

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Logarithmen

Meyer, Max

Leipzig, 1898

Erste Abtheilung. Logarithmenlehre

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4791](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4791)

Erste Abtheilung.

Logarithmenlehre.

Einleitung.

1. Was sind Logarithmen?

Logarithmen sind Hilfszahlen, in deren Benutzung dem praktischen Arithmetiker das Mittel geboten ist, größere numerische Rechnungen leicht vollenden zu können, welche, wenn sie auf dem gewöhnlichen Wege des Rechnens ausgeführt werden sollten, als sehr zeitraubend und beschwerlich, ja öfters als beinahe unmöglich befunden werden würden. Die Logarithmen bilden mithin bei größeren numerischen Rechnungen ein kaum entbehrliches Erleichterungsmittel, doch auch bei einfacheren Rechnungen wird sich der im logarithmischen Rechnen Geübte ihrer mit Vorliebe bedienen.

2. Inwiefern erleichtern die Logarithmen das Rechnen?

Der große Vortheil des Rechnens mit Logarithmen besteht darin, daß bei Benutzung dieser Hilfszahlen die Multiplication auf eine Addition, die Division auf eine Subtraction, die Potenzirung auf eine Multiplication und die Radicirung (Wurzelausziehen) auf eine Division zurückgeführt, also jede Rechnungsart mit Ausnahme der Addition und Subtraction durch eine einfachere ersetzt wird.

3. Wie verschafft man sich die Logarithmen?

Die für die Ausführung einer numerischen Rechnung auf logarithmischem Wege nöthigen Logarithmen werden einer Logarithmentafel entnommen.

Jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe hat ihre bestimmte, ihr allein zugehörige Hilfszahl (Logarithmus). Wie man sich nun zu einer Zahl den zugehörigen Logarithmus bestimmen kann, wird weiter unten (S. 26 und 35) gezeigt. Der Praktiker hat aber an der Berechnung der Logarithmen insofern weniger Interesse, als, abgesehen davon, daß sie außerordentlich weiltläufig ist, bereits seit den Tagen ihrer Erfindung die Logarithmen für alle Zahlen berechnet worden sind.

4. Was ist eine Logarithmentafel?

Wird für jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe der zugehörige Logarithmus berechnet und werden alsdann die Zahlen mit den zugehörigen Logarithmen in natürlicher Reihenfolge geordnet so zusammengestellt, daß sich zu jeder beliebigen Zahl sofort ihr Logarithmus und umgekehrt zu diesem jene finden läßt, so nennt man eine solche Zusammenstellung eine Logarithmentafel.

5. Wie rechnet man mit Logarithmen?

Vor allen Dingen hat man sich mit der Einrichtung und dem Gebrauche der zu benutzenden Logarithmentafel vertraut zu machen. Wie dies geschieht und wie dann das logarithmische Rechnen auszuüben ist, wird in der zweiten Abtheilung ausführlich behandelt werden. Zunächst aber soll in der folgenden „Theorie der Logarithmen“ die Begründung für deren Anwendung gegeben und zu diesem Zwecke der Begriff „Logarithmus“ als mathematischer Begriff festgestellt und erläutert werden.

Theorie der Logarithmen.

6. Worauf stützt sich der Begriff des Logarithmus?

Auf den Begriff Potenz, welcher selbst wieder einer besonderen Art der Multiplication entspringt.

7. Welche besondere Art der Multiplication führt zum Begriffe „Potenz“?

Die Multiplication lehrt bekanntlich aus Factoren (Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden) das Product (Resultat der Multiplication) finden. Die Art der Multiplication nun, welche zur Bildung des Productes lauter gleiche Factoren in Rechnung setzt, führt auf die Potenz.

8. Was ist eine Potenz?

Eine Potenz ist ein Product aus gleichen Factoren. — Man erhält also eine Potenz, wenn man eine Zahl wiederholt als Factor setzt; es sagen daher die Gleichungen

$$1) 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$\text{und } 2) 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

aus, daß 243 eine Potenz der Zahl 3, und 343 eine Potenz der Zahl 7 ist.

Die Rechnungsart des Potenzensbildens nennt man das Potenziren.

9. Wovon ist der Werth (Größe) einer Potenz abhängig?

Den Zahlen, welche beim Potenziren in Rechnung treten, hat man besondere Namen gegeben. Der Potenzwerth heißt kurz die Potenz, der wiederholt gesetzte Factor heißt die Basis (auch Dignand) oder Grundzahl (auch Wurzel), die Zahl, welche durch die Anzahl ihrer Einheiten anzeigt, wie oft der gleiche Factor gesetzt ist, heißt Anzeiger oder Exponent.

In vorstehender Gleichung 1) ist 243 die Potenz, 3 die Basis und 5 der Exponent, in Gleichung 2) ist 343 die Potenz, 7 die Basis und 3 der Exponent.

Demnach ist der Werth einer Potenz abhängig von Basis und Exponent.

10. Welcher Bezeichnung bedient man sich beim Potenziren?

Während beim Rechnen mit den vier Species beziehungsweise die Operationszeichen + (plus), - (minus), . (mal), : (dividirt durch) gebraucht werden, bedient man sich beim Potenziren einer Operationschreibweise nach dem Schema

Basiss Exponent = Potenz.

Man schreibt also die Gleichungen 1) und 2) der Frage 8 kürzer so:

$$\begin{aligned} 1) \quad 3^5 &= 243 \\ \text{und } 2) \quad 7^3 &= 343 \text{ und liest:} \end{aligned}$$

- 1) die fünfte Potenz von 3 ist 243, oder: 3 zur fünften ist 243, oder: 3 hoch 5 ist 243;
2) die dritte Potenz von 7 ist 343, oder: 7 zur dritten ist 343, oder: 7 hoch 3 ist 343.

11. Was versteht man unter dem „Grad“ der Potenz?

Unter dem Grad der Potenz versteht man die Menge ihrer gleichen Factoren; es wird also der Grad einer Potenz durch den Exponenten angezeigt. Nach der in Frage 8 gegebenen Erklärung von Potenz muß der Exponent immer eine natürliche (ganze, positive) Zahl, die Potenz mithin immer ganzen, positiven Grades sein, während die Basis keiner Beschränkung unterliegt. Die Arithmetik erweitert jedoch den Begriff Potenz derart, daß auch der Exponent eine negative oder eine gebrochene Zahl, auch Null sein kann. Es giebt folglich Potenzen ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Grades, auch Potenzen vom nullten Grade.

12. Welche Bedeutung hat eine Potenz negativen oder gebrochenen Grades oder vom Grade Null?

Eine Potenz vom Grade Null hat stets die Bedeutung der Einheit (Eins, 1). Bezeichnet a eine beliebige Zahl als Basis, so gilt demnach stets die Gleichung

$$\begin{aligned} 1) \quad a^0 &= 1, \\ \text{z. B.: } 3^0 &= 1 \text{ und } 7^0 = 1. \end{aligned}$$

Eine Potenz negativen Grades bedeutet die Einheit dividirt durch die Potenz vom ebensovielten positiven Grade. Ist wieder a eine beliebige Basis, — n ein beliebiger negativer Exponent, so gilt demnach stets die Gleichung

$$2) a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

$$3. \text{ B.: } 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} \text{ und } 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}.$$

Eine Potenz gebrochenen Grades, deren Exponent also ein Bruch ist, bedeutet die Wurzel sovielten Grades, als der Nenner des Exponenten anzeigt, gezogen aus der Potenz sovielten Grades, als der Zähler des Exponenten anzeigt.

Ist a eine beliebige Basis und $\frac{m}{n}$ ein beliebiger Bruch, so gilt demnach stets die Gleichung

$$3) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$3. \text{ B.: } 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ u. } 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27.$$

Anmerkung. Aus Vorstehendem folgt leicht:

- 1) Unter einer Potenz vom ersten Grade ist immer die Basis selbst zu verstehen ($a^1 = a$);
- 2) Jede Potenz der Zahl „Eins“ ist immer wieder Eins ($1^m = 1$).

13. Was folgt hieraus für die Abhängigkeit der Potenz vom Exponenten?

I. Nach den Regeln der Multiplication positiver und negativer Zahlen hat man zunächst die beiden Sätze: 1) eine positive Basis liefert stets eine positive Potenz; 2) eine negative Basis liefert entweder eine positive oder eine negative Potenz, jenachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist. Soll daher 3) die Potenz in jedem Falle positiv sein, so muß auch eine positive Zahl als Basis genommen werden.

II. Angenommen, in der Gleichung $g^n = a$ sei g eine positive, ganze Zahl (größer als „Eins“), dann gelten bezüglich der gestellten Frage folgende Beziehungen:

- 1) Ist $n = 0$, so ist $a = 1$;
 - 2) " $n = 1$, " " $a = g$;
 - 3) " $n > 1$, " " $a > g$;
 - 4) " $n < 1$ aber > 0 , so ist $a < g$ aber > 1 ;
 - 5) " $n < 0$ (negativ), " " $a < 1$ aber > 0
- } a stets positiv.
- d. h. ein echter Bruch

d. h. ein Wachsen des Exponenten bedingt ein gleichzeitiges Wachsen der Potenz, und umgekehrt.

III. Die Beziehungen zwischen Potenz und Exponent, wenn die Basis negativ oder gebrochen ist, können hier, als ohne Einfluß auf das Folgende, unberücksichtigt bleiben. (Vergl. Fr. 19.)

14. Was ist „Potenzlehre“?

Die Potenzlehre ist der Inbegriff der Gesetze des Potenzirens und des Rechnens mit Potenzen; sie pflegt diese Gesetze, deren Allgemeingültigkeit (gültig für Potenzen jeden Grades) sie beweist, in Form von Rechenregeln und Sätzen (Lehrsätzen) aufzustellen.

