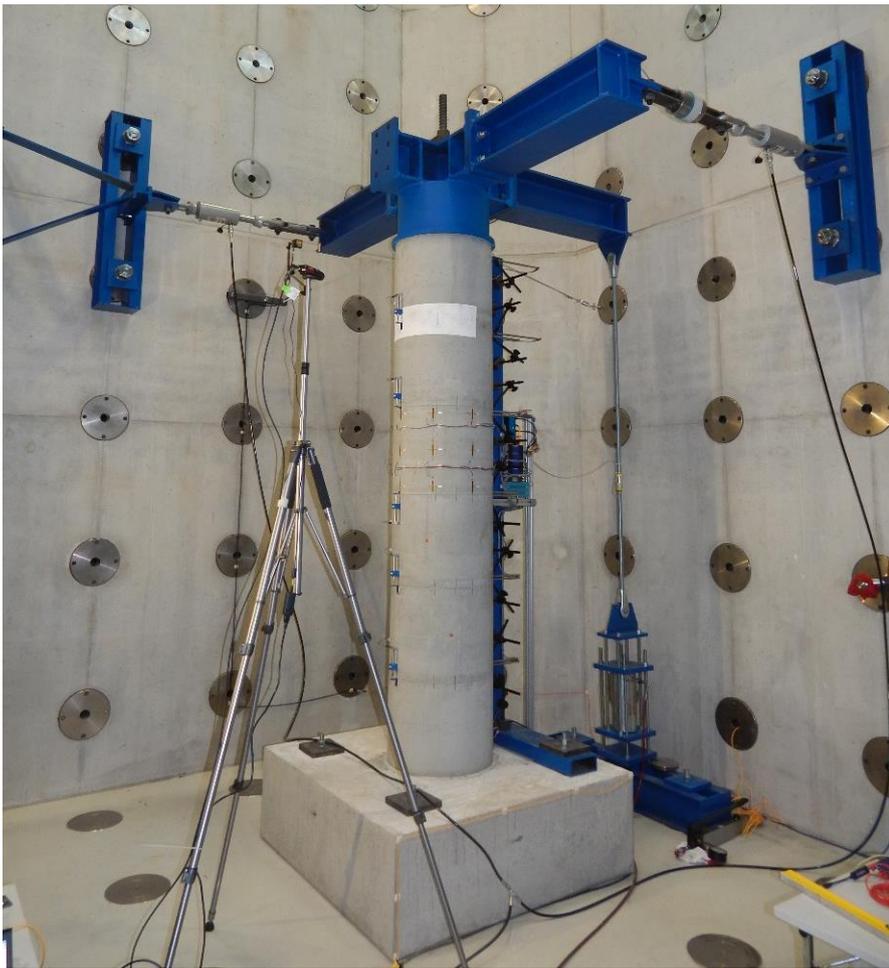


Abbildung 5.13: Versuchsstand der Stahlbetonrohre von Hartwig [19]

Der verwendete Beton entsprach der Festigkeitsklasse C70/85. Tabelle 5.2 gibt die von Hartwig [19] ermittelten Materialeigenschaften an.

Tabelle 5.2: Ermittelte Materialeigenschaften des verwendeten Betons

Vergussbeton – Betec 180			
Druckfestigkeit	$f_{cc}$	83	N/mm <sup>2</sup>
Elastizitätsmodul	$E$	37.000	N/mm <sup>2</sup>

Wie auch schon bei den Kleinstbauteilversuchen nutzte Hartwig [19] für die Berechnung der Torsionstragfähigkeiten lediglich die Vorspannung der mittig angeordneten Zugstange. Die vorliegende Arbeit verwendet für die Berechnung der Torsionstragfähigkeiten die Normalkraft in der Fuge. Diese setzt sich zum Großteil aus der Vorspannkraft zusammen, aber auch die angesprochene Kraft, die über einen Hebelarm von 150 cm zur Aufbringung des Einzelbiegemoments

verwendet wurde, geht mit in die Normalkraft ein, ebenso das Eigengewicht des Versuchsaufbaus, welches mit 4 kN abgeschätzt wurde.

Die erste Versuchsreihe wurde mit einer anfänglichen Vorspannkraft von  $P_0 = 518$  kN gefahren. Dabei bildeten sich deutlich erkennbare, wendelförmige Risse, woraufhin die Versuchsreihe vorzeitig abgebrochen wurde. Für die nachfolgenden Versuchsreihen ließ Hartwig [19] sechs neue Segmente fertigen. Um eine erneute Rissbildung zu vermeiden, wurde die Vorspannkraft deutlich reduziert und jedes Segment mit je drei Spanngurten in Umfangsrichtung vorgespannt. So wurde eine zweite Versuchsreihe mit  $P_0 = 263,5$  kN durchgeführt. Da keine Beschädigungen am Turm festgestellt werden konnten, wurden die selben Segmente für eine dritte Versuchsreihe verwendet. Für diese dritte und letzte Versuchsreihe wurde eine anfängliche Vorspannkraft von  $P_0 = 385$  kN gewählt.

Der für die analytische Berechnung angesetzte Reibbeiwert wurde auch hier mit dem maximal aufnehmbaren Torsionsmoment des ersten Versuchs einer jeden Versuchsreihe und Gleichung 5.1 ermittelt. Für die erste Versuchsreihe ergab sich so ein Reibbeiwert von 0,625. Für die zweite Versuchsreihe wurde ein Reibbeiwert von 0,550 und für die dritte Versuchsreihe von 0,538 ermittelt. Alle Versuche erfüllen in der Theorie die Bedingung für den Fall 1  $\tau_{zul,mat}(s) \geq \tau_{zul,\mu}(s)$  aus Abschnitt 4.3.2.4. Dass sich in der ersten Versuchsreihe dennoch deutlich sichtbare Risse einstellten, kann unterschiedliche Gründe haben. Zum einen sind die letzten beiden Versuche der ersten Versuchsreihe kurz davor, in den Fall 2 mit  $\tau_{zul,mat}(s_a) > \tau_{zul,\mu}(s_a)$  und  $\tau_{zul,mat}(s_e/2) < \tau_{zul,\mu}(s_e/2)$  überzugehen. Zum anderen ist die Verteilung des Reibbeiwerts mit Unsicherheiten behaftet, was lokal zu höheren Schubspannungen führen kann. Den größten Einfluss hat voraussichtlich aber die Ebenheit der Fuge, was die Normalspannungsverteilung und damit auch die Schubfestigkeit des Betons beeinflusst. Klein, Fürll, Betz und Marx [76, 77] zeigten experimentell, dass selbst bei geschliffenen Fugen deutliche Schwankungen in der Normalspannungsverteilung eines zentrisch vorgespannten Kreisringquerschnitts vorliegen können. Sie führen diese Schwankungen auf Unebenheiten der kontaktierenden Fugenflächen zurück.

Für die Interpretation von Versuchen spielt die Ebenheit der Fuge eine wichtige Rolle, da so beispielsweise das Rissverhalten der hier vorgestellten ersten Versuchsreihe erklärt werden kann. In der Praxis müssen selbstverständlich auch strenge Ebenheitskriterien erfüllt werden, allerdings werden sich Unebenheiten aufgrund von Kriecheffekten über die Zeit wieder einebnen. Ihre Relevanz nimmt daher über die Lebensdauer der Anlagen immer weiter ab.

Die Versuchsergebnisse der Großbauteilversuche können den Abbildungen 5.14 bis 5.16 entnommen werden. Wie auch bei den Kleinstbauteilversuchen, Abschnitt 5.3.1, ist die Torsionstragfähigkeit  $M_T$  an der linken vertikalen Achse abzulesen, während die Vorspannung  $P$  sowie die Normalkraft  $N$  an der rechten vertikalen Achse abzulesen sind. Die horizontale, untere Achse gibt wieder das Biegemoment  $M_z$  an und die am oberen Rand des Diagramms angeordnete Achse den Fugenöffnungswinkel  $\theta$  gemäß Gleichung 4.11.

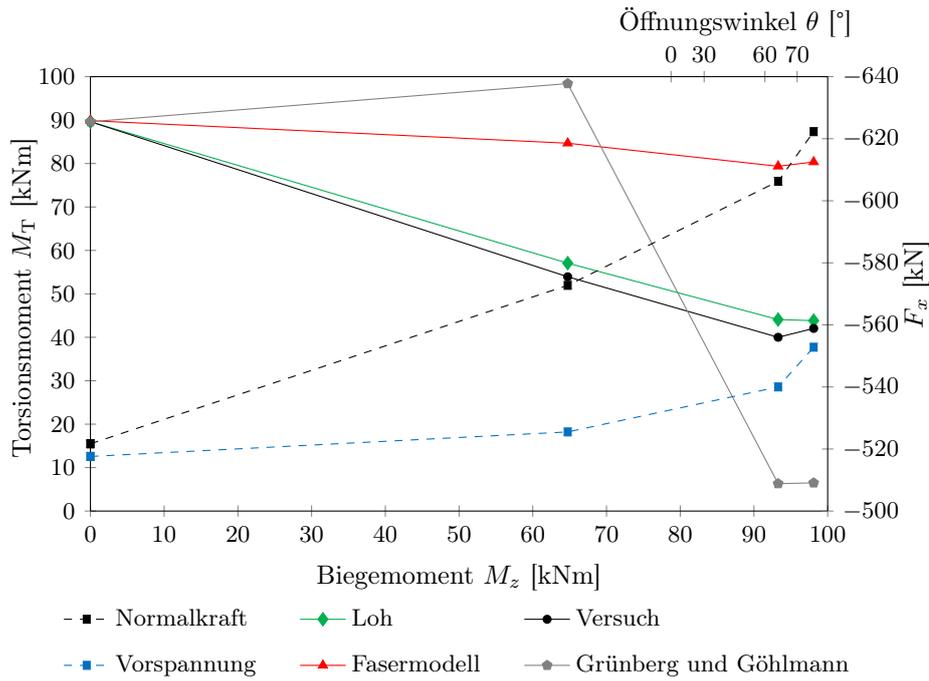


Abbildung 5.14: Torsionstragfähigkeiten der ersten Versuchsreihe ( $P_0 = 518$  kN)

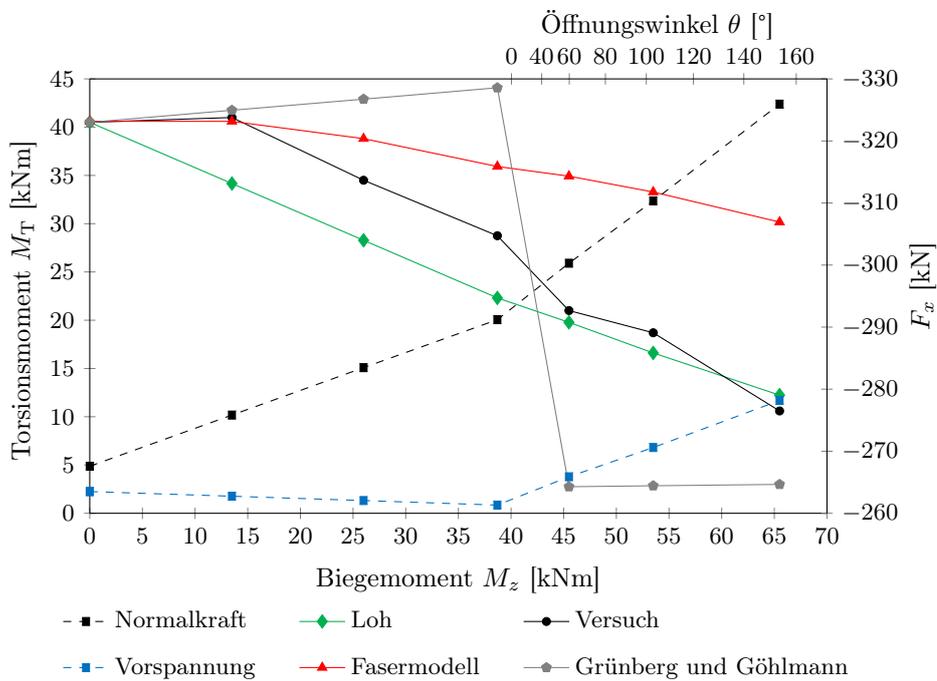


Abbildung 5.15: Torsionstragfähigkeiten der zweiten Versuchsreihe ( $P_0 = 263,5$  kN)

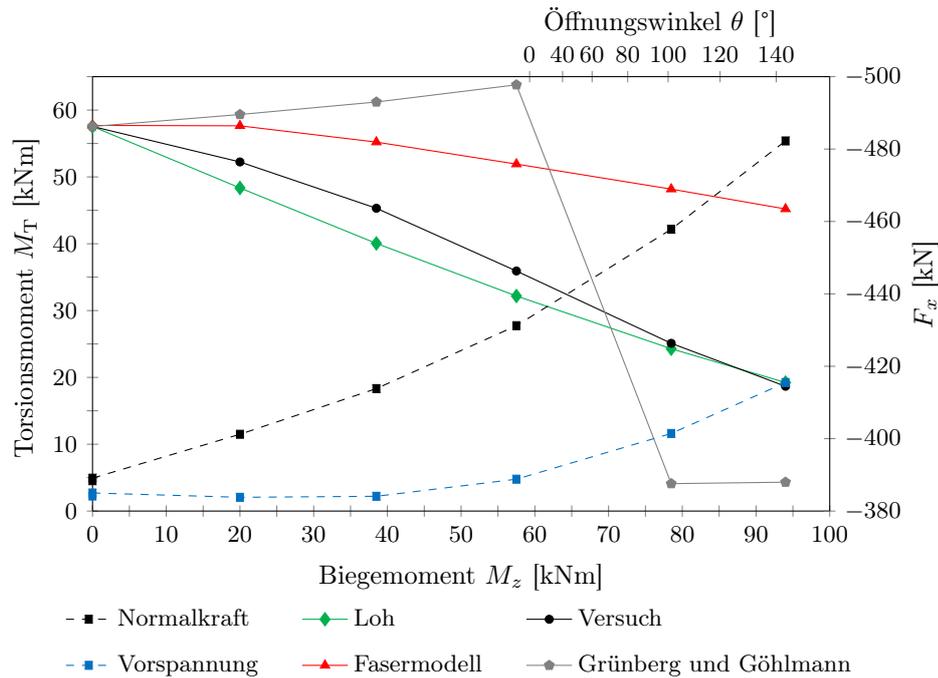


Abbildung 5.16: Torsionstragfähigkeiten der dritten Versuchsreihe ( $P_0 = 385$  kN)

In der ersten Versuchsreihe überschätzen beide analytischen Modelle die im Versuch ermittelten Torsionstragfähigkeiten, wobei das Fasermmodell deutliche Abweichungen zu den Versuchsergebnissen zeigt. Die zulässigen Torsionsmomente des in dieser Arbeit entwickelten Modells zeigen hingegen sehr gute Übereinstimmungen mit der Versuchsreihe. Auch in den anderen beiden Versuchsreihen wird deutlich, dass das Fasermmodell die Torsionstragfähigkeit teils um ein Vielfaches überschätzt, während das hier erarbeitete Modell die Torsionstragfähigkeit tendenziell unterschätzt. Gleichzeitig sind die Abweichungen zu den Versuchen deutlich geringer als beim Fasermmodell. Setzt man die in den Versuchen ermittelte Torsionstragfähigkeit  $M_{T,exp}$  ins Verhältnis zur Torsionstragfähigkeit der analytischen Modelle  $M_{T,calc}$ , erhält man, je nach Bezugsparameter, eine der folgenden Abbildungen:

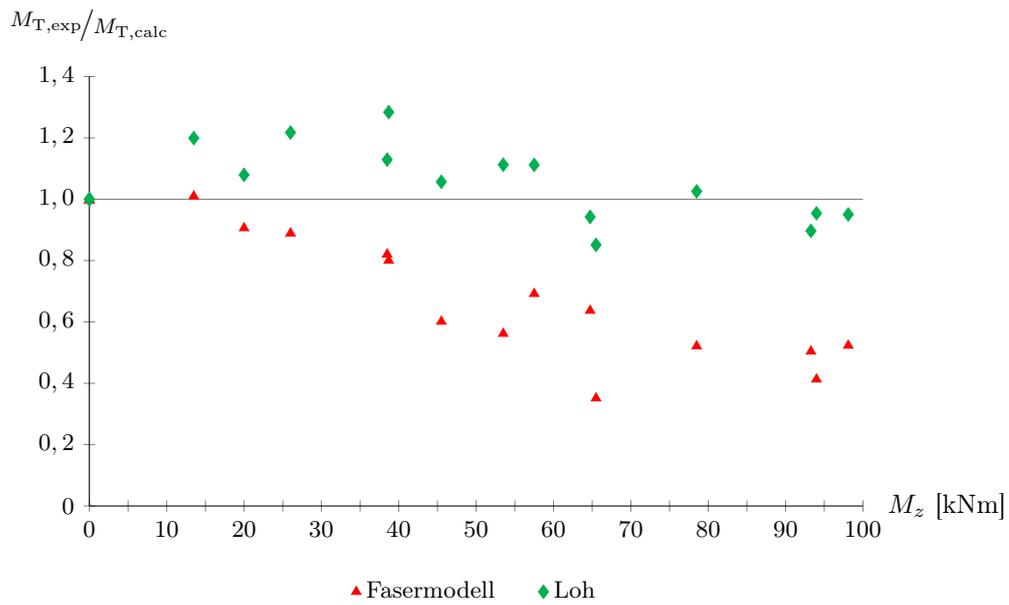


Abbildung 5.17: Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach dem Biegemoment  $M_z$

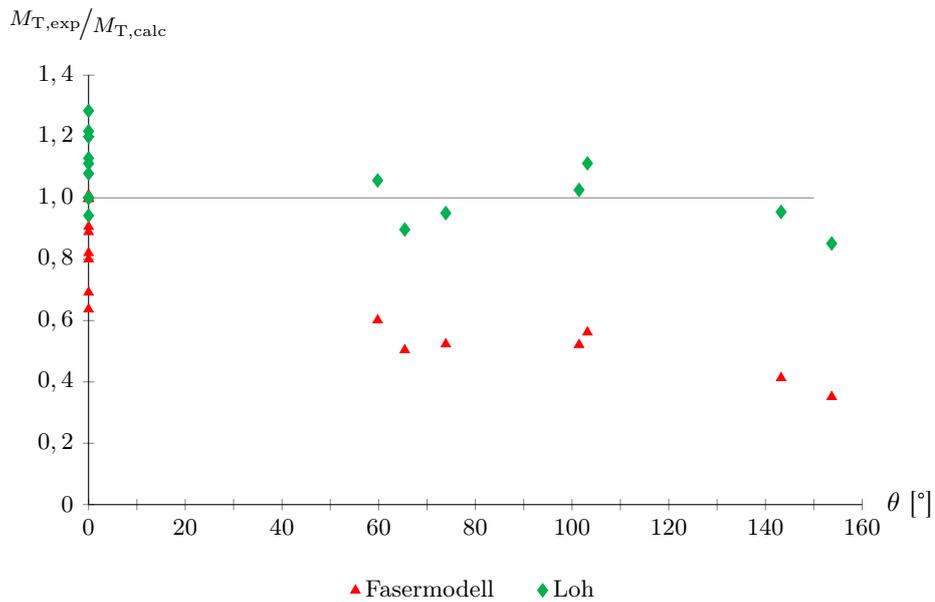


Abbildung 5.18: Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach dem Fugenöffnungswinkel  $\theta$

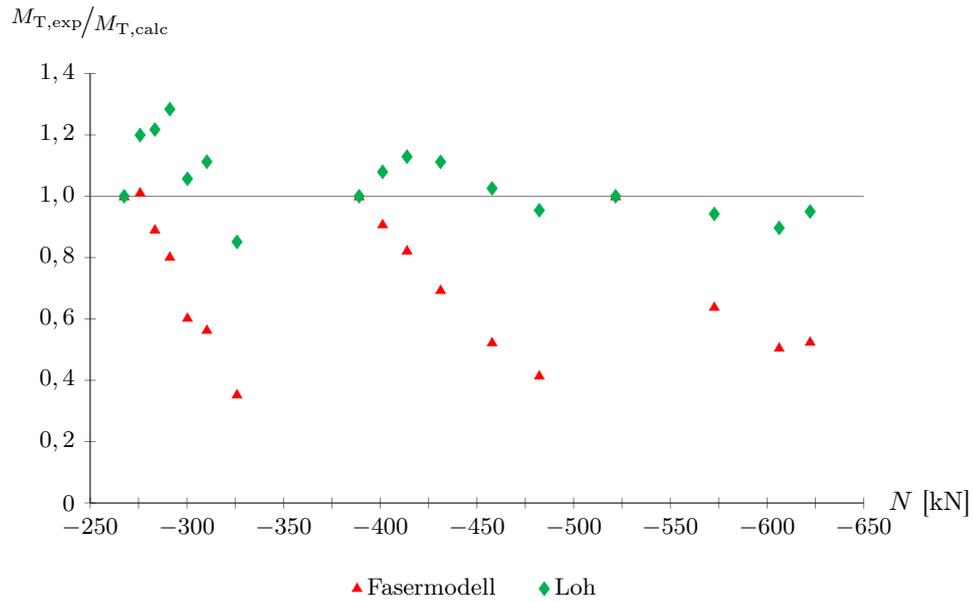


Abbildung 5.19: Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach der Normalkraft  $N$

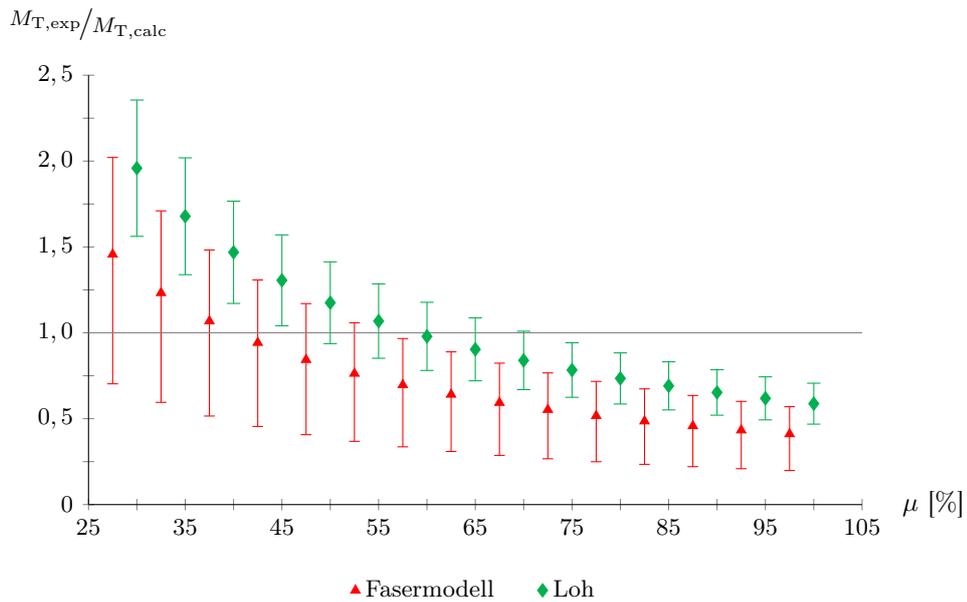


Abbildung 5.20: Auswertung der Torsionstragmodelle der drei Versuchsreihen nach dem Reibbeiwert  $\mu$

Die Abbildungen 5.17 bis 5.19 verwenden die mit Gleichung 5.1 ermittelten Reibbeiwerte. In Abbildung 5.20 wird ein Reibbeiwert für alle drei Versuchsreihen verwendet. Jeder Datenpunkt in Abbildung 5.20 stellt das arithmetische Mittel der normierten Torsionstragfähigkeiten dar. Die verwendeten Fehlerindikatoren zeigen dabei die Streubreite der 17 Versuche der drei

Versuchsreihen. Für eine bessere Lesbarkeit wurden die verwendeten Reibbeiwerte der analytischen Modelle versetzt zueinander gewählt. Zwischenwerte dürfen interpoliert werden. Eine Diskussion der oben präsentierten Auswertung folgt in Abschnitt 5.3.4.

### 5.3.3 FE-Simulation

Zur numerischen Berechnung der Großbauteilversuche, Abschnitt 5.3.2, diente das in Abschnitt 5.2 beschriebene FE-Modell. Anstelle eines linear elastischen Materials wurde nun in zweiter Instanz ein Material verwendet, das dem Fließkriterium von Menétrey und Willam [20] gemäß Abschnitt 2.2.2 folgt. Anstelle der Bezeichnungen «Versagenskriterium» und «Versagenshülle» werden in diesem Abschnitt die Begriffe «Fließkriterium» und «Fließfläche» verwendet, da in der FE-Berechnung keine wirkliche Schädigung und somit streng genommen auch kein Versagen abgebildet werden kann. Kalibriert wurde das Fließkriterium von Menétrey und Willam [20] anhand der einachsialen Druck- und Zugfestigkeit sowie der zweiachsialen Druckfestigkeit, entsprechend Tabelle 5.3. Die Originalfunktion von Menétrey und Willam [20] wurde in Abschnitt 2.2.2 vorgestellt. Eine Darstellung anhand der Festigkeitswerte der Tabelle 5.3 kann dem Material Reference Guide von Ansys [78, S. 199] entnommen werden.

Tabelle 5.3: Kalibrierungswerte des Fließkriteriums von Menétrey und Willam

Menétrey und Willam bilinear			
einachsiale Druckfestigkeit	$f_{cc}$	78	N/mm <sup>2</sup>
einachsiale Zugfestigkeit	$f_{ct}$	4,6	N/mm <sup>2</sup>
zweiachsiale Druckfestigkeit	$f_{c2c}$	87,5	N/mm <sup>2</sup>

Das Material verhält sich für Spannungszustände innerhalb der Fließfläche linear elastisch und ideal plastisch für Spannungszustände auf der Fließfläche. Daher wird das Materialmodell nachfolgend auch mit dem Stichwort bilinear gekennzeichnet.

Neben der Berechnung mit diesem bilinearen Material wurden auch Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam [20], inklusive Verfestigung (Hardening) und Entfestigung (Softening), durchgeführt. Dieses Materialmodell wird nachfolgend auch mit dem Zusatz H + S gekennzeichnet. Verfestigung und Entfestigung beschreiben das Spannungsdehnungsverhalten im plastischen Bereich. Während die Verfestigung den Spannungszuwachs nach Verlassen des elastischen Bereichs beschreibt, steht die Entfestigung für den Spannungsverfall und das Nachbruchverhalten.

Das Spannungs-Dehnungsverhalten im Druckbereich kann, unter der Annahme eines linearen Entfestigungsverhaltens, durch vier Parameter entsprechend Abbildung 5.21 dargestellt werden. Die Bezeichnungen wurden vom Material Reference Guide von Ansys [78, Abschnitt 4.10.6] übernommen. Die  $\kappa$ -Werte in Abbildung 5.21 beschreiben die plastische Dehnung am Ende der Verfestigung ( $\kappa_{cm}$ ) und am Ende der Entfestigung ( $\kappa_{cr}$ ). Die  $\Omega$ -Werte beschreiben das Spannungsniveau am Beginn der Verfestigung ( $\Omega_{ci}$ ) und am Ende der Entfestigung ( $\Omega_{cr}$ ). Es handelt sich dabei um normierte Spannungen. Ein Spannungszustand mit dem Wert  $\Omega_c = 1$  befindet sich dabei genau auf der durch die Werte in Tabelle 5.3 aufgespannten Fließfläche.

Die Verfestigungsfunktion ist eine Potenzfunktion und kann dem Material Reference Guide von Ansys [78, S.202] entnommen werden. Im Zugbereich gibt es keine Verfestigung, daher werden zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungsverhaltens im Zugbereich nur zwei Parameter entsprechend Abbildung 5.22 benötigt.

