

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

14. Die Kugel

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

parallelen Querschnitte genau so wie bei einer Pyramide von der nämlichen Höhe H und einer gleichgroßen Grundfläche.

Nach Fr. 227 IV. hat daher der Kegel denselben Inhalt C wie diese Pyramide, d. h. nach Fr. 232 IV. ist:

$$C = \frac{1}{3}FH = \frac{1}{3}\pi HR^2.$$

II. Der Kegeltumpf (Fr. 237) hat nach Fr. 232 VI. den Inhalt $A = \frac{1}{3}h(F + \sqrt{Ff} + f)$, woraus sich nach Fr. 179 II. weiter ergibt: $A = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1r_0 + r_0^2)$.

Vierzehntes Kapitel.

Die Kugel.

240. Was ist eine Kugelfläche und eine Kugel?

I. Die Kugelfläche enthält alle Punkte P des Raumes, welche in gleichem Abstände von einem Punkte M (dem Mittelpunkte) liegen. Diese unveränderliche Entfernung $MP = R$ heißt der Halbmesser der Kugel.

II. Zwei Halbmesser, deren jeder die Verlängerung des anderen bildet, geben einen Durchmesser $D = 2R$. Vgl. Fr. 48 II.

III. Daher sind alle Halbmesser und alle Durchmesser der Kugelfläche unter sich gleich.

IV. Wird ein Halbkreis FCP_2 (Fig. 218 S. 300) um seinen festliegenden Durchmesser FP_2 gedreht, bis er wieder in seine anfängliche Lage kommt, so beschreibt er wegen Fr. 47 II. eine volle Kugelfläche.

Die Kugelfläche ist demnach eine geschlossene Fläche; der Mittelpunkt M liegt innerhalb derselben.

Die Kugelfläche ist der geometrische Ort (vgl. Fr. 74 XVII.) eines Kreises von gegebenem Halbmesser und von vorgeschriebenem Mittelpunkte. Vergl. Fr. 242 VI.

V. Der von einer Kugelfläche umschlossene Körper heißt eine Kugel.

VI. Ist die Entfernung eines Punktes P vom Mittelpunkte größer, oder gleich, oder kleiner als der Halbmesser R , so liegt der Punkt P außerhalb, oder auf, oder innerhalb der Kugelfläche.

241. Wie kann eine Gerade gegen eine Kugelfläche liegen?

I. Ist die Entfernung MN_1 einer Geraden G_1 vom Mittelpunkte M größer als der Halbmesser R , so liegt G_1 ganz außerhalb der Kugelfläche (Zr. 240 VI.). Denn alle anderen Punkte von G_1 sind noch weiter von M entfernt als N_1 (Zr. 74 IX.).

II. Ist die Entfernung MN_2 einer Geraden G_2 vom Mittelpunkte M dem Halbmesser R gleich, so hat G_2 bloß einen Punkt N_2 mit der Kugelfläche gemein (Zr. 240 VI.), weil alle anderen Punkte von G_2 weiter als N_2 von M entfernt sind (Zr. 74 IX.).

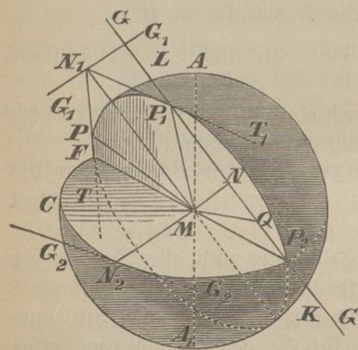


Fig. 218.

III. Eine Gerade G_2 , welche mit der Kugelfläche bloß einen Punkt gemein hat, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

IV. Jede Senkrechte auf einem Halbmesser MN_2 in dessen Endpunkte N_2 ist eine Tangente (II.).

V. Ist die Entfernung $MN = e$ einer Geraden

G , Fig. 218, vom Mittelpunkte M kleiner als der Halbmesser R , so schneidet G die Kugelfläche in zwei Punkten P_1 und P_2 ; N liegt nämlich innerhalb der Kugelfläche (Zr. 240 VI.), die beiden Punkte K und L in G aber, welche um $KN = NL = R$ von N abstehen, liegen außerhalb der Kugelfläche (Zr. 74 VIII.), und deshalb muß es in G zwei

Punkte P_1 und P_2 liegen (Zr. 74 VIII.).

VI. Die Kugelfläche ist von der Senkrechten MN in N geteilt. (Zr. 160 III.).

VII. Je größer die Entfernung MN , desto größer ist der Abstand der Punkte P_1 und P_2 voneinander.

VIII. Die Tangente KL ist die kürzeste Linie, die von K nach L auf der Kugelfläche zu ziehen.

IX. Jede Tangente KL ist senkrecht auf der Kugelfläche in N . Denn fällt KL nicht senkrecht auf MN , wegen Zr. 74 VIII., so fällt, oder nicht, so ist MN nicht senkrecht auf der Kugelfläche.

X. Jede Tangente KL ist senkrecht auf der Kugelfläche in N . und schief gegen MN schneidet die Kugelfläche in N , weil der Fußpunkt der Senkrechten MN in N liegt, da ja MN senkrecht auf der Kugelfläche in N ist.

XI. Jede Tangente KL ist senkrecht auf der Kugelfläche in N . messer des Halbmessers MN in N .

XII. In einem Halbmesser MN gibt es viele Tangenten, die in N auf der Kugelfläche stehen. (Zr. 181 XIII.).

242. Wie kann eine Gerade gegen eine Kugelfläche liegen?

I. Eine Gerade G , die vom Mittelpunkte M weiter als der Halbmesser R entfernt ist, liegt ganz außerhalb der Kugelfläche.

