

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

12. Die Pyramide

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

der einzelnen Schichten immer näher an einander, ohne daß die in II. ermittelte Inhaltsgleichheit verloren geht.

Könnte man die Schichtenhöhen verschwindend klein machen, so würden jene Eckpunkte zu einer (geraden, oder krummen) Linie, die gebrochenen Seitenflächen zu einer (ebenen, oder krummen) Fläche zusammenrücken, welche die Kanten A_1B_1 , A_2B_2 zc. enthält. Der Satz II. würde dann lauten:

IV. Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn je zwei, zu den Grundflächen der beiden Körper parallele und in gleicher Entfernung von diesen Grundflächen liegende Querschnitte der beiden Körper inhaltsgleich sind.

Zwölftes Kapitel.

Die Pyramide.

228. Was ist eine Pyramide?

I. Wenn ein Strahl OS (die Erzeugende), welcher in seinem Endpunkte O (Fig. 209) fest gehalten wird, sich so bewegt,

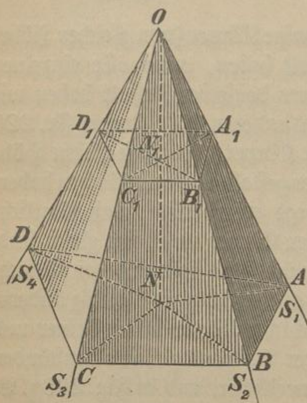


Fig. 209.

daß er stets einen Punkt mit dem Umfange (der Leitlinie) eines seine Lage nicht ändernden Vielecks $ABCD$ (der Grundfläche F) gemein hat, dessen Ebene nicht durch den festgehaltenen Punkt O (die Spitze) geht, so erzeugt OS eine Pyramidenfläche.

II. Ist die Grundfläche F ein n -eck, so besteht die Pyramidenfläche aus Teilen von n sich schneidenden Ebenen und hat n Kanten OS_1 , OS_2 zc.

III. Das
Vielant (Fr.
Spitze gegen

Zur Best.
fläche F genü
auf die Grund
trifft, und die

Die Lage
Länge einer
Kanten (Fr. 2
falls bestimm

IV. Verlä
so entsteht no
dessen Seiten
pyramiden

V. Der is
halbbegrenzte
Raum.

VI. Die n-
mantel (d. i. k
der Pyramiden
n-seitige Py

Die Norma
Pyramide. Di
OA, OB zc.
ihren $n - 1$

Ecken O, A, B
VII. Liegen
Stücke um den
gleichung (Fr. 1

VIII. Die Py
fläche eine regelm
höhenpunkte

IX. Die densel
über vier Flächen

III. Daß an der Spitze O entstehende Dreikant, oder Vieltant (Fr. 209) ist durch die Leitlinie und die Lage der Spitze gegen die Leitlinie bestimmt.

Zur Bestimmung der Lage der Spitze O gegen die Grundfläche F genügt der Punkt N, in welchem eine von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Normale ON die Grundfläche trifft, und die Länge dieser Normalen (Fr. 188 II.).

Die Lage und die (von der Grundfläche aus gerechnete) Länge einer Kante (Fr. 214), oder die Länge von drei Kanten (Fr. 79 V.) würden die Lage von O gegen F ebenfalls bestimmen.

IV. Verlängert man die Kanten über die Spitze O hinaus, so entsteht noch das (symmetrisch=gleiche) Scheitelvieltant, und dessen Seiten bilden mit den schon vorhandenen die Doppelpyramidenfläche.

V. Der innerhalb der Pyramidenfläche liegende, von ihr halbbegrenzte Raum (das Vieltant) heiße ein pyramidalen Raum.

VI. Die n-seitige Grundfläche F und der Pyramidenmantel (d. i. der zwischen F und der Spitze O liegende Teil der Pyramidenfläche) begrenzen einen Körper, welcher eine n-seitige Pyramide heißt.