15. Welche Sätze der Potenzlehre führten auf die Erfindung der Logarithmen?

Es sind dies folgende vier Sätze:

1) Potenzen gleicher Basis werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt. — Sind a^m und a^n zwei Potenzen gleicher Basis (a), so gilt demnach stets die Gleichung:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(a zur m^{ten} mal a zur n^{ten} ist gleich a hoch: (m plus n))

$$\text{z. B.: } 3^5 \cdot 3^2 = 3^7 \text{ oder } 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{5}} = 7^{\frac{9}{10}}.$$

2) Potenzen gleicher Basis werden dividirt, wenn man ihre Exponenten (entsprechend) subtrahirt. — Sind a^m und a^n zwei Potenzen gleicher Basis, so gilt stets die Gleichung:

$$2) a^m : a^n = a^{m-n}$$

(a zur m^{ten} dividirt durch a zur n^{ten} ist gleich a hoch: (m minus n))

$$\text{z. B.: } 3^5 : 3^2 = 3^3 \text{ oder } 7^4 : 7^{13} = 7^{-9} = \frac{1}{7^9}.$$

3) Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, wenn man den Exponenten mit der Zahl multiplicirt. — Ist a^m eine beliebige Potenz und n eine beliebige Zahl, so gilt stets die Gleichung:

$$3) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

(a zur m^{ten} zur n^{ten} ist gleich a hoch: (m mal n))

$$\text{z. B.: } (5^2)^3 = 5^6 \text{ oder } (2^{-3})^7 = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}.$$

4) Eine Potenz wird durch eine Zahl radicirt, wenn man den Exponenten durch die Zahl dividirt. — Ist a^m eine beliebige Potenz, n eine beliebige Zahl, so gilt stets die Gleichung:

$$4) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

(n^{te} Wurzel aus a zur m^{ten} ist gleich a hoch: (m dividirt durch n))

$$\text{z. B.: } \sqrt[3]{7^6} = 7^2 \text{ oder } \sqrt[11]{3^{-4}} = 3^{-\frac{4}{11}} = \frac{1}{3^{\frac{4}{11}}}.$$

16. Inwiefern begründen sich die Logarithmen in vorstehenden Sätzen?

Die vorstehenden vier Sätze der Potenzlehre ergeben für das Rechnen mit Potenzen den Satz: Die mit den Exponenten auszuführenden Operationen sind in allen vier Fällen einfacher, als die für die Potenzen verlangten. (Vergl. Fr. 2.)

Dem praktischen Arithmetiker, einmal im Besitze dieses, ihm große Rechenvorthelle bietenden Satzes, muß mithin sehr erwünscht sein, es bei seinen Rechnungen womöglich immer

mit Potenzen zu thun zu haben und er wird sich deshalb die Aufgabe stellen, alle Zahlen der natürlichen Zahlenreihe als Potenzzahlen und zwar wegen der Sätze 1) und 2) in Fr. 14 als Potenzzahlen ein und derselben Basis darzustellen. Da hierbei die allen Potenzzahlen gemeinschaftliche Basis beliebig gewählt werden kann, so läuft die Lösung der Aufgabe darauf hinaus, für jede natürliche Zahl als Potenzzahl in Bezug auf die gewählte Basis den richtigen Exponenten zu bestimmen oder kurz: für jede natürliche Zahl den zugehörigen Logarithmus zu berechnen.

17. Was sind also „Logarithmen“?

Logarithmen sind Potenzexponenten, welche in Verbindung mit einer festen Basis die natürlichen Zahlen als Potenzzahlen entstehen lassen.

Aus den Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} 1) & 3^5 = 243 & \\ 2) & 7^3 = 343 & \\ 3) & 11^0 = 1 & \\ 4) & 5^1 = 5 & \\ 5) & g^n = a & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Fr. 10} \\ \\ \text{Fr. 12} \end{array}$$

folgt nach vorstehender Definition:

- | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|-----|-------------|-----|------|-----|----|-------|-----|-----|-------|-----|
| 1) | 5 | ist | Logarithmus | der | Zahl | 243 | in | Bezug | auf | die | Basis | 3, |
| 2) | 3 | " | " | " | " | 343 | " | " | " | " | " | 7, |
| 3) | 0 | " | " | " | " | 1 | " | " | " | " | " | 11, |
| 4) | 1 | " | " | " | " | 5 | " | " | " | " | " | 5, |
| 5) | n | " | " | " | " | a | " | " | " | " | " | g. |

„Logarithmus der Zahl a“ pflegt man schriftlich zu bezeichnen durch

$$\log a;$$

soll die Basis g, für welche sich der betreffende Logarithmus n versteht, mit angegeben werden, so schreibt man

$$n = {}^g\log a^*)$$

und liest: n ist der g -Logarithmus von a .

18. Wovon ist der Werth (Größe) eines Logarithmus abhängig?

Gewinnt in der Gleichung $g^n = a$ der Potenzexponent n die Bedeutung „Logarithmus“, gilt also die zweite Gleichung $n = {}^g\log a$, so geht g von dem Begriffe einer Potenzbasis über zu dem einer Logarithmenbasis und die Potenz a , als die zum Logarithmus n gehörige Zahl, heißt dann Logarithmand oder auch Numerus (Zahl). „Numerus des Logarithmus n “ bezeichnet man schriftlich durch

num. log n (numerus logarithmi n).

Aus Fr. 9 in Verbindung mit Fr. 16 folgt dann: Der Werth eines Logarithmus hängt ab von Basis und Numerus.

19. Welche Zahlen eignen sich zur Wahl als feste Logarithmenbasis?

Wenn die Gleichung $g^n = a$ erfüllt ist, so bedeutet nach Fr. 16 und 17 der Numerus a eine natürliche Zahl und n den Logarithmus dieser Zahl bezogen auf die Basis g . Der praktische Arithmetiker wird einfach aus Zweckmäßigkeitsgründen an die Basis g die Anforderung stellen: ihm für jeden positiven Werth des Numerus a eine reelle und angebbare Zahl n als zugehörigen Logarithmus zu liefern. Eine in solcher Hinsicht geführte mathematische Untersuchung des

*) Es finden sich auch die Schreibweisen

$$\log_g a \text{ und } \log_a g;$$

von R ö p p (Director des Realgymnasiums zu Eisenach) ist 1860 für die Bezeichnung eines Logarithmus ein besonderes Operationszeichen in Vorschlag gebracht worden, welches neuerdings von Dr. Dränert (Sammlung arithmetischer Aufgaben) angelegentlichst zur Annahme empfohlen wird, nämlich

$$n = \sqrt[g]{a}$$

Werthes $n = \log a$ ergibt, daß einerseits jener Anforderung nur die positiven und von 1 verschiedenen Zahlen genügen, andererseits sich hiervon als praktisch unbrauchbar die echten Brüche ausschließen. Es eignet sich mithin zur Wahl als feste Logarithmenbasis jede positive Zahl größer als Eins. (Warum nicht die Einheit? s. Fr. 12, Anm. 2.)

20. Was ist ein Logarithmensystem?

Die Gesamtheit aller in Bezug auf einerlei Basis berechneten Logarithmen nennt man ein Logarithmensystem. Da jede positive Zahl größer als Eins zur Logarithmenbasis genommen werden kann, so giebt es unzählig viele Logarithmensysteme. Solche Logarithmen, deren Basis die irrationale Zahl $e = 2,718281828459 \dots$ ist, nennt man natürliche Logarithmen, während alle Logarithmen, deren Basis irgend eine andere Zahl ist, künstliche Logarithmen genannt werden (vergl. Fr. 25 und 26).

Die zweckmäßige Zusammenstellung der Logarithmen eines Systems geschieht in einer Logarithmentafel (s. Fr. 4).

21. Was heißt „logarithmiren“ und was „antilogarithmiren“?

Unter „logarithmiren“ versteht man das Auffuchen des Logarithmus zu einem gegebenen Numerus, umgekehrt versteht man unter „antilogarithmiren“ die Bestimmung des zu einem gegebenen Logarithmus gehörigen Numerus. Beide Operationen werden ohne Weiteres mit Hilfe einer Logarithmentafel ausgeführt.

22. Wie rechnet man mit Logarithmen?

Soll eine numerische Rechnung, welche das Bilden von Producten oder Quotienten, von Potenz- oder Wurzelwerthen, die einzeln oder in Verbindung unter einander auftreten, verlangt, mit Hilfe der Logarithmen ausgeführt und vollendet werden, so sind drei Einzeloperationen auszuüben. Zuerst sind die für die Rechnung gegebenen Zahlenwerthe zu logarithmiren, hierauf ist die verlangte Rechnung in entsprechender Weise an den gefundenen Logarithmen auszuführen und schließ-

lich ist das erhaltene logarithmische Resultat zu antilogarithmiren.