II. Eine Gerade G , die vom Mittelpunkte M um den Halbmesser R entfernt ist, hat bloß einen Punkt mit der Kugelfläche gemein.

III. Eine Gerade G , die vom Mittelpunkte M weiter als der Halbmesser R entfernt ist, hat zwei Punkte mit der Kugelfläche gemein.

Punkte P_1 und P_2 geben, welche in der Entfernung R von M liegen (Fr. 74 X.).

VI. Die Kugelsehne, d. h. die innerhalb der Kugel­fläche gelegene Strecke $P_1P_2 = s$ der schneidenden Geraden G wird von der Senkrechten MN halbiert (Fr. 75 V. und VI.). Nach Fr. 160 III. ist daher $R^2 = e^2 + \frac{1}{4}s^2$.

VII. Je näher die Kugelsehne am Mittelpunkt M liegt, desto größer ist sie (VI.).

VIII. Die Kugel­fläche ist krumm (Fr. 16 I. und 12 I.); denn nach I. bis V. lassen sich auf ihr gar keine Geraden ziehen.

IX. Jede Gerade G durch einen Punkt Q innerhalb der Kugel­fläche schneidet die Kugel­fläche in zwei Punkten (V.).

Denn fällt man von M eine Senkrechte MN auf G , so ist wegen Fr. 74 IX. $MN \leq MQ$, jenachdem N mit Q zusammenfällt, oder nicht; da nun nach Fr. 240 VI. schon $MQ < R$, so ist $MN < R$ (Fr. 20 IV., oder VII.), und G schneidet die Kugel­fläche.

X. Jede Gerade G durch einen Punkt P_1 der Kugel­fläche und schief gegen den nach P_1 gezogenen Halbmesser MP_1 schneidet die Kugel­fläche in zwei Punkten P_1 und P_2 (V.), weil der Fußpunkt N der von M auf G gefällten Senkrechten MN innerhalb der Kugel­fläche liegt (Fr. 240 VI.), da ja $MN < MP_1 = R$ ist (Fr. 74 IX.).

XI. Jede Tangente (III.) steht wegen X. auf dem Halbmesser des Berührungspunktes senkrecht.

XII. In jedem Punkte der Kugel­fläche giebt es unzählig viele Tangenten, dieselben liegen aber sämtlich in einer Ebene (Fr. 181 XIII.).

242. Wie kann eine Ebene gegen eine Kugel­fläche liegen?

I. Eine Ebene E_1 (Fig. 219 S. 302), deren Entfernung MN_1 vom Mittelpunkte M den Halbmesser R übertrifft, liegt ganz außerhalb der Kugel­fläche (Fr. 240 VI.), weil alle anderen Punkte der Ebene E_1 noch weiter von M abstehen, als N_1 (Fr. 190 IV.).

II. Eine Ebene E_2 , deren Entfernung MN_2 vom Mittelpunkte M dem Halbmesser R gleich, hat bloß einen Punkt N_2 mit der Kugelfläche gemein (Fr. 240 VI.), denn alle anderen Punkte von E_2 stehen weiter von M ab, als N_2 (Fr. 190 IV.).

III. Eine solche Ebene E_2 , die mit der Kugelfläche bloß einen Punkt gemein hat, heißt eine Berührungsebene.

IV. Jede Normalebene auf einem Halbmesser MN_2 in dessen Endpunkte N_2 berührt also die Kugelfläche.

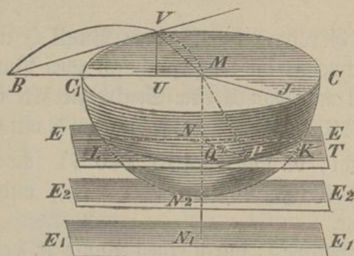


Fig. 219.

V. Ist die Entfernung $MN = e$ einer Ebene E vom Mittelpunkte M kleiner als der Halbmesser R , so liegt der mit dem Halbmesser R um den Fußpunkt N der vom Mittelpunkte M auf die Ebene gefällten Normalen MN geschlagene Kreis ganz außerhalb der Kugelfläche (Fr. 74 VIII. und 240 VI.). Alle durch N in E gezogenen Geraden schneiden die Kugelfläche zweimal (Fr. 241 V.), und letztere wird demnach von der Ebene E in einer geschlossenen Linie geschnitten. Jeder Punkt P der Schnittlinie KPL ist um $NP = r = \sqrt{R^2 - e^2}$ von dem Fußpunkte entfernt (Fr. 160 III.), d. h.

der Schnitt ist nach Fr. 47 II. ein Kreis (Kugelfreis), und sein Halbmesser r ist um so größer, je näher der Schnitt am Mittelpunkte liegt.

Fr. 242.
VI. Ein
liefert einen g
Mittelpunkt m
dessen Halbme
Fr. 240 III.
VII. Je
Kugeldurchmeß
VIII. Jede
legt sie in zwei
IX. Die
auf einen Ku
lehren (V. un
X. Die
und den Mitt
Kreise normal
XI. Die im
Kreise errichte
(IX. und Fr. 1
XII. Durch
eine Ebene legen
geleitet (V.) R
und deshalb gelte
schneidenden Kug
XIII. Wenn
halbieren, so sch
sie gelegten Kugel
Strecke MN (Fr.
XIV. Halbier
schneiden sie sich
Kugelfreis ein D
Kreise einen geme
außerhalb M läge
normal stehen (X
weil sie je den

VI. Ein durch den Mittelpunkt M gehender Schnitt liefert einen größten Kreis CJC , der Kugelfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfällt und dessen Halbmesser MJ dem der Kugelfläche gleich (vergl. Fr. 240 III. und IV.).