Die Normale ON von O auf F heißt die Höhe der Pyramide. Die n-seitige Pyramide hat n Seitenkanten OA, OB &c., und n Grundkanten AB, BC &c.; von ihren $n + 1$ Begrenzungsflächen und von ihren $n + 1$ Ecken O, A, B &c. sind je n dreiseitig (vergl. Fr. 209 I.).

VII. Liegen die Eckpunkte A, B &c. der Grundfläche F im Kreise um den Fußpunkt N der Höhe, so sind alle Seitenkanten gleichlang (Fr. 190 VI.), und die Pyramide heißt gerade.

VIII. Die Pyramide ist regelmäßig, wenn ihre Grundfläche eine regelmäßige Figur ist, deren Mittelpunkt mit dem Höhenfußpunkte N zusammenfällt.

IX. Die dreiseitige Pyramide heißt Tetraeder. Jede ihrer vier Flächen kann als Grundfläche angesehen werden.

229. Welche Eigenschaften hat die Pyramide?

I. Jede durch die Spitze O (Fig. 209) und einen Punkt der Leitlinie gelegte Gerade G liegt ganz in der Pyramidenfläche (Zr. 228 I.).

II. Jede durch den Punkt N_1 der Höhe $ON = H$ gelegte, zur Grundfläche $F = ABCD$ parallele Ebene E schneidet alle Ebenen der Pyramidenfläche (Zr. 208 III.), liefert also eine geschlossene Schnittfigur $A_1B_1C_1D_1$.

Zerlegt man von dem Höhenfußpunkte N und von dem Schnittpunkte N_1 aus die Grundfläche und den Schnitt in Dreiecke, so sind auch deren Seiten paarweise parallel (Zr. 205 II.), die Dreiecke, z. B. $A_1N_1B_1$ und ANB , sind also gleichwinkelig (Zr. 189 IX.) und ähnlich (Zr. 156 I.); daher ist denn (nach Zr. 150 I.) auch der Parallelschnitt der Grundfläche ähnlich.

III. Ebenso ist wegen Zr. 155 II. $\triangle A_1ON_1 \sim \triangle AON$, $\triangle B_1ON_1 \sim \triangle BON$ u., und demnach verhält sich

$$\begin{aligned} ON_1 : ON &= OA_1 : OA = OB_1 : OB = \dots \\ &= A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC = \dots \end{aligned}$$

IV. Der Inhalt f des Parallelschnittes findet sich aus $f : F = A_1B_1^2 : AB^2$ (Zr. 175 II.), wofür man nach III. auch $f : F = z^2 : H^2$ setzen kann, wenn $ON_1 = z$.

V. Ähnliche Sätze, wie II. bis IV., gelten auch von je zwei anderen parallelen Ebenen, welche alle Kanten der Pyramide schneiden.

VI. Will man auch die Pyramide durch stetige Parallelbewegung eines Vielecks F entstehen lassen, so müssen dessen Seiten stets parallel zu sich selbst bleiben und die Ecken sich auf den Kanten geradlinig fortbewegen, damit die Größe von F sich nach dem in IV. gefundenen Gesetze stetig ändere.

VII. Die Summe der ebenen Winkel der n dreieckigen Seitenflächen der n-seitigen Pyramide beträgt $2nR$ (Zr. 68 II.). Da nun die zwei Winkel, welche irgend eine Kante mit den

zwei zugehörigen
sind, als die
(Zr. 213 XL)
bei O kleinen
der n Winkel
ist aber letzte
erstere Summe

VIII. Bei
lauter hohle
zwischen O

IX. Die
liegt zwischen
VIII. mitte
findet.

230. I.

I. Sch
(Fig. 209)

durch eine
ein Pyram
abgestum
3n Kanten
sind zwei
ähnliche n
Trapeze un

II. Ist
Abstand zw
geschnitten
der ursprüng
und Zr. 19

(h

$z/\sqrt{F} =$

$z =$

$\sqrt{F}$

zwei zugehörigen Grundkanten einschließt, zusammen größer sind, als der von diesen Grundkanten gebildete Winkel (Fr. 213 XI.), so muß die Summe S der n ebenen Winkel bei O kleiner sein als der Rest zwischen $2nR$ und der Summe der n Winkel der Grundfläche (Fr. 20 IX.); nach Fr. 72 III. ist aber letztere Summe $= (2n - 4)R$, und deshalb ist die erstere Summe $S < 4R$.