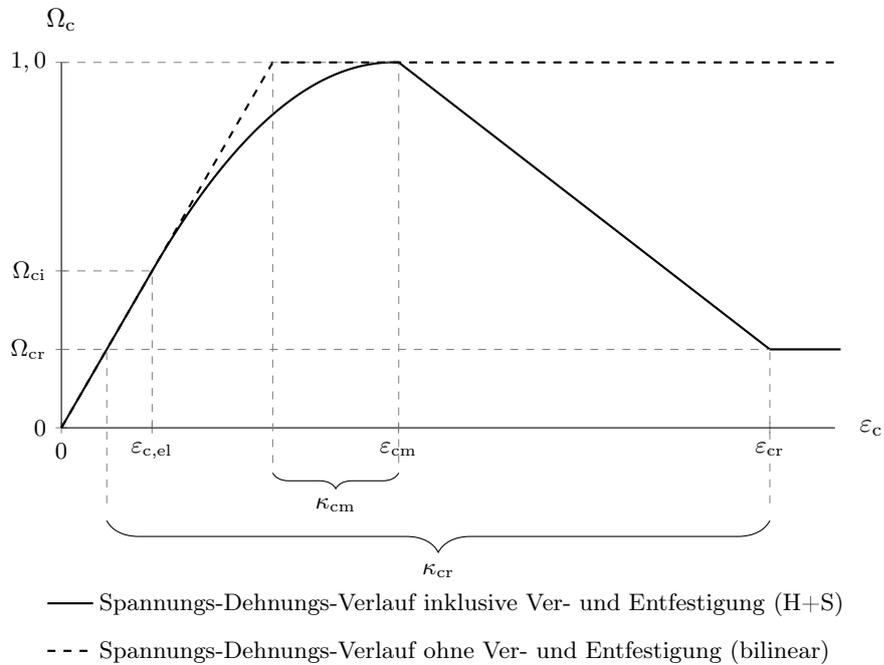


Abbildung 5.21: Ver- und Entfestigung im Druckbereich

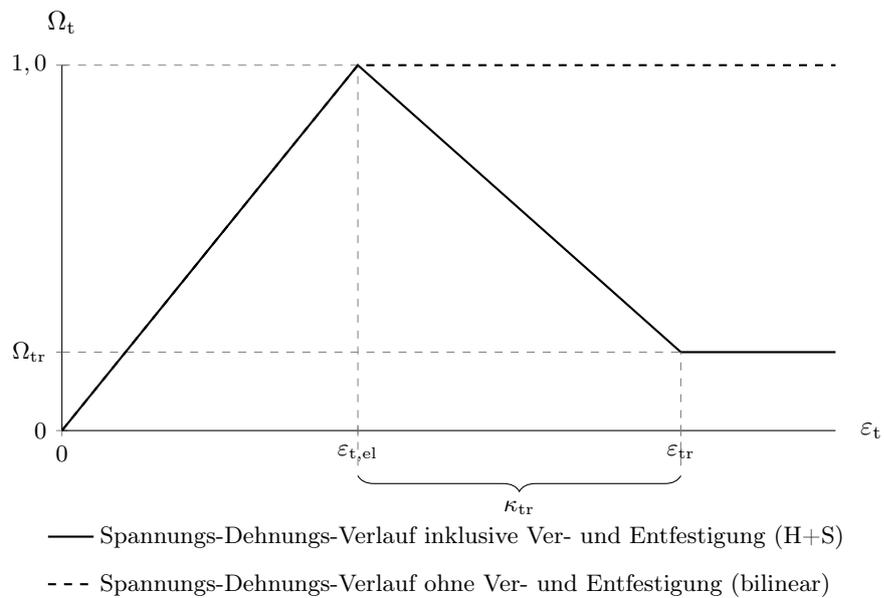


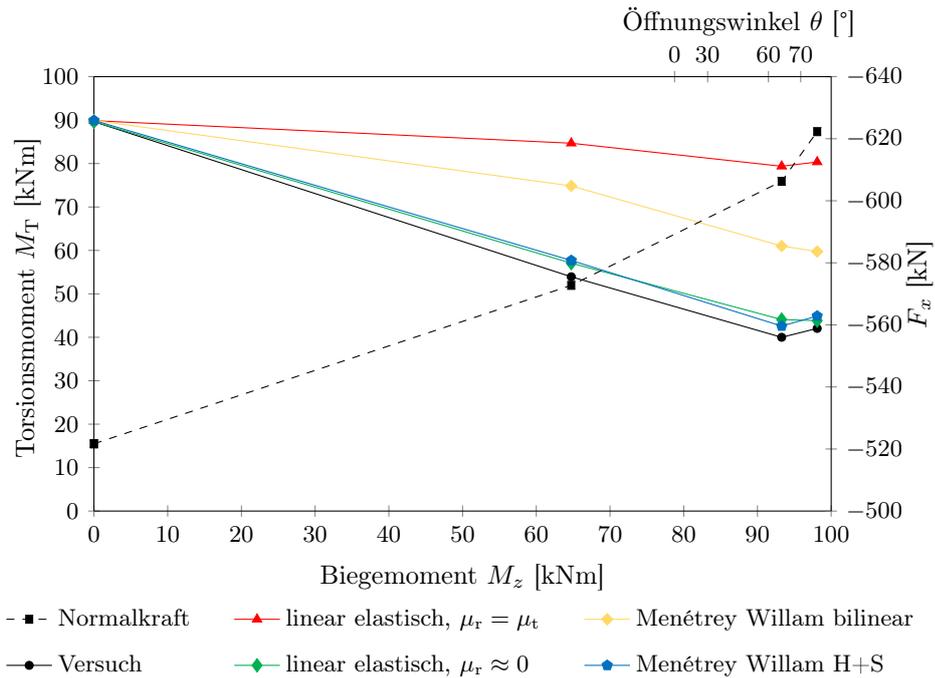
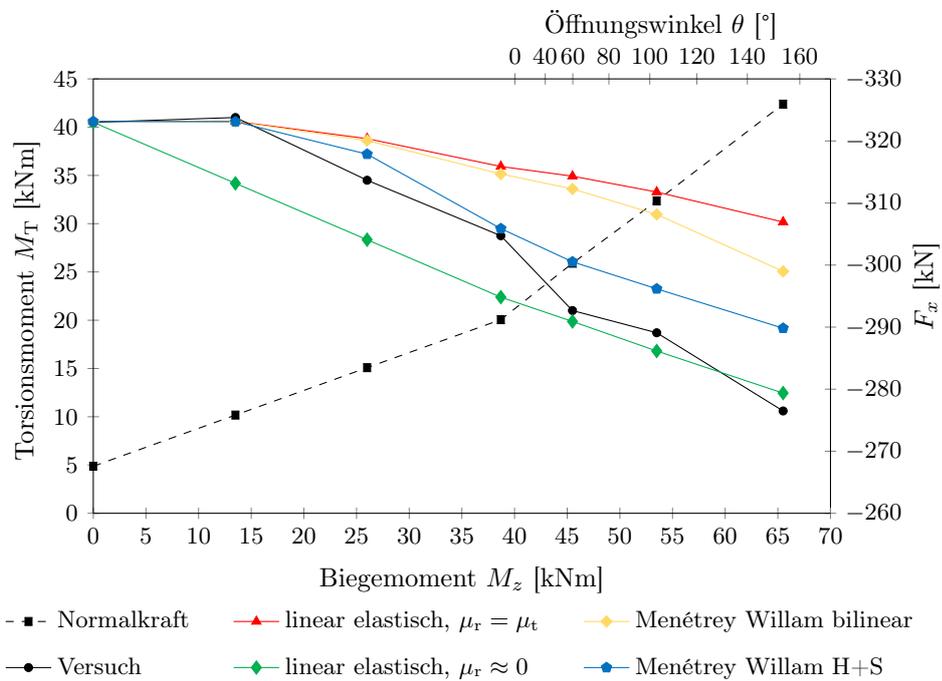
Abbildung 5.22: Entfestigung im Zugbereich

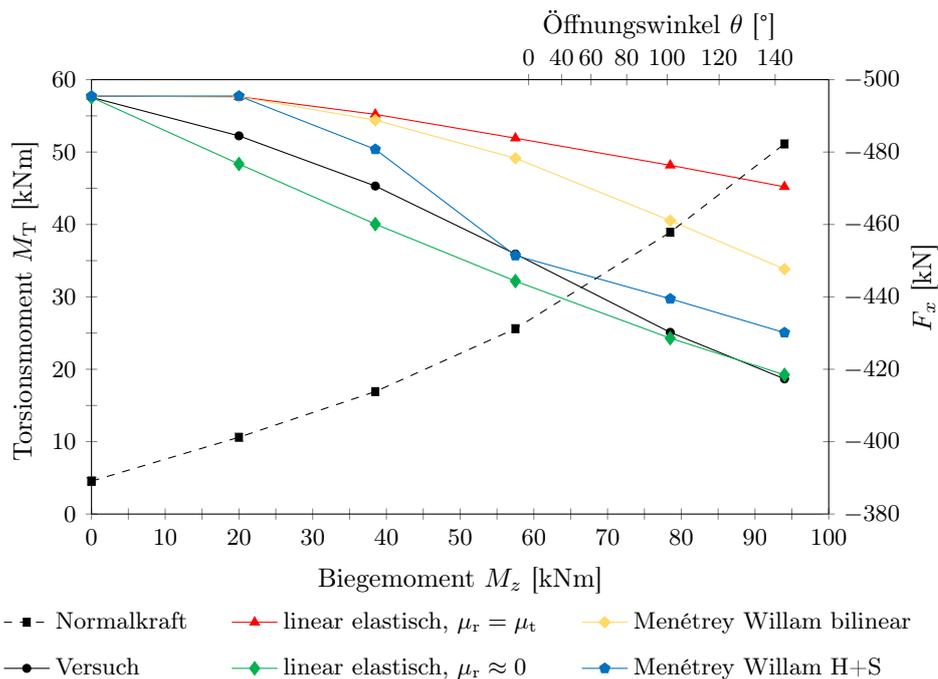
Die verwendeten Werte der Ver- und Entfestigungsparameter können Tabelle 5.4 entnommen werden. Entsprechend der Empfehlungen von Cadfem [32] entspricht die plastische Dehnung am Ende der Entfestigung  $\kappa_{cm}$  der plastischen Dehnung unter einachsialer Druckbeanspruchung beim Erreichen der einachsialen Druckfestigkeit. So wurden hier die Festigkeits- und Formänderungskennwerte der DIN EN 1992-1-1 [11, S. 30] zur Berechnung von  $\kappa_{cm} = \varepsilon_{c1} - f_{ck}/E$  herangezogen. Ebenfalls an die DIN EN 1992-1-1 [11, S. 35] angelehnt ist der Wert der relativen Spannung zu Beginn der Verfestigung  $\Omega_{ci}$ . Wie auch der Elastizitätsmodul, welcher sich über den Wert  $0,4 \cdot f_{cm}$  definiert, wurde hier  $\Omega_{ci}$  gleich 0,4 gesetzt. Die anderen Werte in Tabelle 5.4 sind Empfehlungen von Cadfem [32].

Tabelle 5.4: Parameterdefinition der Ver- und Entfestigung

plastische Dehnung bei einachsialer Druckfestigkeit	$\kappa_{cm}$	0,001
größte plastische Dehnung im Druckbereich	$\kappa_{cr}$	0,02
relative Spannung zu Beginn der Verfestigung	$\Omega_{ci}$	0,4
relative Restspannung im Druckbereich	$\Omega_{cr}$	0,2
größte plastische Dehnung im Zugbereich	$\kappa_{tr}$	0,0005
relative Restspannung im Zugbereich	$\Omega_{tr}$	0,2

Die Torsionstragfähigkeiten aus den FE-Berechnungen können den Abbildungen 5.23 bis 5.25 entnommen werden. Ebenfalls dargestellt sind die Torsionstragfähigkeiten aus den FE-Berechnungen nach Abschnitt 5.2 mit einem linear elastischen Werkstoff und isotroper, bzw. orthotroper Kontaktbedingung. Wie bereits in Abschnitt 5.2 dargelegt, entspricht eine Berechnung mit linear elastischem Werkstoff und isotroper Kontaktbedingung ( $\mu_r = \mu_t$ ) dem in Abschnitt 3.3.3 vorgestellten Fasermodell, während eine Berechnung mit orthotroper Kontaktbedingung ( $\mu_r \approx 0$ ) dem in dieser Arbeit entwickelten Modell entspricht. Die Abweichungen in den Torsionstragfähigkeiten zwischen dem Fasermodell bzw. dem in dieser Arbeit entwickelten Modell und den FE-Berechnungen mit linear elastischem Werkstoff liegen in allen drei Versuchsreihen im Promillebereich.

Abbildung 5.23: FE-Torsionstragfähigkeiten der ersten Versuchsreihe ( $P_0 = 518$  kN)Abbildung 5.24: FE-Torsionstragfähigkeiten der zweiten Versuchsreihe ( $P_0 = 263,5$  kN)

Abbildung 5.25: FE-Torsionstragfähigkeiten der dritten Versuchsreihe ( $P_0 = 385$  kN)

Erwartungsgemäß werden in den FE-Berechnungen mit linear elastischem Werkstoff und isotroper Kontaktbedingung die größten Torsionstragfähigkeiten erreicht. Wird das Fließkriterium von Menétrety und Willam verwendet, fallen die Torsionstragfähigkeiten mit zunehmendem Biegemoment ab. Besonders stark zeigt sich dieser Trend, wenn auch eine Ver- und Entfestigung (H+S) berücksichtigt wird. Am geringsten sind die Torsionstragfähigkeiten der Berechnungen mit linear elastischem Werkstoff und orthotroper Kontaktbedingung. Wobei diese in der ersten Versuchsreihe annähernd die gleichen Torsionstragfähigkeiten zeigen, wie die Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrety und Willam H+S. Zugleich weisen sie auch eine gute Übereinstimmung mit den im Versuch ermittelten Torsionstragfähigkeiten auf. In der zweiten und dritten Versuchsreihe hingegen bewegen sich die Versuchsergebnisse zwischen den Berechnungen mit linear elastischem Werkstoff und orthotroper Kontaktbedingung und denen mit dem Fließkriterium von Menétrety und Willam H+S.

Die, im Vergleich zu den Berechnungen mit linear elastischem Werkstoff und isotroper Kontaktbedingung, geringeren Torsionstragfähigkeiten der Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrety und Willam lassen sich allein auf plastische Dehnungen zurückführen. Abbildung 5.26 zeigt beispielhaft das Torsionsmoment, aufgetragen über die Verdrehung für den fünften Versuch der zweiten Versuchsreihe. Das Abflachen der Kurve der Berechnung mit linear elastischem Werkstoff zeigt, wie Gleitungen in der Segmentfuge das maximal aufnehmbare Torsionsmoment begrenzen. In Kontrast dazu stehen die Kurven der Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrety und Willam. Die Differenz zur Kurve der linear elastischen Berechnung ist eine direkte Konsequenz plastischer Dehnungen.

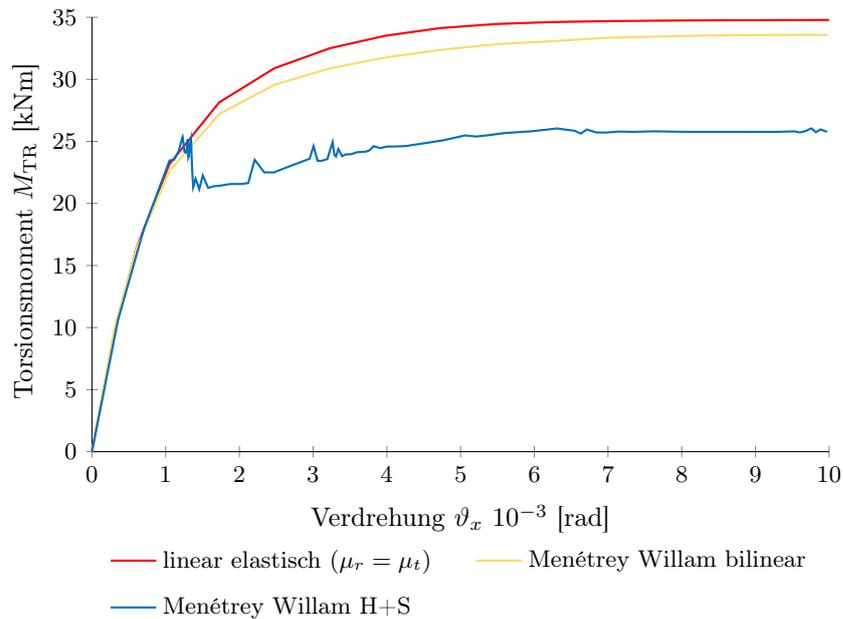


Abbildung 5.26: Torsionsmoment des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe, aufgetragen über die Verdrehung

Abbildung 5.27 zeigt die plastischen Dehnungen der bilinearen Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam. Das Biegemoment dreht positiv um die  $z$ -Achse. Somit befindet sich in den oberen beiden Bildern aus Abbildung 5.27 die Biegezugzone auf der linken und die Biegedruckzone auf der rechten Seite. Bei den unteren beiden Bildern hingegen schaut man direkt auf die Biegedruckzone. Da sich in einem Großteil der finiten Elemente, die plastische Dehnungen aufweisen, plastische Dehnungen am unteren Rand der Skala zeigen, was wiederum kaum von finiten Elementen ohne plastische Dehnungen zu unterscheiden ist, sind in den Bildern auf der rechten Seite ausschließlich die plastischen Dehnungen  $\varepsilon_{pl} > 0$  abgebildet.

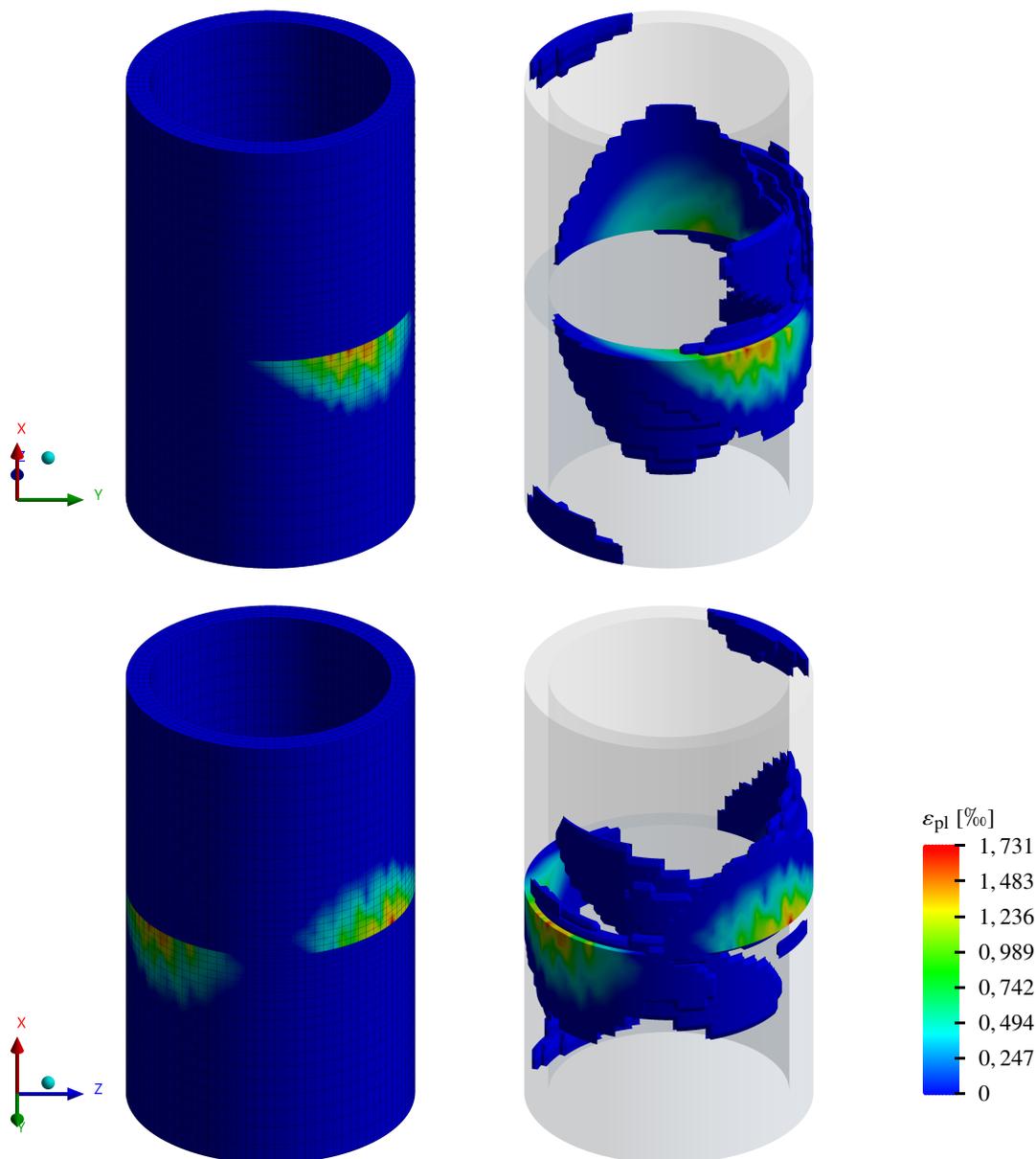


Abbildung 5.27: Plastische Dehnungen des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam, bilinear bei  $\vartheta_x = 7,5 \cdot 10^{-3}$  [rad]

Auffällig sind die wechselseitig angeordneten Bereiche, in denen der Hauptteil der plastischen Dehnungen vorliegt. Qualitativ zeigen alle Versuche aus Abschnitt 5.3.2, in denen auch eine Biegebeanspruchung vorliegt, plastische Dehnungen, ähnlich wie in Abbildung 5.27. Die Bereiche, in denen der Hauptteil der plastischen Dehnungen vorliegt, fallen dabei stets mit den Bereichen zusammen, in denen laut dem Fasermodell (Abschnitt 3.3.3) die größten radialen Schubspannungen vorliegen.

Ein ähnliches Bild zeigt sich in Abbildung 5.28, was die plastischen Dehnungen der Berechnung inkl. Ver- und Entfestigung (H+S) zeigt, bevor die zugehörige Kurve in Abbildung 5.26 abfällt. Die Bereiche, in denen plastische Dehnungen auftreten, sind hier ebenfalls wechselseitig

angeordnet. Allerdings sind diese Bereiche, im Vergleich zur bilinearen Berechnung, näher zur Biegezugzone hin orientiert. Aufgrund der Berücksichtigung einer Entfestigung treten zudem die plastischen Dehnungen deutlich lokalisierter auf. Besonders deutlich wird dies in Abbildung 5.29, welche die plastischen Dehnungen kurz nach dem Einbruch der zugehörigen Kurve in Abbildung 5.26 zeigt.

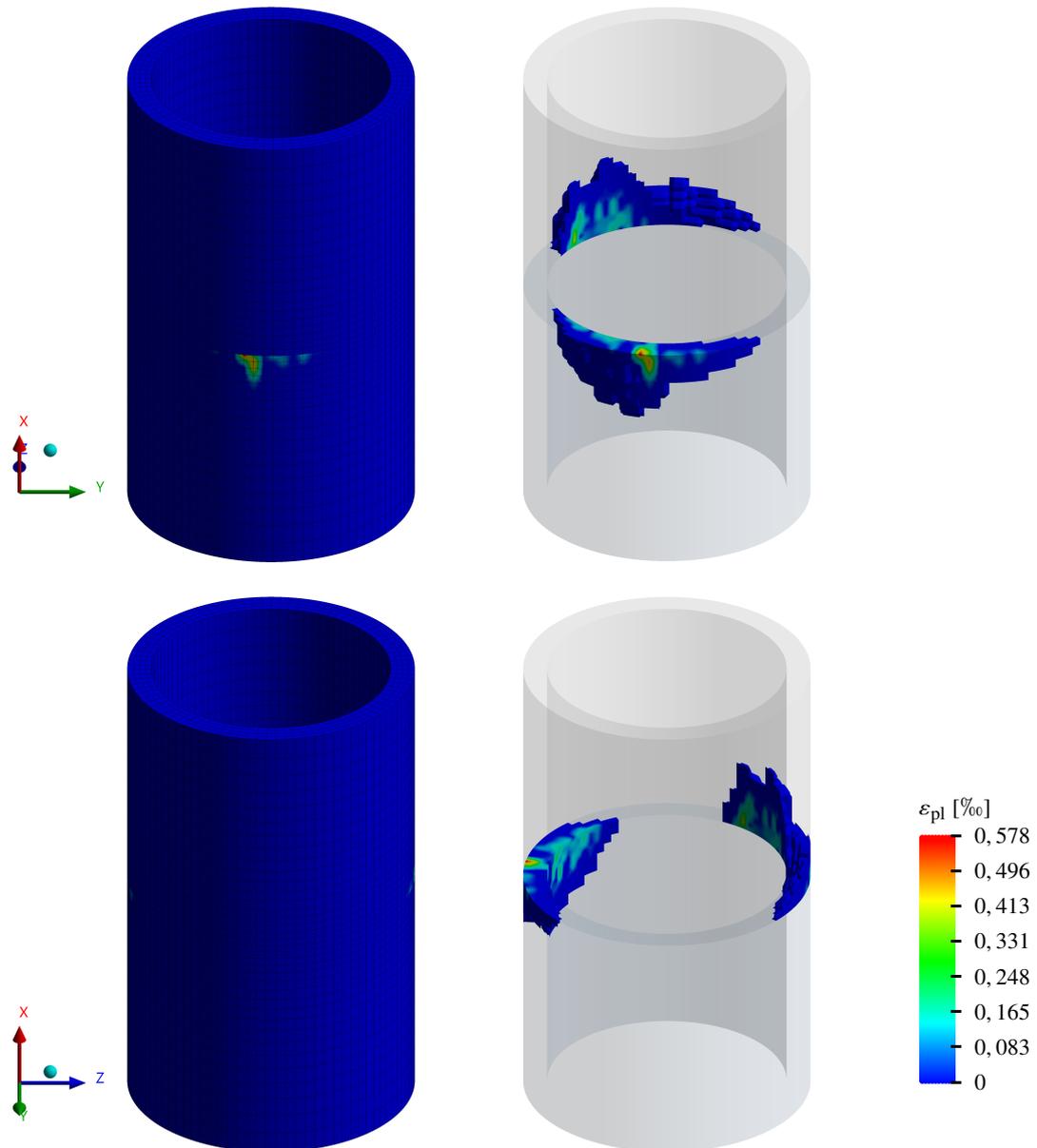


Abbildung 5.28: Plastische Dehnungen des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 1,1 \cdot 10^{-3}$  [rad]

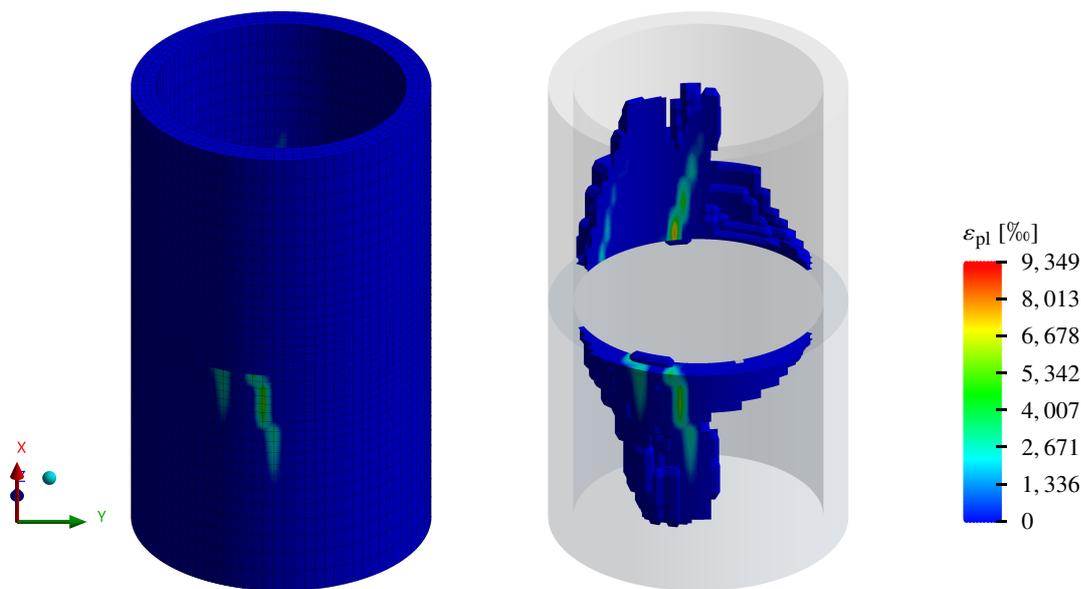


Abbildung 5.29: Plastische Dehnungen des fünften Versuchs der zweiten Versuchsreihe mit dem Fließkriterium von Menétreay und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 1,65 \cdot 10^{-3}$  [rad]

Eine Diskussion der oben präsentierten Ergebnisse erfolgt im nachfolgenden Abschnitt 5.3.4.

### 5.3.4 Diskussion der Versuchsergebnisse

In Abschnitt 5.2 wurde anhand von FE-Berechnungen gezeigt, dass das Fasermmodell [19] und das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Modell plausible Torsionsschubspannungen und -tragfähigkeiten liefern, wenn die jeweiligen Modellannahmen im FE-Modell berücksichtigt werden. Dabei konnte gezeigt werden, dass die sich einstellenden Radialschubspannungen ausschlaggebend dafür sind, welchem der o.g. Modelle sich die Tangentialschubspannungen der FE-Berechnung annähern. Dies ist entscheidend, da der Tangentialanteil der Schubspannungen maßgeblich die Torsionstragfähigkeit bestimmt. Folgt man der Annahme dünnwandiger Querschnitte, sollten sich keine Radialschubspannungen einstellen können. Die Schlankheit des Querschnitts spricht dafür, dass die Theorie dünnwandiger Querschnitte zur Anwendung kommen sollte. Ursächlich für die dennoch hohen Radialschubspannungen sind Gleitungen im Fugenquerschnitt, die bei monolithischen Stäben nicht auftreten können. So bauen sich über die Wanddicke, trotz relativ schlanken Querschnitts, Radialschubspannungen auf.

In Abschnitt 5.3 wurden die Kleinst- und Großbauteilversuche von Hartwig [19] vorgestellt. Die Versuchsergebnisse wurden ins Verhältnis zu den Torsionstragfähigkeiten des Fasermmodells bzw. des in dieser Arbeit entwickelten Modells gestellt. Wie den Abbildungen 5.7, 5.8 und 5.14 bis 5.16 zu entnehmen ist, sind die im Versuch ermittelten Torsionstragfähigkeiten größtenteils geringer, als die aufnehmbaren Torsionsmomente des Fasermmodells und größer als die aufnehmbaren Torsionsmomente des hier entwickelten Modells. Gleichzeitig können die Torsionstragfähigkeiten der Kleinstbauteilversuche gut über das Fasermmodell abgeschätzt werden, während die Torsionstragfähigkeiten der Großbauteilversuche besser zu dem in dieser Arbeit entwickelten Modell passen. Dies legt nahe, dass die o.g. Modelle unterschiedliche Definitionsbereiche aufweisen, und dass die Kleinst- bzw. Großbauteilversuche diese Definitionsbereiche abdecken.

Den Abbildungen 5.9 bis 5.11 und 5.17 bis 5.19 ist zu entnehmen, dass keine eindeutigen Korrelationen zwischen der Torsionstragfähigkeit und der Normalkraft, dem Biegemoment oder dem Fugenöffnungswinkel vorliegen. Es zeigt sich jedoch, dass beide Modelle für kleine Biegemomente gute und realistische Tragfähigkeiten angeben. Ursächlich hierfür ist, dass beide Modelle einen annähernd gleichen Schubfluss für gleichmäßig überdrückte Fugen ansetzen. Erst mit zunehmendem Biegemoment wird der Unterschied beider Modelle deutlich. Die Abbildungen 5.12 und 5.20 weisen darauf hin, dass geringere Reibbeiwerte das Fasermodell und größere Reibbeiwerte das in dieser Arbeit entwickelte Modell begünstigen. Der jedoch offensichtlichste Unterschied zwischen den Kleinst- und Großbauteilversuchen ist, neben den Abmessungen, der verwendete Werkstoff. Für die Kleinstbauteilversuche wurden Aluminiumrohre verwendet. Aluminium weist, im Vergleich zu Beton, relativ hohe Druck- und Zugfestigkeiten auf und besitzt ein ausgeprägtes linear elastisches Verhalten. Es überrascht daher nicht, dass die Kleinstbauteilversuche sich zu jeder Zeit im linear elastischen Bereich des Werkstoffs aufhalten. Entsprechend ruft die in den Kleinstbauteilversuchen aufgebrachte Beanspruchung in guter Näherung eine Starrkörperverschiebung hervor, was wiederum dem Fasermodell gleichkommt. Im Kontrast dazu stehen die Großbauteilversuche aus Stahlbetonrohren. Der linear elastische Bereich von Beton ist im Vergleich zu Aluminium nur schwach ausgeprägt. Zudem begünstigt sein Verfestigungsverhalten unter Druckbeanspruchungen Umlagerungen. Auch Risse infolge der geringen Zugfestigkeit müssen durch Spannungsumlagerungen kompensiert werden.

In Abschnitt 5.3.3 wurden die Großbauteilversuche mit Hilfe der Finiten-Element-Methode berechnet. Die Segmente wurden mit einem linear elastischen Werkstoffgesetz abgebildet bzw. mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam mit und ohne Ver- und Entfestigung. Abbildung 5.26 legt nahe, dass die Torsionstragfähigkeit mit der Zunahme an plastischen Dehnungen abnimmt. Die Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam bilinear, Abbildung 5.27, zeigen, dass plastische Dehnungen in den Bereichen konzentriert sind, in denen die größten Radialschubspannungen, gemäß dem Fasermodell, zu erwarten sind. Hingegen zeigen die Berechnungen unter Berücksichtigung einer Ver- und Entfestigung (H+S), Abbildungen 5.28 und 5.29, dass plastische Dehnungen, im Vergleich zur bilinearen Berechnung, näher zur Biegezugzone hin konzentriert vorkommen. Zudem treten die plastischen Dehnungen immer wechselseitig an den Segmenten auf. Wie es zu diesen Phänomenen kommt wird nachfolgend beleuchtet. Die dahinter stehenden Mechanismen helfen, die Definitionsbereiche der hier diskutierten Modelle zu identifizieren sowie die Zuverlässigkeit der Modelle zu bewerten.

Zur Erläuterung dient der sechste Versuch der dritten Versuchsreihe der Großbauteilversuche. Zum einen sind die Unterschiede zwischen dem Fasermodell und dem in dieser Arbeit entwickelten Modell, aufgrund des hohen Biegemoments in diesem Versuch, besonders ausgeprägt. Zum anderen wird nochmals deutlich, dass die plastischen Dehnungen in allen Versuchsreihen die gleiche Qualität aufweisen.

Abbildung 5.30 zeigt die Torsionsmomentenreaktion im Auflager, aufgetragen über die Verdrehung am Kopf des FE-Modells. Da die Berechnungen sich lediglich im Werkstoffgesetz unterscheiden, sind die im Vergleich zur Berechnung mit linear elastischen Segmenten geringeren Tragfähigkeiten mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam ausschließlich auf die zu erwartenden plastischen Dehnungen zurückzuführen. Die Tatsache, dass die plastischen Dehnungen bei den Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam bilinear lokal mit den größten Radialschubspannungen zusammenfallen, weist darauf hin, dass die Radialschubspannungen dafür sorgen, dass plastische Dehnungen entstehen. Es gilt zu beachten, dass nicht der Spannungszustand aus Normalkraft, Biegung und Torsion plastische Dehnungen hervorruft,

da die Schubfestigkeit des Betons an jeder Stelle größer ist als der Reibwiderstand in der Fuge. Entsprechend sind die Großbauteilversuche dem Fall 1 aus Abschnitt 4.3.2.4 zuzuordnen. Demnach plastiziert der Beton nicht wegen der Radialschubspannungen, sondern infolge der aus ihnen hervorgerufenen Schalenbiegung. Somit ist auch diese Schalenbiegung für die plastischen Dehnungen verantwortlich.

Um dieser Hypothese nachzugehen, werden nachfolgend die plastischen Dehnungen sowie die Radial- und Tangentialschubspannungen des sechsten Versuchs der dritten Versuchsreihe, stellvertretend für die Großbauteilversuche insgesamt, vorgestellt und diskutiert.