VII. Je zwei größte Kreise schneiden sich in einem Kugeldurchmesser (VI.) und halbieren einander.

VIII. Jeder größte Kreis halbiert die Kugelfläche, zerlegt sie in zwei sich deckende Halbkugeln (Fr. 22 V.).

IX. Die Normale MN vom Mittelpunkte M der Kugel auf einen Kugelkreis geht durch den Mittelpunkt N des letztern (V. und Fr. 188 I.).

X. Die Gerade MN durch den Mittelpunkt M der Kugel und den Mittelpunkt N eines Kugelkreises steht auf diesem Kreise normal (IX. und Fr. 21 II.).

XI. Die im Mittelpunkte N eines Kugelkreises auf diesem Kreise errichtete Normale geht durch den Kugelmittelpunkt M (IX. und Fr. 188 II.).

XII. Durch zwei sich schneidende Kugelsehnen läßt sich eine Ebene legen (Fr. 182 III.); in dem von dieser Ebene gelieferten (V.) Kugelkreise sind die beiden Kugelsehnen Sehnen, und deshalb gelten die Sätze in Fr. 161 auch von zwei sich schneidenden Kugelsehnen.

XIII. Wenn zwei Kugelsehnen sich in N gegenseitig halbieren, so schneiden sie sich im Mittelpunkte N des durch sie gelegten Kugelkreises, stehen also beide senkrecht auf der Strecke MN (Fr. 93 und 242 X.).

XIV. Halbieren sich zwei Kugelkreise gegenseitig, so schneiden sie sich in einer Kugelsehne, welche für beide Kugelkreise ein Durchmesser ist, und daher haben die beiden Kreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt N ; wenn nun N außerhalb M läge, so müßte die Strecke MN auf beiden Kreisen normal stehen (X.), d. h. es müßten die Ebenen beider Kreise, weil sie ja den Punkt N gemein haben, zusammenfallen

(Zr. 182 V.); weil sie dieß aber nach der Voraussetzung nicht sollen, so muß $MN = 0$ sein, d. h.

die beiden Kugelfreise sind größte Kreise.

XV. Jede Tangente P_1T_1 (in Fig. 218) an einen Kugelfreis im Punkte P_1 berührt auch die Kugelfläche in P_1 ; denn auf der Tangente steht wegen Zr. 83 X. der Kugelfreishalbmesser (NP in Fig. 219), daher auch der Kugelhalmesser MP_1 senkrecht (Zr. 189 I.).

XVI. In jeder die Kugelfläche schneidenden Ebene lassen sich zwei Tangenten N_1T und N_1T_1 (Fig. 218) von einem in dieser Ebene, aber außerhalb der Kugel liegenden Punkte N_1 an die Kugel ziehen (XV. und Zr. 103 II.).

XVII. Jede Ebene E durch einen Punkt Q (in Fig. 219) innerhalb der Kugelfläche schneidet die Kugelfläche (V.); denn eine von M auf E gefällte Normale MN ist $\leq MQ$ (Zr. 190 IV.), und da $MQ < R$ (Vor.), so ist $MN < R$.

XVIII. Jede Ebene E durch einen Punkt P der Kugelfläche und schief gegen den nach dem Punkte P gezogenen Halbmesser MP schneidet die Kugelfläche (V.), weil die von M auf E gefällte Normale MN kleiner ist als R (Zr. 190 IV.).

XIX. Jede Berührungsebene E_2 (Fig. 219) steht normal auf dem nach dem Berührungspunkte N_2 gezogenen Halbmesser MN_2 (XVIII.).

XX. In jedem Punkte der Kugelfläche giebt es nur eine Berührungsebene (XIX. und Zr. 182 V.).

XXI. Jede durch den Berührungspunkt N_2 (Fig. 219) gehende, in der Berührungsebene E_2 liegende Gerade berührt die Kugelfläche (XIX. und Zr. 181 X.).

XXII. Legt man durch die Verbindungsstrecke MB, Fig. 219, des Kugelmittelpunktes M und eines außerhalb der Kugelfläche gelegenen Punktes B eine Ebene E' und in dieser einen Halbkreis über der Strecke MB, so schneidet dieser die Kugelfläche in einem Punkte V, und BV ist also Tangente an den größten Kugelfreis (Zr. 103 II.) und an die Kugel (XV.).

Dreht man
Kugel fort;
Punkte B
alle Berüh-
(Zr. 103 V.
V auf MB ge-
Daher liegen
um den Fuß-
bilden aber
fläche.

XXIII.
sich eine Ku-
leitlinie glei-
der Aze der

XXIV. I
läßt sich eine
vorher durch
male auf MV

Daher lasse
Punkte B auch
Kugel legen un-
erwähnten gera-

XXV. Eine
normal zu einer
(Fig. 218) gele-

Kugelfläche in
Normalebene von
an den größten

MP, und MP nicht
sondern auch auf
G. (Zr. 189 VII
nach IV. und Zr.

welche sich durch
Tangenten N_1P_1
Die Berüh-
sind gleichweit von
Zr. 142, Gemein-

Dreht man nun die Ebene E' um MB , so rückt V auf der Kugel fort; daher lassen sich von dem außerhalb gelegenen Punkte B unzählige Tangenten an die Kugelfläche legen; alle Berührungspunkte sind von B gleichweit entfernt (Fr. 103 V.). Bei der Drehung um MB beschreibt die von V auf MB gefällte Senkrechte VU eine Ebene (Fr. 181 XIV.). Daher liegen (nach V.) alle Berührungspunkte V im Kreise um den Fußpunkt U der Senkrechten VU auf MB . Demnach bilden aber die sämtlichen Tangenten eine gerade Kegelfläche.