Bezüglich der zweiten Operation, des Rechnens mit den Logarithmen, gelten folgende vier Regeln, welche sich unmittelbar aus den Potenzsätzen der Fr. 15 ergeben:

1) Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren.

$${}^g\log (a \cdot b) = {}^g\log a + {}^g\log b$$

B. B.: ${}^g\log 30 = {}^g\log (2 \cdot 3 \cdot 5) = {}^g\log 2 + {}^g\log 3 + {}^g\log 5.$

2) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividenden vermindert um den Logarithmus des Divisors.

$${}^g\log (a : b) = {}^g\log a - {}^g\log b$$

B. B.: ${}^g\log (1\frac{1}{2}) = {}^g\log (\frac{3}{2}) = {}^g\log 3 - {}^g\log 2.$

3) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Potenzbasis mal den Potenzexponenten.

$${}^g\log (a^m) = m \cdot {}^g\log a$$

B. B.: ${}^g\log (243) = {}^g\log (3^5) = 5 \cdot {}^g\log 3.$

4) Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus der Wurzelbasis dividirt durch den Wurzelexponenten.

$${}^g\log \sqrt[m]{a} = ({}^g\log a) : m = \frac{1}{m} \cdot {}^g\log a$$

B. B.: ${}^g\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \cdot {}^g\log 7.$

Beweis:

Zu 1): Setzt man ${}^g\log (a \cdot b) = x$, ferner ${}^g\log a = u$ und ${}^g\log b = v$, so ist

$$g^x = a \cdot b, \text{ ferner } g^u = a \text{ und } g^v = b, \text{ folglich}$$

$$g^x = a \cdot b = g^u \cdot g^v = g^{u+v}, \text{ also}$$

$x = u + v$ oder, wenn man die ursprünglichen Werthe substituirt,

$${}^g\log (a \cdot b) = {}^g\log a + {}^g\log b.$$

Zu 2): Setzt man ${}^{\text{e}}\log(a:b) = x$, ferner ${}^{\text{e}}\log a = u$ und ${}^{\text{e}}\log b = v$, so ist

$$g^x = a:b, \text{ ferner } g^u = a \text{ und } g^v = b, \text{ folglich}$$

$$g^x = a:b = g^u : g^v = g^{u-v}, \text{ also}$$

$x = u - v$ oder, wenn man die ursprünglichen Werthe substituirt,

$${}^{\text{e}}\log(a:b) = {}^{\text{e}}\log a - {}^{\text{e}}\log b.$$

Zu 3): Setzt man ${}^{\text{e}}\log(a^m) = x$ und ${}^{\text{e}}\log a = u$, so ist

$$g^x = a^m \text{ und } g^u = a, \text{ folglich}$$

$$g^x = (a)^m = (g^u)^m = g^{u \cdot m}, \text{ also}$$

$$x = u \cdot m = m \cdot u \text{ oder}$$

$${}^{\text{e}}\log(a^m) = m \cdot {}^{\text{e}}\log a.$$

Zu 4): Setzt man ${}^{\text{e}}\log(\sqrt[m]{a}) = x$ und ${}^{\text{e}}\log a = u$, so ist

$$g^x = \sqrt[m]{a} \text{ und } g^u = a, \text{ folglich}$$

$$g^x = \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{(g^u)} = g^{\frac{u}{m}}, \text{ also}$$

$$x = \frac{u}{m} \text{ oder}$$

$${}^{\text{e}}\log\left(\sqrt[m]{a}\right) = \frac{{}^{\text{e}}\log a}{m}.$$

Beispiel:

$${}^{\text{e}}\log \frac{(a-b)^3 \cdot \sqrt{c}}{d \cdot e^5 \cdot \sqrt[3]{(f+g)^2}} =$$

$${}^{\text{e}}\log [(a-b)^3 \cdot \sqrt{c}] - {}^{\text{e}}\log [d \cdot e^5 \cdot \sqrt[3]{(f+g)^2}] =$$

$${}^{\text{e}}\log(a-b)^3 + {}^{\text{e}}\log \sqrt{c} - [{}^{\text{e}}\log d + {}^{\text{e}}\log e^5 + {}^{\text{e}}\log \sqrt[3]{(f+g)^2}] =$$

$$3 \cdot {}^{\text{e}}\log(a-b) + \frac{1}{2} {}^{\text{e}}\log c - {}^{\text{e}}\log d - 5 \cdot {}^{\text{e}}\log e - \frac{2}{3} \cdot {}^{\text{e}}\log(f+g);$$

${}^{\text{e}}\log(a-b)$ und ${}^{\text{e}}\log(f+g)$ lassen sich nicht weiter zerlegen, da die Logarithmen der Summen und Differenzen keiner vereinfachenden Umformung fähig sind. Ueberhaupt kann Addition und Subtraction durch eine logarithmische

Rechnung nicht wesentlich erleichtert werden, es sei denn, daß die einzelnen durch $+$ und $-$ verbundenen Ausdrücke an und für sich durch Logarithmen leichter zu berechnen sind. Jedensfalls aber ist nie außer Acht zu lassen, daß

$${}^e\log (a + b) \text{ nicht gleich } {}^e\log a + {}^e\log b$$

$$\text{und } {}^e\log (a - b) \text{ nicht gleich } {}^e\log a - {}^e\log b \text{ ist.}$$

Aus Regel 1) und 4) folgt der für die näherungsweise Bestimmung des Logarithmus einer Zahl brauchbare Satz: Das arithmetische Mittel der Logarithmen zweier Zahlen ist gleich dem Logarithmus des geometrischen Mittels derselben:

$$\frac{{}^e\log a + {}^e\log b}{2} = {}^e\log (\sqrt{a \cdot b})$$

Anmerkung. Aus vorstehenden Rechnungsregeln folgt der für die Berechnung der Logarithmen wichtige Satz: Aus den Logarithmen der Primzahlen lassen sich die Logarithmen aller anderen Zahlen ableiten.

23. Was gilt bezüglich der Abhängigkeit des Logarithmus vom Numerus?

Da die Logarithmenbasis stets eine positive Zahl größer als Eins ist (Sr. 19), übrigens für Logarithmen im Allgemeinen alle jene Sätze Geltung behalten, welche für Potenzexponenten gültig sind, so hat man (gestützt auf Sr. 13) die Sätze:

1) Der Logarithmus zu einem negativen Numerus ist imaginär, d. h. unmöglich;

2) Ist der Numerus ein echter Bruch, so ist der Logarithmus negativ;

3) Ist der Numerus gleich Eins, so ist der Logarithmus gleich Null;

4) Ist der Numerus größer als Eins, aber kleiner als die Logarithmenbasis, so ist der Logarithmus ein echter Bruch;

5) Ist der Numerus gleich der Logarithmenbasis, so ist der Logarithmus gleich Eins;

6) Ist der Numerus größer als die Logarithmenbasis, so ist der Logarithmus größer als Eins;

7) Ueberhaupt bedingt ein Wachsen des Numerus ein gleichzeitiges Wachsen des Logarithmus, und umgekehrt;

8) Nach 2) in Verbindung mit 7) entspricht einem sehr kleinen Numerus (echten Bruch) ein sehr großer negativer Logarithmus; es erfordert die unendliche Kleinheit des Numerus eine unendliche, negative Größe des Logarithmus, daher ist in jedem Logarithmensysteme der Logarithmus von Null gleich minus Unendlich [$\log 0 = -\infty$].

24. Welcher Zusammenhang findet zwischen den Logarithmen verschiedener Systeme statt?

Die Logarithmen zweier verschiedener Systeme stehen in solcher Beziehung zu einander, daß jeder Logarithmus des einen Systems das nämliche Vielfache ist von dem entsprechenden Logarithmus des anderen Systems. Um daher die Logarithmen des einen (alten) Systems umzuwandeln in Logarithmen eines anderen (neuen) Systems, hat man sie einzeln mit einem und demselben Factor zu multipliciren und zwar ist dieser Factor gleich dem Reciproken desjenigen Logarithmus des alten Systems, dem die Basis des neuen Systems als Numerus zugehört.

Wenn das System mit der Basis g bekannt ist und der h -Logarithmus von a berechnet werden soll, so hat man mithin

$$1) {}^h\log a = {}^g\log a \cdot \frac{1}{{}^g\log h} \quad *)$$

*) Beweis: Bekannt sei ${}^g\log a = m$, gesucht werde ${}^h\log a = x$.
 Man hat zunächst $g^m = a$ und $h^x = a$,
 folglich $g^m = h^x$,
 daher auch ${}^g\log(h^x) = m$
 oder (Fr. 21, 3) $x \cdot {}^g\log h = m$ und, wenn
 man jetzt für x und m ihre eigentlichen Werthe einsetzt,
 ${}^h\log a \cdot {}^g\log h = {}^g\log a$
 folglich ${}^h\log a = {}^g\log a \cdot \frac{1}{{}^g\log h}$

Dieser Factor $\frac{1}{{}^s\log h}$, mit dem die Logarithmen des bekannten Systems zu multipliciren sind, um das neue System (mit der Basis h) zu erhalten, heißt der Modulus (des neuen Systems bezogen auf das alte).

Wird unter gleicher Voraussetzung, wie bisher, der h -Logarithmus von g berechnet, so erhält man nach Gleichung 1)

$${}^h\log g = {}^s\log g \cdot \frac{1}{{}^s\log h};$$

da aber ${}^s\log g = 1$ ist (Fr. 12, Anm. 1), entsteht jetzt die Gleichung

$$2) {}^h\log g = \frac{1}{{}^s\log h}, \text{ also auch } {}^s\log h = \frac{1}{{}^h\log g}$$

d. h. der Modulus, welcher die g -Logarithmen umwandelt in h -Logarithmen, ist reciprok dem Modulus, welcher umgekehrt die h -Logarithmen überführt in g -Logarithmen.

25. Was folgt aus Vorstehendem?

Aus Vorstehendem (Fr. 24) folgt, daß nur ein einziges Logarithmensystem als erstes zu schaffen nöthig ist (Grundsystem), um alsdann beliebig andere Logarithmensysteme ableiten zu können.

Als solches Grundsystem bietet sich dem Analytiker nur eines dar, nämlich das System mit der Basis*) $e = 2,718281828459 \dots$ (Fr. 26, IV), weshalb es das natürliche Logarithmensystem heißt; dieses kann dann mit Hilfe des entsprechenden Modulus in ein beliebiges künstliches System umgerechnet werden (vergl. Fr. 20 und 26).

*) Diese Basis wird erhalten, wenn man in der Formel $(1 + \frac{1}{\omega})^\omega$ die Zahl ω über alle Grenzen wachsen läßt.