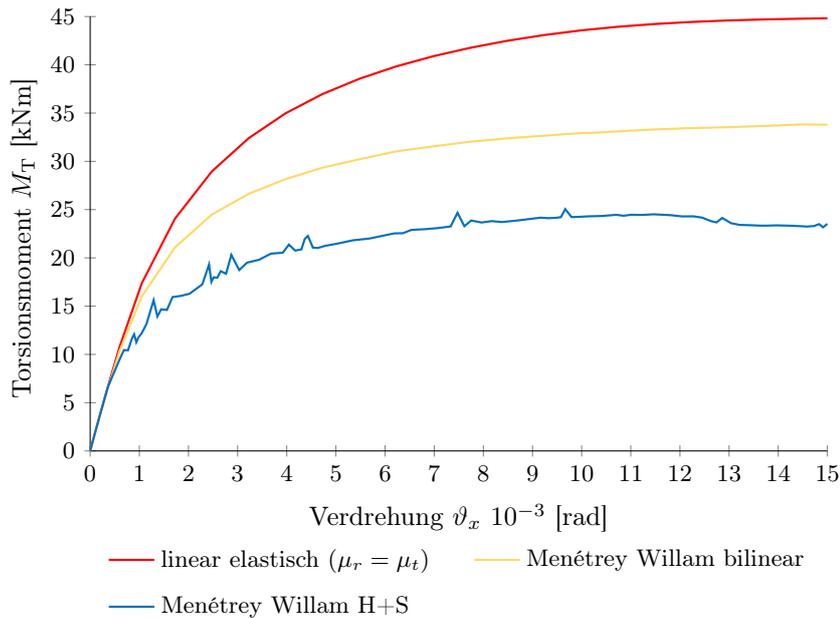


Abbildung 5.30: Torsionsmoment des sechsten Versuchs der dritten Versuchsreihe, aufgetragen über die Verdrehung

Die plastischen Dehnungen des hier zur Erläuterung herangezogenen Versuchs können Abbildung 5.31 entnommen werden. Dargestellt sind alle plastischen Dehnungen  $\varepsilon_{pl} \geq 1 \text{ ‰}$ . Die plastischen Dehnungen wurden für die Darstellung nach unten gekappt, um die Bereiche sichtbar zu machen, in denen vordergründig plastische Dehnungen auftreten. Für eine bessere Orientierung sei noch einmal erwähnt, dass das Biegemoment positiv um die  $z$ -Achse dreht. Somit zeigen die Ansichten auf der rechten Seite von Abbildung 5.31 die Biegedruckzone, während in den Darstellungen auf der linken Seite die klaffende Fuge bzw. die Biegezugzone links und die Biegedruckzone rechts verortet sind. Gemäß dem Fasermodell würde sich der Drehpunkt  $D$  bei  $y_D = 22,9 \text{ cm}$  einstellen. Für die Berechnung mit bilinearem Fließkriterium ist festzustellen, dass die Bereiche mit den größten Radialschubspannungen, gemäß dem Fasermodell, mit den Bereichen zusammenfallen, in denen vermehrt plastische Dehnungen vorherrschen. Dies wird deutlich, wenn man Abbildung 5.31 a) und Abbildung 5.32 miteinander vergleicht.

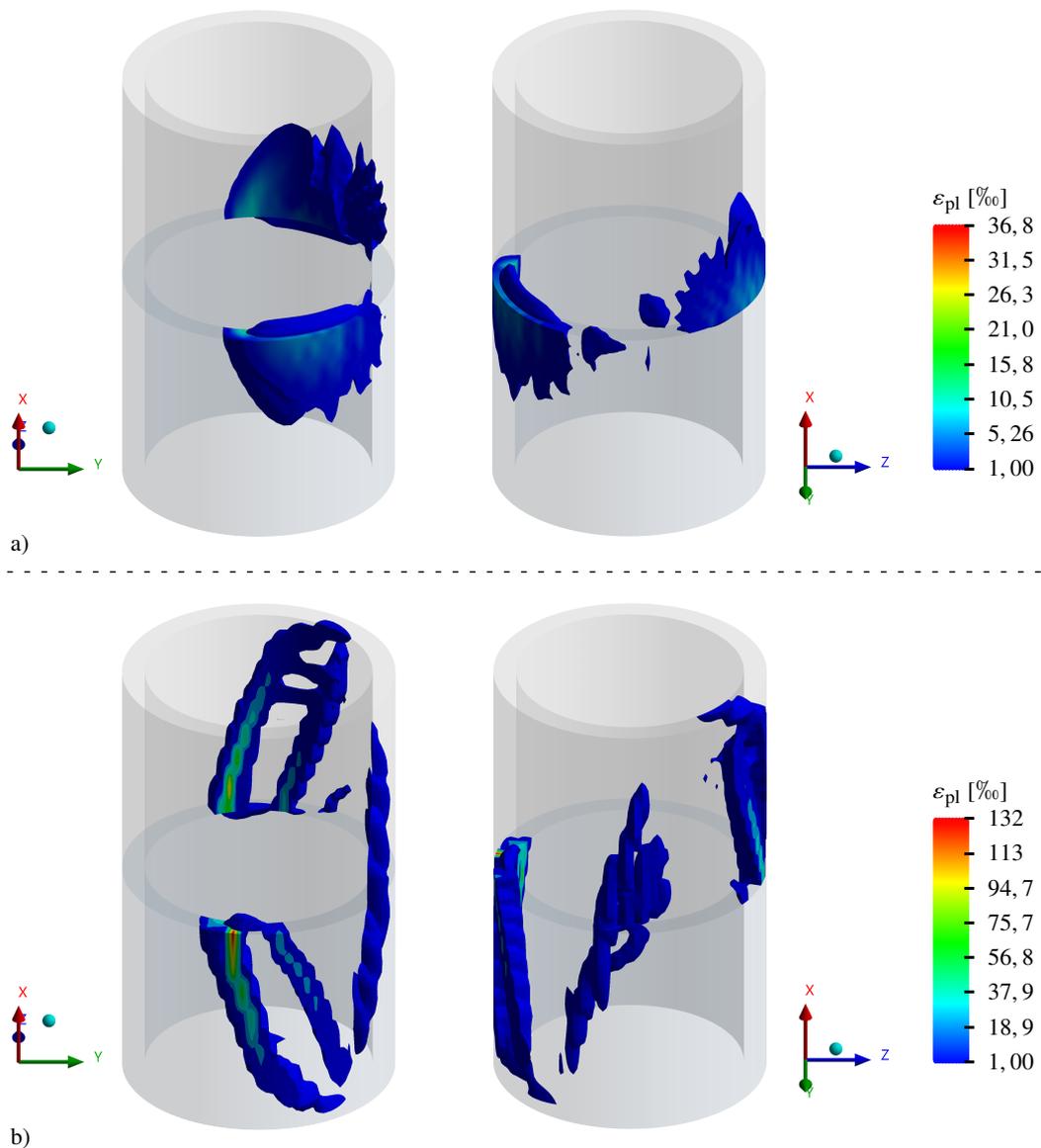


Abbildung 5.31: Plastische Dehnungen  $\varepsilon_{pl} \geq 1 \text{ ‰}$  des sechsten Versuchs der dritten Versuchsreihe bei  $\vartheta_x = 15 \cdot 10^{-3} \text{ [rad]}$

a) Menétrey und Willam bilinear

b) Menétrey und Willam H+S

Abbildung 5.32 zeigt die Radialschubspannungen des sechsten Versuchs der dritten Versuchsreihe der Großbauteilversuche. Positive Radialschubspannungen wirken nach außen, negative nach innen. Gemäß der oben angesprochenen Hypothese sollten die Radialschubspannungen in den Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam, im Vergleich zur Berechnung mit linear elastischen Segmenten, geringer ausfallen. Den Maximalwerten ist aber zu entnehmen, dass die Radialschubspannungen sogar leicht ansteigen. Dennoch wird deutlich, dass die in radialer Richtung wirkende Kraft der oberen bzw. unteren Querschnittshälfte deutlich abnimmt, im Vergleich zur Berechnung mit linear elastischen Segmenten, da ein kleinerer

Querschnittsbereich mit Radialschubspannungen belegt ist. Des Weiteren ist festzustellen, dass die Radialschubspannungen sich auf die Innenkante des Querschnitts konzentrieren.

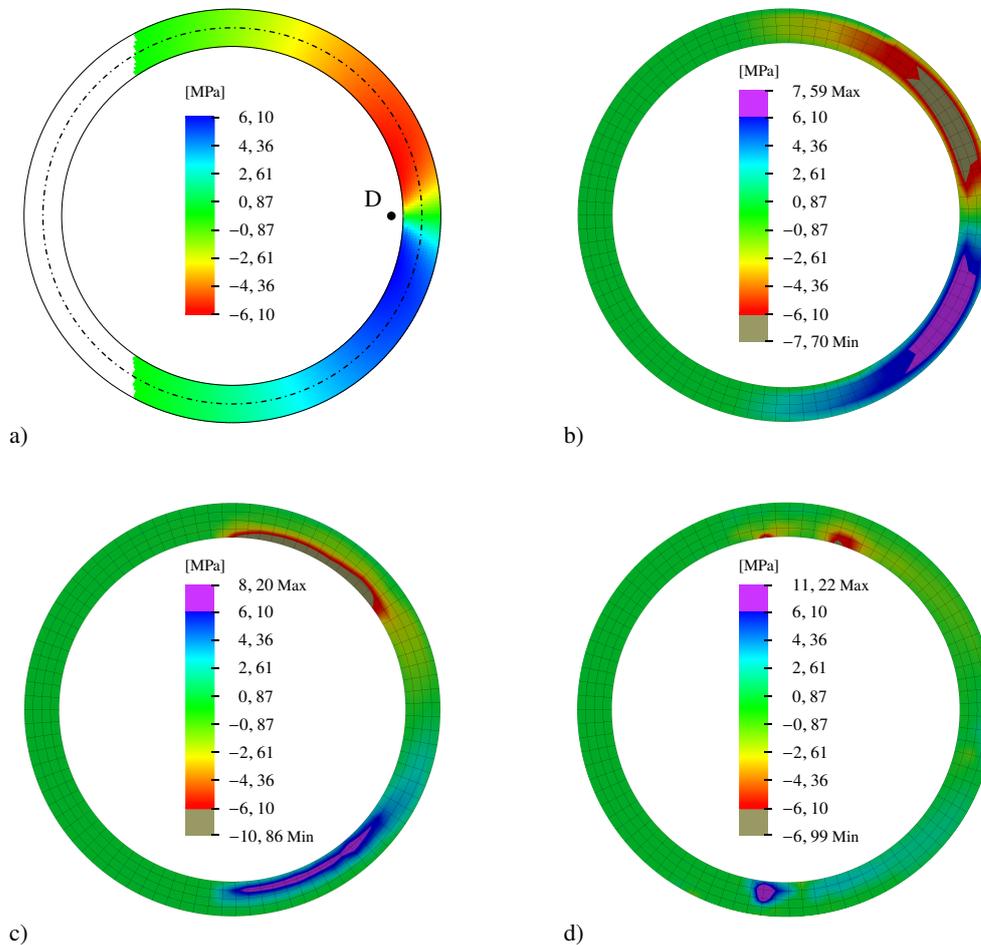


Abbildung 5.32: Radialschubspannungen im Fugenquerschnitt des unteren Segments der Großbauteilversuche – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs

- a) Fasermodell
- b) FE-Modell, linear elastisch
- c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear
- d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S

Abbildung 5.33 zeigt die Tangentialschubspannungen des sechsten Versuchs der dritten Versuchsreihe der Großbauteilversuche. Positive Tangentialschubspannungen wirken gegen den Uhrzeigersinn, negative im Uhrzeigersinn. Während die Tangentialschubspannungen der Berechnung mit linear elastischen Segmenten noch sehr gut zu denen vom Fasermodell passen, zeigt sich in den Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam, dass die Tangentialschubspannungen sich dem in dieser Arbeit entwickelten Modell annähern. So kehren sich beispielsweise die Tangentialschubspannungen in der Biegedruckzone bereits in großen Teilen um.

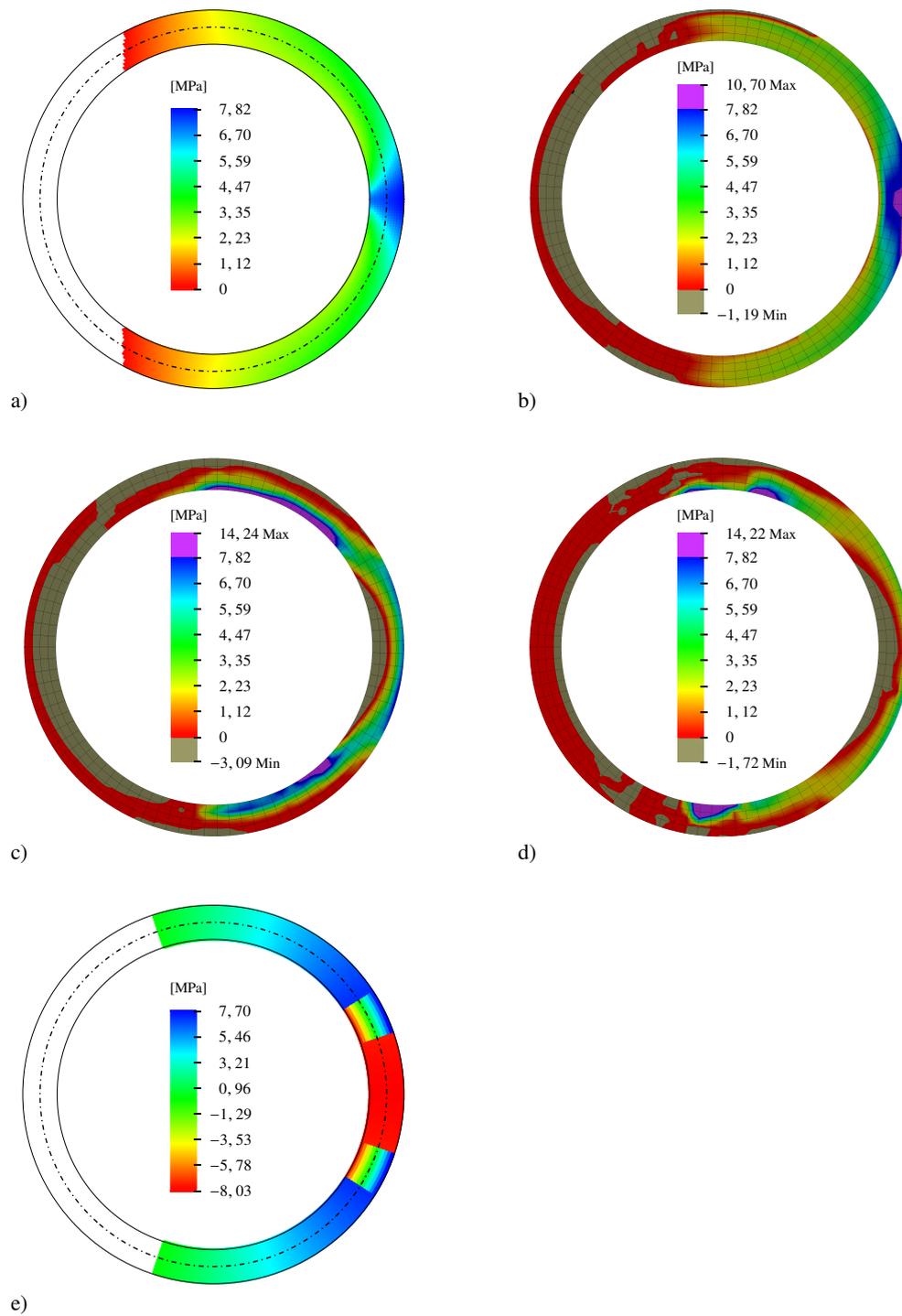


Abbildung 5.33: Tangentialschubspannungen im Fugenquerschnitt des unteren Segments der Großbauteilversuche – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs

- a) Fasermodell
- b) FE-Modell, linear elastisch
- c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear
- d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S
- e) Modell gemäß Abschnitt 4.3.2 (Fall 1)

Um die Hypothese, dass plastische Dehnungen aufgrund von Schalenbiegung entstehen, näher verfolgen zu können, müssen die möglichen Verformungsfiguren diskutiert werden. Durch die Radialschubspannungen entsteht zum einen eine Schalenbiegung um eine horizontale, tangential verlaufende Achse. Das vorliegende, sogenannte «Kreppelmoment», krempelt die Bereiche mit negativen Radialschubspannungen nach innen und die Bereiche mit positiven Radialschubspannungen nach außen. Zum anderen biegt sich die Schale aufgrund der ungleichmäßigen Lagerung im Fugenquerschnitt um eine vertikale Achse. Während in der Biegedruckzone die Segmente aneinander haften und damit quasi monolithisch verbunden sind, liegt in der Biegezugzone eine klaffende Fuge vor. In einem Übergangsbereich zwischen diesen Zonen gleiten die Segmente. Infolge der aufgetragenen Verdrehung verschiebt sich das Segment im Bereich der Biegezugzone, während es im Bereich der Biegedruckzone nahezu unverschieblich seine Ausgangslage beibehält. Wie ein beidseits eingespannter Kragarm, bei dem ein Auflager orthogonal zum Stab verschoben wird, stellt sich ein Wendepunkt in der Verformungsfigur des Querschnitts ein. Das vorliegende Biegemoment dreht um eine vertikale Achse und ändert von der einen zur anderen Seite des Wendepunkts sein Vorzeichen. Es handelt sich dabei nicht um ein Torsionsmoment, da diese Biegung nur lokal auftritt und sich über den gesamten Querschnitt gesehen wieder selbst ausgleicht. Gleiches gilt für das Kreppelmoment, was ebenfalls nicht als globales Biegemoment missverstanden werden darf.

Abbildung 5.34 zeigt die plastischen Dehnungen des unteren Segments vom sechsten Versuch der dritten Versuchsreihe der Großbauteilversuche bei einer Verdrehung von  $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$  rad. Die Verformungen sind um den Faktor 200 überhöht dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass sowohl für die Berechnung ohne Ver- und Entfestigung (bilinear), als auch für die Berechnung mit Ver- und Entfestigung (H+S) eine Schalenbiegung um eine vertikale Achse ( $x$ -Achse) vorliegt und sich ein Wendepunkt ausbildet. Entsprechend treten plastische Dehnungen konzentriert in den Zugzonen an der Innen- bzw. Außenseite auf.

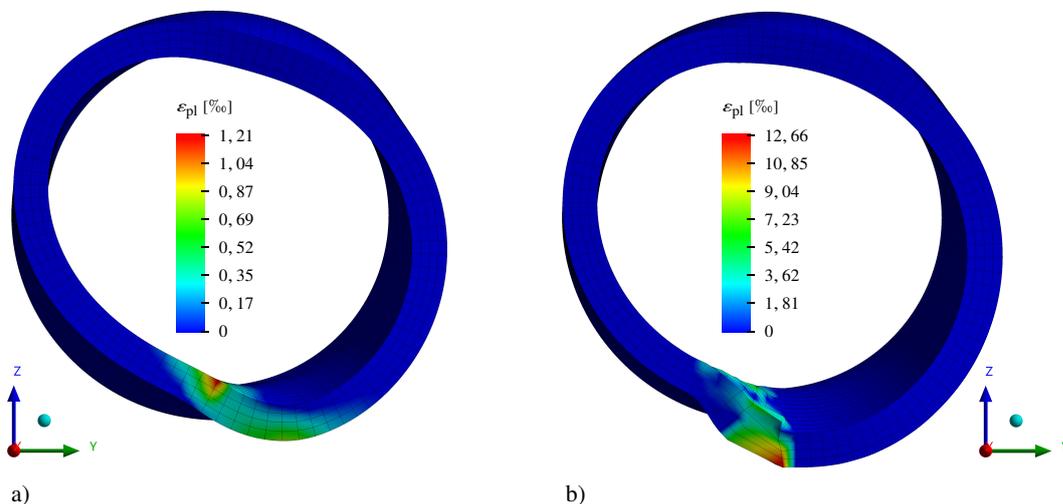


Abbildung 5.34: Plastische Dehnungen des unteren Segments bei  $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$  [rad], um den Faktor 200 überhöht – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs

- a) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear
- b) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S

Wird eine Entfestigung (H+S) berücksichtigt, nehmen die plastischen Dehnungen in diesen Bereichen zu, während Zugspannungen abgebaut und umgelagert werden. Gemeint sind hier nicht nur Zugspannungen infolge der Schalenbiegung selbst, sondern auch in der Schalenebene allgemein wirkende Zugspannungen, aufgrund dieser sich die plastischen Dehnungen über die gesamte Wandstärke erstrecken. Am Ende dieses Umlagerungsprozesses stehen die rissähnlichen plastischen Dehnungen aus Abbildung 5.31. Die plastischen Dehnungen in der Biegedruckzone entstehen hingegen aufgrund der hohen Druckbeanspruchung durch die geneigte Druckstrebe und der damit einhergehenden Verfestigung des Betons.

In der Berechnung ohne Ver- und Entfestigung (bilinear) stabilisiert sich die um eine vertikale Achse wirkende Schalenbiegung. Stattdessen nimmt das Krepelmoment an Bedeutung zu. Dazu seien nochmals die plastischen Dehnungen des oberen und unteren Segments in Abbildung 5.35 mit Blickrichtung entlang der positiven bzw. negativen  $x$ -Achse dargestellt. Überhöht man die Verformungen, ist beim unteren Segment, Abbildung 5.35 a), zu erkennen, dass sich der Bereich nach außen krepelt, in dem gemäß Abbildung 5.32 c) positive Radialschubspannungen vorherrschen. Der Bereich, in dem negative Radialschubspannungen vorliegen, zeigt hingegen eine deutlich geringere Verschiebung bei gleichzeitig hohen plastischen Dehnungen. Für das obere Segment stellt sich die gleiche Situation ein. Zu beachten ist, dass die Radialschubspannungen entsprechend dem dritten Newtonschen Axiom, Aktio gleich Reaktio, denen des unteren Segments, Abbildung 5.32 c), entgegen wirken. Aufgrund der Ringform des Querschnitts kann ein nach innen wirkendes Krepelmoment über Druckkräfte abgefangen werden. Wirkt es hingegen nach außen, werden Zugkräfte benötigt. Da Beton Zugkräfte nur in geringem Umfang aufnehmen kann, entstehen deutlich ausgeprägtere Verformungen, wenn das Krepelmoment nach außen wirkt. Entsprechend entstehen hohe Drucknormalspannungen  $\sigma_x$  an der Innenkante des Fugenquerschnitts. Gleichzeitig wird die Außenkante entlastet. Aus diesem Grund konzentrieren sich auch die Radial- und Tangentialschubspannungen auf die Innenkante. Die Schubfestigkeit des Betons wird überschritten, was wiederum plastische Dehnungen verursacht.

Dass ein Krepelmoment vorliegt, wird besonders deutlich, wenn man die Segmente im vertikalen Schnitt betrachtet. Abbildung 5.36 zeigt die Normalspannungen  $\sigma_x$  am geschnittenen FE-Modell. Um die Spannungen eindeutiger ablesen zu können, ist ihre Skalierung zu den Extremwerten hin nichtlinear. Die Verschiebungen sind um den Faktor 10 überhöht dargestellt.

Es sollte erkennbar sein, dass das untere Segment auf der linken Seite und das obere Segment auf der rechten Seite des Schnitts A-A ein nach außen wirkendes Krepelmoment im Fugenbereich erfahren und die zugehörige Verformung zeigen. Entsprechend auf den anderen Seiten der Fuge wirkt ein Krepelmoment nach innen, was aber, wie bereits oben erläutert, deutlich geringere Verwölbungen hervorruft. Die Normalspannungen  $\sigma_x$  zeigen die zu erwartenden Druck- und Zugzonen infolge der Krepelmomente.

Auch die Schalenbiegung, welche um eine vertikale Achse wirkt, erzeugt Druck- und Zugzonen. Die Normalspannungen  $\sigma_s$  in tangentialer Richtung decken sich mit den zu erwartenden Normalspannungen, die aus der in Abbildung 5.34 dargestellten Verformung herrühren. Da die gezeigten Verformungen so eindeutig sind, wird an dieser Stelle auf eine Abbildung der Normalspannungen verzichtet.

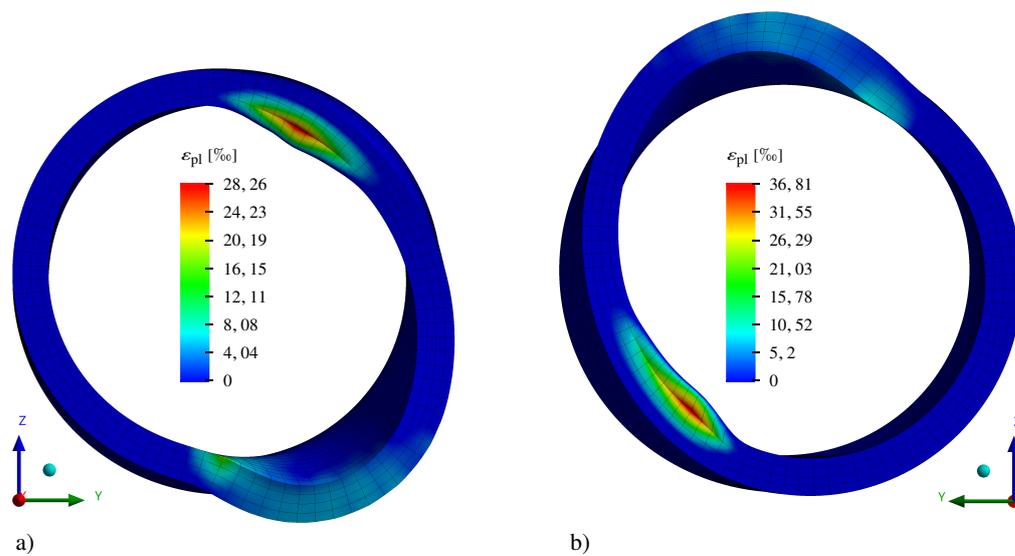


Abbildung 5.35: Plastische Dehnungen der Berechnung ohne Ver- und Entfestigung (bilinear) bei  $\vartheta_x = 15 \cdot 10^{-3}$  [rad], um den Faktor 30 überhöht – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs  
 a) unteres Segment  
 b) oberes Segment

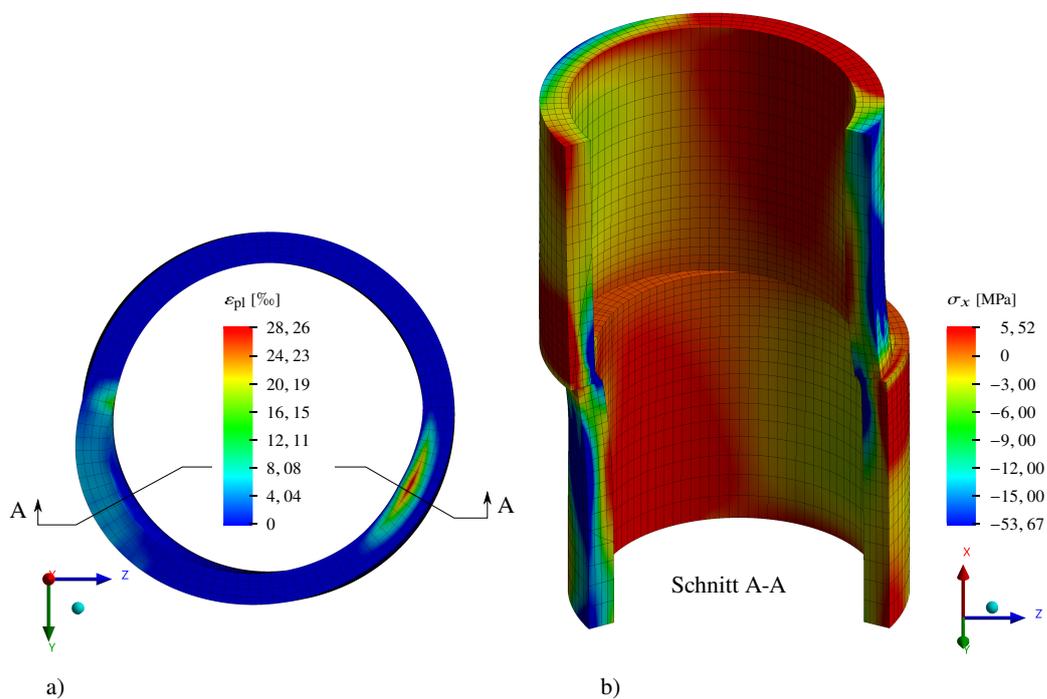


Abbildung 5.36: Berechnung ohne Ver- und Entfestigung (bilinear) bei  $\vartheta_x = 15 \cdot 10^{-3}$  [rad], um den Faktor 10 überhöht – dritte Versuchsreihe, Versuch sechs  
 a) plastische Dehnungen des unteren Segments  
 b) Normalspannungen  $\sigma_x$

Als letztes ist nun noch zu erläutern, warum die plastischen Dehnungen, Abbildung 5.31, sich wechselseitig ausbilden und scheinbar an der horizontalen Fuge enden. Zum einen spielt die Wirkungsrichtung des Kreppelmoments eine Rolle. Wie oben bereits erläutert, kann ein nach außen wirkendes Kreppelmoment aufgrund der gekrümmten Schale schlechter aufgenommen werden als ein nach innen wirkendes Kreppelmoment. Daher stellen sich vor allem dort plastische Dehnungen ein, wo ein nach außen wirkendes Kreppelmoment vorliegt. Zum anderen ist die Lasteinleitung am oberen Segment sowie die Lagerung am unteren Segment entscheidend für die wechselseitige Anordnung der plastischen Dehnungen. Während die gesamte untere Stirnfläche des unteren Segments eingespannt ist, wird die Verdrehung aufgrund der klaffenden Fuge nur einseitig auf die obere Stirnfläche des unteren Segments übertragen. Infolge der Verdrehung erfährt in Fugenebene nur einer der beiden Übergänge zwischen Lasteinleitungsbereich (Druckzone) und dem Bereich, in dem die klaffende Fuge vorliegt, eine Zugbeanspruchung  $+\sigma_s$ , während der andere Übergang gedrückt ( $-\sigma_s$ ) wird. Plastische Dehnungen entstehen immer in dem Bereich, in dem die Zugbeanspruchungen vorliegen. Diese plastischen Dehnungen wachsen dann in den Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam inklusive Ver- und Entfestigung (H+S) in ihre rissähnliche Gestalt.

Zusammenfassend können folgende Schlussfolgerungen aus den Versuchen und den FE-Berechnungen gezogen werden:

- Verbleibt der Werkstoff im linear elastischen Bereich, kommt es infolge Torsion zu einer Verschiebung, die einer Starrkörperverschiebung gleicht. Das in Abschnitt 3.3.3 vorgestellte Fasermmodell liefert für diesen Definitionsbereich gute Vorhersagen.
- Sind plastische Dehnungen bzw. Risse infolge Schalenbiegung zu erwarten, erfolgt eine Spannungsumlagerung. Das in dieser Arbeit entwickelte Modell liefert hierfür eine gute Vorhersage.

Schalenbiegung und plastische Dehnungen beeinflussen die Normalspannungsverteilung im Fugenquerschnitt und somit auch die ansetzbaren Schubspannungen. Entsprechend verwundert es nicht, dass die Schubspannungen aus Abbildung 5.33 d) nur mäßig mit denen aus Abbildung 5.33 e) übereinstimmen. Des Weiteren können Verwölbungen infolge Torsion nicht ausgeschlossen werden, wenn sich aufgrund plastischer Dehnungen bzw. Rissen die Wölbsteifigkeit der Segmente verändert. Aus diesem Grund wurde auch in Abschnitt 4.3 darauf hingewiesen, dass die Schubspannungen des in dieser Arbeit entwickelten Modells als effektive Spannungen betrachtet werden sollen. Wird die Wölbsteifigkeit der fugenangrenzenden Segmente herabgesetzt, beeinflusst dies Annahme c) ( $M_T \approx M_{T,II}$  für  $M \geq M_{Dek}$ ) aus Abschnitt 4.3.3. Qualitativ gewinnen dadurch primäre Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts an Bedeutung, was wiederum die Torsionstragfähigkeit abmindert. Dennoch zeigt sich, dass größere Torsionstragfähigkeiten erreicht werden, als das in dieser Arbeit entwickelten Modell vorhergesagt. Dies weist darauf hin, dass der Zugewinn an primären Torsionsschubspannungen des offenen Querschnitts relativ gering ist, was bedeutet, dass Annahme c) als einigermaßen robust angesehen werden darf. Dass dennoch größere Torsionstragfähigkeiten erreicht werden, kann nur über die noch verbleibenden Radialschubspannungen erklärt werden.

Aus den gewonnenen Erkenntnissen folgt, dass kleine, gedrungene Querschnitte sowie ein geringer Reibbeiwert in der Fuge das Fasermmodell begünstigen. Hinzu kommt, wie ausgeprägt das linear elastische Verhalten des Werkstoffs ist, und welchen Ausnutzungsgrad er infolge der Beanspruchung erreicht. Die Großbauteilversuche sind im Vergleich zu realen Türmen von

Windenergieanlagen sehr klein. Um einordnen zu können, in welchem Definitionsbereich praxisübliche Türme mit praxisüblichen Beanspruchungen einzuordnen sind, wird im nachfolgenden Abschnitt solch ein Turm vorgestellt.