XXIII. Auch in eine gerade Cylinderfläche läßt sich eine Kugelfläche einschreiben, welche mit der Cylinderleitlinie gleichen Halbmesser hat, und deren Mittelpunkt in der Aye der Cylinderfläche liegt.

XXIV. Durch jede der unzähligen Tangenten in XXII. läßt sich eine Berührungsebene legen (IV.), wenn man nur vorher durch den Berührungspunkt V noch eine zweite Normale auf MV errichtet (Fr. 181 XI.).

Daher lassen sich von einem außerhalb der Kugel gelegenen Punkte B auch unzählige Berührungsebenen an die Kugel legen und dieselben berühren zugleich den in XXII. erwähnten geraden Kegel (V.).

XXV. Eine durch den Mittelpunkt M einer Kugelfläche normal zu einer außer der Kugelfläche liegenden Geraden G_1 (Fig. 218) gelegte Ebene schneidet die Gerade in N_1 , die Kugelfläche in einem größten Kreise. Zieht man in dieser Normalebene von N_1 aus die zwei Tangenten N_1P_1 und N_1P an den größten Kreis (Fr. 103 II.), so stehen die Halbmesser MP_1 und MP nicht bloß auf N_1P_1 und N_1P senkrecht (Fr. 83 X.), sondern auch auf den durch P_1 und P gelegten Parallelen zu G_1 (Fr. 189 VII. und 181 X.); daher wird die Kugelfläche (nach IV. und Fr. 181 XI.) von den beiden Ebenen berührt, welche sich durch die Gerade G_1 und je eine der beiden Tangenten N_1P_1 und N_1P legen lassen.

Die Berührungspunkte P_1 und P dieser beiden Ebenen sind gleichweit von N_1 entfernt (Fr. 103 V.).

243. Welche Sätze über Paralleltreise und Meridiane sind zu merken?

I. Sind zwei oder mehr Schnittebenen parallel, so fallen nach Fr. 206 I. die aus dem Kugelflächenmittelpunkte M (Fig. 220) auf sie gefällten Normalen in eine Gerade AA_1 (die Aze), welche die Kugelfläche in den beiden Polen A und A_1 der Paralleltreise $SXYV$ und $KPQL$ schneidet.

II. Der größte Paralleltreis $DBCD$, heißt Äquator; jeder größte Kreis AXA_1 durch die Aze heißt Meridian.

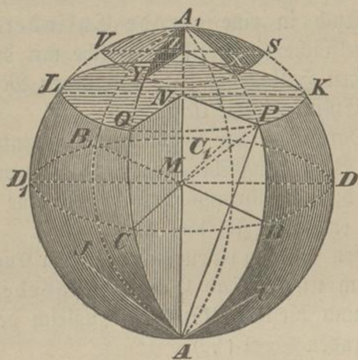


Fig. 220.

III. Jede Meridianebene steht auf den Paralleltreisen normal (Fr. 204 I.).

IV. Kugeltreise, welche die nämlichen Pole haben, liegen in parallelen Ebenen (I. und Fr. 205 III.).

V. Zieht man von einem Punkte P , Fig. 220, eines Paralleltreises Strecken PA und PA_1 nach dessen Polen A und A_1 , so stehen diese auf einander senkrecht (Fr. 96 III.).

VI. Der Halbmesser $NP = r$ eines Kugeltreises ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten AN und NA_1 , in welche der Kugeltreis die Aze AA_1 zerlegt (Fr. 161 II.).

VII. Jeder Pol ist von allen Punkten desselben Paralleltreises gleichweit entfernt (Fr. 190 VI.).

VIII. D
Paralleltreise

IX. Zwi

bögen PQ

Diesem

(ebenfalls an

tangenten A

Die näm

am Pole

Neigungswi

244. W

I. Jede

Kugelfläche

die Kugel

II. Zwi

liegt eine

III. Zwi

der durch i

deren Spitze

Ausschnitt

IV. Zwi

zerlegen die

und die Kugel

Ze zwei

fläche, je

(Fr. 242 VI)

V. Drei

und $DBCD$,

zerlegen die

Kugeldreie

Mittelpunkte

(Fr. 211).

Die sphä

jedes sphäris

VIII. Die Meridianbögen XP und YQ zwischen zwei Parallellkreisen sind gleichgroß (VII., Fr. 91 IV., 20 VIII.).

IX. Zwischen denselben Meridianen liegen Parallellkreisbögen PQ und XY von gleichem Centriwinkel (Fr. 189 IX.).

Diesem Centriwinkel gleicht der Winkel zwischen den (ebenfalls auf der Axe AA_1 senkrecht stehenden) Meridian-tangenten AU und AJ am Pol A .

Die nämliche Größe hat der von den beiden Meridianen am Pole gebildete sphärische Winkel PAQ und der Neigungswinkel (Fr. 202 V.) der beiden Meridianebenen.

244. Wie heißen die Teile der Kugel und der Kugelfläche?

I. Jeder Schnittkreis $KPQL$ (Fig. 220) zerlegt die Kugel in zwei Hauben, Kappen oder Kalotten, die Kugel in zwei Abschnitte oder Segmente.

II. Zwischen zwei Parallellkreisen $SXYV$ und $KPQL$ liegt eine Kugelflächenzone und eine Kugelschicht.

III. Zwischen einer Kappe $SXYVA$ (oder $SXYVA_1$) und der durch ihren Schnittkreis gelegten Kugelfläche $SXYVM$, deren Spitze im Kugelmittelpunkte M liegt, ist ein Kugelausschnitt oder Sektor enthalten.