26. Wie berechnet man ein Logarithmensystem?

I. Um ein Logarithmensystem zu berechnen, ist die Aufgabe zu lösen, in der Gleichung $g^n = a$, wo ${}^g\log a = n$ ist, für jeden Werth des Numerus a den zugehörigen Werth des Logarithmus n zu finden, wenn für die Basis g entweder ein besonderer Zahlenwerth vorgeschrieben ist oder dieselbe in ihrer allgemeinen Größe g gedacht werden soll.

II. Für zwei Werthe des Numerus a können in jedem Systeme die zugehörigen Logarithmen ohne Weiteres angegeben werden; nach Fr. 23 hat man nämlich:

$$1) {}^g\log 1 = 0$$

$$2) {}^g\log g = 1$$

d. h. der Logarithmus der Einheit ist stets gleich Null und der Logarithmus der Logarithmenbasis ist stets gleich der Einheit*).

III. Um für beliebige Werthe des Numerus a die zugehörigen Logarithmen zu berechnen, kann man sich für den Fall, daß eine besondere Basis angenommen worden ist, einer einfachen, elementaren Methode, die mit Benutzung einer kleinen Hilfstafel arbeitet, bedienen, wie dies für das künstliche System mit der Basis 10 in Fr. 35 gezeigt werden wird.

IV. Die auf analytischem Wege angestrebte Lösung der allgemein gehaltenen Aufgabe I führt zunächst auf die Berechnung der natürlichen Logarithmen. Anschließend an die Entwicklung der Exponentialgröße g^n nach dem Binomialtheorem, gelangt man auf die gut convergirende, also für wirkliche Berechnung brauchbare logarithmische Reihe

$${}^g\log a = {}^g\log(a-1) + 2M \cdot \left\{ \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{3(2a-1)^3} + \frac{1}{5(2a-1)^5} + \dots \right\}.$$

Mit Hilfe dieser Reihe läßt sich der Logarithmus einer Zahl a mit für den Gebrauch hinreichender Genauigkeit berechnen, vorausgesetzt, daß 1) der Logarithmus der nächst vorhergehenden Zahl $(a-1)$ und 2) der Factor M bekannt sind.

*) Auch sei nochmals erwähnt, daß ${}^g\log 0 = -\infty$

Bezüglich der ersten hierbei zu erfüllenden Bedingung folgt, weil von vorn herein nur $\log 1 = 0$ bekannt ist, daß die Berechnung der Logarithmen für den Numerus $a = 2$ zu beginnen hat und dann durch stetiges Aufsteigen in der natürlichen Zahlenreihe fortzusetzen ist und zwar nur für die Primzahlen, weil die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch bloße Addition aus jenen der Primzahlen erhalten werden (vergl. Fr. 22).

Was die genannte zweite Bedingung anlangt, so ergibt sich aus den im Laufe des Rechnungsganges, welcher zu der obigen Reihe führt, sich einstellenden Relationen:

$$1) M = \frac{1}{A}$$

$$\text{und } 2) g = 1 + A + \frac{A^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

daß der Factor M von der Basis g abhängig ist, daß also jede andersgewählte Logarithmenbasis auch einen andern, nur ihr zugehörigen Factor M heischt. Man nennt deshalb diesen Factor M den Modul des Logarithmensystems.

Der analytische Zusammenhang zwischen Basis und Modul gestattet, beziehentlich g durch M und M durch g zu bestimmen, doch ist es nicht ganz leicht, den Modul zu bestimmen, wenn die Basis bekannt ist, während sich umgekehrt die Basis leicht aus dem Modul bestimmen läßt. Am einfachsten und natürlichsten ist es nun, den Modul gleich der Einheit ($M = 1$) anzunehmen; dadurch wird auch für obige Relationen $A = 1$ und es entsteht, da man die zum Modul 1 gehörige Basis mit e zu bezeichnen pflegt, aus 2) die Reihe

$$3) e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = 2,718281828459..$$

(vergl. Fr. 25).

Die dieser Basis e entsprechenden Logarithmen nennt man natürliche oder hyperbolische*), auch Neper'sche**) Logarithmen.

Es ist üblich, den natürlichen Logarithmus einer Zahl a ($^e \log a$) durch $\log \text{ nat.}$ oder auch kurz durch $l a$ zu bezeichnen.

Für die Berechnung des natürlichen Logarithmensystems gestaltet sich nunmehr obige logarithmische Reihe um in

$$l a = l(a-1) + 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{3(2a-1)^3} + \frac{1}{5(2a-1)^5} + \dots \right\},$$

wonach man die natürlichen Logarithmen der ersten drei Primzahlen in folgender Weise erhält ($l 1 = 0$):

$$l 2 = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right\} = 0,69314718 \dots$$

$$l 3 = l 2 + 2 \cdot \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right\} = 1,09861229 \dots$$

$$l 5 = 2 \cdot l 2 + 2 \cdot \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \dots \right\} = 1,60943791 \dots$$

und daraus, weil $l 10 = l(5 \cdot 2) = l 5 + l 2$ ist (Fr. 22, 1),

$$l 10 = 2,30258509 \dots$$

V. Der in IV erwähnte Modulus M ist seinem Wesen nach identisch mit dem in Fr. 24 vorgeführten Modulus. Um daher, gestützt auf die natürlichen Logarithmen, die Berechnung des künstlichen Logarithmensystems mit der Basis g auszuführen, hat man die Formel anzuwenden:

$$^g \log a = M \cdot l a;$$

dabei bezeichnet M den Modulus für das System der Basis g ,

$$\text{also } M = \frac{1}{l g}.$$

*) Die natürlichen Logarithmen stellen die asymptotischen Räume der gleichseitigen Hyperbel dar.

**) Siehe Fr. 27.

Soll z. B. das Logarithmensystem mit der Basis 10, welches man Briggs'sches System nennt (Fr. 27), berechnet werden, so würden die natürlichen Logarithmen durch Multi-

$$\text{plication mit } M = \frac{1}{10} = \frac{1}{2,30258509..} = 0,43429448..$$

in Briggs'sche Logarithmen umzurechnen sein; wenn statt $^{10}\log a$ einfacher $\log a$ geschrieben wird, so hat man also:

$$\log 2 = 0,69314718 \cdot 0,43429448 = 0,30102999,$$

$$\log 3 = 1,09861229 \cdot 0,43429448 = 0,47712125,$$

$$\log 5 = 1,60943791 \cdot 0,43429448 = 0,69897000$$

u. s. f.

Anmerkung. Es sei bemerkt, daß sich behufs Herstellung ganzer Logarithmentafeln dem Analytiker durch Verbindung vorstehender Gleichungen mit arithmetischen Reihen höherer Ordnung zweckmäßigere und bequemere Wege öffnen.

27. Wer erfand die Logarithmen?

Der Erfinder der Logarithmen ist der Schweizer Justus Byrge (1552—1632), astronomischer Assistent des Landgrafen von Hessen. Das System, dessen er sich bei seinen Rechnungen bediente und welches im Princip wenig verschieden ist von dem natürlichen Logarithmensysteme, erwies sich leider wegen des ungeheuren Umfangs, den die zugehörigen Tafeln erheischt haben würden, nicht als praktisch. Der schottische Lord John Napier (Neper, Nepper), Baron von Merchiston (1550—1618), verkehrte in Angelegenheiten der Construction einer Rechenmaschine viel mit Byrge und erhielt durch diesen Kenntniß von den Logarithmen. Napier wählte ein anderes System als Byrge und veröffentlichte dasselbe in seinem Werke: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“, Edinburgh 1614; er führte damit die Logarithmen in England ein und gilt seitdem als Erfinder der Logarithmen. Obgleich auch die von Napier berechneten Logarithmen nicht identisch sind mit denen des natürlichen Systems, nennt man doch häufig die letzteren, um den Namen des Erfinders an die Erfindung zu knüpfen, Napier'sche Logarithmen. Die (künstlichen)

Logarithmen mit der Basis 10 wurden zuerst von dem Londoner Professor Henry Briggs, einem Zeitgenossen und Freunde Napier's, berechnet und in dem 1624 erschienenen Werke: „Arithmetica logarithmica“ veröffentlicht; deshalb werden diese Logarithmen Briggs'sche genannt. — Ursinus und Johannes Kepler, welcher Letztere die Logarithmen in die Trigonometrie und die trigonometrischen Tafeln einföhrte, später Blacq, Halley, Sharp und Andere beschäftigten sich mit der Vollendung der Logarithmenlehre und mit der Herstellung genauer Logarithmentafeln; namentlich ist des holländischen Mathematikers Blacq bezügliches Werk die Quelle, aus welcher alle Diejenigen schöpften, die später mehr oder weniger ausgedehnte Logarithmentafeln berechneten. Die vollständigsten derartigen Tafeln, die aber nicht veröffentlicht worden sind, ließ auf Anordnung der republikanischen Regierung in Frankreich Brong anfertigen.

28. Welche Logarithmensysteme sind die gebräuchlichen?

Unter den unzählig vielen möglichen Logarithmensystemen haben sich die beiden in den vorhergehenden Fragen öfters genannten Systeme, das Briggs'sche und das natürliche, als zweckmäßig und ausreichend erwiesen. Das natürliche System findet seine Anwendung meistens nur in der höheren Mathematik, das Briggs'sche System dagegen dient besonders den Zwecken der elementaren Mathematik und ist wegen der ihm innewohnenden Rechenvorthelle das bei den praktischen Arithmetikern allgemein und ausschließlich gebräuchliche; daher werden die Briggs'schen Logarithmen auch gemeine Logarithmen genannt.

Die Briggs'schen Logarithmen.

29. Welche Bezeichnung ist für Briggs'sche Logarithmen üblich?

Der Briggs'sche oder gemeine Logarithmus einer Zahl a kann bezeichnet werden durch $\log \text{ brig. } a$ (Log. Briggianus),

log vulg. a (log. vulgaris), log tab. a (log. tabularum)
oder durch ${}^{10}\log a$; es ist jedoch üblich, denselben einfach durch

log a

zu bezeichnen.