## 5.4 Praxisbeispiel

### 5.4.1 Geometrie- und Materialkennwerte

Die Verifikation des in Abschnitt 4.3.2 vorgestellten Modells hat sich bisher nur auf die von Hartwig [19] durchgeführten Kleinst- und Großbauteilversuche bezogen. Im Vergleich zu praxisüblichen Dimensionen von Windenergieanlagen sind jedoch selbst die Großbauteilversuche unverhältnismäßig klein. Daher werden nachfolgend Segmentfugen eines Hybridturms mit praxisüblichen Abmessungen näher betrachtet. Es handelt sich hier nicht um einen besonders hohen Hybridturm, noch ist die auf ihm installierte Anlage ungewöhnlich leistungsstark. Die nachfolgend vorgestellten Geometrie- und Materialkennwerte sowie die in den folgenden Abschnitten angegebenen Schnittgrößen beziehen sich dafür aber auf einen realen Hybridturm, der 2020 in Deutschland errichtet wurde. Der Betonschaft des Hybridturms setzt sich aus dreizehn Segmenten (S1 bis S13) und dem Adapter zusammen. Somit liegen vierzehn horizontale Fugen vor: Zwölf Fugen (F1 bis F12) zwischen den Segmenten sowie eine Fuge (F0) an der Oberkante des Fundaments und eine (F13) an der Unterkante des Adapters. Der Betonschaft hat einen Kreisringquerschnitt, erreicht eine Höhe von 50,4 m und läuft nach oben konisch zusammen. Auch die Betonfestigkeitsklasse ändert sich über die Höhe. Die unteren zehn Segmente sind aus einem Beton der Festigkeitsklasse C55/67, gefolgt von zwei Segmenten der Betonfestigkeitsklasse C60/75. Für das letzte Segment sowie für den Adapter wurde eine Betonfestigkeitsklasse von C70/85 verwendet. Alle angesprochenen Angaben und Bezeichnungen können Abbildung 5.37 zusammen mit den jeweiligen Querschnittsabmessungen entnommen werden.

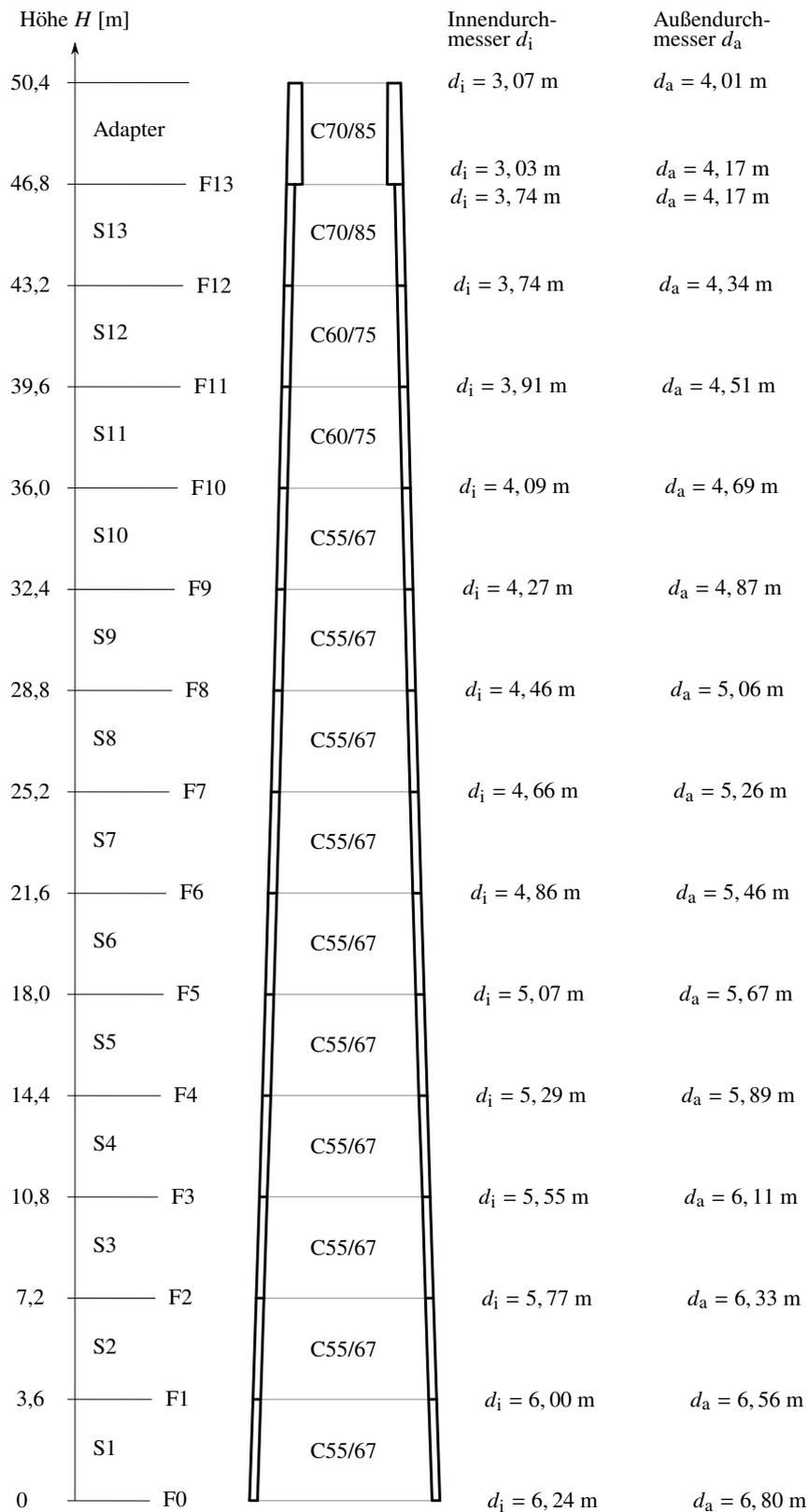


Abbildung 5.37: Längsschnitt vom Betonschaft eines Hybridturms einer Windenergieanlage

### 5.4.2 Vollständig überdrückte Fugen

Die vertikale Vorspannung des Turms wird durch 22 Spannglieder aufgebracht. Die Vorspannkraft je Spannglied entspricht unmittelbar nach Absetzen der Spannpresse 2350 kN. Die über die gesamte Entwurfslebensdauer angenommenen Vorspannkraftverluste werden mit 300 kN je Spannglied abgeschätzt. Somit ergibt sich eine Gesamtvorspannkraft von  $P = 45100$  kN. Das Eigengewicht des Stahlschafts vom Hybridturm beläuft sich auf 1200 kN und das Eigengewicht von Rotor und Gondel auf rund 1500 kN. Hinzu kommt noch das Eigengewicht des Adapters, der Segmente und diverser Ausbauten im Turminnern, wodurch sich der über die Höhe veränderliche Normalkraftverlauf in Tabelle 5.5 ergibt. Treffen in einer Fuge zwei Segmente mit unterschiedlichen Festigkeiten oder Geometriekennwerten aufeinander, so sind die maßgebenden Werte in schwarz und die nicht maßgebenden Werte in grau und in Klammern abgedruckt.

Die in Tabelle 5.5 angegebenen Festigkeitswerte und Schnittgrößen sind charakteristische Werte und stehen hier für die seltene Einwirkungskombination. Unter der Annahme eines Reibbeiwerts von  $\mu = 0,5$ , können die Betondruckspannungen unter der gegebenen Lastkombination gemäß dem mohr'schen Spannungskreis maximal einen Wert von  $0,47 \cdot f_{ck}$  im Bereich von F10 erreichen. Die geringste Ausnutzung liegt am Turmfuß (F0) mit einem Wert von  $0,37 \cdot f_{ck}$  vor. Alle Fugen sind vollständig überdrückt und befinden sich, gemäß Abschnitt 4.3.2, im Fall 2. Die Schubfestigkeit  $\tau_{zul,mat}$  ist in der Biegedruckzone je nach Fuge zwischen drei und zwölf Prozent geringer als  $\tau_{zul,\mu}$ . In der Biegezugzone wiederum ist  $\tau_{zul,\mu}$  klar maßgebend.

Versuchsergebnisse liegen verständlicherweise für einen Turm dieser Abmessungen nicht vor. Als Referenz für die in dieser Arbeit angesprochenen analytischen Berechnungsmodelle dienen daher Berechnungen mit der Finiten-Element-Methode. Das FE-Modell wurde, analog zu Abbildung 5.1, jeweils aus zwei Segmenten aufgebaut. Für jede Fuge  $F_i$  wurden die Segmente  $S_i$  und  $S_{i+1}$  modelliert. In den Fugen wurde ein isotroper Reibkontakt mit einem Reibbeiwert von  $\mu = 0,5$  hinterlegt. Große Verformungen wurden zugelassen. Für die Vernetzung der Segmente wurden wieder vier Elemente über die Wanddicke und 100 Elemente in Wandlängsrichtung angeordnet. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 5.3.3 wurde das Materialmodell von Menétrey und Willam mit und ohne Ver- und Entfestigung verwendet. Die Elastizitätsmoduln sind der DIN EN 1992-1-1 [11, Tabelle 3.1] zu entnehmen.

Im ersten Lastschritt wurde die Normalkraft und im zweiten Lastschritt das Biegemoment aus Tabelle 5.5 auf der Oberkante des oberen Elements aufgebracht. Im dritten und letzten Lastschritt wurde durch eine Verdrehung um die  $x$ -Achse das maximal aufnehmbare Torsionsmoment ermittelt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen können, zusammen mit den Torsionstragfähigkeiten der Modelle von Grünberg und Göhlmann [16], Hartwig [19] (Fasermmodell) und dem in Abschnitt 4.3.2 vorgestellten Modell, Abbildung 5.38, entnommen werden. Die Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam [20] konvergieren sehr langsam, was deutlich erhöhte Rechenzeiten erfordert. Wird zusätzlich eine Ver- und Entfestigung (H+S) berücksichtigt, kommt es vor, dass FE-Elemente aufgrund großer Verzerrungen ausfallen. Teilweise stellte sich dabei keine konvergente Lösung ein. Ein aufnehmbares Torsionsmoment konnte in diesen Fällen anhand der Finite-Elemente-Methode nicht ermittelt werden. Aus diesen Gründen wurden nicht alle Fugen mit Ver- und Entfestigung (H+S) berechnet. Zwischenwerte in Abbildung 5.38 dürfen interpoliert werden.

Tabelle 5.5: Geometriekennwerte der vierzehn Fugenquerschnitte sowie die anzusetzenden Betonfestigkeiten und charakteristischen Schnittgrößen im GZG

Nr.	$H$ [m]	$r_m$ [m]	$t$ [m]	$f_{ck}$ [MPa]	$f_{ctk}$ [MPa]	$f_{c2k}$ [MPa]	$N_k$ [MN]	$M_{Bk}$ [MNm]
F13	46,8	(1,80)	(0,57)	70	3,23	79,10	-48,33	32,23
	46,8	1,93	0,30	70	3,23	79,10	-48,33	32,23
F12	43,2	2,02	0,30	(70)	(3,23)	(79,10)	-48,69	34,56
	43,2	2,02	0,30	60	3,05	68,40	-48,69	34,56
F11	39,6	2,11	0,30	60	3,05	68,40	-49,07	37,00
F10	36,0	2,19	0,30	(60)	(3,05)	(68,40)	-49,46	39,54
	36,0	2,19	0,30	55	2,95	62,97	-49,46	39,54
F9	32,4	2,29	0,30	55	2,95	62,97	-49,87	42,20
F8	28,8	2,38	0,30	55	2,95	62,97	-50,29	44,97
F7	25,2	2,48	0,30	55	2,95	62,97	-50,70	47,86
F6	21,6	2,58	0,30	55	2,95	62,97	-51,14	50,88
F5	18,0	2,69	0,30	55	2,95	62,97	-51,59	54,03
F4	14,4	2,79	0,30	55	2,95	62,97	-52,06	57,31
F3	10,8	2,91	0,28	55	2,95	62,97	-52,53	60,74
F2	7,2	3,03	0,28	55	2,95	62,97	-53,01	64,31
F1	3,6	3,14	0,28	55	2,95	62,97	-53,50	68,03
F0	0	3,26	0,28	55	2,95	62,97	-54,01	71,90
	0	Fundament		-	-	-	-54,01	71,90

Da alle Fugen im GZG vollständig überdrückt sind, liefert das Modell von Grünberg und Göhlmann [16] erwartungsgemäß die größten Torsionstragfähigkeiten. Das Fasernetzmodell [19] prognostiziert zehn bis vierzehn Prozent geringere aufnehmbare Torsionsmomente als das Modell von Grünberg und Göhlmann. Es liegt jedoch noch dreißig bis sechzig Prozent über den Werten der FE-Berechnungen. Die Torsionstragfähigkeiten des in dieser Arbeit entwickelten Modells stimmen gut mit den Werten aus den FE-Berechnungen überein. Sie liegen etwa 10 % unter den Tragfähigkeiten aus der bilinearen Berechnung und größtenteils sehr nahe an den Tragfähigkeiten mit Ver- und Entfestigung (H+S), außer in den Fugen F10 und F12, wo sich etwas größere Abweichungen ergeben. Dies ist voraussichtlich darauf zurückzuführen, dass das Verhältnis  $\tau_{zul,mat}/\tau_{zul,\mu}$  mit der Höhe des Turms abnimmt, sich also der Fall 2 deutlicher einstellt. Zwar fallen alle Fugen im GZG in den Fall 2, jedoch sind die Fugen im unteren Bereich des Turms

nicht weit davon entfernt dem Fall 1 zugeordnet zu werden. Es ist wichtig, an dieser Stelle hervorzuheben, dass in den FE-Berechnungen Betonsegmente und nicht Stahlbetonsegmente hinterlegt wurden. Demnach ist davon auszugehen, dass durch eine vorhandene Bewehrung in der Realität Tragfähigkeiten zwischen denen der bilinearen Berechnung und der inkl. Ver- und Entfestigung (H+S) erreicht werden würden.

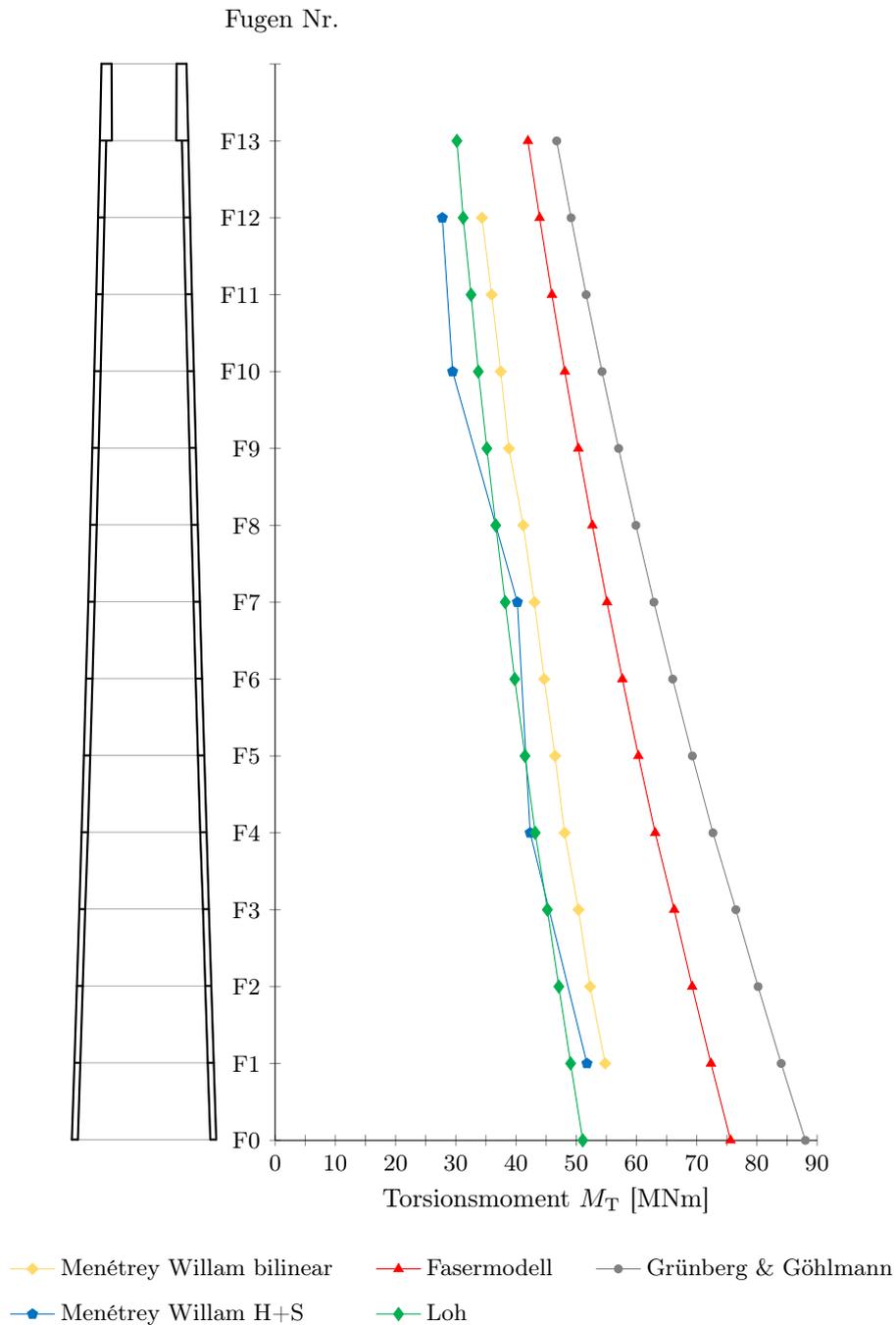


Abbildung 5.38: Torsionstragfähigkeiten der Segmentfugen vom Betonschaft eines Hybridturms für Windenergieanlagen im GZG

Um das Torsionstragverhalten näher betrachten zu können, wird nachfolgend exemplarisch auf Fuge F4 im Detail eingegangen. Die Torsionsmomentenreaktion im Auflager, aufgetragen über die aufgebrachte Verdrehung, kann Abbildung 5.39 entnommen werden. Dargestellt sind drei Last-Verformungs-Diagramme, die sich ausschließlich durch ihr Materialmodell unterscheiden. Die Last-Verformungs-Kurve mit linear elastischen Segmenten dient wieder als Referenz für die Kurven, die mit dem Fließkriterium von Menétreay und Willam mit und ohne Ver- und Entfestigung aufgestellt wurden.

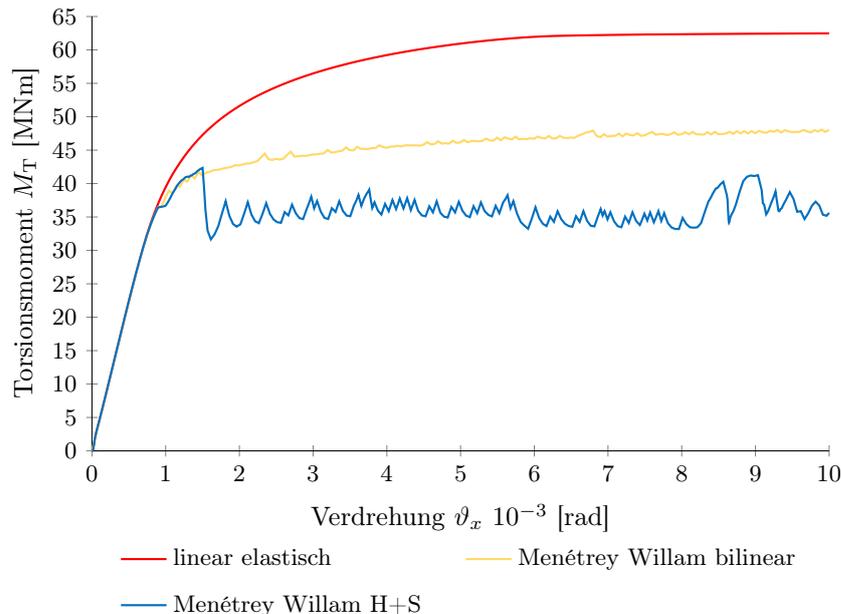


Abbildung 5.39: Torsionstragfähigkeit von F4 im GZG, aufgetragen über die Verdrehung

Anfangs liegen noch alle drei Kurven übereinander, da die Segmente sich in allen drei Berechnungen noch linear elastisch verhalten. Ab einem Torsionsmoment  $M_T$  von etwa 36,5 MNm flachen die Kurven mit dem Fließkriterium von Menétreay und Willam deutlich ab. Während die Torsionsmomentenreaktion der bilinearen Berechnung ein Plateau ausbildet, das 23 % unterhalb des Plateaus der linear elastischen Berechnung liegt, fällt die Torsionsmomentenreaktion der Berechnung inklusive Ver- und Entfestigung (H+S) ab einer Verdrehung von  $\vartheta_x = 1,5 \cdot 10^{-3}$  rad sprunghaft um etwa 16 % ab und bildet anschließend ein «unruhiges» Plateau aus.

Die plastischen Dehnungen der Segmente S4 und S5 können den Abbildungen 5.40 und 5.41 entnommen werden. Das Biegemoment dreht wieder positiv um die  $z$ -Achse, während die Verdrehung positiv um die  $x$ -Achse dreht. Die plastischen Dehnungen der bilinearen Berechnung, Abbildung 5.40, sind qualitativ mit denen der Großbauteilversuchen vergleichbar. So stellen sich auch hier vordergründig plastische Dehnungen in den Bereichen ein, die gemäß dem Fasermmodell die größten Radialschubspannungen erhalten. Plastische Dehnungen  $\varepsilon_{pl} > 5 \text{ ‰}$  treten auch hier wieder wechselseitig an den Segmenten auf. Insgesamt ist aber festzustellen, dass ein Großteil der Segmente plastische Dehnungen zeigt, auch wenn viele davon kleiner 1 ‰ sind.

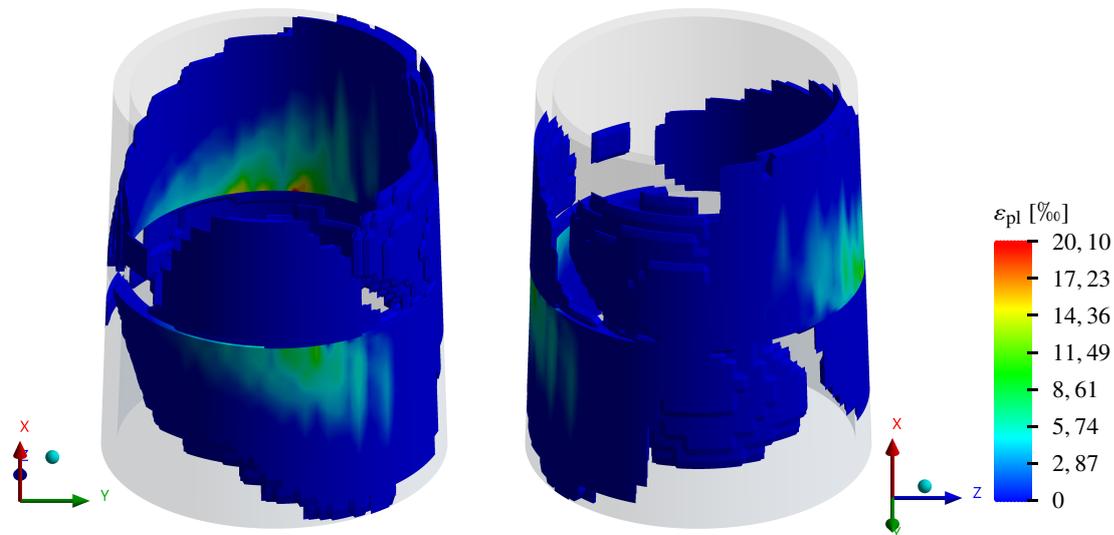


Abbildung 5.40: Plastische Dehnungen von F4 im GZG mit dem bilinearen Fließkriterium von Menétreay und Willam bei  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  [rad]

Abbildung 5.41 zeigt die plastischen Dehnungen der Berechnung mit dem Fließkriterium von Menétreay und Willam, inklusive Ver- und Entfestigung (H+S), vor und nach dem sprunghaften Abfall von  $M_T(\vartheta_x)$ . Es fällt auf, dass mit dem Abfall von  $M_T(\vartheta_x)$  die plastischen Dehnungen sprunghaft um ein Vielfaches ansteigen. Die plastischen Dehnungen sind, wie auch bei den Großbauteilversuchen, näher zur Biegezugzone hin verortet. Bereits in Abbildung 5.41 a) deuten sich rissähnliche plastische Dehnungen an, die dann in Abbildung 5.41 b) zu zwei langen, deutlich rissähnlichen plastischen Dehnungsbereichen zusammenfallen, die wendelartig die Segmente durchlaufen.

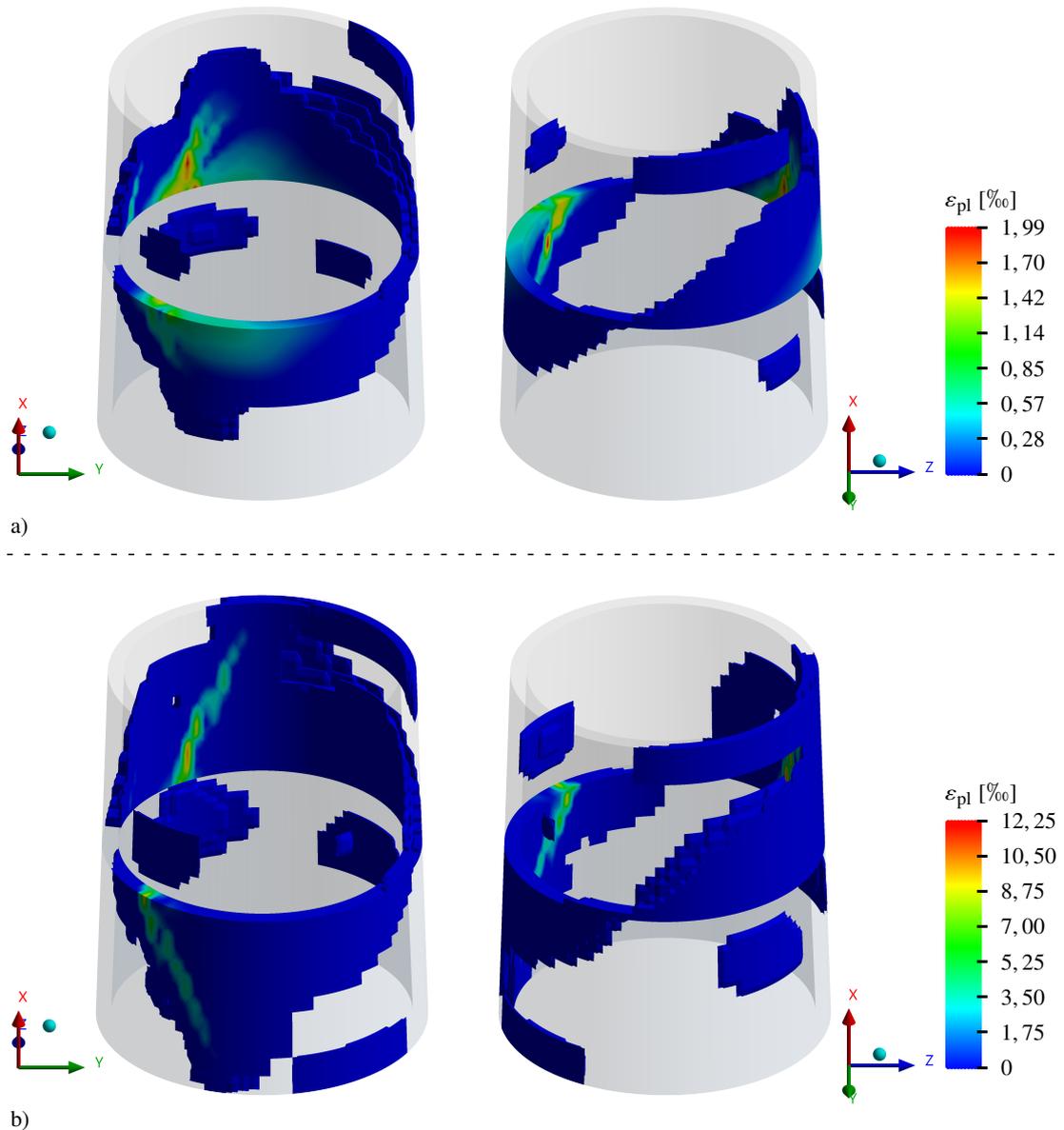


Abbildung 5.41: Plastische Dehnungen von F4 im GZG mit dem Fließkriterium von Menétreý und Willam (H+S)

a) bei  $\vartheta_x = 1,5 \cdot 10^{-3}$  [rad], vor dem sprunghaften Abfall von  $M_T(\vartheta_x)$

b) bei  $\vartheta_x = 1,6 \cdot 10^{-3}$  [rad], nach dem sprunghaften Abfall von  $M_T(\vartheta_x)$

Die Radialschubspannungen in Fuge F4 können Abbildung 5.42 entnommen werden. Die Torsionstragfähigkeit liegt, gemäß der FE-Berechnung mit linear elastischem Materialmodell, etwa 1 % unterhalb der Vorhersage mit dem in Abschnitt 3.3.3 vorgestellten Fasermmodell. Entsprechend zeichnen auch die Radialschubspannungen der Berechnung mit linear elastischen Segmenten annähernd das gleiche Bild, wie die mit dem Fasermmodell ermittelten Radialschubspannungen. Werden plastische Dehnungen zugelassen, so erreichen die Radialschubspannungen signifikant geringere Größenordnungen. Gleichzeitig ist auch ersichtlich, dass die aufintegrierte, radial wirkende Kraft der oberen bzw. unteren Querschnittshälfte um ein Vielfaches geringer

ist, als nach dem Fasermodell angenommen. Die dennoch verbleibenden Bereiche mit hohen Radialschubspannungen konzentrieren sich in Abbildung 5.42 c) und d) auf die Innenkante, wie auch schon bei den Großbauteilversuchen in Abschnitt 5.3.4.

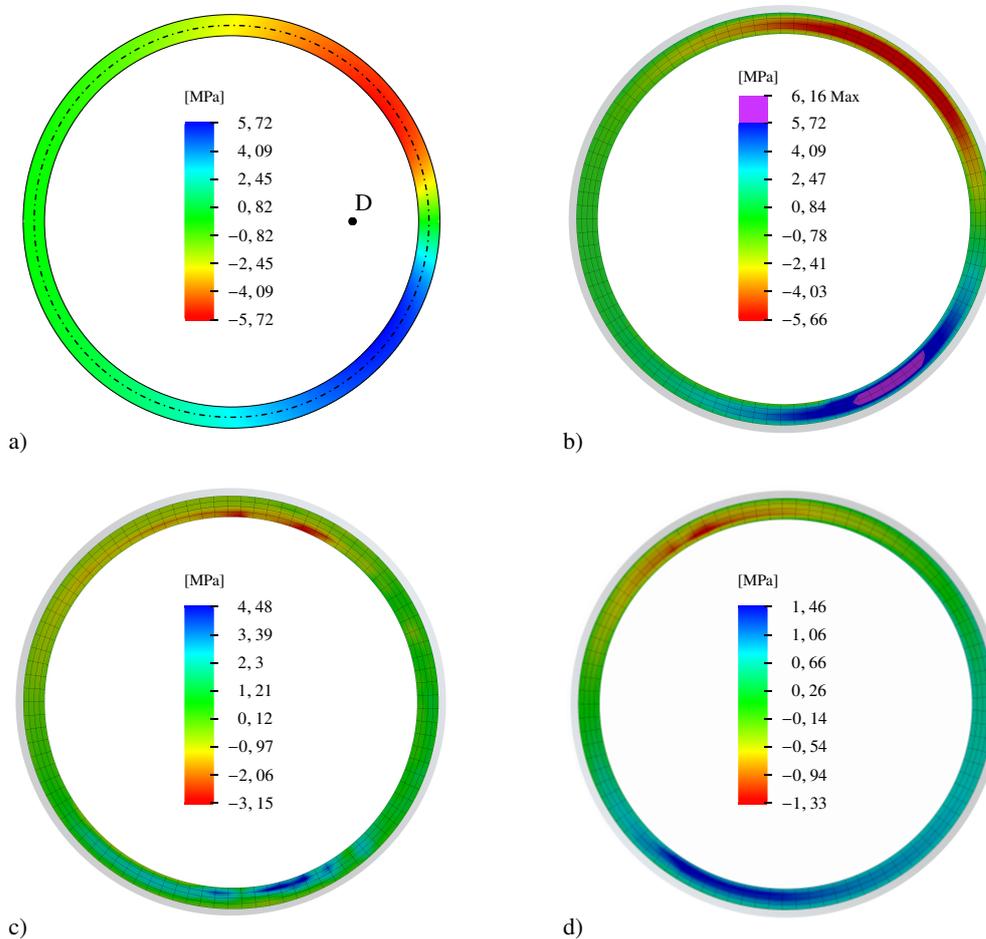


Abbildung 5.42: Radialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZG

- a) Fasermodell
- b) FE-Modell, linear elastisch bei  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  [rad]
- c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  [rad]
- d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 1,5 \cdot 10^{-3}$  [rad]

Abbildung 5.43 zeigt die Tangentialschubspannungen von Fuge F4. Die Tangentialschubspannungen der linear elastischen Berechnung stimmen erneut gut mit denen gemäß dem Fasermodell überein. Mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam hingegen werden deutlich geringere Tangentialschubspannungen im Bereich der Biegedruckzone erreicht, wo, gemäß der linear elastischen Berechnung, die maximalen Tangentialschubspannungen vorliegen. Die Tangentialschubspannungen der Abbildung 5.43 c) und d) zeigen im Bereich der Biegedruckzone deutlich geringere Tangentialschubspannungen als die linear elastische Berechnung. Ein Vorzeichenwechsel stellt sich allerdings nur in Abbildung 5.43 c) an der Innenkante ein.