IV. Zwei sich schneidende Meridiane $APXA_1$ und $AQYA_1$ zerlegen die Kugel in vier Zweiecke (z. B. $ABPA_1, QCA_1$) und die Kugel in vier Kugelkeile (z. B. $ABPA_1, ACQA_1$).

Je zwei benachbarte der ersteren bilden eine Halbkugel-
fläche, je zwei benachbarte der letzteren eine Halbkugel
(Fr. 242 VIII.); je zwei gegenüberliegende sind kongruent.

V. Drei (nicht parallele) größte Kreise $AQYA_1$, $APXA_1$ und $DBCD_1$, Fig. 220, schneiden sich in sechs Punkten und zerlegen die Kugel in acht sphärische Dreiecke oder Kugeldreiecke, entsprechend den durch ihre Ebenen am Mittelpunkte M der Kugel entstehenden acht Dreikanten (Fr. 211).

Die sphärischen Winkel A , B und C (Fr. 243 IX.) jedes sphärischen Dreiecks ABC sind den Neigungswinkeln

der Ebenen des zugehörigen Dreikants gleich; die drei Seiten AB, BC und CA des sphärischen Dreiecks sind Bögen, deren Centriwinkel den Seitenwinkeln des Dreikants gleichen. Deshalb lassen sich die Sätze in Fr. 209 bis 214 und 229 VIII. und IX. auf sphärische Dreiecke und Vielecke übertragen. Vergl. auch Fig. 222.

VI. Jede Halbkugel läßt sich als Sektor, als Segment und als Kugelkeil betrachten.

VII. Jeder größere Abschnitt, Ausschnitt, Keil, Kappe und Zweieck ist größer, jeder kleinere kleiner als die Halbkugel, beziehentlich die Halbkugelfläche.

VIII. Kappe und Zone, Segment, Schicht und Sektor entstehen bei der Erzeugung der Kugel (Fr. 240 IV.) durch die Drehung des Bogens AV und VL, des halben Kreissegments AZV, der halben Zone VZNL und des Kreissektors AMV.

245. Welche Lage haben zwei Kugelflächen gegen einander?

I. Zwei konzentrische Kugelflächen haben denselben Mittelpunkt und entweder keinen, oder (bei gleichem Halbmesser) alle Punkte gemein (Fr. 240 I.).

II. Legt man durch die Centralstrecke, d. h. die Entfernung $M_1M_2 = c$ der Mittelpunkte M_1 und M_2 zweier excentrischen Kugelflächen eine Ebene, so erhält man stets dieselbe, aus zwei größten Kreisen bestehende Schnittfigur (Fr. 242 VI.).

Daher müssen (wegen Fr. 240 IV.) für zwei excentrische Kugeln ganz ähnliche Sätze gelten, wie für zwei excentrische Kreise (vergl. Fr. 102). Nämlich:

III. Ist die Summe $R_1 + R_2$ der Kugelhalbmesser kleiner als die Centralstrecke c , so liegt jede der beiden Kugelflächen ganz außer halb der anderen.

IV. Ist die Differenz $R_1 - R_2$ der Halbmesser größer als die Centralstrecke c , so liegt die eine Kugel ganz innerhalb der anderen.

V. Gleicht die Summe $R_1 + R_2$, oder die Differenz $R_1 - R_2$ der Halbmesser der Centralstrecke c , so haben die Kugelflächen nur einen Punkt gemein, berühren sich von außen, oder innen. Der Berührungspunkt zweier Kugeln liegt in der Centralen $M_1 M_2$. Die gemeinschaftliche Berührungsebene der beiden Kugeln steht in dem Berührungspunkte auf der Centralen $M_1 M_2$ senkrecht.

VI. Die größere Kugelfläche schmiegt sich der Berührungsebene besser an als die kleinere; letztere krümmt sich demnach stärker. Vergl. Fr. 86 III.

VII. Ist die Summe der Halbmesser größer, und ihre Differenz gleichzeitig kleiner als die Centrale ($R_1 + R_2 > c > R_1 - R_2$), so schneiden sich die beiden Kugelflächen.

Die beiden Schnittkreise, welche eine durch die Centrale gelegte Ebene in beiden Kugelflächen liefert, haben eine gemeinschaftliche Sehne, welche von der Centralen senkrecht halbiert wird und bei jeder Lage der Schnittebene dieselbe Größe und denselben Schnittpunkt mit der Centralen hat; deshalb schneiden sich die beiden Kugeln in einem auf der Centralen normalen Kreise (Fr. 181 XIV.). — Vergl. auch Fr. 242 XXII.

VIII. Haben zwei excentrische Kugelflächen einen Punkt außerhalb der Centralen gemein, so schneiden sie sich in einem Kreise; haben sie einen Punkt der Centralen gemein, so haben sie weiter nichts gemein.

246. Wie ist die Kugeloberfläche zu berechnen?

I. Der Inhalt der durch die Umdrehung des Bogens $VL = b$, Fig. 221 S. 310, um die Axe MA erzeugten Kugelflächenzone nähert sich dem Inhalte des gleichzeitig von der Sehne $VL = s$ erzeugten Mantels des abgestutzten Kegels um so mehr, je mehr sich der Bogen b seiner Sehne s nähert (Fr. 179 IV.), und je mehr er sich deshalb mit der Sehne vertauschen läßt, je kleiner also der Bogen ist.

II. Zieht man den Halbmesser $MT = R$ (Fig. 221) nach der Mitte T des Bogens VL , und macht man $TS \parallel VZ \parallel LN \perp MA$ und $VJ \parallel MA \perp LN$, so sind die beiden Dreiecke MST und LJV gleichwinklig (Fr. 71 VI.) und deshalb ähnlich (Fr. 156 I.); daher ist $ST:MT = JV:LV$ (Fr. 153 I.)