30. Welche Beschaffenheit hat im Allgemeinen ein Logarithmus*)?

I. Wenn der Numerus eine ganze (positive oder negative) Potenz von 10 ist — die Potenz vom nullten Grade mit eingeschlossen — so ist auch der Logarithmus eine ganze (positive oder negative) Zahl — Null eingeschlossen — und zwar stets gleich dem bezüglichen Exponenten.

Bezeichnet k eine ganze Zahl, so gelten die Gleichungen:

$$\log(10^k) = k \cdot \log 10 = k \cdot 1 = k, \dots \quad (\text{Fr. 22, 3})$$

$$\log(10^{-k}) = \log \frac{1}{10^k} = \log 1 - \log 10^k \quad \left. \begin{array}{l} \text{Fr. 12,} \\ 1) \text{ u. 2).} \end{array} \right\}$$

$$= 0 - k = -k$$

$$\text{dazu } \log(10^0) = \log 1 = 0$$

II. Ist der Numerus keine ganze Potenz von 10, so ist auch der Logarithmus keine ganze Zahl, kann aber auch nicht durch eine ganze Zahl — Null eingeschlossen — sammt einem angehängten (gemeinen) Bruch angegeben werden.

Bezeichnet $\frac{p}{q}$ einen in den kleinsten Zahlen dargestellten (echten oder unechten) Bruch, welcher der Logarithmus von a sein sollte, dann wäre:

$$10^{\frac{p}{q}} = a$$

$$\text{oder } 10^p = a^q;$$

da nun a keine ganze Potenz von 10 sein soll, so kommen in a andere Primfactoren als in 10, wenigstens diese in

*) Wenn hier und in den folgenden Fragen schlechtthin von Logarithmen die Rede ist, so sollen stets Briggs'sche Logarithmen verstanden werden.

anderer Anzahl vor und es kann daher niemals $10^p = a^q$ sein, mithin auch nie

$$10^{\frac{p}{q}} = a$$

$$\text{oder } \log a = \frac{p}{q} \text{ sein.}$$

III. Da die meisten Numeri keine ganzen Potenzen von 10 sind, so sind auch die meisten Logarithmen nicht genau, sondern nur näherungsweise, jedoch mit willkürlicher Genauigkeit, angebar — oder kurz: die meisten Logarithmen sind irrational. Die Logarithmentafeln enthalten die Näherungswerte der Logarithmen in Form von Decimalbrüchen, welche für die verschiedenen Zwecke, jenachdem es dabei auf größere oder geringere Genauigkeit ankommt, auf 10, 7, 5, 4 oder 3 Decimalstellen angegeben sind.

IV. Ein Logarithmus besteht also im Allgemeinen aus einer ganzen Zahl (oder Null) mit einem angehängten Decimalbruch.

31. Welche Theile unterscheidet man an jedem (irrationalen) Logarithmus?

An jedem irrationalen Logarithmus unterscheidet man zwei Theile: die Zahl, welche die Anzahl der (positiven oder negativen) ganzen Einheiten des Logarithmus anzeigt und Charakteristik oder Kennziffer genannt wird, und den stets positiven, echten Decimalbruch, welcher Mantisse (Zugabe) heißt.

32. Welche Rechenvortheile gewährt das Briggs'sche System und worin begründen sich dieselben?

Die Vortheile, welche die Briggs'schen Logarithmen dem Rechner gewähren, und welche darin begründet sind, daß die Basis des Briggs'schen Systems identisch ist mit der Grundzahl des dekadischen Zahlensystems, resultiren aus folgenden zwei Sätzen:

1) Für den Logarithmus jedes beliebigen Numerus läßt sich die Charakteristik ohne Weiteres angeben, wie auch

umgekehrt die Charakteristik eines Logarithmus sofort den Decimalwerth des Numerus erkennen läßt.

2) Numeri, welche mit denselben Ziffern in derselben Reihenfolge geschrieben werden, haben die nämliche Mantisse; es bestimmt also die Mantisse für sich allein die Reihenfolge der Ziffern des Numerus.

Da nämlich der Logarithmus wächst oder abnimmt, je nachdem der Numerus wächst oder abnimmt (Fr. 23), so ergibt sich — wenn man auf Grund folgender Zusammenstellung

$$\begin{array}{rcl}
 \log 10^0 = \log 1 = 0 & & \\
 \log 10^1 = \log 10 = 1 & | & \log 10^{-1} = \log 0,1 = -1 \\
 \log 10^2 = \log 100 = 2 & | & \log 10^{-2} = \log 0,01 = -2 \\
 \log 10^3 = \log 1000 = 3 & | & \log 10^{-3} = \log 0,001 = -3 \\
 \text{u. f. f.} & & \text{u. f. w.} \\
 \log 10^k = k & | & \log 10^{-k} = -k
 \end{array}$$

beachtet, daß alle ganzen Zahlen zwischen 10^0 und 10^1 einzifferig, zwischen 10^1 und 10^2 zweizifferig, zwischen 10^k und 10^{k+1} ($k+1$)-zifferig sind, ferner, daß alle echten Decimalbrüche zwischen 10^{-1} und 10^{-2} mit 0, ..., also mit einer Null, zwischen 10^{-2} und 10^{-3} mit 0,0 ..., also mit zwei Nullen, zwischen 10^{-k} und $10^{-(k+1)}$ mit k Nullen beginnen — in Bezug auf Satz 1) die Regel:

I. Der Logarithmus einer Zahl < 1 (eines echten Decimalbruches) hat eine negative Charakteristik und diese so viele Einheiten, als der Bruch Anfangsnullen; der Logarithmus einer Zahl > 1 (ganze oder gemischte Decimalzahl) hat eine positive Charakteristik und diese so viele Einheiten weniger eine, als der Numerus Ziffern vor dem Komma hat.

Anmerkung. Vorstehendes bestätigt zugleich für die Briggs'schen Logarithmen den in Frage 23 als allgemein gültig aufgestellten Satz: negative Zahlen haben keine Logarithmen; es beziehen sich alle logarithmische Rechnungen nur auf absolute Zahlenwerthe.

Bezüglich des Satzes 2) hat man Folgendes: Zahlen, welche mit denselben Ziffern in derselben Reihenfolge geschrieben werden, können nur betreffs ihres Decimalwerthes d. h. betreffs der Stellung des Decimalkommas unterschiedlich sein, wie z. B. die Zahlen 1879, 18,79, 1,879, 0,1879. Da nun ein Verrücken des Kommas um x Stellen nach rechts oder links gleichbedeutend ist mit der Multiplication der ursprünglichen Zahl durch 10^x oder 10^{-x} , diese Factoren aber beim Logarithmiren zum Logarithmus der ursprünglichen Zahl stets eine ganze (positive oder negative) Zahl hinzutreten lassen d. h. verändernd nur auf die Charakteristik des ursprünglichen Logarithmus einwirken, so müssen

II. die Mantissen der Logarithmen für solche Zahlen, die sich nur in der Stellung des Kommas unterscheiden, immer dieselben sein.

Wenn daher bekannt ist, daß

$$\begin{array}{ll} \log 1879 = 3,27393 \text{ ist, so folgt ohne} \\ \text{Weiteres:} & \log 18,79 = 1,27393, \\ & \log 1,879 = 0,27393, \\ & \log 0,1879 = 0,27393 - 1. \end{array}$$

III. Umgekehrt bestimmt die Mantisse (0,27393) für sich allein die Zifferreihe (1879), die Charakteristik aber giebt durch die Anzahl ihrer Einheiten nach obiger Regel an, wo in der Zifferreihe (1879) das Decimalkomma zu setzen ist, sie charakterisirt, bezüglich der Werthbestimmung des Numerus, die dekadische Classe.

33. Was folgt hieraus für die Anfertigung einer (Briggs'schen) Logarithmentafel?

Weil für jeden bekannten Numerus ohne Weiteres die Charakteristik des zugehörigen Logarithmus angegeben werden kann, so empfiehlt es sich schon rücksichtlich der Raumersparniß und der Uebersichtlichkeit, die Charakteristik nicht mit in die Tafeln aufzunehmen, sondern nur die Mantissen und ihre entsprechenden Zifferreihen (Numeri) zusammen-

zustellen. In der That geben die meisten Logarithmentafeln nur die Mantissen der Logarithmen an, es dem Rechner überlassend, nach der in Nr. 32 mitgetheilten Regel in jedem einzelnen Falle die richtige Charakteristik zu bestimmen.

34. Was ist über die Schreibweise besonders der negativen Logarithmen zu bemerken?

Um die Logarithmentafeln, welche nur positive Mantissen enthalten, benutzen zu können, ist es nothwendig, daß man sich einen jeden Logarithmus immer als in Charakteristik und Mantisse getrennt vorstellt, so zwar, daß die Mantisse stets als ein positiver Werth auftritt.

In folgenden zwei Fällen stellt sich die Mantisse von selbst als positiv ein:

1) Der Logarithmus einer Zahl zwischen 10^k und 10^{k+1} , wie z. B. $\log(10^k \cdot a)$, wobei $1 < a < 10$ ist, liegt zwischen k und $k + 1$, beginnt also mit $+k + 0$, . . . oder zusammengezogen mit k , . . .; denn wäre $\log a = 0, m$, so müßte sein

$$\log(10^k \cdot a) = \log 10^k + \log a = k + 0, m = k, m.$$

Wenn z. B. bekannt ist, daß $\log 7 = 0,84510$ ist, so folgt

$$\log 70 = \log(10^1 \cdot 7) = \log 10^1 + \log 7 = 1 + 0,84510 = 1,84510,$$

$$\log 700 = \log(10^2 \cdot 7) = \log 10^2 + \log 7 = 2 + 0,84510 = 2,84510$$

u. f. w.