Eine Diskussion der vorgestellten Ergebnisse folgt in Abschnitt 5.4.4.

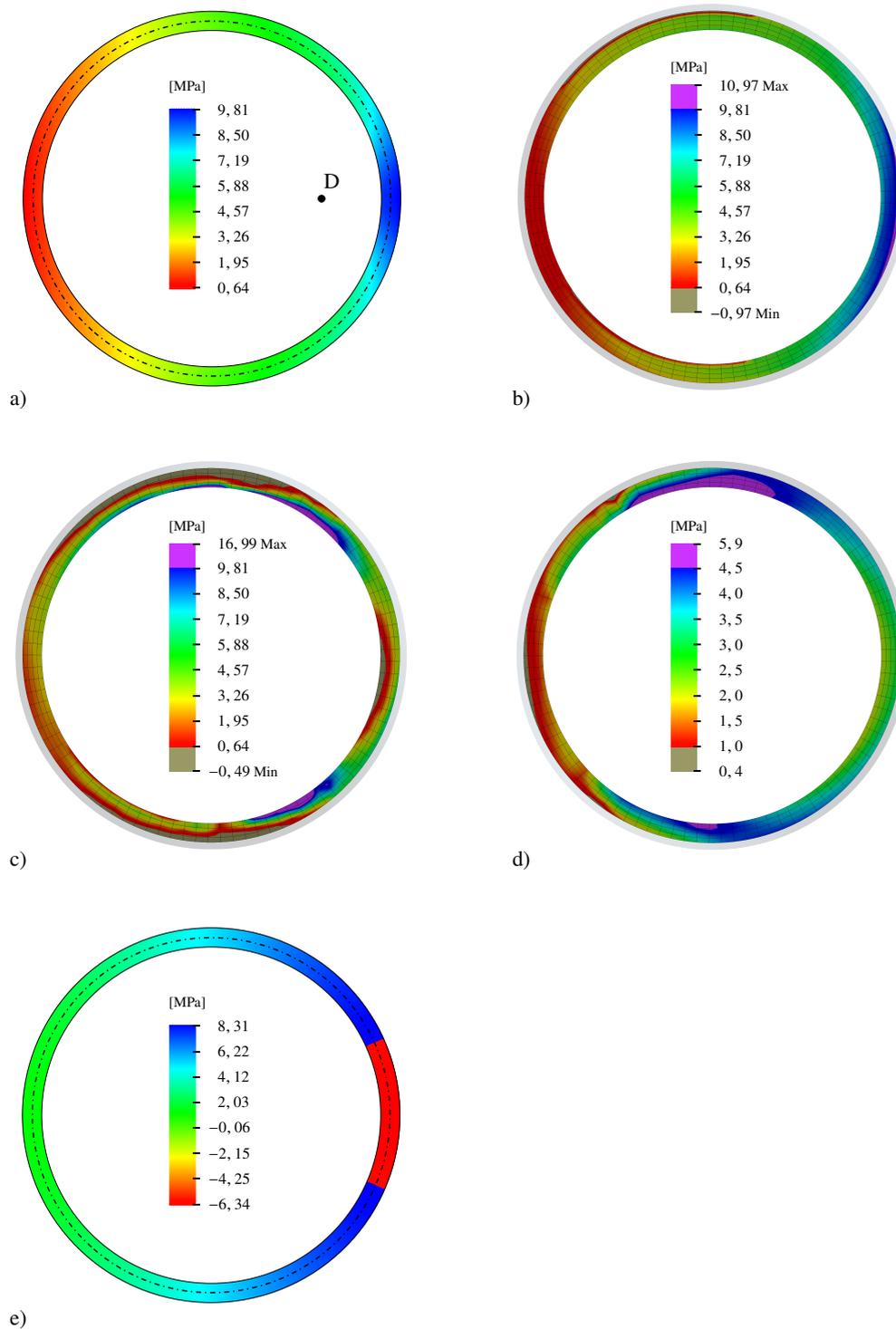


Abbildung 5.43: Tangentialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZG

a) Fasermodell

b) FE-Modell, linear elastisch bei  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  [rad]

c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  [rad]

d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 1,5 \cdot 10^{-3}$  [rad]

e) Modell gemäß Abschnitt 4.3.2 (Fall 2) und dem Ansatz ohne  $M_{T,I,offen}$

### 5.4.3 Klaffende Fugen

Der hier vorliegende Hybridturm ist, wie die meisten Türme für Windenergieanlagen, so ausgelegt, dass im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) klaffende Fugen auftreten. Für den GZT wurde vereinfacht das 1,5-fache Biegemoment des GZG angesetzt. Die Normalkraft wirkt günstig und bleibt daher unverändert. Die einachsialen Betonfestigkeiten sind gemäß DIN EN 1992-1-1 [11, S.35] abzumindern. Die zugehörige zweiachsiale Designdruckfestigkeit des Betons kann gemäß den Angaben des Modelcode 2010 [13, Abs. 5.1.6] ermittelt werden. Die sich ergebenden Fugenöffnungswinkel  $\theta$ , die Betonfestigkeiten und die Schnittgrößen können Tabelle 5.6 entnommen werden.

Tabelle 5.6: Die Betonfestigkeiten und Design-Schnittgrößen der vierzehn Fugenquerschnitte im GZT sowie der Fugenöffnungswinkel gemäß Gleichung 4.11

Nr.	$\theta$ [°]	$f_{cd}$ [MPa]	$f_{ctd}$ [MPa]	$f_{c2d}$ [MPa]	$N_d$ [MN]	$M_{Bd}$ [MNm]
F13	32,5	39,67	1,83	46,03	-48,33	48,35
F12	42,3	(39,67)	(1,83)	(46,03)	-48,69	51,85
	42,3	34,00	1,73	39,64	-48,69	51,85
F11	50,1	34,00	1,73	39,64	-49,07	55,5
F10	56,7	(34,00)	(1,73)	(39,64)	-49,46	59,32
	56,7	31,17	1,67	36,43	-49,46	59,32
F9	62,5	31,17	1,67	36,43	-49,87	63,30
F8	67,6	31,17	1,67	36,43	-50,29	67,46
F7	72,4	31,17	1,67	36,43	-50,70	71,79
F6	76,7	31,17	1,67	36,43	-51,14	76,32
F5	80,6	31,17	1,67	36,43	-51,59	81,04
F4	84,2	31,17	1,67	36,43	-52,06	85,97
F3	86,5	31,17	1,67	36,43	-52,53	91,10
F2	89,8	31,17	1,67	36,43	-53,01	96,46
F1	92,9	31,17	1,67	36,43	-53,50	102,04
F0	95,7	31,17	1,67	36,43	-54,01	107,85

Die Geometriekennwerte bleiben unverändert wie in Tabelle 5.5 angegeben. Für einen Reibbeiwert von  $\mu = 0,5$  können die Betondruckspannungen maximal einen Wert von  $0,997 \cdot f_{cd}$  im Bereich von F10 erreichen. Die geringste Ausnutzung der Betondruckspannungen liegt am Turmfuß (F0) mit einem Wert von  $0,835 \cdot f_{cd}$  vor. Auch im GZT erfüllen alle Fugen die Bedingungen von Fall 2 aus Abschnitt 4.3.2.4. In der Biegedruckzone ist die Schubfestigkeit  $\tau_{zul,mat}$

maßgebend und je nach Fuge zwischen dreißig und vierzig Prozent geringer als  $\tau_{zul,\mu}$ . Da stets eine klaffende Fuge vorliegt, geht die Normalspannung an den Übergängen zum überdrückten Bereich  $s_a$  bzw.  $s_e$  gegen null, weshalb dort immer  $\tau_{zul,\mu}$  maßgebend wird.

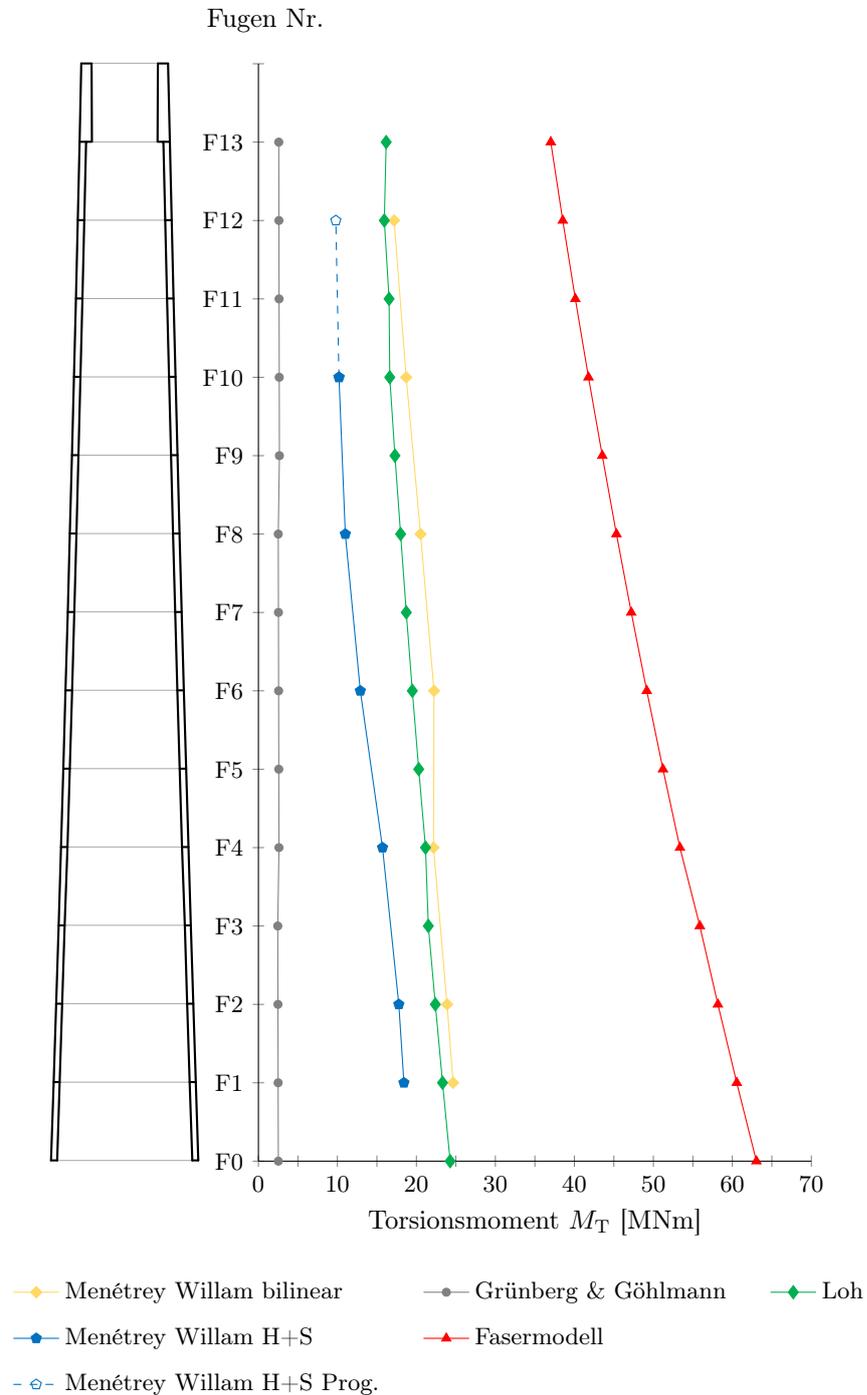


Abbildung 5.44: Torsionstragfähigkeiten der Segmentfugen vom Betonschaft eines Hybridturms für Windenergieanlagen im GZT

Die Torsionstragfähigkeiten der Modelle von Grünberg und Göhlmann [16], Hartwig [19] (Fasermmodell) und dem in dieser Arbeit entwickelten Modell sind Abbildung 5.44 zu entnehmen. Wie auch schon für den GZG werden hier die Ergebnisse der FE-Berechnungen im Detail exemplarisch an Fuge F4 präsentiert. So können die Last-Verformungs-Kurven der Fuge F4 Abbildung 5.45 entnommen werden. Im Kontrast zu den Berechnungen im GZG und den Großbauteilversuchen zeigt die Berechnung mit dem bilinearen Fließkriterium von Menétrey und Willam eine Unstetigkeit bei  $\vartheta_x = 3,9 \cdot 10^{-3}$  rad. Anschließend steigt die Torsionstragfähigkeit zwar wieder an und erreicht noch ihren Maximalwert, die in Abbildung 5.44 angegebenen Torsionsmomente beziehen sich in solchen Fällen aber auf den Wert vor der Unstetigkeit, da ein plötzlicher Abfall in der Last-Verformungs-Kurve mit einem ebenso plötzlichen Steifigkeitsverlust zusammenhängt, der auch als Versagen angesehen werden kann. Dass im weiteren Verlauf noch höhere Tragfähigkeiten erreicht werden, spricht für ein duktiles Verhalten. Ob die Segmente der Berechnung mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam inklusive Ver- und Entfestigung (H+S) sich ebenfalls duktil, verhalten kann hier nicht bewertet werden, da die Berechnungen nicht vollständig konvergierten. Entsprechend sind in Abbildung 5.44 stets die Maximalwerte bis zum Abbruch der Berechnung dargestellt, außer für Fuge F12, bei der bereits die Berechnung sehr früh abbrach, und so keine plausible Torsionstragfähigkeit ermittelt werden konnte. Daher wurde an dieser Stelle eine Prognose angegeben. Auffällig an der Last-Verformungs-Kurve der Berechnung mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam inklusive Ver- und Entfestigung (H+S) ist, dass sie bei einer Verdrehung von  $\vartheta_x = 2,1 \cdot 10^{-3}$  rad wieder auf Null abfällt. Auch hier kommt es zu einem plötzlichen Steifigkeitsabfall, der näher in Abschnitt 5.4.4 diskutiert wird.

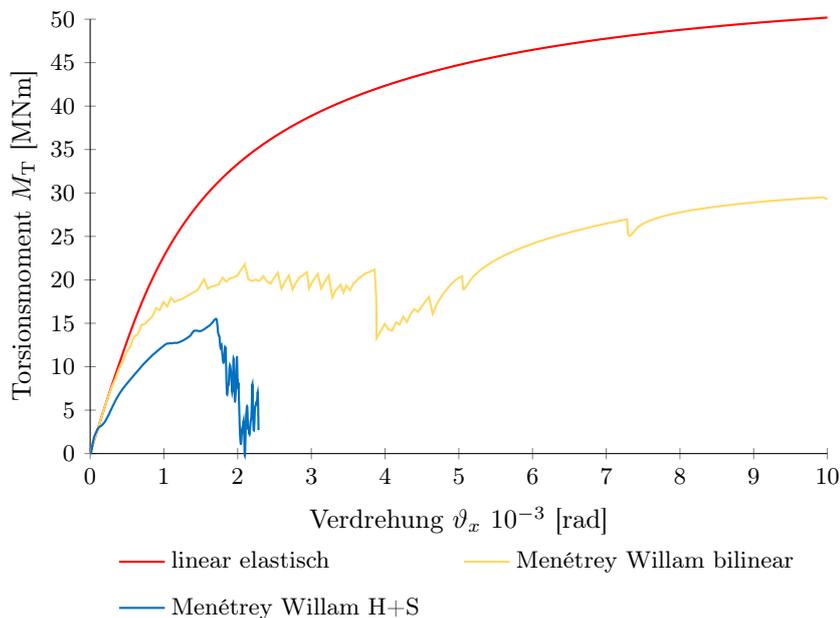


Abbildung 5.45: Torsionstragfähigkeit von F4 im GZT, aufgetragen über die Verdrehung

Die plastischen Dehnungen vor und nach dem plötzlichen Steifigkeitsabfall können den Abbildungen 5.46 und 5.47 entnommen werden. Da die Segmente infolge Normalkraft und Biegung bereits plastische Dehnungen im Großteil der Biegedruckzone aufzeigen, sind hier nur plastische Dehnungen  $\varepsilon_{pl} \geq 1\%$  dargestellt.

Abbildung 5.46 zeigt, dass im Bereich der Biegedruckzone rissähnliche plastische Dehnungen auftreten, die im Verlauf des plötzlichen Steifigkeitsabfalls in Anzahl und Ausprägung deutlich zunehmen. Zudem befinden sich an den Flanken, zwischen Biegedruck- und -zugzone, plastische Dehnungen, die wechselseitig auftreten und, wie schon im GZG bzw. bei den Großbauteilversuchen, mit den Radialschubspannungen in Verbindung gebracht werden können. Diese Bereiche sind hier jedoch deutlich näher zur Biegezugzone hin verortet als die mit dem Fasermodell (Abschnitt 3.3.3) angenommenen Radialschubspannungen, was anhand der Radialschubspannungen aus Abbildung 5.48 ersichtlich wird.

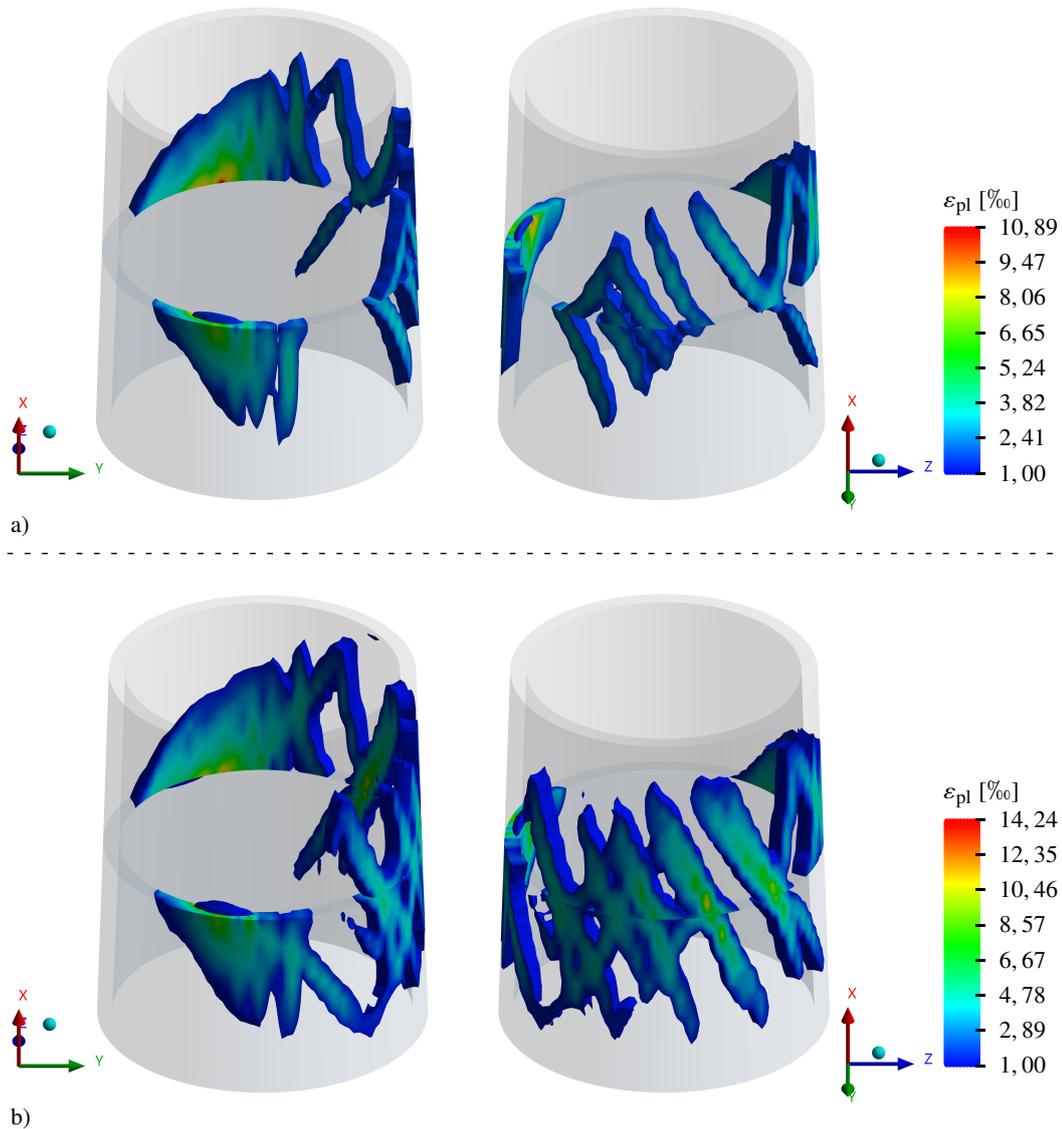


Abbildung 5.46: Plastische Dehnungen von F4 im GZT mit dem bilinearen Fließkriterium von Menétrey und Willam

a) bei  $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$  [rad], vor dem sprunghaften Abfall von  $M_T(\vartheta_x)$

b) bei  $\vartheta_x = 4 \cdot 10^{-3}$  [rad], nach dem sprunghaften Abfall von  $M_T(\vartheta_x)$

Ähnlich verhält es sich mit den plastischen Dehnungen der Berechnung mit dem Fließkriterium von Menétreay und Willam inklusive Ver- und Entfestigung (H+S), die Abbildung 5.47 entnommen werden können. Auch hier ist ein deutlicher Zuwachs an plastischen Dehnungen im Bereich der Biegedruckzone über den Verlauf des Steifigkeitsabfalls zu beobachten. Zudem sind, wie auch im GZG und den Großbauteilversuchen, rissähnliche, wechselseitig angeordnete plastische Dehnungen an den Flanken zwischen Biegedruck- und -zugzone feststellbar.

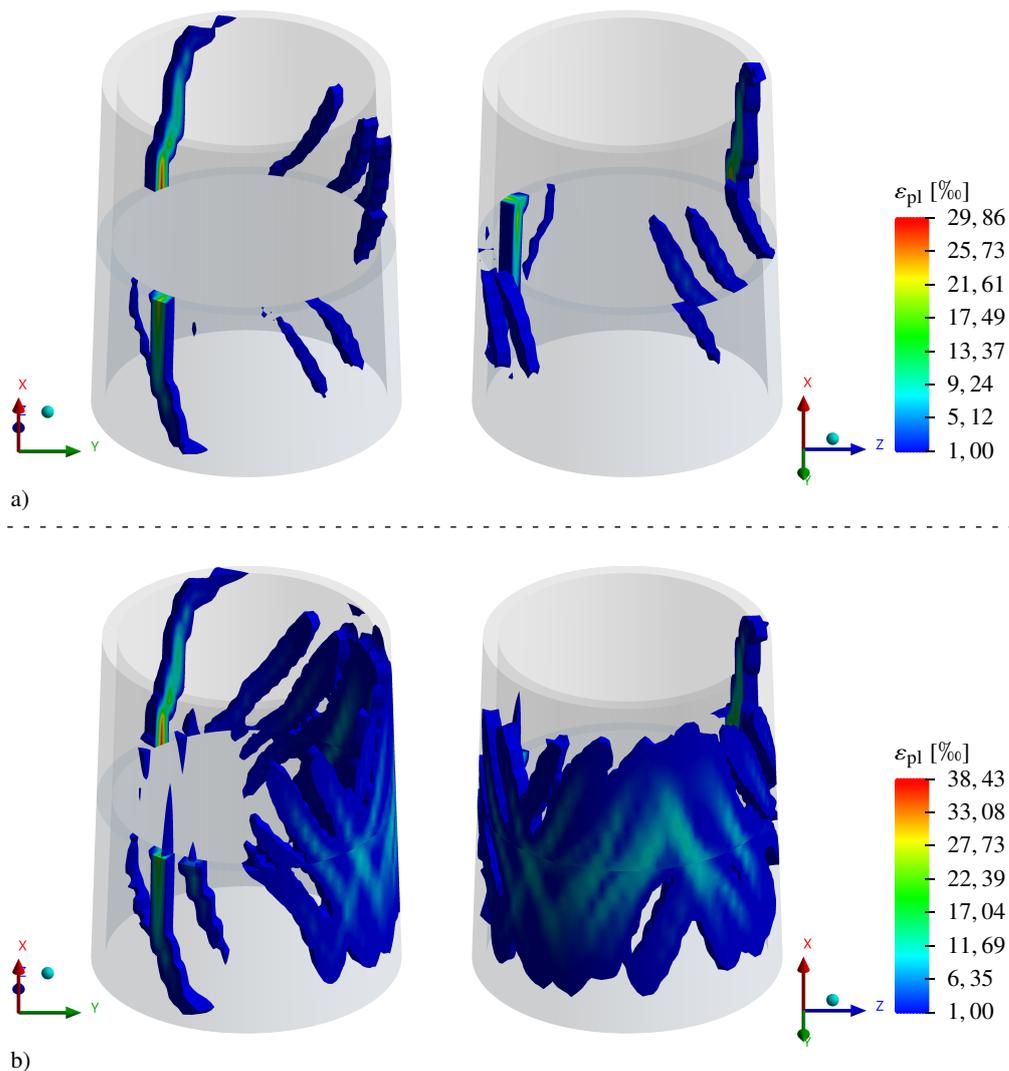


Abbildung 5.47: Plastische Dehnungen von F4 im GZT mit dem Fließkriterium von Menétreay und Willam H+S

a) bei  $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$  [rad]

b) bei  $\vartheta_x = 2 \cdot 10^{-3}$  [rad]

Die Torsionstragfähigkeit der Berechnung mit linear elastischen Segmenten liegt etwa 6 % unter der Torsionstragfähigkeit nach dem Fasermodell. Ursächlich hierfür ist, dass die aufgebrachte Verdrehung von  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  rad nicht ausreichend groß war. Entsprechend bildet die

Last-Verformungs-Kurve der linear elastischen Berechnung in Abbildung 5.45 kein Plateau aus. Die Radialschubspannungen in Abbildung 5.48 b) sind dennoch denen gemäß dem Fasermodell sehr ähnlich, die extremalen Radialschubspannungen sind allerdings näher zur Biegezugzone hin verortet. Die Radialschubspannungen der Berechnung mit dem bilinearen Fließkriterium von Menétrey und Willam befinden sich sogar im Bereich der Biegezugzone. Wie auch beim GZG und den Großbauteilversuchen konzentrieren sich die Radialschubspannungen in Abbildung 5.48 c) auf die Innenkante des Fugenquerschnitts. Zudem fällt auf, dass die Radialschubspannungen in ihrer Größe und Verteilung deutlich geringer sind als die Radialschubspannungen gemäß dem Fasermodell oder der linear elastischen Berechnung. Gleiches gilt für die Abbildung 5.48 d), wo die Radialschubspannungen fast überall nahe null sind.

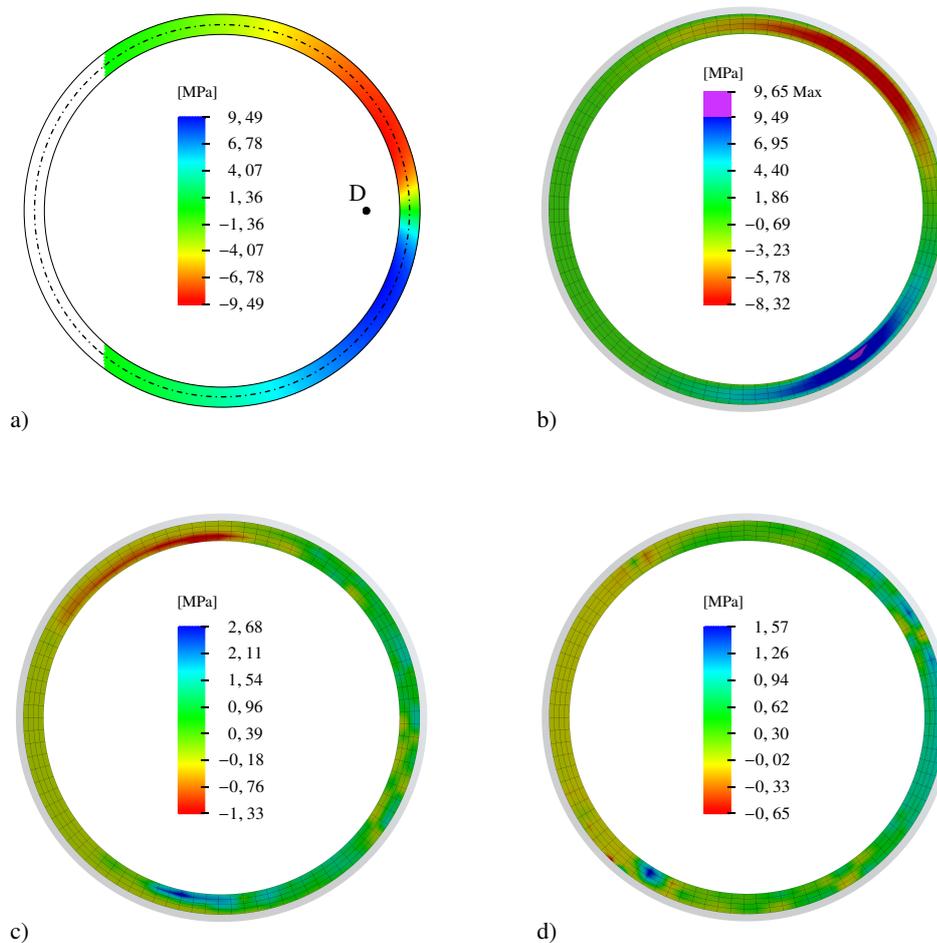


Abbildung 5.48: Radialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZT

- a) Fasermodell
- b) FE-Modell, linear elastisch bei  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  [rad]
- c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei  $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$  [rad]
- d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$  [rad]

Auch bei den Tangentialschubspannungen, Abbildung 5.49, zeigen sich Unterschiede zwischen den Berechnungen mit linear elastischen Segmenten und dem Fasermodell.