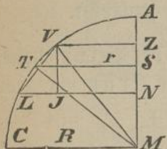


Fig. 221.

oder $r:R = h:s$, d. h. $rs = Rh$, wenn $TS = r$ und $VJ = NZ = h$ gesetzt wird.

Darf man aber den Bogen b als geradenlinig auffassen, so ergibt sich nach I. und Fr. 238 IV. als Inhalt der Zone $z = 2\pi rs = 2\pi Rh$, d. h. ist die Höhe h einer Zone z so klein, daß man den die Zone erzeugenden Bogen b mit dessen Sehne s vertauschen darf, so gleicht die Zone dem Mantel eines geraden Cylinders (Fr. 225 II.), welcher mit der Zone gleiche Höhe h und mit der Kugel gleichen Halbmesser R besitzt.

III. Teilt man den Bogen $VL = b$, welcher durch seine Umdrehung um MA die Kugelzone $VSKL$ (Fig. 220) von der Höhe $NZ = H$ erzeugte, in n Teile, deren Projektionen auf AM mit $h_1, h_2, h_3 \dots h_n$ bezeichnet werden mögen, so erhält man den Inhalt Z der Zone, als Summe von n kleineren Zonen von den Höhen $h_1, h_2, h_3 \dots h_n$, nach II. angenähert:

$$Z = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n \\ = 2\pi R (h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n) = 2\pi RH.$$

Diese Formel wird um so richtiger, je größer n oder je kleiner die Bogenteile werden; bei noch so weit getriebener Verkleinerung der Bogenteile und Vergrößerung der Anzahl derselben bleibt aber die ausgeführte Summierung $h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n = H$ immer noch möglich und liefert auch immer noch das nämliche Resultat. Daher giebt die obige Formel $Z = 2\pi RH$ nicht einen angenäherten, sondern den streng richtigen Wert für den Zoneninhalt Z .

IV. Ganz die nämliche Schlußfolgerung paßt auch auf die Kugelfläche k von der Höhe H ; daher ist auch deren Inhalt

$$k = 2\pi RH.$$

V. Jede eines geraden messer R und

VI. Daraus IV., we

die Ober

größter Krei

Da man

Kugelfläche e

geraden Cyl

VII. D

sphärischen

man (wegen

$W:O = v$

VIII. S

(S. 212),

Ebene (Fr.

einem Kreis

dieses Schni

entfernt (Fr.

(mit A, B,

Pole P_1 aus

BCP, CAP,

Jede der l

legung bewi

und einen Ed

und 211 III.)

zweiten Pol

Dreiecke A,B,P

ist jedes die

de des Urdre

243 IX. und 2

Daher hat

seinem (ihm

V. Jede Kuppe und Zone gleicht dem Mantel eines geraden Cylinders, welcher mit der Kugel gleichen Halbmesser R und mit der Kuppe, oder Zone gleiche Höhe H hat.

VI. Der Inhalt O der ganzen Kugel fläche ergibt sich aus IV., wenn man $2R$ für H setzt; $O = 4\pi R^2$, d. h.

die Oberfläche jeder Kugel ist viermal so groß als deren größter Kreis.

Da man auch $O = 2\pi R(2R)$ schreiben darf, so gleicht die Kugel fläche der Mantel fläche eines der Kugel umschriebenen geraden Cylinders, im Einklang mit V.

VII. Den Inhalt des Kugel zweiecks W mit dem sphärischen Winkel w° (Fr. 244 IV. und 243 IX.) erhält man (wegen Fr. 210 I., VIII. und X.) aus der Proportion $W : O = w^\circ : 360^\circ$, nämlich:

$$W = \pi R^2 w^\circ : 90^\circ.$$

VIII. Legt man durch die drei Eckpunkte A, B, C , Fig. 222 (S. 212), eines Kugeldreiecks ABC (Fr. 244 V.) eine Ebene (Fr. 182 I.), so schneidet dieselbe die Kugel fläche in einem Kreise K (Fr. 242 XVIII.); jeder Pol P (Fr. 243 I.) dieses Schnittkreises ist von den drei Eckpunkten gleichweit entfernt (Fr. 243 VII.); daher läßt sich ABC von dem einen (mit A, B, C in der nämlichen Kuppe $ABCP$, gelegenen) Pole P , aus in drei gleichschenkelige sphärische Dreiecke ABP , BCP , CAP , zerlegen.

Jede der drei Meridian-Ebenen, durch welche diese Zerlegung bewirkt wird, geht aber auch durch den zweiten Pol P_2 und einen Eckpunkt des Scheiteldreiecks A, B, C , (Fr. 244 V. und 211 III.), so daß zugleich auch das Scheiteldreieck vom zweiten Pol P_2 aus in drei gleichschenkelige (Fr. 42 II.) Dreiecke A, B, P_2 , B, C, P_2 , C, A, P_2 zerlegt worden ist, und zwar ist jedes dieser letzteren drei Dreiecke je einem der drei Dreiecke des Urdreiecks kongruent (Fr. 214 X.; Fr. 42 II., 243 IX. und 203 VI.).

Daher hat jedes Kugeldreieck ABC gleichen Inhalt mit seinem (ihm symmetrisch=gleichen) Scheiteldreiecke A, B, C_1 .

IX. Die Summe aus einem Kugeldreieck ABC und einem Hinterdreieck AC_1B_1 (Fr. 211 II.) desselben ist (wegen VIII.) dem Kugelzweieck $AC_1A_1B_1A = ACA_1BA$ gleich, welches jenem Winkel A entspricht, welcher in beiden Dreiecken (als Scheitelwinkel) vorkommt; denn dieses Zweieck ist die Summe aus dem Dreieck ABC und dem Scheiteldreieck A_1BC des Hinterdreiecks AC_1B_1 .