2) Der Logarithmus eines echten Bruches zwischen 10^{-k} und $10^{-(k+1)}$, wie z. B. $\log(10^{-k} \cdot a)$, wo $1 < a < 10$ ist, liegt zwischen $-k$ und $-(k + 1)$, beginnt also mit $-k + 0$, . . . oder, indem man wie üblich die positive Mantisse zuerst schreibt, mit 0 , . . . $-k$; denn wäre $\log a = 0, m$, so müßte sein

$$\log(10^{-k} \cdot a) = \log 10^{-k} + \log a = -k + 0, m = 0, m - k.$$

$$\log 0,7 = \log(10^{-1} \cdot 7) = \log 10^{-1} + \log 7 = -1 + 0,84510 = 0,84510 - 1,$$

$$\log 0,07 = \log(10^{-2} \cdot 7) = \log 10^{-2} + \log 7 = -2 + 0,84510 = 0,84510 - 2$$

u. f. w.

Man beläßt hierbei dem Logarithmus die Differenzform, um eben keine negative Mantisse zu erhalten, wie solche beim Ausrechnen des Differenzwerthes sich einstellen würde.

3) Zu negativen Mantissen führt die Rechnung mit Logarithmen, wenn ein größerer Logarithmus von einem kleineren zu subtrahiren ist; in solchem Falle muß man durch gleichzeitiges Addiren und Subtrahiren ein und derselben ganzen Zahl die Mantisse positiv machen. Hätte man z. B. den negativen Logarithmus $- 2,51614$, so würde durch Addition und Subtraction der Zahl 3 erhalten werden

$$(+ 3 - 2,51614) = 3 \text{ oder } 0,48386 = 3;$$

der Logarithmus ist hierbei seinem Werthe nach unverändert geblieben, hat sich aber seiner Form nach so geändert, daß die Mantisse positiv geworden ist.

Anmerkung. Es ist vielfach üblich, bei Logarithmen mit negativer Charakteristik diese auf 10 zu erhöhen, wobei die zur Erhöhung notwendigen Einheiten gleichzeitig als positive Charakteristik auftreten (vergl. Fr. 37, 1)); bequem ist es, die $- 10$ zu ersetzen durch einen über die positive Charakteristik gezogenen Strich, welchen in logarithmischen Rechnungen Geübtere wohl auch weglassen. Z. B.

$$0,84510 - 1 = 9,84510 - 10 = \overline{9,84510}$$

$$0,84510 - 2 = 8,84510 - 10 = \overline{8,84510}.$$

Auch findet man anstatt 0, . . . $- k$ die Schreibweise $\overline{k}$, . . .; hierbei wird durch den über die Charakteristik gezogenen Strich nur diese als negativ gekennzeichnet. Z. B.

$$0,84510 - 1 = \overline{1,84510}$$

$$0,84510 - 2 = \overline{2,84510}.$$

35. Wie kann man den Logarithmus einer gegebenen Primzahl berechnen? (Vergl. Fr. 22, Anm.)

Die hier mitgetheilte Methode der Berechnung des Logarithmus einer Zahl ist ungeachtet des weitläufigen Verfahrens dabei unter allen elementaren Methoden eine der einfachsten, und eine kleine Hilfstafel genügt ihr, um die Logarithmen aller Zahlen zu berechnen.

Nach dem in Fr. 32 und 33 Gesagten läuft die Berechnung der Logarithmen auf die Berechnung ihrer Mantissen hinaus. Zu diesem Zwecke betrachte man die gegebene Zahl einfach als Zifferreihe und setze in dieser das Decimalkomma so, daß die entstandene Zahl z zwischen 1 und 10 liegt. Ist z. B. 1879 oder 0,01879 die gegebene Zahl, so schreibe man zunächst $z = 1,879$. Die so erhaltene Zahl z verwandele man in ein Product, dessen aufeinanderfolgende Factoren Potenzen von 10 sind und als solche eine abnehmende Reihe bilden, indem der erste Factor kleiner als z gesetzt wird und die folgenden Factoren sich mehr und mehr der Eins nähern, also man setze

$$z = 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c \cdot 10^d \dots, \text{ wobei } z > 10^a > 10^b > 10^c > 10^d \dots$$

$$\text{dann ist} \quad \log z = \log 10^a + \log 10^b + \log 10^c + \log 10^d + \dots$$

$$\text{oder einfacher 1) } \log z = a + b + c + d + \dots$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß, wenn eine Anzahl beliebiger Potenzwerthe von 10, welche der obigen Bedingung genügen, bekannt ist, sich jede Zahl z durch wiederholte Division mit jenen aufeinanderfolgenden Potenzen in ein Product von der geforderten Form verwandeln läßt; kennt man dazu die Logarithmen jener Potenzwerthe, so ist mithin die Berechnung von $\log z$ nach Gleichung 1) ausführbar.

$$\text{Wenn nämlich } \frac{z}{10^a} = \alpha,$$

$$\text{ferner } \frac{\alpha}{10^b} = \beta, \quad \frac{\beta}{10^c} = \gamma, \quad \frac{\gamma}{10^d} = \varepsilon \text{ u. f. f., so hat man}$$

$$\text{folglich} \quad 2) \quad z = \alpha \cdot 10^a$$

$$\text{ferner } \alpha = \beta \cdot 10^b, \quad \beta = \gamma \cdot 10^c, \quad \gamma = \varepsilon \cdot 10^d \text{ u. f. f.}$$

oder, wenn man diese für $\alpha, \beta, \gamma \dots$ erhaltenen Werthe nacheinander in 2) einführt:

$$z = \alpha \cdot 10^a = \beta \cdot 10^b \cdot 10^a = \gamma \cdot 10^c \cdot 10^b \cdot 10^a = \varepsilon \cdot 10^d \cdot 10^c \cdot 10^b \cdot 10^a$$

$$\text{oder} \quad 3) \quad z = 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c \cdot 10^d \cdot \varepsilon$$

Es hängt nun lediglich von den für die Berechnung der Mantissen vorgeschriebenen Grenzen der Genauigkeit ab, wieviel solcher Divisionen hinreichen, um den letzten Quotienten (hier ε) der Eins gleich setzen d. h. aus dem Producte weglassen zu können, so daß man genau hat

$$z = 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c \cdot 10^d$$

oder $\log z = a + b + c + d$

Solche Potenzwerthe 10^a , 10^b , $10^c \dots$ sammt deren Logarithmen verschafft man sich nun in folgender Weise:

Es ist

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} = 10^{0,5}, \text{ folglich } \log \sqrt{10} = 0,5$$

$$\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{4}} = 10^{0,25}, \quad \text{,,} \quad \log \sqrt{\sqrt{10}} = 0,25 = 0,5^2$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{8}} = 10^{0,125}, \quad \text{,,} \quad \log \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 0,125 = 0,5^3$$

u. s. f.

Wenn man also die Quadratwurzel aus 10 zieht, aus dem erhaltenen Werthe wieder die Quadratwurzel zieht, aus diesem neuen Wurzelwerthe abermals die Quadratwurzel zieht u. s. f. so bilden die aufeinanderfolgenden Wurzelwerthe als gebrochene Potenzen von 10 eine abnehmende Reihe, deren Glieder sich mehr und mehr der Eins nähern; wird hierbei die Genauigkeit der Rechnung bis auf 7 Decimalen gefordert, so ist, wie die Tabelle S. 31 erkennen läßt, der 26^{te} Quadratwurzelwerth der Eins selbst gleich zu setzen, d. h. die Tabelle kann mit dem 25^{ten} Wurzelwerthe abgeschlossen werden.

Betrachtet man jeden einzelnen der erhaltenen Wurzelwerthe als Numerus, so ist der zugehörige Logarithmus sehr schnell anzugeben, indem immer der entsprechende Logarithmus die Hälfte des vorhergehenden ist. Eine zweckmäßige Zusammenstellung dieser Werthe und ihrer Logarithmen führt nun zu nebenstehender Hilfstafel.

Hilfstafel

zur Berechnung einer Logarithmentafel.

Der wievielte Quadratwurzel= werth aus 10?	Numerus.	Logarithmus.
0.	10,000 0000	1,000 0000
1.	$10^a = 3,162\ 2777$	$a = 0,500\ 0000$
2.	$10^b = 1,778\ 2794$	$b = 0,250\ 0000$
3.	$10^c = 1,333\ 5214$	$c = 0,125\ 0000$
4.	$10^d = 1,154\ 7820$	$d = 0,062\ 5000$
5.	$10^e = 1,074\ 6078$	$e = 0,031\ 2500$
6.	$10^f = 1,036\ 6329$	$f = 0,015\ 6250$
7.	$10^g = 1,018\ 1517$	$g = 0,007\ 8125$
8.	$10^h = 1,009\ 0350$	$h = 0,003\ 9063$
9.	$10^i = 1,004\ 5074$	$i = 0,001\ 9531$
10.	$10^k = 1,002\ 2511$	$k = 0,000\ 9766$
11.	$10^l = 1,001\ 1249$	$l = 0,000\ 4883$
12.	$10^m = 1,000\ 5623$	$m = 0,000\ 2441$
13.	$10^n = 1,000\ 2811$	$n = 0,000\ 1221$
14.	$10^o = 1,000\ 1405$	$o = 0,000\ 0610$
15.	$10^p = 1,000\ 0703$	$p = 0,000\ 0305$
16.	$10^q = 1,000\ 0351$	$q = 0,000\ 0153$
17.	$10^r = 1,000\ 0176$	$r = 0,000\ 0076$
18.	$10^s = 1,000\ 0088$	$s = 0,000\ 0038$
19.	$10^t = 1,000\ 0044$	$t = 0,000\ 0019$
20.	$10^u = 1,000\ 0022$	$u = 0,000\ 0010$
21.	$10^v = 1,000\ 0011$	$v = 0,000\ 0005$
22.	$10^w = 1,000\ 0005$	$w = 0,000\ 0002$
23.	$10^x = 1,000\ 0003$	$x = 0,000\ 0001$
24.	$10^y = 1,000\ 0001(4)$	$y = 0,000\ 0000(6)$
25.	$10^z = 1,000\ 0000(7)$	$z = 0,000\ 0000$