VIII. Bei einem Vielkant (einer mehrseitigen Ecke) mit lauter hohlen Flächenwinkeln liegt die Summe S der Seiten zwischen 0 und 360° (VII.). Vgl. Fr. 213 XII.

IX. Die Summe der Winkel eines n -seitigen Vielkants liegt zwischen $n \cdot 180^\circ$ und $(n - 2) 180^\circ$, was man aus VIII. mittels des Polar-Vielkants ebenso wie in Fr. 213 XIII. findet.

230. Was versteht man unter einem Pyramidenstumpf?

I. Schneidet man von einer n -seitigen Pyramide $OABCD$ (Fig. 209) das nach der Spitze O hin gelegene Stück OA, B, C, D durch eine zur Grundfläche F parallele Ebene weg, so bleibt ein Pyramidenstumpf (abgestutzte, abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide) übrig, mit $2n$ dreiseitigen Ecken, $3n$ Kanten und $n + 2$ Begrenzungsflächen; von den letzteren sind zwei (die Abstuzungsfläche f und die Grundfläche F) ähnliche n -Ecke (Fr. 229 II.), die n anderen sind lauter Trapeze und bilden den Mantel.

II. Ist $N, N = h$ die Höhe des Stumpfes, d. h. der Abstand zwischen f und F , ist $ON_1 = z$ die Höhe des weggeschnittenen Teils, also $ON = H = h + z$ die Höhe der ursprünglichen Pyramide, so findet sich aus Fr. 229 IV. und Fr. 19 VI. zunächst

$$(h + z) : z = \sqrt{F} : \sqrt{f} \quad \text{und hieraus} \\ z \sqrt{F} = (h + z) \sqrt{f}, \quad z (\sqrt{F} - \sqrt{f}) = h \sqrt{f}, \\ z = \frac{h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} \quad \text{und} \quad h + z = \frac{h \sqrt{F}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}.$$

III. Das abgeschnittene Stück ist der ganzen Pyramide ähnlich; die ähnlichen Begrenzungsflächen beider folgen in gleicher Weise auf einander, schließen gleiche Flächenwinkel ein und bilden kongruente Ecken.

231. Wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

I. Die Oberfläche der Pyramide und des Pyramidenstumpfs ist nach Zr. 177 und 178 zu berechnen.

II. Hat eine regelmäßige n -seitige Pyramide bei der Leitlinie $L = ns$ die Höhe H und der ihrer Grundfläche eingeschriebene Kreis den Halbmesser r , so ist die Höhe jeder Seitenfläche $k = \sqrt{H^2 + r^2}$ (Zr. 189 II.). Die Grundfläche hat nach Zr. 178 II. den Inhalt $F = \frac{1}{2}Lr$. Daher mißt die Oberfläche

$$O = \frac{1}{2}Lr + \frac{1}{2}Lk = \frac{1}{2}L(r + k).$$

III. Ähnlich ist's, wenn die Fußpunkte aller Dreieckshöhen im Kreise um den Fußpunkt N der Höhe ON der Pyramide liegen (Zr. 190 VI.).

IV. Beim regelmäßigen n -seitigen Pyramidenstumpf haben alle Trapeze gleiche Höhe k (Zr. 189 II.), daher ist die Oberfläche

$$O = F + f + \frac{1}{2}(U + u)k,$$

wenn F und f (Zr. 230) die Umfänge U und u haben.