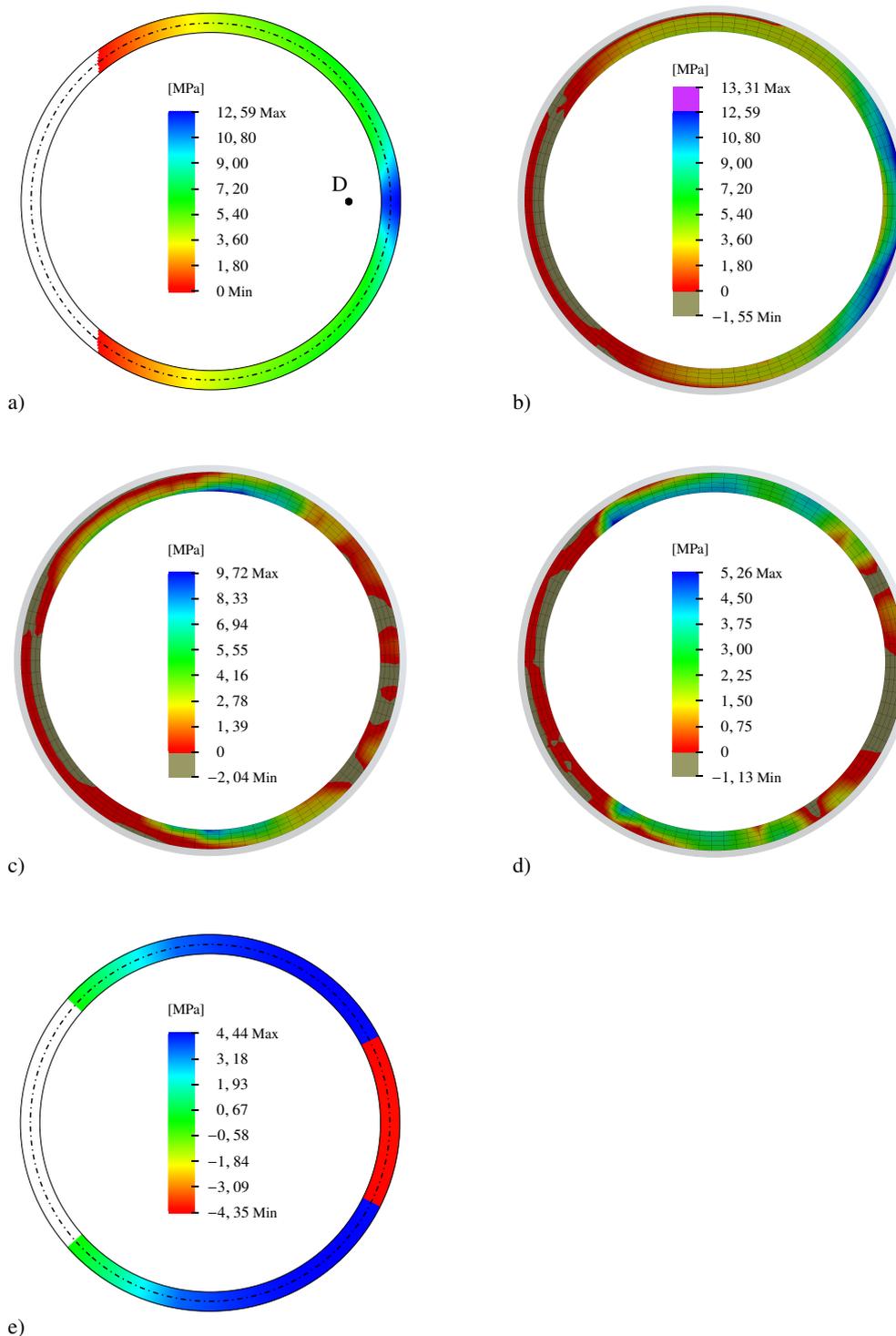


Abbildung 5.49: Tangentialschubspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZT

a) Fasermodell

b) FE-Modell, linear elastisch bei  $\vartheta_x = 10 \cdot 10^{-3}$  [rad]

c) FE-Modell, Menétrey und Willam bilinear bei  $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$  [rad]

d) FE-Modell, Menétrey und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$  [rad]

e) Modell gemäß Abschnitt 4.3.2 (Fall 2) und dem Ansatz ohne  $M_{T,I,offen}$

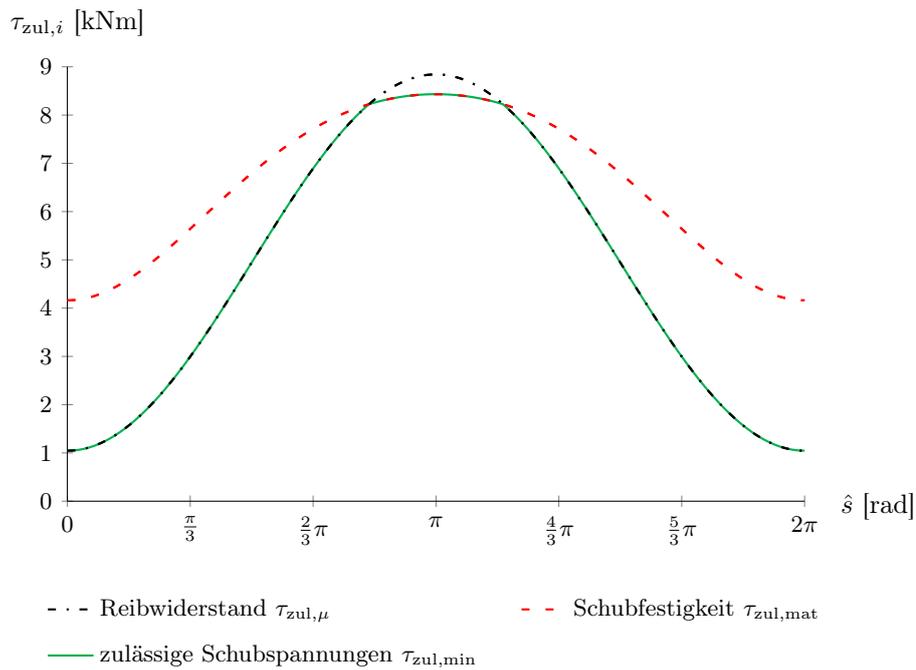
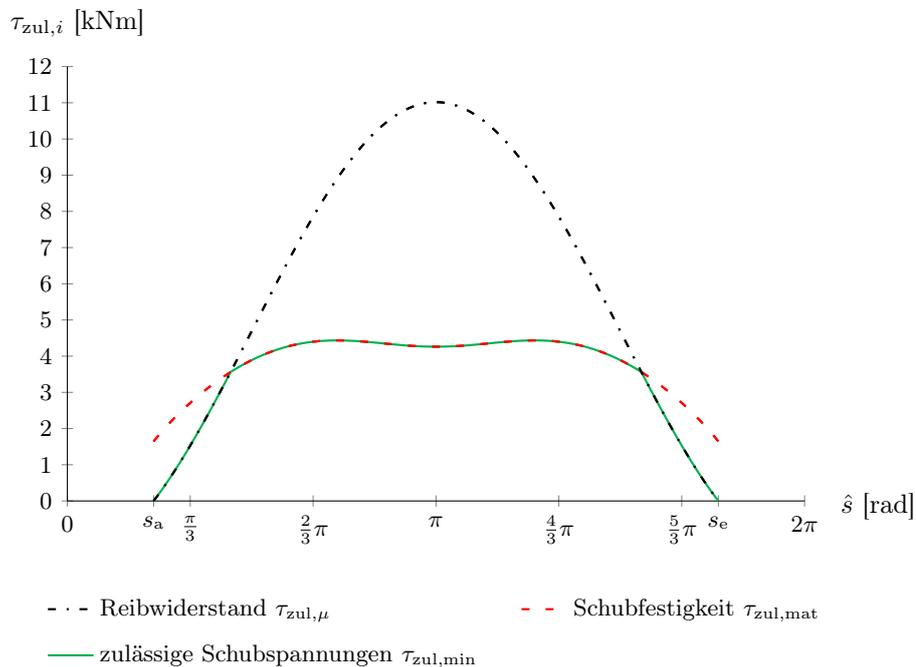
Vergleicht man die Tangentialschubspannungen gemäß dem Fasermodell und denen aus der Berechnung mit linear elastischen Segmenten, so fällt auf, dass die Maximalspannungen nicht gleich verortet sind. So sind die Tangentialschubspannungen in der Biegedruckzone in dem Bereich der größten Drucknormalspannungen geringer, als sie gemäß dem Reibgesetz sein könnten. Gleiches zeigt sich auch bei den Berechnungen mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam, wo die Tangentialschubspannungen in der Biegedruckzone auf Werte nahe Null abfallen und teilweise sogar das Vorzeichen wechseln. Aufgrund der klaffenden Fuge konzentriert sich somit der Großteil der Tangentialschubspannungen auf die Flanken zwischen Biegedruck- und -zugzone. Dadurch nähern sich die Tangentialschubspannungen zu einem gewissen Teil denen aus Abbildung 5.49 e) an. Der deutliche Vorzeichenwechsel in der Biegedruckzone, der gemäß dem in dieser Arbeit entwickelten Modell mit dem Ansatz ohne  $M_{T,I,offen}$  vorhergesagt wird, stellt sich allerdings nicht ein.

Eine Diskussion der vorgestellten Ergebnisse folgt nun in Abschnitt 5.4.4.

#### 5.4.4 Diskussion der Ergebnisse

In Abschnitt 5.4 wird ein Turm für Windenergieanlagen mit praxisüblichen Dimensionen und Beanspruchungen vorgestellt. Die Torsionstragfähigkeiten der vierzehn Fugen wurden für den GZG sowie den GZT berechnet und in den Abbildungen 5.38 und 5.44 dargestellt. Aus ihnen geht klar hervor, dass das in dieser Arbeit entwickelte Modell ähnliche Torsionstragfähigkeiten vorhersagt wie die Berechnung mit der Finite-Element-Methode. Dabei ist festzuhalten, dass die Berechnungen mit dem bilinearen Fließkriterium von Menétrey und Willam leicht höhere und die Berechnungen inklusive Ver- und Entfestigung (H+S) meist etwas geringere Tragfähigkeiten angeben, als durch das in dieser Arbeit entwickelte Modell vorhergesagt wurde. Da in den Berechnungen mit der Finiten-Element-Methode reine Betonsegmente ohne Bewehrung simuliert wurden, kann davon ausgegangen werden, dass die Torsionstragfähigkeit der Berechnungen inklusive Ver- und Entfestigung in Realität etwas höher ausfallen würde. Qualitativ würde eine Bewehrung das Softening auf der Zugseite des Betons abschwächen, wodurch sich die Torsionstragfähigkeit der bilinearen Berechnung annähern sollte.

Die plastischen Dehnungen in den Abbildungen 5.40 und 5.41 sind qualitativ mit den plastischen Dehnungen der Großbauteilversuche, die bereits in Abschnitt 5.3.4 diskutiert wurden, vergleichbar. Dass der Fugenquerschnitt gemäß Abschnitt 4.3.2.4 dem Fall 2 ( $\tau_{zul,mat}(s_a) > \tau_{zul,\mu}(s_a)$  und  $\tau_{zul,mat}(s_e/2) < \tau_{zul,\mu}(s_e/2)$ ) und nicht dem Fall 1 ( $\tau_{zul,mat}(s) \geq \tau_{zul,\mu}(s)$ ) zuzuordnen ist, kann den plastischen Dehnungen des GZG, Abbildungen 5.40 und 5.41, nicht entnommen werden. Im Kontrast dazu zeigen die plastischen Dehnungen des GZT, Abbildungen 5.46 b) und 5.47 b), deutlich erhöhte plastische Dehnungen in der Biegedruckzone, welche sehr plötzlich auftreten. Der mit ihnen einhergehende Steifigkeitsverlust ist für den jeweils starken Abfall der Last-Verformungs-Kurven in Abbildung 5.45 verantwortlich. Auch wenn dieses Phänomen für den GZG nicht festgestellt werden konnte, ist davon auszugehen, dass die geringe Schubfestigkeit  $\tau_{zul,mat}$  in der Biegedruckzone und die damit verbundene Einordnung in den Fall 2 ursächlich für die plötzlich auftretenden plastischen Dehnungen ist. Diese Einschätzung rührt daher, dass im GZG die Schubfestigkeit  $\tau_{zul,mat}$  in der Biegedruckzone nur etwas geringer ist als der Reibwiderstand  $\tau_{zul,\mu}$ . Im GZT hingegen ist der Unterschied sehr viel deutlicher, weshalb dieses Phänomen nur hier auftrat. Der Verlauf der zulässigen Schubspannungen entlang der Profilmittellinie kann den Abbildungen 5.50 und 5.51 entnommen werden. Die Laufvariable  $\hat{s}$  wird in Abbildung 4.9 erläutert.

Abbildung 5.50: Zulässige Torsionsschubspannungen  $\tau_{zul,i}$  der Fuge F4 im GZGAbbildung 5.51: Zulässige Torsionsschubspannungen  $\tau_{zul,i}$  der Fuge F4 im GZT

Die Abbildungen 5.42 und 5.48 belegen erneut, dass Radialschubspannungen, wie sie im Fasermodell [19] bzw. einer Berechnung mit linear elastischen Elementen auftreten, zum größten Teil umgelagert werden. In Abschnitt 5.3.4 wurde bereits aufgezeigt, dass dieses Phänomen mit

der Schalenbiegung und den damit einhergehenden plastischen Dehnungen zusammenhängt. Die Tangentialschubspannungen der Abbildung 5.43 c) und d) sowie Abbildung 5.49 c) und d) zeigen qualitativ gewisse Ähnlichkeiten mit den Tangentialschubspannungen gemäß Abschnitt 4.3.2, wie beispielsweise, dass die größten positiven Tangentialschubspannungen nicht in der Biegedruckzone, sondern an den Flanken, zwischen der Biegedruck- und der -zugzone, auftreten. Dass die Tangentialschubspannungen im Bereich der Biegedruckzone ihr Vorzeichen wechseln, konnte nur in Teilen in Abbildung 5.49 c) und d) festgestellt werden. Insgesamt ist zu beobachten, dass die Tangentialschubspannungen in der Biegedruckzone nicht die Größenordnung der zulässigen Tangentialschubspannungen erreichen. Dies wird deutlich, wenn man Abbildung 5.49 mit den zulässigen Schubspannungen in Abbildung 5.51 vergleicht. Abhängig sind die zulässigen Schubspannungen in Abbildung 5.51 allerdings von den Normalspannungen, die zu einem gewissen Grad durch die Torsionsbeanspruchung beeinflusst werden. Zum einen beeinflusst die bereits diskutierte Schalenbiegung die Normalspannungsverteilung im Fugenquerschnitt, zum anderen ist davon auszugehen, dass sich ein Wölbmoment im Fugenquerschnitt, aufgrund der plastischen Dehnungen und der damit einhergehenden veränderten Wölbsteifigkeit, einstellt. Ersichtlich werden diese Effekte in Abbildung 5.52. So zeigt Abbildung 5.52 b) im Bereich der Flanken eine Normalspannungsverteilung, die auf ein Krepelmoment zurückzuführen ist. Abbildung 5.52 d) zeigt im Bereich der Biegedruckzone deutlich erhöhte Drucknormalspannungen, im Vergleich zur Normalspannungsverteilung nach Lastschritt zwei, Abbildung 5.52 c). Abbildung 5.52 b) weist sowohl erhöhte als auch verminderte Drucknormalspannungen in der Biegedruckzone auf. Beide diese Effekte könnten die Folge eines Wölbmoments sein, das aufgrund plastischer Dehnungen entstand. In Abschnitt 4.3.2 wurde bereits antizipiert, dass ein Wölbmoment im Fugenquerschnitt infolge plastischer Dehnungen auftreten kann. Da die Normalkraft hierdurch nicht beeinflusst wird, wurde festgelegt, dass die Schubspannungen gemäß dem in Abschnitt 4.3.2 vorgestellten Modell als effektive Schubspannungen zu betrachten sind. Die gleiche Argumentation erschließt sich somit auch für die veränderte Normalspannungsverteilung infolge der Schalenbiegung.

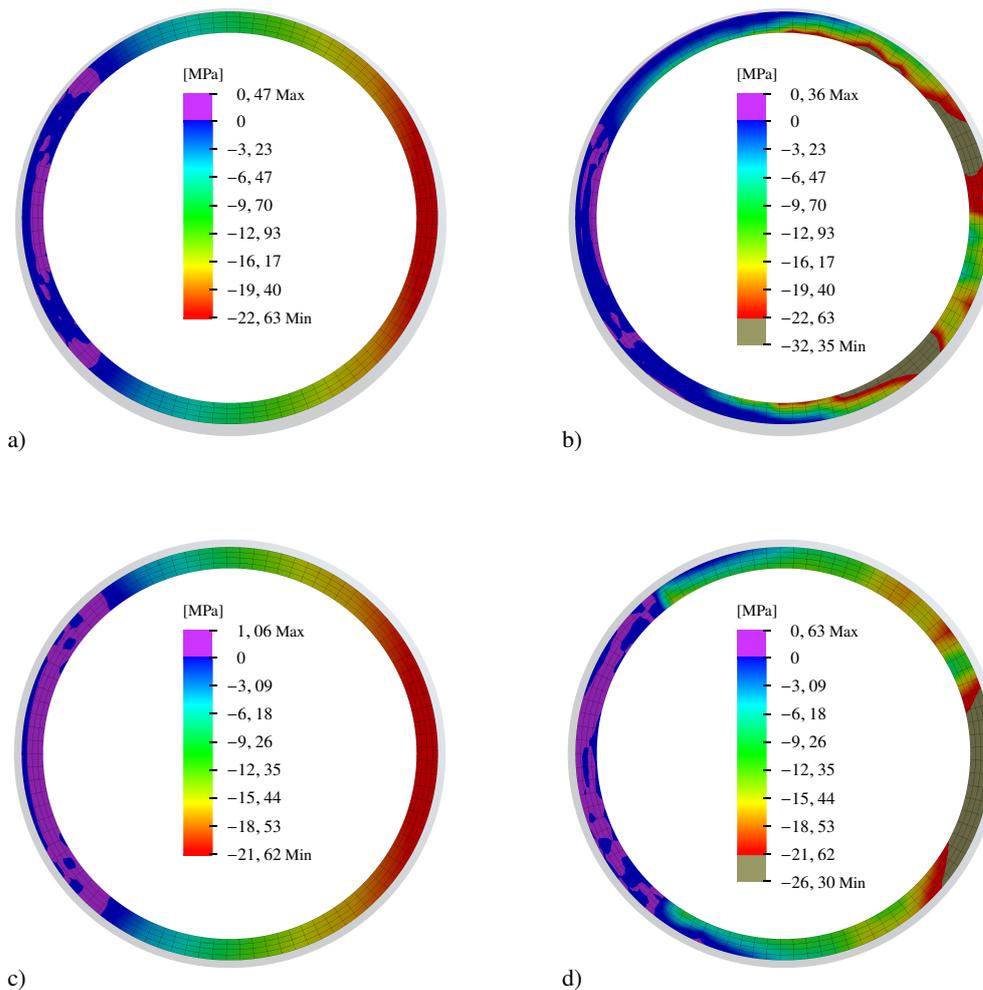


Abbildung 5.52: Normalspannungen im Fugenquerschnitt von F4 im GZT

- a) Menétrey und Willam bilinear bei  $\vartheta_x = 0$  [rad], nach Lastschritt zwei
- b) Menétrey und Willam bilinear bei  $\vartheta_x = 3,8 \cdot 10^{-3}$  [rad]
- c) Menétrey und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 0$  [rad], nach Lastschritt zwei
- d) Menétrey und Willam H+S bei  $\vartheta_x = 1,7 \cdot 10^{-3}$  [rad]

## 5.5 Zusammenfassung

Abschnitt 5 befasst sich mit der Verifikation des in dieser Arbeit entwickelten Modells. Auch das Fasermmodell [19], welches in leicht veränderter Form entsprechend Abschnitt 3.3.3 verwendet wurde, wird hierbei genauer betrachtet und mit dem in dieser Arbeit entwickelten Modell verglichen. Zur Verifikation herangezogen werden Berechnungen mit der Finiten-Element-Methode sowie Versuche, die an der Universität Hannover durchgeführt und von Hartwig [19] im Rahmen seiner Dissertation vorgestellt wurden.

Anhand von FE-Berechnungen mit linear elastischen Segmenten wird gezeigt, dass sowohl das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell, als auch das Fasermmodell den Torsionsschubfluss sowie die Torsionstragfähigkeit gut vorhersagen können. Während das Fasermmodell eine

Starrkörperverschiebung unterstellt, in der Schubspannungen auch orthogonal zur Wandebene wirken, geht das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell aufgrund der Dünnwandigkeit des Querschnitts davon aus, dass Schubspannungen nur in tangentialer Richtung wirken.

Der Frage, welches der oben genannten Modelle die Realität besser beschreibt, wurde ebenfalls näher untersucht. So werden Kleinst- und Großbauteilversuche vorgestellt und die Versuchsergebnisse mit den Torsionstragfähigkeiten der beiden analytischen Modelle verglichen. Bemerkenswert ist, dass das Fasermodell die Torsionstragfähigkeit der Kleinstbauteilversuche und das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell die Torsionstragfähigkeit der Großbauteilversuche besser vorhersagt. Um der Frage nachzugehen, warum die oben genannten Modelle entweder die Kleinstbauteilversuche oder die Großbauteilversuche, aber nicht beide Versuchsserien akkurat abbilden, werden die Großbauteilversuche mit Hilfe der Finiten-Element-Methode näher untersucht. Zugrunde gelegt wird den Segmenten dabei kein linear elastisches Material, sondern ein Werkstoff, der dem Fließkriterium von Menétrey und Willam (siehe hierzu Abschnitt 2.2.2) folgt, welches gut geeignet ist, Beton unter mehraxialer Beanspruchung abzubilden.

Es wird dargelegt, dass sich infolge nichtlinearen Materialverhaltens Radialschubspannungen in einem signifikant geringeren Maße einstellen, als dies bei einer Berechnung mit linear elastischen Segmenten der Fall wäre. Entscheidend hierbei ist die sich einstellende Schalenbiegung, welche einen deutlichen Steifigkeitsverlust in radialer Richtung zur Folge hat. Die Schalenbiegung stellt sich aber nur ein, wenn ein nichtlineares Materialverhalten berücksichtigt wird. Bei einem linear elastischen Material hingegen wird annähernd eine Starrkörperverschiebung beobachtet. Durch diese Erkenntnis konnten die Definitionsbereiche für das Fasermodell sowie für das in dieser Arbeit entwickelte Modell qualitativ beschrieben werden.

Um die gewonnen Erkenntnisse an realen Dimensionen zu überprüfen, wurde ein über 50 m hoher segmentierter Betonturm, der den unteren Teil eines Hybridturms für Windenergieanlagen darstellt, näher betrachtet. Für jede der vierzehn Segmentfugen wurden die Torsionstragfähigkeiten gemäß dem Modell von Grünberg und Göhlmann [16], dem Fasermodell [19] und dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modell ermittelt und einander gegenübergestellt. Zusätzlich wurde die Torsionstragfähigkeit der Segmentfugen mit der Finiten-Element-Methode berechnet, anhand der die oben genannten Modelle bewertet werden. Die Segmente wurden auch hier wieder mit dem Fließkriterium von Menétrey und Willam abgebildet. Dass das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell die Torsionstragfähigkeit nochmals besser vorhersagt, als es bei den Großbauteilversuchen der Fall ist, bestätigt die ebenfalls dargestellten Definitionsbereiche beider Modelle. Ursächlich hierfür ist die im Vergleich zu den Großbauteilversuchen höhere Querschnittsschlankheit des praxisüblichen Turms. Welches der oben genannten Modelle die Realität besser beschreibt, ist entsprechend davon abhängig, in welchen Definitionsbereich die fugenangrenzenden Segmente fallen. Dünnwandige Türme aus Stahlbetonfertigteilen, wie sie auch zum Bau von Windenergieanlagen verwendet werden, fallen aufgrund des nichtlinearen Materialverhaltens von Beton und der sich einstellenden Schalenbiegung eindeutig in den Definitionsbereich des in dieser Arbeit entwickelten Modells.

# 6 Bemessungsmodell überdrückter und klaffender Segmentfugen

## 6.1 Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde auf Grundlage der Theorie der Wölbkrafttorsion ein Modell entwickelt, mit dem die Torsionstragfähigkeit trockener Fugen ermittelt werden kann. Am Beispiel eines Trägers mit dicht angeordneten Bindeblechen als Analogie für einen segmentierten Stab mit klaffenden Fugen, wurden mit der Theorie der Wölbkrafttorsion die Torsionsschnittgrößen einer klaffenden Fuge hergeleitet. Die sich aus den Schnittgrößen ergebenden Torsionsschubspannungen  $\tau(s)$  wurden anschließend dem Schubwiderstand  $\tau_{zul}(s)$  gegenübergestellt. Der Schubwiderstand ist das Minimum aus dem Reibwiderstand  $\tau_{zul,\mu}(s)$  und der Schubfestigkeit  $\tau_{zul,mat}(s)$  des verwendeten Werkstoffs. Dieser Gegenüberstellung konnte eine Spannungsumlagerung abgeleitet werden, durch die sich die Torsionsschubspannungen  $\tau(s)$  vom Betrag her den zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul}(s)$  angleichen. Das maximal aufnehmbare Torsionsmoment  $M_{T,R}$  kann entsprechend mit diesen Schubspannungen berechnet werden.

Diese Methode kann ebenfalls genutzt werden, um die Querkrafttragfähigkeit (ohne Torsion) einer trockenen Fuge zu bestimmen. Im Gegensatz zur Torsionstragfähigkeit, bei dessen Ermittlung der Schubfluss zunächst unklar war, ist der Querkraftschubfluss auch bei klaffenden Fugen hinlänglich bekannt. Auch wenn im Rahmen dieser Arbeit nicht näher auf die Querkrafttragfähigkeit von Segmentfugen eingegangen wurde, so ist zumindest für regelmäßige polygonale Querschnitte die Spannungsumlagerung offensichtlich. Die Querkrafttragfähigkeit  $V_{Rd}$  ergibt sich direkt aus den zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul}(s)$ .

Nachfolgend werden die Bemessungsmodelle für die Torsions- und die Querkrafttragfähigkeit vorgestellt. Beide Bemessungsmodelle nutzen eine Monte-Carlo-Simulation, um zwischen den in Abschnitt 4.3.2.4 aufgeführten Fällen zu unterscheiden. Im Fall 1 ist an jeder Querschnittsstelle der Reibwiderstand maßgebend. Es gilt  $\tau_{zul,mat}(s) \geq \tau_{zul,\mu}(s)$  für  $s_a \leq s \leq s_e$ . Im Fall 2 werden sowohl der Reibwiderstand als auch die Schubfestigkeit maßgebend. Es gilt  $\tau_{zul,mat}(s_a) > \tau_{zul,\mu}(s_a)$  und  $\tau_{zul,mat}(s_e/2) < \tau_{zul,\mu}(s_e/2)$ . Im Fall 3 ist an jeder Querschnittsstelle der Schubwiderstand maßgebend. Es gilt  $\tau_{zul,mat}(s) \leq \tau_{zul,\mu}(s)$  für  $s_a \leq s \leq s_e$ . Die Laufvariable  $s$  läuft die Mittellinie des Querschnitts ab. Dabei beginnt  $s$  an der Stelle  $s = s_a$  und endet bei  $s = s_e$ . Der Punkt  $s_e/2$  befindet sich in der Biegedruckzone am Punkt der größten Drucknormalspannungen, wie in Abbildung 4.9 gezeigt. Ein Anwendungsbeispiel der nachfolgend vorgestellten Bemessungsmodelle kann dem Anhang A entnommen werden.

## 6.2 Torsionstragfähigkeit

In Abschnitt 4.3.2 wurde eine Methode zur Bestimmung des aufnehmbaren Torsionsmoments in einer Trockenfuge vorgestellt. Es wurde dargelegt, dass die Normalspannungsverteilung einen starken Einfluss auf die Torsionstragfähigkeit ausübt. Somit kann die Torsionstragfähigkeit nur

in Abhängigkeit vom vorherrschenden Biegemoment und der Normalkraft angegeben werden. Basierend auf jener Methode wurde ein Modell mit zwei Ansätzen entwickelt, um das Torsionsmoment in Abhängigkeit des Biegemoments und der Normalkraft zu bestimmen. Abbildung 4.16 zeigt die Verläufe dieser beiden Ansätze, die sich bei einem Kreisringquerschnitt für alle praktisch relevanten Zwecke nur unwesentlich unterscheiden. Da bei vollständig überdrückter Fuge ein linearer Zusammenhang zwischen Torsionsmoment und Biegemoment vorliegt, der bei klaffender Fuge nur unwesentlich vom linearen Verlauf abweicht, bietet es sich an, eine bilineare Näherungsgleichung für die Torsionstragfähigkeit anzugeben. Für eine möglichst übersichtliche und ingenieurmäßige Näherungsgleichung kann eine Gerade zwischen Anfangs- und Endpunkt des Verlaufs ohne offene Torsionsanteile gewählt werden. Gleichzeitig kann das Plateau des Ansatzes mit offenen Torsionsanteilen als Untergrenze definiert werden, wodurch man die bilineare Näherungsgleichung 6.1 erhält.

$$M_{T,R} = -\mu \cdot (N \cdot r_m + M) \cdot \eta_T(\zeta) \geq -\frac{\mu \cdot N \cdot t \cdot \eta_T(\zeta)}{3} \quad (6.1)$$

Gleichung 6.1 baut auf den Vorzeichenregeln aus Abbildung 4.9 auf. Somit sind die Drucknormalkraft  $N$  stets negativ und das Biegemoment  $M$  stets positiv einzusetzen. Da Abbildung 4.16 lediglich die zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}$  gemäß des Coulomb'schen Reibgesetzes zu Grunde liegen, enthält Gleichung 6.1 den Faktor  $\eta_T(\zeta) \leq 1$ . Dieser dient zur Unterscheidung der in Abschnitt 4.3.2.4 vorgestellten drei Fälle. Für den Fall 1 behält Abbildung 4.16 ihre volle Gültigkeit, weshalb für diesen Fall  $\eta_T(\zeta) = \eta_{T,1} = 1$  gilt. Für den Fall 2 und 3 muss  $\eta_T(\zeta) < 1$  werden, um die verminderte Tragfähigkeit aufgrund der Nichtlinearität des Werkstoffs zu berücksichtigen. Da die drei vorgestellten Fälle sich anhand der zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}$  und  $\tau_{zul,mat}$  unterscheiden, erscheint es sinnvoll,  $\eta_T(\zeta)$  über das Verhältnis  $\zeta = \frac{\tau_{zul,\mu}^{(s_e/2)} - \tau_{zul,mat}^{(s_e/2)}}{\tau_{zul,\mu}^{(s_e/2)}} \geq 0$  auszudrücken. Mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation wurden zwei Funktionen für  $\eta_{T,2}(\zeta)$  und  $\eta_{T,3}(\zeta)$  ermittelt, die den Fall 2 und Fall 3 aus Abschnitt 4.3.2.4 abdecken. Für die Monte-Carlo-Simulation wurden 10.000 Berechnungen mit zufällig gewählten Parametern durchgeführt. Die zugrunde gelegten Parameter können Tabelle 6.1 entnommen werden.

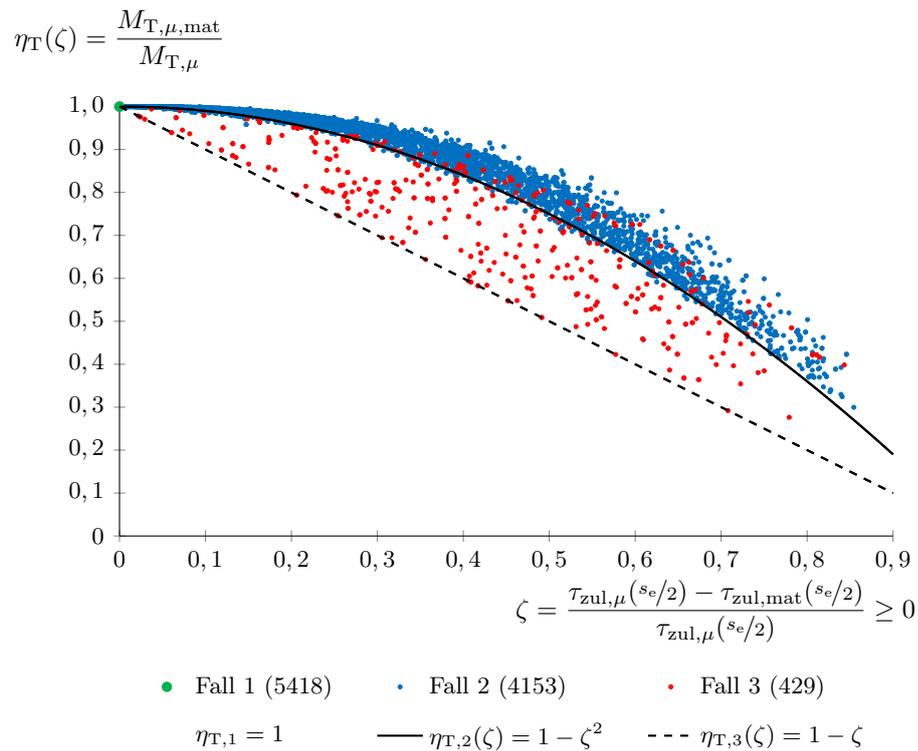
Tabelle 6.1: Eingangsparmeter und ihre Definitionsbereiche

Parameter	Definitionsbereich			Einheit
$f_{ck}$	30	bis	100	MPa
$f_{cc}$	$= f_{cm}, f_{ck}, f_{cd}$			
Radius $r_m$	175	bis	600	cm
Wandstärke $t$	15	bis	50	cm
Normalkraft $N$	0,05	bis	0,25	$A(r_m = 200 \text{ cm}) \cdot f_{ck}$
Biegemoment $M$	0	bis	0,90	$N \cdot r_m$
Reibbeiwert $\mu$	0,30	bis	1,00	
$\sigma_{x,max}$	$< 0,7 \cdot f_{cc}$			

Für die angesetzte einaxiale Betondruckfestigkeit  $f_{cc}$  wurden zwei Parameter festgelegt. Zum einen beeinflusst der charakteristische Wert der Betondruckfestigkeit  $f_{ck}$ , welcher zufällig zwischen 30 MPa und 100 MPa in 1 MPa Intervallen variiert, und zum anderen beeinflusst der zugrunde gelegte Fraktilwert  $f_{cm}$  und  $f_{ck}$  bzw. Bemessungswert  $f_{cd}$  die angesetzte einaxiale Betondruckfestigkeit  $f_{cc}$ . Für den mittleren Radius  $r_m$  wurde ein Wert zwischen 175 cm und 600 cm gewählt. Diese Werte orientieren sich am Turmdurchmesser unterhalb des Adapters und am Turmfuß. Die Normalkraft  $N$  wird prozentual von der Querschnittsfläche  $A(r_m = 200 \text{ cm})$  und der gewählten charakteristischen Betondruckfestigkeit  $f_{ck}$  abhängig gemacht. Da die Vorspannkraft, welche über die Turmhöhe konstant ist, den Großteil der Normalkraft ausmacht, bezieht sich die Normalkraft auf eine mit  $r_m = 200 \text{ cm}$  bezogene Querschnittsfläche, die als Unterkante Adapter angesehen werden kann. Übliche Werte der Normalkraft liegen bei  $N \approx 0,15 \cdot A(r_m = 200 \text{ cm}) \cdot f_{ck}$ . Das Biegemoment  $M$  kann maximal einen Wert von  $0,9 \cdot N \cdot r_m$  annehmen, was in etwa einem Öffnungswinkel  $\theta = 240^\circ$  entspricht (siehe Abbildung 4.16). Der Definitionsbereich des Reibbeiwerts wurde so gewählt, dass alle in Abbildung 2.9 dargestellten Werte erfasst werden.