Beispiel: Es sollen die Logarithmen der Zahlen 1879 und 0,01879 berechnet werden. — Man setze zunächst

$z = 1,879$ und dividire diese Zahl durch den nächst kleineren Numerus (aus der Hilfstafel), also durch $10^b = 1,7782794$, dessen Logarithmus ist $b = 0,250\ 0000$;

den erhaltenen Quotienten $1,056\ 6394$

dividire man durch den nächst kleineren

Numerus $10^f = 1,036\ 6329$, dessen

Logarithmus ist $f = 0,015\ 6250$;

den so erhalt. Quotienten $1,019\ 2995$

dividire man durch den nächst kleineren

Numerus $10^g = 1,018\ 1517$, dessen

Logarithmus ist $g = 0,007\ 8125$;

man erhält den dritten Quotienten

$1,001\ 1273$ und dividirt wiederum

durch den nächst kleineren Numerus

$10^l = 1,001\ 1249$, dessen Loga-

rithmus ist $l = 0,000\ 4883$;

der vierte Quotient $1,000\ 0024$ wird

durch den nächst kleineren Numerus

$10^u = 1,000\ 0022$ dividirt, dessen

Logarithmus ist $u = 0,000\ 0010$;

der fünfte Quotient $1,000\ 0002$ wird

durch $10^y = 1,000\ 0001$, als den

nächst kleineren Numerus, dividirt,

dessen Logarithmus ist. $y = 0,000\ 0000$;

dividirt man noch den sechsten Quo-

tientent $1,000\ 0001$ durch den nächst

klein. Numerus $10^z = 1,000\ 0001$,

so erhält man zum Quotienten

$1,000\ 0000$, womit die Rechnung

beendet ist.

Man hat jetzt

$$z = 10^b \cdot 10^f \cdot 10^g \cdot 10^l \cdot 10^u \cdot 10^y \cdot 1$$

$$\text{oder } \log z = b + f + g + l + u + y,$$

$$\text{also } \log 1,879 = 0,273\ 9268;$$

$$\text{mithin } \log 1879 = 3,273\ 9268$$

$$\text{und } \log 0,01879 = 0,273\ 9268 - 2.$$

36. Was versteht man unter dem arithmetischen Complement und was unter der dekadischen Ergänzung einer Zahl?

Unter dem arithmetischen Complement einer Zahl versteht man die durch deren Subtraction von Null erhaltene Differenz. Man bezeichnet dieses arithmetische Complement durch c. a. (complementum arithmeticum) oder auch einfach durch c. Z. B.:

$$c. 3,459 = 0,541 - 4,$$

$$c. 0,278 = 0,722 - 1,$$

$$c. \log 18,79 = c. 1,273\ 9268 = 0,726\ 0732 - 2.$$

Das arithmetische Complement erscheint mithin immer in Form einer Differenz, deren Minuend ein echter Decimalbruch ist, welcher erhalten wird, wenn man die Bruchziffern der gegebenen Zahl der Reihe nach (von links nach rechts) von 9, die letzte aber von 10 subtrahirt; der Subtrahend aber ist diejenige ganze Zahl, welche eine Einheit mehr hat, als die Ganzen der gegebenen Zahl.

Unter der dekadischen Ergänzung einer Zahl versteht man die durch deren Subtraction von 10 erhaltene Differenz. Man bezeichnet die dekadische Ergänzung durch D. E. Z. B.:

$$D. E. 4 = 6,$$

$$D. E. 7,2 = 2,8,$$

$$D. E. 0,3 = 9,7,$$

$$D. E. \log 18,79 = D. E. 1,273\ 9268 = 8,726\ 0732.$$

Man erhält demnach die dekadische Ergänzung, wenn man sämtliche Ziffern der gegebenen Zahl der Reihe nach (von links nach rechts) von 9, die letzte aber von 10 subtrahirt.

Hat der Logarithmus eine negative Charakteristik, so wird sein arithmetisches Complement wie auch seine dekadische Ergänzung erhalten, wenn man zum Complement der Mantisse die Einheiten der Charakteristik als positive Einheiten addirt. Z. B.:

$$c. \log 0,01879 = c. 0,273\ 9268 - 2 = (0,726\ 0732 - 1) + 2 = 1,726\ 0732$$

$$D. E. \log 0,01879 = D. E. 0,273\ 9268 - 2 = 9,726\ 0732 + 2 = 11,726\ 0732$$

Anmerkung. Aus Vorstehendem folgt, daß sich gegebenen Falls sowohl das arithmetische Complement als auch die dekadische Ergänzung eines Logarithmus aus der Logarithmentafel ohne Weiteres hinschreiben läßt.

37. Was ist bezüglich der Subtraction und der Division mit Logarithmen zu bemerken?

1) Bei der Subtraction von Logarithmen entsteht als Resultat häufig ein negativer Logarithmus, welcher die Verwandlung in einen Logarithmus mit positiver Mantisse nothwendig macht (Fr. 34, 3). Man vermeidet daher am besten jede Subtraction von Logarithmen, indem man von dem Satze Anwendung macht: Anstatt eine Zahl zu subtrahiren, kann man auch deren arithmetisches Complement oder deren dekadische Ergänzung addiren, wobei im letzteren Falle die 10 als negative Charakteristik in Rechnung tritt und nach Fr. 34 Num. ihre Bezeichnung findet.

Beispiel. Es soll berechnet werden:

$$\log 1,345 + \log 3147 - \log 249,3 + \log 0,725 - \log 0,84 + \log 11 - \log 82,03.$$

Man entnimmt die Logarithmen der Logarithmentafel und verfährt dann entweder so, daß man von der Summe aller positiv gegebenen Logarithmen die Summe aller negativ gegebenen Logarithmen subtrahirt, oder man addirt sämtliche Logarithmen, indem man an Stelle der negativ gegebenen Logarithmen deren Complement oder Ergänzung setzt. Die Rechnung gestaltet sich daher wie folgt:

1) auf gewöhnlichem Wege:

$$\begin{array}{r} \log 1,345 = 0,12872 \\ \log 3147 = 3,49790 \\ \log 0,725 = 0,86034 - 1 \\ \log 11 = 1,04139 \\ \hline 4,52835 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log 249,3 = 2,39672 \\ \log 0,84 = 0,92428 - 1 \\ \log 82,03 = 1,91397 \\ \hline 4,23497 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 4,52835 \\ - 4,23497 \\ \hline 0,29338 \end{array}$$

2) mit Hilfe des arithmetischen Complements:

$$\begin{array}{r} \log 1,345 = 0,12872 \\ \log 3147 = 3,49790 \\ \text{c. log } 249,3 = 0,60328 - 3 \\ \log 0,725 = 0,86034 - 1 \\ \text{c. log } 0,84 = 0,07572 \\ \log 11 = 1,04139 \\ \text{c. log } 82,03 = 0,08603 - 2 \\ \hline 0,29338 \end{array}$$

3) mit Hilfe der dekadischen Ergänzung:

$$\begin{array}{r} \log 1,345 = 0,12872 \\ \log 3147 = 3,49790 \\ \text{D. E. log } 249,3 = \overline{7},60328 \\ \log 0,725 = 0,86034 - 1 \\ \text{D. E. log } 0,84 = \overline{10},07572 \\ \log 11 = 1,04139 \\ \text{D. E. log } 82,03 = \overline{8},08603 \\ \hline 0,29338 \end{array}$$

Bei Vergleichung vorstehender Rechnungsweisen fällt der Vortheil der beiden letzten sofort ins Auge.

2) Beim Dividiren eines Logarithmus mit negativer Charakteristik muß man diese, weil der Quotient selbst wieder eine ganze Zahl als Charakteristik fordert, um so viel Einheiten erhöhen, daß die Division in ihr aufgeht; die zur Erhöhung nothwendigen Einheiten sind natürlich gleichzeitig als positive Charakteristik anzubringen. B. B.

$$\frac{\log 0,1879}{3} = \frac{0,27393 - 1}{3} = \frac{2,27393 - 3}{3} = 0,75798 - 1.$$

Diese Rechenregel kommt besonders häufig in Anwendung bei Berechnung von Wurzelwerthen.

Auch bei der Multiplication eines Logarithmus mit negativer Charakteristik muß das Resultat so umgeformt werden, daß Mantisse und Charakteristik getrennt erscheinen und letztere eine ganze Zahl ist. B. B.

$$\begin{aligned} 7,12 \cdot \log 0,317 &= 7,12 \cdot (0,50106 - 1) = 3,56755 - 7,12 \\ &= 3 + 0,56755 - 7 - 0,12 = 0,44755 - 4. \end{aligned}$$

38. Was versteht man unter Interpolationsverfahren und in welchen Fällen der logarithmischen Rechnung findet dasselbe Anwendung?

1. Entnimmt man einer nach einem bestimmten Gesetze gebildeten Zahlenreihe zwei aufeinanderfolgende Zahlen und

schaltet man zwischen diese eine Anzahl neuer Zahlen ein, die in ihrer Aufeinanderfolge sammt jenen beiden Zahlen das Bildungsgesetz der ursprünglichen Reihe nochmals zum Ausdruck bringen, so sagt man, es seien zwischen jene beiden Zahlen eine Anzahl neuer Zahlen interpolirt oder eingeschoben oder eingeschaltet worden.