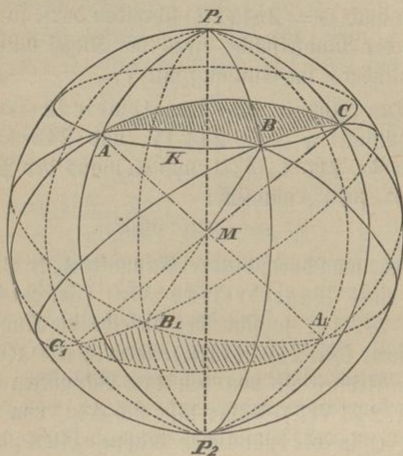


Fig. 222.

X. Abdiert man die zwei Kugelzweiecke ABA_1CA und CAC_1BC , welche zu den zwei Winkeln A und C des Kugeldreiecks ABC gehören, zu den beiden Dreiecken ABC und A_1BC_1 , welche nach IX. dem (zu dem Winkel $B = A_1BC_1$ gehörigen) Zweiecke $BAB_1CB = BA_1B_1C_1B$ gleichen, so erhält man (vergl. VIII.) als Summe das Doppelte des Dreiecks ABC mehr als die über dem größten Kreise ACA_1C_1A (nach vorn zu) stehende Halbkugeloberfläche $2\pi R^2$. Daher ergibt sich aus VII. für den Inhalt D des sphärischen oder Kugeldreiecks:

$$2D + 2\pi R^2 = \pi R^2(A + B + C) : 90^\circ,$$

oder

$$D = \pi R^2(A + B + C - 180^\circ) : 180^\circ.$$

I. Zieht
der Seite R
eine Strecke
Quadrant
in U schneiden
(Fr. 240 II.)
 $= 45^\circ =$
 62 I. , dah
und nach 8
 $\overline{ZV} = \overline{MV}$

II. Läßt
und den D
erstes ein
Quadrant
dem Grund
gleich. 3
hat den 3
Kreistränge
erzeugten H
durch MFA
Zylinder her

Daher ha
jenem Hohl
Kugelabschnitt
bezw. einen
zwischen dem
Hohlkörpers

III. Als
nach Fr. 226

Auch erle
und der Reg

247. Welche Formeln liefern den Inhalt der Kugel?

I. Zieht man in dem Quadrat $MAFC$ (Fig. 223) von der Seite R die Diagonale MF , den Quadranten AVC und eine Strecke $ZE \parallel MC$, welche den Quadranten in V und die Diagonale in U schneidet, so ist $MV = MC = ZE$ (Fr. 240 III., 108 III.); $\angle ZMU = 45^\circ = \angle ZUM$ (Fr. 110 II., 62 I.), daher $ZM = ZU$ (Fr. 73 I.) und nach Fr. 170 I.:

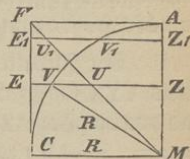


Fig. 223.

$$\overline{ZV}^2 = \overline{MV}^2 - \overline{ZM}^2 = \overline{ZE}^2 - \overline{ZU}^2.$$

II. Läßt man nun in Fig. 223 das Quadrat, das $\triangle MFA$ und den Quadranten AVC sich um MA drehen, so erzeugt ersteres einen Cylinder, das Dreieck einen Kegel und der Quadrant eine Halbkugel, deren Halbmesser R der Höhe und dem Grundflächenhalbmesser des Cylinders und des Kegels gleicht. Jeder auf MA normale Kugelschnitt (Fr. 242 V.) hat den Inhalt $\pi \cdot \overline{ZV}^2 = \pi(\overline{ZE}^2 - \overline{ZU}^2)$, gleicht also dem Kreisringe von der Breite UE in dem durch das Dreieck MFC erzeugten Hohlkörper, welcher auch entsteht, wenn man den durch MFA erzeugten Kegel aus dem durch $MCFA$ erzeugten Cylinder herausnimmt.

Daher hat nach Fr. 227 IV. nicht nur die Halbkugel mit jenem Hohlkörper, sondern auch jede Kugelschicht und jeder Kugelabschnitt, welcher durch eine halbe Kreiszone ZVV_1Z_1 , bzw. einen halben Kreisabschnitt ZVA erzeugt wird, mit der zwischen denselben Parallelebenen enthaltenen Schicht des Hohlkörpers gleichen Inhalt.

III. Als Inhalt der Halbkugel ($\frac{1}{2}K$) findet sich aus II. nach Fr. 226 I. und 239 I.:

$$\frac{1}{2}K = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Auch erkennt man leicht, daß der Cylinder, die Halbkugel und der Kegel in II. sich wie 3 : 2 : 1 verhalten.

IV. Der Inhalt der ganzen Kugel ist

$$K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\text{OR.}$$

Die Kugel läßt sich also auch als eine Pyramide von einer der Kugelgröße gleichen Grundfläche $O = 4\pi R^2$ (Fr. 246 VI.) und der Höhe R auffassen (Fr. 232 IV.).