Da im Torsionslastfall davon ausgegangen wird, dass Wind nur einseitig auf die vom Rotor überstrichene Fläche wirkt, fällt das maximale Torsionsmoment niemals mit dem maximalen Biegemoment zusammen. Daher wurde die maximale Drucknormalspannung  $\sigma_{x,\max}$  auf unter  $0,7 \cdot f_{cc}$  begrenzt. Wenn die Parameter zufällig so gewählt wurden, dass  $\sigma_{x,\max} \geq 0,7 \cdot f_{cc}$  eintrat, wurde die Normalkraft erneut zufällig festgelegt, bis die Bedingung eingehalten war.

Von den 10.000 Berechnungen entsprachen 5418 Fall 1, 4153 Fall 2 und 429 Fall 3. Die sich ergebenden Abminderungsbeiwerte  $\eta_T(\zeta)$  können Abbildung 6.1 entnommen werden. Die Abszisse zeigt das angesprochene Verhältnis  $\zeta$  der zulässigen Schubspannungen in der Biegedruckzone. Die Datenpunkte des Falls 1 liegen alle bei (0|1) übereinander und wurden nur zur Vollständigkeit mit aufgeführt. Die Datenpunkte des Falls 2 zeigen einen deutlichen Trend, dessen Unterkante in etwa  $\eta_T(\zeta) = \eta_{T,2}(\zeta) = 1 - \zeta^2$  folgt. Weniger als 7 % der 4153 Datenpunkte liegen unterhalb  $\eta_{T,2}$ . Die größte Abweichung nach unten beträgt ca. 3 %. Die Datenpunkte des Falls 3 liegen erwartungsgemäß größtenteils unterhalb  $\eta_{T,2}(\zeta)$ . Die Datenpunkte, die sich oberhalb von  $\eta_{T,2}(\zeta)$  befinden, verfehlen nur knapp die Bedingung, um in Fall 2 einsortiert zu werden. Die Untergrenze der Datenpunkte von Fall 3 folgt der Form  $\eta_T(\zeta) = \eta_{T,3}(\zeta) = 1 - \zeta$ .

Abbildung 6.1: Definition des Abminderungsbeiwerts  $\eta_T$  für Fall 1 bis 3

### 6.3 Querkrafttragfähigkeit

Die in Abschnitt 4.3.2 vorgestellte Methode zur Bestimmung des aufnehmbaren Torsionsmoments kann in gleicher Weise auch zur Bestimmung der aufnehmbaren Querkraft verwendet werden. Die Schubspannungen erreichen so an jeder Stelle den betragsmäßigen Wert von  $\tau_{\text{zul},\mu}$  und wirken, entsprechend der Theorie dünnwandiger Querschnitte, wandparallel. Entgegen der Torsionstragfähigkeit, für die nur eine Näherungsgleichung angegeben werden konnte, lässt sich für die Querkrafttragfähigkeit unter der beschriebenen Methode und  $\eta_V(\zeta) = 1$  eine genaue Gleichung in der Form

$$V_{y,R} = \frac{r_m \cdot t \cdot \mu \cdot \eta_V(\zeta) \cdot \cos(\theta/4)^2}{0,5 \cdot A \cdot I_z} \cdot \left[ M_{z,\text{tot}} \cdot A \cdot (r_m - 2 \cdot y_0 - r_m \cdot \cos(\theta/2)) - 2 \cdot I_z \cdot N \right] \quad (6.2)$$

mit:  $M_{z,\text{tot}} = M_z + N \cdot y_0(\theta)$

angeben. Gleichung 6.2 baut auf den Vorzeichenregeln aus Abbildung 4.9 auf. Somit sind die Drucknormalkraft  $N$  stets negativ und das Biegemoment  $M_z$  stets positiv einzusetzen. Entsprechend wird in Gleichung 6.2 die Querkraft in  $y$ -Richtung berechnet. Für eine Berechnung von  $V_z$  sind die Indizes entsprechend zu vertauschen. Die Querschnittswerte  $A$ ,  $I_z$  und  $y_0$  beziehen sich auf den überdrückten Querschnitt und sind entsprechend von  $\theta$  abhängig, siehe hierzu die Gleichungen 4.7 bis 4.9 bzw. 4.11.

Wie auch in Abschnitt 6.2 wird hier die verminderte Tragfähigkeit infolge der Materialausnutzung über den Faktor  $\eta_V(\zeta) \leq 1$  ausgedrückt. Für den Fall 1 gilt  $\eta_V(\zeta) = \eta_{V,1} = 1$  während für Fall 2 und Fall 3  $\eta_V(\zeta) < 1$  gilt. Verwendet wurden die 10.000 Datenpunkte aus Abschnitt 6.2. Die so empirisch ermittelten Abminderungsbeiwerte  $\eta_V(\zeta)$  können Abbildung 6.2 entnommen werden.

Die Datenpunkte des Falls 1 liegen erwartungsgemäß alle bei (0|1) übereinander und wurden wieder nur zur Vollständigkeit mit aufgeführt. Die Datenpunkte des Falls 2 zeigen einen deutlichen Trend, dessen Unterkante in etwa  $\eta_V(\zeta) = \eta_{V,2}(\zeta) = 1 - \zeta^{1,6}$  folgt. Weniger als 5,2 % der 4153 Datenpunkte liegen unterhalb  $\eta_{V,2}$ . Die größte Abweichung nach unten beträgt ca. 4 %. Die Datenpunkte des Falls 3 liegen größtenteils unterhalb  $\eta_{V,2}(\zeta)$  und zeigen eine deutlichere Trennung zu den Datenpunkten des Falls 2 auf als in Abbildung 6.1. Die Untergrenze der Datenpunkte vom Fall 3 folgt auch hier der Form  $\eta_V(\zeta) = \eta_{V,3}(\zeta) = 1 - \zeta$ .

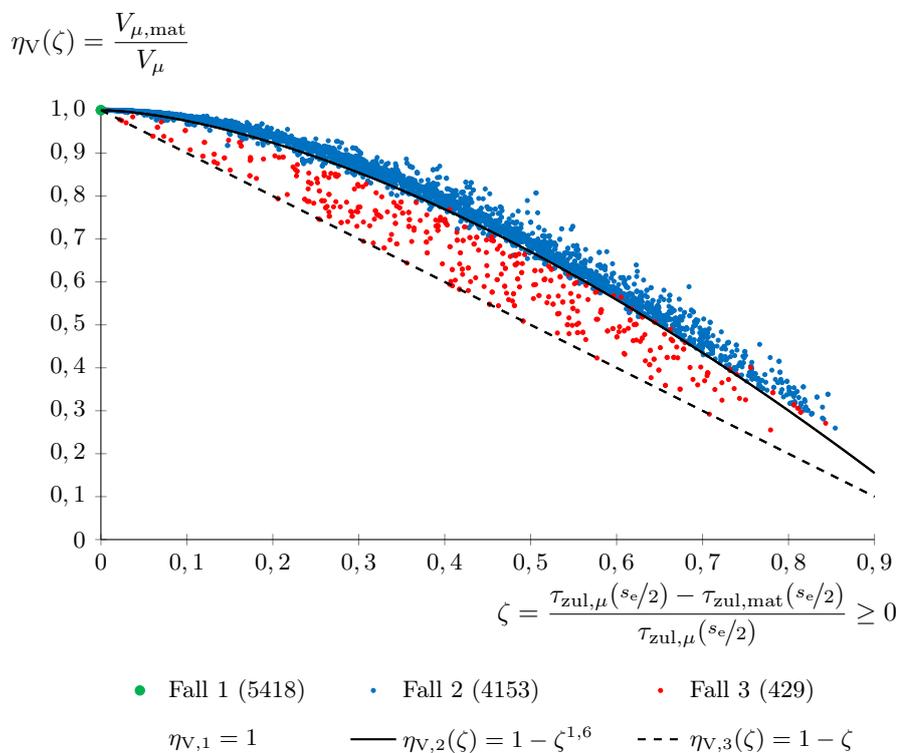


Abbildung 6.2: Definition des Abminderungsbeiwerts  $\eta_V$  für Fall 1 bis 3

## 6.4 Zusammenfassung

Das in Abschnitt 4.3 entwickelte Modell zur Bestimmung der Torsionstragfähigkeit von Trockenfugen wird in Abschnitt 6.2 durch eine ingenieurmäßige Näherungsgleichung abgebildet. Jene Näherungsgleichung bezieht sich dabei ausschließlich auf Kreisringquerschnitte mit konstanter Wandstärke. Zur Unterscheidung in die drei Fälle aus Abschnitt 4.3.2 wird ein Beiwert  $\eta_T(\zeta)$  herangezogen, dessen Funktion über eine Monte-Carlo-Simulation bestimmt wird. Der Simulation liegt die einaxiale Betondruckfestigkeit  $f_{cc}$ , der mittlere Radius  $r_m$ , die Wandstärke  $t$ , die Normalkraft  $N$ , das Biegemoment  $M$  und der im Fugenquerschnitt angesetzte Reibbeiwert

$\mu$  zugrunde. Für jeden dieser Parameter wurde ein Definitionsbereich festgelegt. Für die Monte-Carlo-Simulation wurden 10.000 Berechnungen durchgeführt, wobei die Parameter jeweils einen zufälligen Wert im Rahmen ihrer Definitionsbereiche erhielten.

Die Querkrafttragfähigkeit wird in Abschnitt 6.3 betrachtet. Es wird eine Gleichung vorgestellt, die zur Berechnung der Querkrafttragfähigkeit eines dünnwandigen, überdrückten oder klaffenden Kreisringquerschnitts mit konstanter Wandstärke geeignet ist. Solange die Fuge die Bedingungen des Falls 1 aus Abschnitt 4.3.2 erfüllt, handelt es sich um eine im Rahmen der gesetzten Annahmen mathematisch exakte Gleichung. Die Fälle 2 und 3 werden auch hier durch den Beiwert  $\eta_v(\zeta)$  abgebildet, welcher ebenfalls über eine Monte-Carlo-Simulation ermittelt wurde.

# 7 Fazit und Ausblick

## 7.1 Fazit

Die Torsionstragfähigkeit massiver, segmentierter Stäbe zu beurteilen, ist eine schwierige Aufgabe. Annahmen und Vereinfachungen müssen getroffen werden, um solch komplexe Systeme untersuchen zu können. So gehen einige Modelle davon aus, dass ausschließlich primäre Torsionsschubspannungen in den Segmenten sowie Fugenquerschnitten berücksichtigt werden müssen. Andere unterstellen eine Starrkörperverschiebung, bei der sich die Schubspannungen im Fugenquerschnitt immer rechtwinklig zur Verbindungslinie eines gedachten Drehpunkts ausrichten, was zur Folge hat, dass Schubspannungen auch orthogonal zum Rand wirken.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Modell vorgestellt, dessen wichtigste Voraussetzung ist, dass ein dünnwandiger Querschnitt vorliegt. Anhand einer Grenzwertbetrachtung mit der Theorie der Wölbkrafttorsion konnte dargelegt werden, dass bei ungleichmäßig überdrückter Fuge Verwölbungen auftreten und Torsion zu einem maßgeblichen Anteil über sekundäre Torsionsschubspannungen im Fugenquerschnitt übertragen wird. Der Fugenquerschnitt selbst verwölbt infolge der Torsionsbeanspruchung nicht, da die Steigung der Verdrillung  $\vartheta''$  in der Fuge gegen null geht. Lediglich die Segmente erfahren eine Verwölbung, welche durch die ungleichmäßige Schubübertragung im Fugenquerschnitt hervorgerufen wird. Hervorzuheben ist, dass es sich um eine Grenzwertbetrachtung handelt, die anhand eines Trägers mit dicht angeordneten Bindeblechen vorgenommen wurde (Abschnitt 2.6.4). In einem solchen Stab reiht sich ein Diskontinuitätsbereich an den nächsten, weshalb hinterfragt werden muss, ob die Theorie der Wölbkrafttorsion solch einen Fall adäquat abbildet, schließlich wird einem wölbfreien Querschnitt eine Verwölbung unterstellt. Erklärt werden können diese Ergebnisse über Lasteinleitungszonen. Ein wölbfreier Querschnitt kann Torsion nicht über primäre Torsionsschubspannungen übertragen, wenn er nur über eine klaffende Fuge gelagert ist. Die ungleichmäßige Lagerung im Fugenquerschnitt zwingt dem Stab lokal einen anderen Drehpunkt auf, der Stab verwölbt.

Eine Drehpunktverschiebung setzt auch Hartwig [19] seinem Fasermodell zugrunde. Ebenso kann eine Drehpunktverschiebung Berechnungen mit der Finiten-Element-Methode entnommen werden. Hartwig unterstellt den fugenangrenzenden Segmenten eine Starrkörperverschiebung, benötigt dafür aber Schubspannungen, die mit der Theorie dünnwandiger Querschnitte nicht vereinbar sind. In dieser Arbeit wurden sowohl das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell, als auch das Fasermodell anhand von Berechnungen mit Hilfe der Finiten-Element-Methode verifiziert. Welches der beiden Modelle sich in Realität einstellt, ist davon abhängig, in welchem Ausmaß sich Schubspannungen orthogonal zur Profilmittellinie einstellen können. Limitierend ist hier der Widerstand gegen Schalenbiegung, die aufgrund der orthogonal zur Profilmittellinie wirkenden Schubspannungen entsteht. Verbleiben die Segmente trotz Schalenbiegung im linear elastischen Bereich, verhalten sie sich annähernd wie starre Körper. Entsprechend liefert das Fasermodell eine gute Vorhersage der Torsionstragfähigkeit. Kann die Schalenbiegung nicht aufgenommen werden, kommt es zu plastischen Dehnungen. Infolge dessen werden orthogonal zur Profilmittellinie wirkende Schubspannungen in tangential wirkende Schubspannungen

umgelagert, was beispielsweise den Abbildungen 5.32 und 5.33 entnommen werden kann. Sind die verbleibenden, orthogonal wirkenden Schubspannungen vernachlässigbar klein, liefert das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell gute Vorhersagen der Torsionstragfähigkeit. Die Definitionsbereiche beider Modelle sind entsprechend von der Auslegung des Turms abhängig. Dabei überschätzt das Fasermodell tendenziell die Torsionstragfähigkeit, während das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell sie vorwiegend unterschätzt. Allgemein ist festzustellen, dass praxisübliche Türme für Windenergieanlagen den linear elastischen Bereich von Beton unter einer Torsionsbeanspruchung verlassen. Entsprechend zeigen Berechnungen mit der Finiten-Element-Methode in den Abbildungen 5.38 und 5.44 gute Übereinstimmungen mit dem in dieser Arbeit entwickelten Modell. Teilweise werden durch die FE-Berechnungen aber auch geringere Torsionstragfähigkeiten ermittelt, als das in dieser Arbeit entwickelte Modell angibt. Ursächlich hierfür sind Rissentwicklungen, die das Verhältnis der primären zu den sekundären Torsionsschubspannungen beeinflussen. Bewehrung sollte diesen Effekt schmälern, wenn nicht sogar ausgleichen. Entsprechend ist das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell sehr gut geeignet, das Torsionstragverhalten von Türmen für Windenergieanlagen zu bewerten. Die erste Forschungsfrage, wie Torsion in ungleichmäßig überdrückten oder klaffenden Fugen übertragen wird (Abschnitt 1.4), kann somit als beantwortet angesehen werden.

Die zweite Forschungsfrage, welche Mechanismen auf der Widerstandsseite den Torsionsübertrag beeinflussen, wird durch die vorliegende Arbeit ebenfalls beantwortet. Vordergründig ist hier die bereits angesprochene Schalenbiegung zu nennen. Können die aus der Schalenbiegung herrührenden Spannungen nicht aufgenommen werden, stellen sich plastische Dehnungen ein. Dadurch lagern sich Schubspannungen um, wodurch sich der Schubfluss dem in dieser Arbeit entwickelten Modell annähert. Verbleiben die fugenangrenzenden Segmente hingegen im linear elastischen Bereich, stellen sich Schubspannungen ähnlich wie im vorgestellten Fasermodell ein. Ein Torsionsabtrag gemäß dem in dieser Arbeit entwickelten Modell wird demnach begünstigt, wenn ein großer Reibbeiwert  $\mu$ , ein großer Radius  $r_m$ , eine geringe Wanddicke  $t$ , geringe Betonfestigkeiten  $f_{cc}$  bzw.  $f_{ct}$  sowie ein großes Biegemoment  $M$  und eine hohe Drucknormalkraft  $N$  vorliegen. Umgekehrt wird das Fasermodell begünstigt. Für eine genauere Betrachtung liegen zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit leider noch nicht genügend Versuchsergebnisse vor.

Die letzte Forschungsfrage fragt nach zwei Dingen. Den ersten Teil der Frage, welchen Einfluss eine zusätzlich wirkende Querkraft auf den Torsionsübertrag hat, beantwortet diese Arbeit qualitativ. So lässt sich die in Abschnitt 4.3.2 vorgestellte Methode um eine Querkraft erweitern. Dadurch geht jedoch die Symmetrie des Schubflusses verloren, da die Querkraftschubspannungen die Schubspannungen aus Torsion in Teilen verstärken bzw. ihnen entgegen wirken. Die zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul}$  werden durch eine zusätzliche Querkraft nicht beeinflusst. Die Torsionstragfähigkeit nimmt aber mit zunehmender Querkraftbeanspruchung ab, da beide Beanspruchungen auf die zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul}$  angewiesen sind. Welchen Einfluss dies auf die Schalenbiegung hat, beantwortet diese Arbeit nicht. Wie nun dennoch die Tragfähigkeit beider Schubbeanspruchungen nachgewiesen werden kann, fragt der zweite Teil der dritten Forschungsfrage. In Abschnitt 6 werden zwei Modelle zur Berechnung der Torsionstragfähigkeit und der Querkrafttragfähigkeit vorgestellt. Es handelt sich um analytische Formeln, die einen empirischen Faktor  $\eta_T$  bzw.  $\eta_V$  beinhalten, der mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation verschiedene Fälle der Materialausnutzung berücksichtigt. Eine lineare Interaktion der Torsions- und Querkraftausnutzung eignet sich hier, um eine Kombination aller Schnittgrößen auf der sicheren Seite zu bemessen. Ein Anwendungsbeispiel kann dem Anhang A entnommen werden.

Insgesamt gesehen ist man in der Lösung des Fugentorsionsproblems für trockene Fugen mit

dieser Arbeit mehrere Schritte voran gekommen. Es gibt aber noch viele offene Fragestellungen. Einige werden im nachfolgenden Ausblick angesprochen.

## 7.2 Ausblick

Betrachtet wurden in dieser Arbeit Segmente, die den gesamten Querschnitt des Stabes abdecken. Bei Türmen von Windenergieanlagen werden jedoch, aufgrund des großen Turmfußdurchmessers und dem damit verbundenem Transportaufwand, in der Regel Halb- oder sogar Drittelschalen in den unteren Ebenen des Segmentturms verwendet. Diese werden auf der Baustelle mit Schraubverbindungen zu einer Vollschale zusammengefügt. Welchen Einfluss die vertikalen Fugen dieser zusammengesetzten Segmente auf die Torsionstragfähigkeit haben, wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht. Prinzipiell können die vertikalen Fugen aber so betrachtet werden, wie die rissähnlichen plastischen Dehnungen aus Abbildung 5.31 b). Demnach würden sie das Verhältnis primärer zu sekundärer Torsionsschubspannungen verändern. Die primären Torsionsanteile des offenen Querschnitts würden an Bedeutung gewinnen, was die Torsionstragfähigkeit weiter mindert. Eventuell ist dieser Effekt aber so gering, dass das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell durchaus auch realistische Torsionstragfähigkeiten für Horizontalfugen segmentierter Türme liefert, wenn ebenfalls vertikale Fugen vorhanden sind. An der Universität Hannover wird bereits im Rahmen des Forschungsprojekts HyTowering [76, 77] an diesem Thema geforscht. Versuchsergebnisse zum Torsionstragverhalten segmentierter Stäbe mit vertikalen Fugen sind jedoch noch nicht veröffentlicht. Eine Auswertung der Versuchsreihen des HyTowering Projekts mit dem in dieser Arbeit entwickelten Modell wäre ein erster Schritt, die Anwendbarkeit bei zusätzlicher vertikaler Segmentierung zu untersuchen.

Die Bemessungsmodelle aus Abschnitt 6 beziehen sich ausschließlich auf dünnwandige Kreisringquerschnitte. Die dahinterstehende Methode, Abschnitt 4.3.2, erfordert aber lediglich einen quasi wölbfreien Querschnitt. Dies wirft die Frage auf, ob analog zum Kreisringquerschnitt auch Bemessungsmodelle für andere Querschnittsgeometrien mit dieser Methode gefunden werden können. Türme von Windenergieanlagen betreffend wären beispielsweise regelmäßige Sechseck- oder Quadratquerschnitte von Interesse. Aber auch Brückenquerschnitte sollten hierhingehend näher betrachtet werden.

Ein wesentlicher Unterschied in der Beschaffenheit der Fuge zwischen segmentierten Türmen von Windenergieanlagen und Segmentbrücken ist, dass für Windenergieanlagen vorwiegend glatte Trockenfugen verwendet werden, während bei Segmentbrücken Schubnocken zum Einsatz kommen. Vereinzelt werden auch Türme von Windenergieanlagen mit Schubnocken im Fugenquerschnitt errichtet. Manche Hersteller planen, die Schubtragfähigkeit der Horizontalfugen mit Schubdornen zu steigern. Wie diese Maßnahmen in ein Bemessungsmodell, wie dem in dieser Arbeit vorgestellten, integriert werden können, muss in künftigen Forschungsarbeiten erörtert werden. Möglicherweise ist es ausreichend, den Reibbeiwert  $\mu$  anzupassen, und statt einem Wert von  $\mu = 0,5$  für glatte Fugen  $\mu = 0,7$  für verzahnte Fugen zu verwenden, so wie es die DIN EN 1992-1-1 [11] vorsieht.

Ebenfalls relevant für die Anwendung des in dieser Arbeit entwickelten Modells ist das Sicherheitskonzept. Auf der sicheren Seite könnten die Tragfähigkeiten aus Abschnitt 6 mit den ungünstig wirkenden Design-Schnittgrößen und -Festigkeiten ermittelt werden, allerdings würde sich so eventuell eine unverhältnismäßig große und somit unwirtschaftliche globale Sicherheit einstellen. Da in die Berechnungen des Torsionswiderstands  $M_{T,R}$  sowie des Querkraftwiderstands  $V_R$  Einwirkungsgrößen, wie die Normalkraft  $N$  oder das Biegemoment  $M$ , eingehen, ist

eine klare Trennung zwischen der Einwirkungsseite und der Widerstandsseite nicht möglich. Die Ausarbeitung eines hierzu passenden Sicherheitskonzepts ist entsprechend von großer Bedeutung für die Praxis.

Des Weiteren stellt sich die Frage, in wie fern die hier neu gewonnen Erkenntnisse zum Torsionstragverhalten klaffender Fugen die Bemessung der Stahlbetonsegmente beeinflussen. Eine gewöhnliche Bemessung mit dem räumlichen Fachwerkmodell nach DIN EN 1992-1-1 [11] könnte im Randbereich der Segmente gegebenenfalls auf der unsicheren Seite liegen, da im räumlichen Fachwerkmodell lediglich von einem Bredt'schen Kreisschubfluss ausgegangen wird. Die vorliegende Arbeit hat jedoch gezeigt, dass auch sekundäre Torsionsschubspannungen im Fugenquerschnitt relevant werden und dass sich die größten Schubspannungen in der Biegedruckzone konzentrieren. Gerade bei klaffenden Fugen wäre so die Diskrepanz zwischen den Schubspannungen des Bredt'schen Kreisschubflusses und den in der Fuge anzusetzenden Schubspannungen besonders groß. Daher empfiehlt der Autor im Randbereich der Segmente konstruktiv zusätzliche Bewehrungseisen anzuordnen, solange hierzu keine neueren Erkenntnisse vorliegen. Die Effekte aus der Lasteinleitung im Randbereich der Segmente sollten sich jedoch mit zunehmendem Abstand von der Fuge schnell egalalisieren, sodass der Großteil der Segmente weiterhin mit den Regeln der DIN EN 1992-1-1 [11] bemessen werden kann.

# A Anwendungsbeispiel

## A.1 Ausgangssituation

Um die Anwendung der in Abschnitt 6 vorgestellten Bemessungsmodelle zu verdeutlichen, wird nachfolgend ein Anwendungsbeispiel präsentiert. Zu ermitteln sind die Torsions- und Querkrafttragfähigkeit  $M_{T,R}$  und  $V_{y,R}$  einer Trockenfuge mit Kreisringquerschnitt. Die fugenangrenzenden Segmente sind Stahlbetonfertigteile, wie sie auch zum Bau von Windenergieanlagen verwendet werden. Auf Höhe der zu untersuchenden Fuge weisen die Segmente einen mittleren Radius von  $r_m = 3,0$  m und eine Wandstärke von  $t = 0,28$  m auf. Die Segmente sind beide aus einem Beton der Festigkeitsklasse C50/60. Der Bewehrungsgrad geht nicht in die Berechnung ein. Die Fugenflächen sind eben und sehr glatt. Gemäß DIN EN 1992-1-1 [11] Abschnitt 6.2.5 (2) wird ein Reibbeiwert  $\mu = 0,5$  angenommen. Infolge Vorspannung und Eigengewicht wirkt eine Normalkraft  $N = -52$  MN (Druck ist negativ) auf die Fuge ein. Zudem liegen infolge einseitig auf den Rotor wirkender Windböen ein Biegemoment  $M_z = 100$  MNm, eine Querkraft  $V_y = 2$  MN sowie ein Torsionsmoment  $M_T = 6$  MNm im Fugenquerschnitt vor. Alle notwendigen Informationen sind in Abbildung A.1 zusammen gefasst.

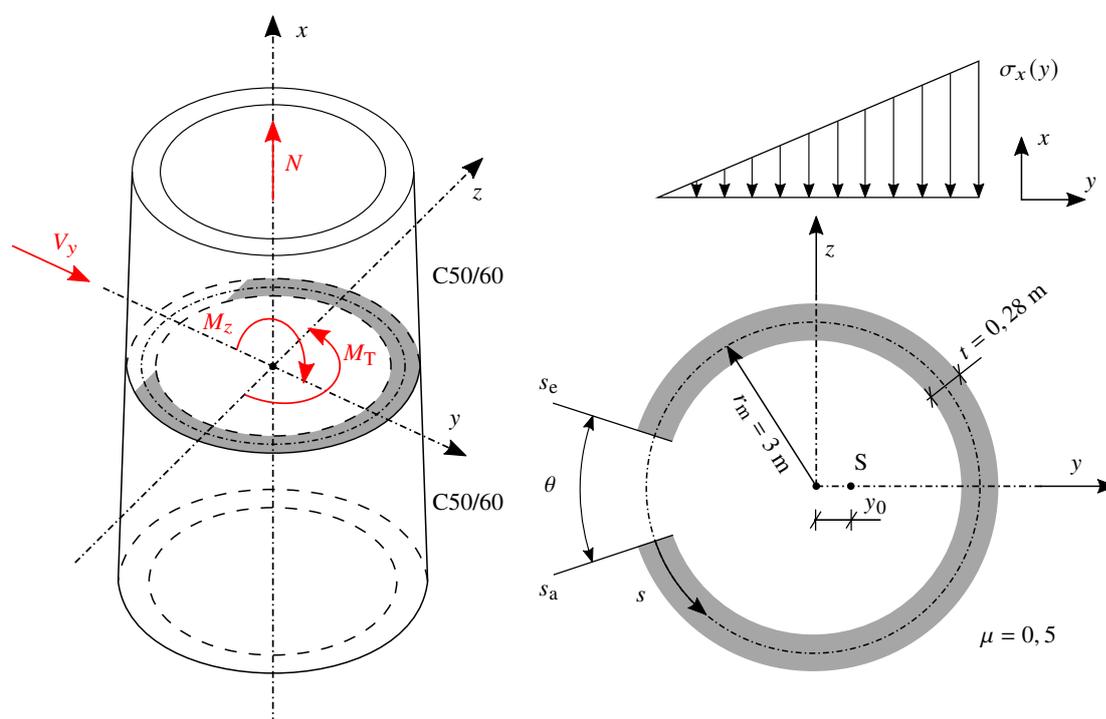


Abbildung A.1: Querschnittsgeometrie, Schnittgrößen und Betonfestigkeiten des Anwendungsbeispiels

## A.2 Querschnittswerte des überdrückten Fugenbereichs

Bevor die Tragfähigkeit des Fugenquerschnitts berechnet werden kann, müssen die Querschnittswerte des überdrückten Fugenbereichs bestimmt werden. Diese sind abhängig vom zunächst noch unbekanntem Fugenöffnungswinkel  $\theta$ , welcher nachfolgend mit der Iterationsgleichung 4.11 in drei Iterationsschritten berechnet wird. Die Gleichungen für die Querschnittsfläche  $A(\theta)$  (Gleichung 4.7), die Schwerpunktskoordinate  $y_0(\theta)$  (Gleichung 4.8) sowie das Flächenträgheitsmoment 2. Ord.  $I_z(\theta)$  (Gleichung 4.9) wurden in Abschnitt 4.3.2.2 vorgestellt.