Um gegebenen Falls eine solche Interpolation ausführen zu können, muß vor allen Dingen das Bildungsgesetz der Reihe bekannt sein. Die in dieser Hinsicht einfachsten Reihen sind die gewöhnlichen arithmetischen Progressionen, welche daher auch das einfachste Interpolationsverfahren bedingen.

Bei einer gewöhnlichen arithmetischen Progression haben je zwei aufeinanderfolgende Zahlen immer die nämliche Differenz; jenachdem diese constante Differenz positiv oder negativ ist, steigt oder fällt die Reihe. So ist z. B. die Reihe

$$8 \ 11 \ 14 \ 17 \ 20 \ 23 \ \dots$$

eine steigende Reihe mit der positiven Differenz 3; denn sie bildet sich in folgender Weise:

$$8 \ 8 + 3 \ 8 + 2 \cdot 3 \ 8 + 3 \cdot 3 \ 8 + 4 \cdot 3 \ 8 + 5 \cdot 3 \ \dots,$$

dagegen ist die Reihe

$$15 \ 11 \ 7 \ 3 \ -1 \ -5 \ -9 \ \dots$$

eine fallende Reihe mit negativer Differenz -4 ; denn sie bildet sich so:

$$15 \ 15 - 4 \ 15 - 2 \cdot 4 \ 15 - 3 \cdot 4 \ 15 - 4 \cdot 4 \ 15 - 5 \cdot 4 \ \dots$$

Die einzelnen Zahlen der Reihe nennt man deren Glieder. — Ist das Anfangsglied einer arithmetischen Progression a , die constante Differenz d , so stellt sie sich allgemein dar, wie folgt:

$$a \ a + d \ a + 2d \ a + 3d \ a + 4d \ \dots$$

und ist ein beliebiges Glied die Zahl z , so ist das folgende $z + d$.

Sollen zwischen die Glieder z und $z + d$ einer solchen arithmetischen Reihe z. B. 5 neue Glieder interpolirt werden

und wäre für die neu entstehende Reihe die constante Differenz δ , so hätte man

$$z \quad z \overset{1.}{+} \delta \quad z \overset{2.}{+} 2 \delta \quad z \overset{3.}{+} 3 \delta \quad z \overset{4.}{+} 4 \delta \quad z \overset{5.}{+} 5 \delta \quad z \overset{z+d}{+} 6 \delta;$$

es ist demnach $z + 6 \delta = z + d$, also $\delta = \frac{d}{6}$.

Es folgt leicht, daß, wenn n Glieder zwischen z und $z + d$ interpolirt werden, die neue Differenz $\delta = \frac{d}{n+1}$ ist.

Beispiel. Zwischen die Zahlen 1624 und 1625 der natürlichen Zahlenreihe sollen 9 Glieder interpolirt werden.

Die natürliche Zahlenreihe ist eine arithmetische Progression mit der constanten Differenz $d = 1$; man hat demnach für die Interpolation $\delta = \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10} = 0,1$ und erhält somit die Reihe

1624 1624,1 1624,2 1624,3 1624,4 1624,5 1624,6 1624,7 1624,8 1624,9 1625.

II. Bei logarithmischen Rechnungen findet das Interpolationsverfahren Anwendung 1) wenn aus den Logarithmen der Zahlen, die in den Tafeln unmittelbar angegeben sind, die Logarithmen anderer Zahlen abgeleitet werden sollen und 2) wenn umgekehrt aus den Zahlen, die zu den in der Tafel enthaltenen Logarithmen gehören, Zahlen abgeleitet werden sollen, deren gegebenen Logarithmen sich in der Tafel nicht unmittelbar finden.

Nach Fr. 23, 7 wachsen die Logarithmen, wenn die Numeri wachsen. Während nun die Numeri in den Tafeln in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine arithmetische Progression mit der constanten Differenz 1 (natürliche Zahlenreihe) bilden, zeigen die Logarithmen in ihrer stetigen Aufeinanderfolge veränderliche Differenzen, so zwar, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Logarithmen um so kleiner werden, je mehr die Zahlen wachsen. Eine diesbezügliche, eingehende Untersuchung lehrt, daß bei fünfstelligen Mantissen schon die

Logarithmen fünfstelliger Zahlen innerhalb gewisser enger Grenzen als in ihrer Aufeinanderfolge eine gewöhnliche arithmetische Progression bildend betrachtet werden dürfen; bei fünfstelligen Mantissen gilt demnach innerhalb der angedeuteten Grenzen für fünf- und mehrstellige Zahlen der Satz: Die Veränderungen der Zahlen sind den entsprechenden Veränderungen der zugehörigen Logarithmen proportional.

In diesem Satze begründet sich das Verfahren, nach welchem in der zweiten Abtheilung die Lösung der hier unter 1) und 2) angeführten Aufgaben geschieht.

Anmerkung, betreffend die Gauß'schen Logarithmen und die trigonometrischen Tafeln.

39. Was sind Additions- und Subtractions-Logarithmen?

Mit dem Namen „Additions- und Subtractions-Logarithmen“ bezeichnet man Logarithmentafeln, welche zur bequemen Berechnung des Logarithmus der Summe oder der Differenz zweier Zahlen dienen, wenn diese mittelbar durch ihre Logarithmen gegeben sind. Im Jahre 1812 veröffentlichte Gauß eine fünfstellige Tafel dieser Art, und da seitdem diese Additions- und Subtractions-Logarithmen in weiteren Kreisen bekannt geworden sind, nennt man sie jetzt Gauß'sche Logarithmen.

Sind also $\log a$ und $\log b$ bekannt, so findet sich mit Hilfe der Gauß'schen Logarithmen ohne Weiteres $\log(a + b)$ und $\log(a - b)$. Abgesehen davon, daß für Erreichung genannten Zweckes die Gauß'schen Logarithmen statt eines dreimaligen Aufschlagens, wie es bei Benutzung gewöhnlicher Logarithmentafeln nothwendig sein würde, nur ein einmaliges Aufschlagen erfordern, liegt der Nutzen derselben hauptsächlich darin, daß das Resultat mit derselben Genauigkeit gefunden wird, mit welcher $\log a$ und $\log b$ gegeben sind.

Eine Mittheilung der Gauß'schen Logarithmentafel, sowie die Anweisung zu deren Benutzung geht indeß über den Plan vorliegenden Katechismus hinaus.

40. Was sind trigonometrische Zahlen?

Trigonometrische Zahlen sind Verhältnißzahlen (also absolute Zahlen), durch welche Winkelgrößen angegeben werden.

Die Geometrie lehrt, daß ähnliche Dreiecke in der Größe ihrer gleichliegenden Winkel und in den Verhältnissen ihrer gleichliegenden Seiten übereinstimmen. Sind demnach für ein Dreieck bestimmte Seitenverhältnisse vorgeschrieben, so sind damit auch die drei Winkel des Dreiecks ihrer Größe nach bestimmt. Dieser Satz führte dazu, die Winkelgröße statt in Winkелеinheiten in Verhältnißzahlen auszudrücken d. h. das Winkelmaß Grad (Minute, Secunde) zu ersetzen durch die absolute Zahl. Dadurch wurde es möglich, Winkel und Seiten eines Dreiecks, mithin einer Figur überhaupt, durch Rechnung mit einander zu verbinden und so bildete sich die Trigonometrie, eine Wissenschaft, deren Endzweck ist, geometrische Aufgaben statt durch Construction durch Rechnung zu lösen.

Den Ausgangspunkt der trigonometrischen Betrachtungen bildet das rechtwinklige Dreieck, für dessen Winkelbestimmung die Kenntniß eines Seitenverhältnisses genügt. Im Allgemeinen finden zwischen den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sechs Seitenverhältnisse statt, deren jedes einen besondern Namen erhalten hat: Sinus (sin), Cosinus (cos), Tangente (tg), Cotangente (ctg), Secante (sec) und Cosecante (cosec); von diesen sind in der elementaren Trigonometrie nur die vier ersteren von Bedeutung.

Ist α ein spitzer Winkel (der andere spitze Winkel ist $90^\circ - \alpha$), a die ihm gegenüberliegende, b die ihm anliegende Kathete und c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha \text{ und } \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Mit einem gemeinschaftlichen Namen nennt man diese Verhältniszahlen, welche jede einzeln die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmen, goniometrische oder Winkel-Functionen oder trigonometrische Zahlen.

41. Was sind trigonometrische Tafeln?

Jeder Winkel hat ganz bestimmte, ihm allein zugehörige trigonometrische Zahlen. Es sind dieselben für alle Winkel berechnet und in Tafeln, den trigonometrischen Tafeln, so zusammengestellt worden, daß leicht zu einem gegebenen Winkel die eine oder andere zugehörige trigonometrische Zahl, wie auch umgekehrt, zu einer gegebenen Winkelfunction der zugehörige Winkel gefunden werden kann. Es lehrt die Trigonometrie überdies, daß es nur nöthig ist, die trigonometrischen Zahlen der Winkel von 0° bis 45° zu berechnen; deshalb sind alle trigonometrischen Tafeln entsprechend begrenzt. Senachdem eine trigonometrische Rechnung größere oder geringere Genauigkeit erfordert, bedient man sich einer Tafel, welche die Winkelfunctionen für entweder von $10''$ zu $10''$ oder von $10'$ zu $10'$ wachsende Winkel enthält.

Da bei trigonometrischen Rechnungen vorherrschend Multiplicationen und Divisionen auszuführen sind, so ist es zweckmäßig, in die trigonometrischen Tafeln nicht sowohl die eigentlichen trigonometrischen Zahlen (die natürlichen Functionswerthe), sondern vielmehr die Logarithmen der trigonometrischen Zahlen (die künstlichen Functionswerthe) einzustellen.