V. Der Inhalt eines Kugelabschnittes T über dem Kreis $VYXS$ (Fig. 220 und 223) vom Halbmesser $ZV = r$ und von der Höhe $AZ = h$ ist (weil $AF = R$ und $ZU = ZM = z = R - h$) nach II., Fr. 226 I. und 239 II.:

$$\begin{aligned} T &= \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h [R^2 + R(R - h) + (R - h)^2] \\ &= \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h [3R^2 - 3Rh + h^2]; \end{aligned}$$

weil nun nach Fr. 170 II., oder 163 I. $AZ \cdot AZ = ZV^2$, d. h. $(2R - h)h = r^2$, also $2Rh = r^2 + h^2$ ist, so wird:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3}\pi(3R - h)h^2 = \frac{1}{3}\pi(2R + z)(R - z)^2 \\ &= \frac{1}{3}\pi(r^2 + Rh)h = \frac{1}{3}\pi(3r^2 + h^2)h. \end{aligned}$$

VI. Der Inhalt S einer Kugelschicht, deren zwei Kugelfreie die Halbmesser $ZV = r$ und $Z_1V_1 = r_1$ haben und in den Entfernungen $MZ = z = ZU$ und $MZ_1 = z_1 = Z_1U_1$ vom Kugelmittelpunkte auf der nämlichen Seite desselben liegen, so daß also $h = z_1 - z$ die Höhe der Schicht ist, findet sich aus II. nach Fr. 226 I. und 239 II.:

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h [z_1^2 + z_1 z + z^2] \\ &= \frac{1}{3}\pi h [6R^2 - 2z_1^2 - 2z^2 - 2z_1 z]. \end{aligned}$$

Da nun aber $-2z_1^2 - 2z^2 - 2z_1 z = -3z_1^2 - 3z^2 + (z_1^2 - 2z_1 z + z^2) = -3z_1^2 - 3z^2 + h^2$ (Fr. 169 II.) und $3(R^2 - z_1^2) = 3r_1^2$, sowie $3(R^2 - z^2) = 3r^2$ ist, so wird:

$$S = \frac{1}{3}\pi h (r_1^2 + r^2 + \frac{1}{3}h^2).$$

Auf die nämliche Formel kommt man schließlich auch, wenn man den Inhalt der Kugelschicht nach V. als Differenz des Inhaltes zweier Abschnitte berechnet.

VII. Den Inhalt J eines (von $MVAM$, Fig. 223, erzeugten) Kugelausschnittes findet man entweder als

Summe seines
zeugten) Kegels
IV. den Ausschnitt
Grundfläche
 $AZ = h$ gleich

VIII. Die
stehende, mit der
pyramide hat

$$P = \frac{1}{3}RD$$

IX. Der
(Fr. 246 VII.)

248. Wie

I. Ein reg
von lauter
in lauter
lauten anein

Alle Rand
ebenso alle

II. Wegen
regelmäßigen

mit Dre
mit Qua

mit Z
in einer Ede

Es giebt al

III. Das
seitigen Dreieck

Vergl. Fr. 228

IV. Das

V. Das
Zunächst begr

Summe seines Abschnittes (V.) und des (vom $\triangle MVZ$ erzeugten) Kegels über dessen Kugelfreis, oder man faßt nach IV. den Ausschnitt als einen Kegel von der Höhe R und einer Grundfläche auf, welche seiner Kappe k (von der Höhe $AZ = h$) gleicht. Man erhält dann (wegen Fr. 246 IV.):

$$J = \frac{1}{3}kR = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

VIII. Die über dem Kugeldreiecke $ABC = D$ (Fr. 246 X.) stehende, mit der Spitze im Mittelpunkte M liegende Kugelpyramide hat nach IV. den Inhalt:

$$P = \frac{1}{3}RD = \frac{1}{3}\pi R^3(A + B + C - 180^\circ):180^\circ.$$

IX. Der Inhalt eines Kugelkeils vom Winkel w° (Fr. 246 VII.) hat den Inhalt:

$$W = \pi R^3 w^\circ : 270^\circ.$$

248. Wie viel giebt es regelmäßige Polyeder?

I. Ein regelmäßiges Polyeder (eckiger Körper) wird von lauter kongruenten regelmäßigen Figuren begrenzt, die in lauter kongruenten, gleiche Flächenwinkel besitzenden Vielkanten aneinanderstoßen.

Alle Kanten eines regelmäßigen Polyeders sind gleich, ebenso alle seine ebenen und alle seine Flächenwinkel.

II. Wegen Fr. 229 VIII. und 113 II. können bei einem regelmäßigen Körper

mit Dreiecken nur drei, vier, oder fünf Flächen,

mit Quadraten nur drei Flächen,

mit Fünfecken nur drei Flächen

in einer Ecke zusammenstoßen.

Es giebt also nur fünf regelmäßige Polyeder.

III. Das (regelmäßige) Tetraeder wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, hat vier Ecken und sechs Kanten. Vergl. Fr. 228 IX.

IV. Das Hexaeder gleicht dem Würfel (Fr. 217 VII.).

V. Das Dodekaeder wird von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt, hat zwanzig Ecken und dreißig Kanten.

VI. Das Oktaeder wird von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je vier in einer der sechs Ecken zusammenstoßen; es hat zwölf Kanten und läßt sich in zwei gerade vierseitige Pyramiden mit quadratischer Grundfläche zerlegen.

VII. Von den zwanzig gleichseitigen Dreiecken des Ikosaeders stoßen je fünf in einer der zwölf Ecken zusammen. Seine Kantenzahl ist dreißig.

VIII. In jedem regelmäßigen eckigen Körper giebt es einen Mittelpunkt, von welchem aus sich der Körper in so viel kongruente regelmäßige Pyramiden zerlegen läßt, als er Seitenflächen hat.

IX. Vom Mittelpunkte jedes regelmäßigen Körpers aus läßt sich eine Kugelfläche durch die sämtlichen Ecken, eine zweite durch die Kantenmitten und eine dritte durch die Mittelpunkte der Seitenflächen legen.