### 1. Iterationsschritt

Annahme:  $\theta_1 = 90^\circ \equiv 1,57 \text{ rad}$

$$A(\theta_1) = r_m \cdot t \cdot (2\pi - \theta_1) = 3 \cdot 0,28 \cdot (2\pi - 1,57) = 3,96 \text{ m}^2$$

$$y_0(\theta_1) = \frac{2 \cdot r_m \cdot \sin \frac{\theta_1}{2}}{2\pi - \theta_1} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{1,57}{2}}{2\pi - 1,57} = 0,9 \text{ m}$$

$$I_z(\theta_1) = \frac{r_m^3 \cdot t \left( -4 + (\theta_1 - 2\pi)^2 + 4 \cdot \cos \theta_1 + (\theta_1 - 2\pi) \cdot \sin \theta_1 \right)}{4\pi - 2\theta_1}$$

$$= \frac{3^3 \cdot 0,28 \left( -4 + (1,57 - 2\pi)^2 + 4 \cdot \cos 1,57 + (1,57 - 2\pi) \cdot \sin 1,57 \right)}{4\pi - 2 \cdot 1,57} = 10,83 \text{ m}^4$$

$$M_{z,\text{tot}} = M_z + N \cdot y_0(\theta_1) = 100 - 52 \cdot 0,9 = 53,2 \text{ MNm}$$

$$\theta_2 = 2 \cdot \arccos \left( \frac{-I_z(\theta_1) \cdot N - A(\theta_1) \cdot y_0(\theta_1) \cdot M_{z,\text{tot}}}{A(\theta_1) \cdot r_m \cdot M_{z,\text{tot}}} \right)$$

$$= 2 \cdot \arccos \left( \frac{10,83 \cdot 52 - 3,96 \cdot 0,9 \cdot 53,2}{3,96 \cdot 3 \cdot 53,2} \right) = 1,88 \text{ rad} \equiv 107,5^\circ \neq \theta_1$$

### 2. Iterationsschritt

$$A(\theta_2) = 3 \cdot 0,28 \cdot (2\pi - 1,88) = 3,7 \text{ m}^2$$

$$y_0(\theta_2) = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{1,88}{2}}{2\pi - 1,88} = 1,1 \text{ m}$$

$$I_z(\theta_2) = \frac{3^3 \cdot 0,28 \left( -4 + (1,88 - 2\pi)^2 + 4 \cdot \cos 1,88 + (1,88 - 2\pi) \cdot \sin 1,88 \right)}{4\pi - 2 \cdot 1,88} = 8,56 \text{ m}^4$$

$$M_{z,\text{tot}} = 100 - 52 \cdot 1,1 = 42,8 \text{ MNm}$$

$$\theta_3 = 2 \cdot \arccos\left(\frac{8,56 \cdot 52 - 3,7 \cdot 1,1 \cdot 42,8}{3,7 \cdot 3 \cdot 42,8}\right) = 1,93 \text{ rad} \equiv 110,3^\circ \neq \theta_2$$

3. Iterationsschritt

$$A(\theta_3) = 3 \cdot 0,28 \cdot (2\pi - 1,93) = 3,66 \text{ m}^2$$

$$y_0(\theta_3) = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{1,93}{2}}{2\pi - 1,93} = 1,13 \text{ m}$$

$$I_z(\theta_3) = \frac{3^3 \cdot 0,28 \left( -4 + (1,93 - 2\pi)^2 + 4 \cdot \cos 1,93 + (1,93 - 2\pi) \cdot \sin 1,93 \right)}{4\pi - 2 \cdot 1,93} = 8,22 \text{ m}^4$$

$$M_{z,\text{tot}} = 100 - 52 \cdot 1,13 = 41,24 \text{ MNm}$$

$$\theta_4 = 2 \cdot \arccos\left(\frac{8,22 \cdot 52 - 3,66 \cdot 1,13 \cdot 41,24}{3,66 \cdot 3 \cdot 41,24}\right) = 1,94 \text{ rad} \equiv 110,9^\circ \approx \theta_3 = \theta \quad \checkmark$$

### A.3 Bemessung der Torsionstragfähigkeit

Zur Bestimmung der Torsionstragfähigkeit wird der Abminderungsbeiwert  $\eta_T(\zeta)$  benötigt. Um diesen bestimmen zu können, muss für die Bemessungssituation der maßgebende Fall gemäß Abschnitt 4.3.2.4 identifiziert werden. Benötigt werden hierfür die zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}$  aus dem Reibwiderstand zwischen den kontaktierenden Segmenten und  $\tau_{zul,\text{mat}}$ , welche die Schubfestigkeit des verwendeten Betons darstellt. Für die Bestimmung des maßgebenden Falls ist es ausreichend, die zulässigen Schubspannungen an den Punkten  $s_a$  und  $s_e/2$  zu bestimmen. Die zulässigen Schubspannungen aus dem Reibwiderstand  $\tau_{zul,\mu}$  können mit Gleichung 4.2 bestimmt werden. Da ihre Richtung hier nicht von Bedeutung ist, wird stets ihr Betrag betrachtet. Die hierfür benötigte Normalspannung  $\sigma(s, \theta)$  an der Stelle  $s$  kann mit Gleichung 4.10 bestimmt werden. Da bereits festgestellt wurde, dass eine klaffende Fuge vorliegt, gilt  $\tau_{zul,\mu}(s_a) = 0$ , da die Normalspannung  $\sigma(s_a, \theta > 0)$  automatisch zu null wird. Die Berechnung von  $\tau_{zul,\mu}(s_e/2)$  gestaltet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \sigma(s_e/2, \theta) &= \frac{M_z + N \cdot y_0(\theta)}{I_z(\theta)} \cdot \left( y_0(\theta) - y_s(s_e/2, \theta) \right) + \frac{N}{A(\theta)} \\ &= \frac{100 - 52 \cdot 1,13}{8,22} \cdot \left( 1,13 - 3 \right) - \frac{52}{3,66} = -23,6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_{zul,\mu}(s_e/2) = \mu \cdot |\sigma(s_e/2, \theta)| = 0,5 \cdot 23,6 = 11,8 \text{ MPa}$$

Die Querschnittskoordinate  $y_s(s, \theta)$  kann mit Gleichung 4.5 ermittelt werden, wobei diese für den Punkt  $s = s_e/2$  immer gleich dem mittleren Radius  $r_m$  wird.

Die Schubfestigkeit des Betons  $\tau_{zul,mat}$  kann zum Beispiel mit dem Versagenskriterium von Speck [13] und dem Mohr'schen Spannungskreis bestimmt werden. Eine händische Ermittlung über den Formelapparat ist allerdings nicht praktikabel. Empfehlenswert ist hier eine grafische Ermittlung, wie sie Abbildung A.2 entnommen werden kann. Es sei darauf hinweisen, dass die in dieser Arbeit verwendete Schubfestigkeit des Betons  $\tau_{zul,mat}$  eine Transformation der Versagenshülle von Speck [13] darstellt. Es ist wichtig zu betonen, dass dies nichts mit den Schubfestigkeiten von Beton zu tun hat, die früher zum Beispiel in der DIN 1045-1 [74] angegeben wurden. Für detailliertere Informationen zu diesem Thema verweise ich auf die Abschnitte 2.2.2 und 4.3.2.4 der vorliegenden Arbeit.

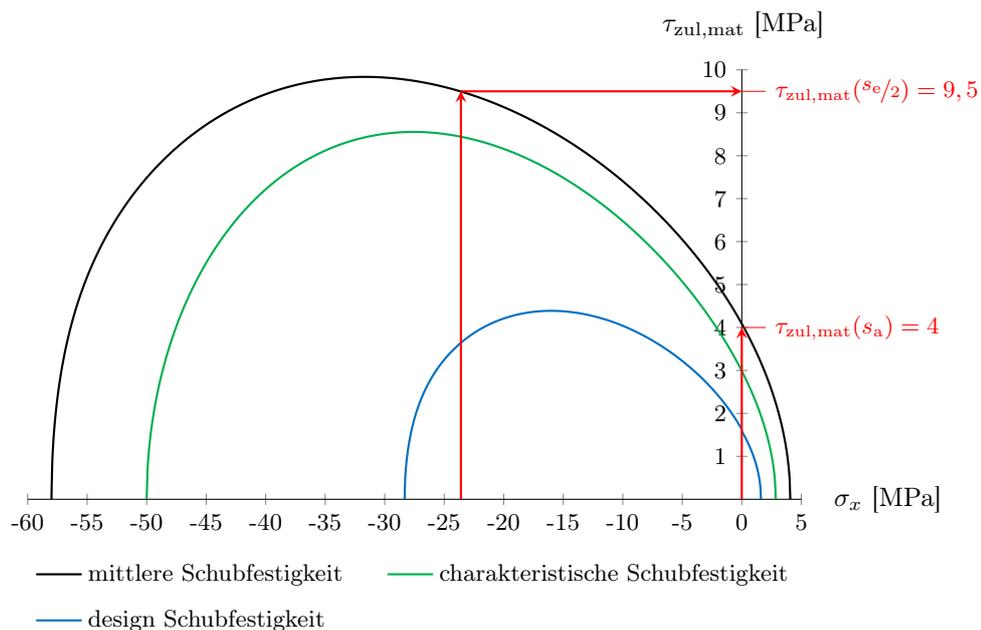


Abbildung A.2: Schubfestigkeiten eines Betons der Festigkeitsklasse C50/60

Für das Anwendungsbeispiel wird in Abbildung A.2 der mittlere Schubfestigkeitsverlauf verwendet. Abgebildet sind ebenfalls die Schubfestigkeitsverläufe für Charakteristische- und Design-Festigkeiten. Diese Zusatzinformationen sollen eine Hilfestellung bieten, da noch ein geeignetes Sicherheitskonzept gefunden werden muss.

Mit den zulässigen Schubspannungen kann nun der vorliegende Fall gemäß Abschnitt 4.3.2.4 bestimmt werden:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{zul,mat}(s_a) = 4 \text{ MPa} > \tau_{zul,\mu}(s_a) = 0 \text{ MPa} \\ \tau_{zul,mat}(s_e/2) = 9,5 \text{ MPa} < \tau_{zul,\mu}(s_e/2) = 11,8 \text{ MPa} \end{array} \right\} \text{Fall 2}$$

Die Gleichungen für  $\eta_T(\zeta)$  und  $\zeta$  sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Für

$$\zeta = \frac{\tau_{zul,\mu}(s_e/2) - \tau_{zul,mat}(s_e/2)}{\tau_{zul,\mu}(s_e/2)} = \frac{11,8 - 9,5}{11,8} = 0,19 \geq 0 \quad \checkmark$$

ergibt sich der Abminderungsfaktor  $\eta_T(\zeta)$  für den Fall 2 zu

$$\eta_T(\zeta) = \eta_{T,2}(\zeta) = 1 - \zeta^2 = 1 - 0,19^2 = 0,96$$

Nun kann die Torsionstragfähigkeit  $M_{T,R}$  mit Gleichung 6.1 ermittelt werden.

$$\begin{aligned} M_{T,R} &= -\mu \cdot (N \cdot r_m + M) \cdot \eta_T(\zeta) \geq -\frac{\mu \cdot N \cdot t \cdot \eta_T(\zeta)}{3} \\ &= -0,5 \cdot (-52 \cdot 3 + 100) \cdot 0,96 = 26,88 \text{ MNm} \geq \frac{0,5 \cdot 52 \cdot 0,28 \cdot 0,96}{3} = 2,33 \text{ MNm} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Der Nachweis der Torsionstragfähigkeit mit

$$\frac{M_{T,E}}{M_{T,R}} = \frac{6}{26,88} = 0,22 \leq 1 \quad \checkmark$$

ist damit erfüllt.

## A.4 Bemessung der Querkrafttragfähigkeit

Zur Bestimmung der Querkrafttragfähigkeit wird der Abminderungsbeiwert  $\eta_V(\zeta)$  benötigt. Die zulässigen Schubspannungen  $\tau_{zul,\mu}$  und  $\tau_{zul,mat}$  an den Stellen  $s_a$  und  $s_e/2$  wurden bereits in Abschnitt A.3 bestimmt. Somit gilt auch für die Querkrafttragfähigkeit der Fall 2 aus Abschnitt 4.3.2.4. Der Abminderungsbeiwert  $\eta_V(\zeta)$  berechnet sich gemäß Abbildung 6.2 zu

$$\eta_V(\zeta) = \eta_{V,2}(\zeta) = 1 - \zeta^{1,6} = 1 - 0,19^{1,6} = 0,93$$

Die Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit  $V_{y,R}$  erfolgt gemäß Gleichung 6.2 wie folgt:

$$\begin{aligned} V_{y,R} &= \frac{r_m \cdot t \cdot \mu \cdot \eta_V(\zeta) \cdot \cos(\theta/4)^2}{0,5 \cdot A \cdot I_z} \cdot \left[ M_{z,tot} \cdot A \cdot (r_m - 2 \cdot y_0 - r_m \cdot \cos(\theta/2)) - 2 \cdot I_z \cdot N \right] \\ &= \frac{3 \cdot 0,28 \cdot 0,5 \cdot 0,93 \cdot \cos(1,93/4)^2}{0,5 \cdot 3,66 \cdot 8,22} \\ &\quad \cdot \left[ 41,24 \cdot 3,66 \cdot (3 - 2 \cdot 1,13 - 3 \cdot \cos(1,93/2)) + 2 \cdot 8,22 \cdot 52 \right] = 14,44 \text{ MN} \end{aligned}$$

Der Nachweis der Querkrafttragfähigkeit mit

$$\frac{V_{y,E}}{V_{y,R}} = \frac{2}{14,44} = 0,14 \leq 1 \quad \checkmark$$

ist damit erfüllt.

## A.5 Vollständige Schnittgrößeninteraktion

Wie in dieser Arbeit vorgestellt gehen in die Torsions- und Querkrafttragfähigkeit die einwirkenden Schnittgrößen  $N$  und  $M$  ein. Da die Materialfestigkeit in der Nachweisführung berücksichtigt wird, ist im vorgestellten Nachweis der Torsions- und Querkrafttragfähigkeit auch ein Normalspannungsnachweis enthalten. Würden beispielsweise die Normalspannungen infolge  $N$  und  $M$  die Betondruckfestigkeit übersteigen, wird  $\zeta$  zu eins, wodurch  $\eta_T(\zeta)$  und  $\eta_V(\zeta)$  zu null werden, was wiederum auch  $M_{T,R} = V_R = 0$  setzt. Somit stellt eine Interaktionsgleichung der in dieser Arbeit entwickelten Torsions- und Querkrafttragfähigkeit eine Interaktion aller Schnittgrößen dar. Wie in Abschnitt 7.1 angesprochen wird vom Autor eine lineare Interaktion empfohlen.

$$\frac{M_{T,E}}{M_{T,R}} + \frac{V_E}{V_R} = 0,22 + 0,14 = 0,36 \leq 1 \quad \checkmark$$

# Literaturverzeichnis

- [1] LOH, LUTZ; GARG, ANDREAS (2020): Torsionstragverhalten von Betonhohlquerschnitten in geschlossenen und klaffenden Segmentfugen–Teil 1: Eine Nachweisführung gemäß Elastizitätstheorie. *Beton-und Stahlbetonbau* 115, 11, 838–847.
- [2] LOH, LUTZ; GARG, ANDREAS (2021): Torsionstragverhalten von Betonhohlquerschnitten in geschlossenen und klaffenden Segmentfugen–Teil 2: Die Umlagerung der Torsionsschubspannungen. *Beton-und Stahlbetonbau* 116, 11, 871–880.
- [3] LOH, LUTZ; GARG, ANDREAS (2023): Torsionstragverhalten von Betonhohlquerschnitten in geschlossenen und klaffenden Segmentfugen–Teil 3: Verifikation des Berechnungsmodells. *Beton-und Stahlbetonbau* 118, 6, 417–426.
- [4] BORKENSTEIN, DIETER; FISCHER, O; BROCKMANN, C (1999): The Bang Na-Bang Pli-Bang Pakong Expressway; Design, Construction and Test Loading of a Precast Segmental Bridge Structure, 37–59.
- [5] HAU, ERICH (2017): *Windkraftanlagen: Grundlagen. Technik. Einsatz. Wirtschaftlichkeit.* Springer-Verlag.
- [6] BORRMANN, RASMUS; REHFELDT, KNUD; KRUSE, DENNIS (2020): Volllaststunden von Windenergieanlagen an Land. SP20004A2. Deutsche WindGuard, 7.
- [7] HAUTMANN, DANIEL (2020): *Windkraft neu gedacht: Erstaunliche Beispiele für die Nutzung einer unerschöpflichen Ressource.* Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.
- [8] AASHTO (1989): *Guide Specifications for Design and Construction of Segmental Concrete Bridges*, 1989. American Association of State Highway und Transportation Officials.
- [9] DEUTSCHER BETON-VEREIN (1999): *Empfehlungen für Segmentfertigteilterbrücken mit externen Spanngliedern.* Deutscher Betonverein/Bundesministerium für Verkehr, Ausgabe 122.
- [10] DEUTSCHEN INSTITUTS FÜR BAUTECHNIK (2012): *Richtlinie für Windenergieanlagen, Einwirkungen und Standsicherheitsnachweise für Turm und Gründung.* Schriften des DIBt.
- [11] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V. (2011): *DIN EN 1992-1-1 Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken.* Beuth.
- [12] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V. (2012): *DIN EN 1993-1-1 Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten.* Beuth.
- [13] (FIB), fédération internationale du béton (2013): *Model Code for Concrete Structures 2010.* Ernst Sohn.
- [14] BRITISH STANDARD (1986): *Structural use of concrete.* BS8110.

- [15] RAUSCH, ERNST (1929): Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Torsion) und Abscheren. [Dissertation] Technische Hochschule Berlin.
- [16] GRÜNBERG, JÜRGEN; GÖHLMANN, JOACHIM (2010): Windenergieanlagen in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise. Beton-Kalender 2011: Schwerpunkte: Kraftwerke, Faserbeton, 121–123.
- [17] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V. (2001): DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Beuth.
- [18] ALGORAFI, MOHAMMAD A et al. (2011): Evaluation of Structural Behavior of Externally Prestressed Segmented Bridge with Shear Key under Torsion. *Journal of Engineering, Project, and Production Management* 1, 1, 28.
- [19] HARTWIG, STEFFEN (2020): Torsionstragmodell extern vorgespannter Kreisringsegmente mit trockenen Fugen. [Dissertation] Leibniz Universität Hannover.
- [20] MENETREY, PHILIPPE; WILLAM, KJ (1995): Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *Structural Journal* 92, 3, 311–318.
- [21] BUZAS, DORA (2013): Entwicklung einer Prüfvorrichtung für räumliche Mixed-Mode-Beanspruchung. [Dissertation] Technische Universität Wien.
- [22] SPECK, KERSTIN (2008): Beton unter mehraxialer Beanspruchung. [Dissertation] Technische Universität Dresden.
- [23] ZHOU, YUNLONG (1995): Über das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe: unter besonderer Berücksichtigung des Verhaltens von Beton. [Dissertation] Shaker, Technische Universität München.
- [24] RANKINE, WILLIAM JOHN MACQUORN (1872): A manual of applied mechanics. Charles Griffin und Company.
- [25] TRESCA, HENRI EDOUARD (1864): Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis a de forte pressions. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*.
- [26] HUBER, THOMAS (1904): Die spezifische formänderungsarbeit als mass der anstrengung eines materials. *Czasopismo Techniczne* 22, 81–92.
- [27] MISES, RICHARD VON (1913): Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1913, 4, 582–592.
- [28] LINKE, MARKUS; NAST, ECKART (2015): "Kombinierte Beanspruchung". *Festigkeitslehre für den Leichtbau*. Springer-Verlag, 191–218.
- [29] MOHR, OTTO (1882): Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. *Der Civilingenieur* 28, 2, 113–156.
- [30] DRUCKER, DANIEL CHARLES; PRAGER, WILLIAM (1952): Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of applied mathematics* 10, 2, 157–165.
- [31] HINTZE, DAGMAR (1985): Zur Beschreibung des physikalisch nichtlinearen Betonverhaltens bei mehrachsigen Spannungszustand mit Hilfe differentieller Stoffgesetze unter

- Anwendung der Methode der finiten Elemente. [Dissertation] Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar.
- [32] ESCALLÓN, JUAN (2021): Simulation with soil and concrete models. Concrete and reinforced concrete. CADFEM.
- [33] WILLAM, KASPAR J; WARNKE, E P (1974): “Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete”. *Triaxial Beanspruchte Betontragwerke*. Kap. III-1, 1–30.
- [34] HOEK, EVERT; BROWN, EDWIN T (1980): Empirical strength criterion for rock masses. *Journal of the geotechnical engineering division* 106, 9, 1013–1035.
- [35] OTTOSEN, NIELS SAABYE (1977): A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 103, 4, 527–535.
- [36] POPOV, VALENTIN L. (2010): *Kontaktmechanik und Reibung. Von der Nanotribologie bis zur Erdbebendynamik*. Springer-Verlag.
- [37] SCHAARSCHMIDT, DAVID; FLEDERER, HOLGER (2021): Vorgespannte Trockenfugen für modulare Brücken unter zyklischer Belastung. *Beton-und Stahlbetonbau* 116, 5, 378–386.
- [38] HARTWIG, STEFFEN; MARX, STEFFEN; BETZ, THORSTEN (2019): Statische und dynamische Reibwertermittlung an geschliffenen Segmentfugen. *Bautechnik* 96, 2, 112–119.
- [39] BUI, QUANG HIEU et al. (2013): Static test on friction coefficient of concrete foundation. *Jährliche Tagungen des Betoningenieurwesens* 35, 2, 991–996.
- [40] MOHAMAD, ME et al. (2015): Friction and cohesion coefficients of composite concrete-to-concrete bond. *Cement and Concrete Composites* 56, 1–14.
- [41] ZHOU, XIANGMING; MICKLEBOROUGH, NEIL; LI, ZONGJIN (2005): Shear strength of joints in precast concrete segmental bridges. *ACI structural journal* 102, 1, 3–11.
- [42] RIPOLL, LIDIA RUIZ (2014): *Construction of precast high performance concrete segmental bridges*. [Dissertation] Universidad de Castilla-La Mancha.
- [43] BAKHOUM, MOURAD MICHEL (1990): *Shear behavior and design of joints in precast concrete segmental bridges*. [Dissertation] Massachusetts Institute of Technology.
- [44] KASSEM, MA et al. (2017): Shear behaviour of SHCC dry joints in precast concrete construction.
- [45] SCHOENING, JANNA et al. (2013): Verbindungen von Fertigteilen aus UHPC. *Bautechnik* 90, 5, 304–313.
- [46] FIEDLER, K (1962): Versuche über den Reibungskoeffizienten in den Fugen zusammengespannter Betonfertigteile. *Bauplanung–Bautechnik* 16, 142–146.
- [47] FRANZ, G (1959): Versuche über die Querkraftaufnahme in Fugen von Spannbetonträgern aus Fertigteilen. *Beton-und Stahlbetonbau* 54, 6, 137–140.
- [48] FRANCKE, WOLFGANG; FRIEMANN, HARALD (2012): *Schub und Torsion in geraden Stäben: Grundlagen—Berechnungsbeispiele*. Springer-Verlag.
- [49] ROIK, KARLHEINZ (1978): *Vorlesungen über Stahlbau: Grundlagen*. 2. Aufl. Ernst und Sohn.

- [50] ROIK, KARLHEINZ; CARL, JÜRGEN; LINDNER, JOACHIM (1972): Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe.
- [51] WLASSOW, WS (1964): Dünnwandige Elastische Stäbe. VEB-Verlag. Berlin.
- [52] LEONHARDT, FRITZ; SCHELLING, GÜNTHER (1974): Torsionsversuche an Stahlbetonbalken. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 239.
- [53] HSU, THOMAS TC (1968): Torsion of structural concrete-behavior of reinforced concrete rectangular members. Special Publication 18, 261–306.
- [54] LAMPERT, PAUL; THÜRLIMANN, BRUNO (1969): Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken. Bericht/Institut für Baustatik ETH Zürich 6506, 3.
- [55] LAMPERT, PAUL; THÜRLIMANN, BRUNO; LÜCHINGER, PAUL (1971): Torsionsversuche an Stahl- und Spannbetonbalken. Bericht/Institut für Baustatik ETH Zürich 6506.
- [56] ZEDLER, THOMAS (2011): Zum Tragverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken unter Torsion. [Dissertation] Ruhr Universität Bochum.
- [57] GREENE JR, GARY; BELARBI, ABDELJELIL (2009): Model for reinforced concrete members under torsion, bending, and shear. I: Theory. Journal of engineering mechanics 135, 9, 961–969.
- [58] TEUTSCH, MANFRED (1980): Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken mit rechteckigem Querschnitt unter kombinierter Beanspruchung aus Biegung, Querkraft und Torsion. Heft 41. Technische Universität Braunschweig.
- [59] GÖRTZ, STEPHAN (2004): Zum Schubrissverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken aus Normal- und Hochleistungsbeton. [Dissertation] Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen.
- [60] MÖLLER, JULIANE (2006): Rotationsverhalten von verbundlos vorgespannten Segmenttragwerken. [Dissertation] Universität Fridericiana zu Karlsruhe.
- [61] LESSIG, NN (1958): Theoretische und experimentelle Untersuchung der Stahlbetonbalken unter kombinierter Biege- und Torsionsbeanspruchung (in Russisch). Theory of design and construction of reinforced concrete structures (Moscow).
- [62] FALKNER, HORST; TEUTSCH, MANFRED; HUANG, ZHEN (1997): Segmentbalken mit vorspannung ohne verbund unter kombinierter beanspruchung aus torsion, biegun g und querkraft. Heft 472. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton.
- [63] OJHA, S.K.; KORDINA, K. (1973): Theoretische und experimentelle Untersuchung der Stahlbetonbalken unter kombinierter Beanspruchung aus Torsion, Biegemoment und Querkraft. Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Universität Braunschweig.
- [64] BELOW, KEVIN D; RANGAN, B VIJAYA; HALL, A STANLEY (1975): Theory for concrete beams in torsion and bending. Journal of the Structural Division 101, 8, 1645–1660.
- [65] MISIC, J; WARWARUK, J (1978): Strength of prestressed solid and hollow beams subjected simultaneously to torsion, shear, and bending. Special Publication 55, 515–546.

- [66] RABBAT, BASILE G; SOWLAT, KOZ (1987): Testing of segmental concrete girders with external tendons. *PCI Journal* 32, 2, 86–107.
- [67] KORDINA, KARL; TEUTSCH, MANFRED; WEBER, VIGGO (1984): Spannbetonbauteile in Segmentbauart unter kombinierter Beanspruchung aus Torsion, Biegung und Querkraft; Ribbildung von Segmentbauteilen in Abhängigkeit von Querschnittsausbildung und Spannstahlverbundeigenschaften; Einfluß der Ausbildung unbeweh. Ernst und Sohn.
- [68] HUANG, Z; LIU, XL (2006): Modified skew bending model for segmental bridge with unbonded tendons. *Journal of Bridge Engineering* 11, 1, 59–63.
- [69] ALGORAFI, MOHAMMAD A et al. (2010): Experimental study of externally prestressed segmental beam under torsion. *Engineering Structures* 32, 11, 3528–3538.
- [70] ALGORAFI, M. A. (2011): The effect of torsion in externally prestressed segmental box bridge girder. [Dissertation] University Putra, Malaysia.
- [71] HARTWIG, STEFFEN; MARX, STEFFEN (2017): Zum Torsionstragverhalten extern vorgespannter Kreissegmente mit trockenen Fugen. *Beton- und Stahlbetonbau* 112, 11, 740–746.
- [72] HARTWIG, STEFFEN; MIDDENDORF, JULIA (2021): Erweitertes Torsionstragmodell extern vorgespannter Kreisringsegmente mit trockenen Fugen: Interaktionsmodell zur Bestimmung der Torsionstragfähigkeit unter Querkraft und Biegung. *Beton- und Stahlbetonbau* 116, 8, 632–640.
- [73] MIDDENDORF, JULIA (2019): Schub- und Torsionstragfähigkeit von Kreissegmenten mit geschliffenen Trockenfugen. unveröffentlicht.
- [74] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V. (März 1990): DIN 1045-1: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. Beuth.
- [75] KUPFER, HELMUT (1973): Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. Heft 229. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton.
- [76] KLEIN, FABIAN; BETZ, THORSTEN; MARX, STEFFEN (2021): Experimental investigations of concrete segment tower structures for wind turbines. Tagungsband des fib Symposiums, 6.
- [77] KLEIN, FABIAN et al. (2022): Experimental study on the joint bearing behavior of segmented tower structures subjected to normal and bending shear loads. *Structural Concrete*.
- [78] ANSYS (2022): Material Reference. 2022R1. ANSYS Inc.

## **Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau**

Bergische Universität Wuppertal

- Heft 1      Andres, M.: Zum Stabilitätsnachweis von Schalentragsystemen aus Hochleistungsbeton, 2004; ISBN 978-3-940795-00-7
- Heft 2      Wörmann, R.: Zur Erfassung hygrothermischer Einflüsse auf das nicht-lineare Trag- und Schädigungsverhalten von Stahlbetonflächentragwerken, 2004; ISBN 978-3-940795-01-4
- Heft 3      Piel, W.: Zur Erhöhung der Durchstanzttragfähigkeit von Flachdecken mit Stahlverbundsystemen, 2004; ISBN 978-3-940795-02-1
- Heft 4      Mahran, E.: Finite-Infinite-Elemente-Modellierung zur Simulation der Boden-Bauwerk-Flüssigkeit-Interaktion unter dynamischer Anregung, 2004; ISBN 978-3-940795-03-8
- Heft 5      Eusani, R.: Zur numerischen Zeitbereichssimulation der Aeroelastischen Instabilität bei Seilbrücken, 2005; ISBN 978-3-940795-04-5
- Heft 6      Stracke, J.: Flachdecken aus Konstruktions - Leichtbeton, 2005; ISBN 978-3-940795-05-2
- Heft 7      Hanswille, G., Porsch, M., Üstündağ, C.: Versuchsbericht SFB 398 -Projekt C8 -Teil 1, 2007; ISBN 978-3-940795-06-9
- Heft 8      Schäfer, M.: Zum Tragverhalten von Flachdecken mit integrierten hohlkastenförmigen Stahlprofilen, 2007; ISBN 978-3-940795-07-6
- Heft 9      Üstündağ, C.: Beitrag zur Bemessung von Verbundträgern unter ermüdungswirksamen Beanspruchungen, 2007; ISBN 978-3-940795-08-3
- Heft 10     Hanswille, G., Porsch, M.: Versuchsbericht über die Durchführung von 36 Push-Out-Versuchen; ISBN 978-3-940795-09-0
- Heft 11     Hanswille, G., Porsch, M.: Metallurgische Untersuchungen an Schweißnahtverbindungen, 2008; ISBN 978-3-940795-10-6
- Heft 12     Jamali, N.: On the Numerical Simulation of Friction-Isolated Structures, 2008; ISBN 978-3-940795-11-3
- Heft 13     Lippes, M.: Zur Bemessung von Hohlprofil – Verbundstützen aus hochfesten Stählen und Betonen, 2008; ISBN 978-3-940795-12-0
- Heft 14     Mihajlov, Viktor: Numerical Model for Spatial Steel and Composite Frame-Structures Exposed to Fire and Elevated Temperatures, 2009; ISBN 978-3-940795-13-7
- Heft 15     Neuhaus, Christian: Zur Identifikation selbsterregter aeroelastischer Kräfte im Zeitbereich, 2010; ISBN 978-3-940795-14-4

- Heft 16 Stopp, Kirsten: Trag- und Verformungsverhalten großflächig gegründeter Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung der Boden-Bauwerk-Interaktion, 2010; ISBN 978-3-940795-15-1
- Heft 17 Porsch, Markus: Modellierung von Schädigungsmechanismen zur Beurteilung der Lebensdauer von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, 2010; ISBN 978-3-940795-16-8
- Heft 18 Mannsfeld, Thorsten Rolf: Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken unter Berücksichtigung der temperaturbedingten Nichtlinearitäten im Brandfall, 2011; ISBN 978-3-940795-17-5
- Heft 19 Gelien, Marion: Ein Beitrag zur Bemessung von Stahlbetonstützen im Brandfall, 2011; ISBN 978-3-940795-18-2
- Heft 20 Festschrift Gerhard Hanswille, 2011; ISBN 978-3-940795-19-9
- Heft 21 Bergmann, Marco: Zur Bemessung von Hohlprofilverbundstützen im Brandfall, 2013; ISBN 978-3-940795-20-5
- Heft 22 Peter, Carsten: Tragverhalten von Verkehrstunneln im Brandfall mit einer Innenschale aus PP-Faserbeton 2017, ISBN 978-3-940795-21-2
- Heft 23 Chanou, Mohamed: Zum Tragverhalten von Hohlprofil-Verbundstützen mit Mehrkernquerschnitten, 2018; ISBN 978-3-940795-22-9
- Heft 24 Menkenhagen, Philipp: Beitrag zum Tragverhalten des Lasteinleitungsbereichs von Hohlprofil-Verbundstützen unter Berücksichtigung der Verformungseigenschaften von Schubringen, 2019; ISBN 978-3-940795-23-6
- Heft 25 Zwolinski, Stefan: Ermittlung der Grünzugfestigkeit erdfeuchter Zementleimgemische als Grundlage für die Optimierung der Produktion von sofort entschalteten Betonwaren, 2018; ISBN 978-3-940795-24-3
- Heft 26 Dollase, André: Mikrowellenverfahren zur Untersuchung des Erhärtungs- und Trocknungsverhaltens von zementgebundenen Baustoffen, 2019; ISBN 978-3-940795-25-0
- Heft 27 Loh, Lutz: Zum Torsionstragverhalten vorgespannter Segmenttürme - Ein Nachweismodell für überdrückte und klaffende Segmentfugen mit Kreisringquerschnitt, 2023; ISBN 978-3-940795-26-7