232. Welchen Inhalt haben Pyramiden, Pyramidenstumpfe und in solche zu zerlegende edige Körper?

I. Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche F_1 und F_2 und gleicher Höhe H sind inhaltsgleich (Zr. 227 IV.). Dem legt man bei beiden in der Entfernung z von der Spitze einen Parallelschnitt f_1 und f_2 zu der Grundfläche F_1 und F_2 , so ist nach Zr. 229 IV. $f_1 : F_1 = z^2 : H^2 = f_2 : F_2$, d. h. $f_1 : F_1 = f_2 : F_2$ oder $f_1 = f_2$, weil ja $F_1 = F_2$ vorausgesetzt wurde.

II. Das dreiseitige Prisma $ABCKNQ$ (Fig. 210) läßt sich durch die Ebenen AKN und ACN in drei inhaltsgleiche

Pyramiden
(Zr. 217 I.),
die beiden Pyra-
miden haben
gemeinsam die
ihre Grundfläche
nach Zr. 108
Ebene $ACKQ$
 $AQN = ACN$
endlich:

$NABC =$

III. Jede
also der dritte
derselben Höhe

Daselbe
weil sich diese
gemeinsam die

IV. Die
aus der Flächen-
höhe (III. und

V. Zwei Py-
ramiden von
Grundfläche und

VI. Bei der
der Grundfläche
als weggeschmit-

voraus nach Zr.

$A = \frac{1}{3}hV$

VII. Edige
VII. und Zr. 221
haben in drei
nach IV.

Pyramiden zerlegen. Weil nämlich $\triangle ABC \neq \triangle QNK$ (Fr. 217 I.), so ist (I.; Fr. 220 II.) $NABC = AQKN$; die beiden Pyramiden $AQKN$ und $ACKN$ ferner haben gleiche Höhe, weil sie eine gemeinschaftliche Spitze N besitzen und ihre Grundflächen AQK und KCA (welche nach Fr. 108 I. kongruent sind) in einer Ebene $ACKQ$ liegen; daher ist auch $AQKN = ACKN$ (I.) und nach Fr. 20 V. endlich:

$$NABC = AQKN = ACKN.$$

III. Jede dreiseitige Pyramide ist also der dritte Teil eines Prismas von derselben Höhe H und derselben Grundfläche F .

Dasselbe gilt aber auch von jeder n -seitigen Pyramide, weil sich diese in lauter dreiseitige Pyramiden mit einer gemeinschaftlichen Spitze zerlegen läßt.

IV. Die Raumzahl einer Pyramide ist $\frac{1}{3}$ von dem Produkt aus der Flächenzahl der Grundfläche und der Längenzahl der Höhe (III. und Fr. 221 VIII.).

V. Zwei Pyramiden verhalten sich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe (IV.);

$$Y_1 : Y_2 = F_1 H_1 : F_2 H_2.$$

VI. Bei der abgestutzten Pyramide A von der Höhe h , der Grundfläche F und der Abstuzungsfläche f sei z die Höhe des weggeschnittenen Teils (Fr. 230 I.). Dann ist nach IV.

$$A = \frac{1}{3} F(h + z) - \frac{1}{3} fz,$$

woraus nach Fr. 230 II. weiter folgt:

$$A = \frac{1}{3} h \frac{F\sqrt{F} - f\sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \frac{1}{3} h(F + \sqrt{Ff} + f).$$

VII. Eßige Körper, deren Berechnung nicht schon in VI. und Fr. 221 gelehrt wurde, zerlegt man durch Diagonalebenen in drei- oder mehrseitige Pyramiden und berechnet sie dann nach IV.

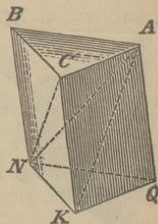


Fig. 210.

VIII. Wird ein gerades dreiseitiges Prisma $ABCNKD$ (Fig. 211) von der Grundfläche $ABC = F$ und der Höhe a durch eine Ebene so abgeschnitten, daß seine Seiten $AD = a$, $CU = c$ und $BV = b$ sind, so fällt der Fußpunkt Q der Höhe $DQ = h$ der vierseitigen Pyramide $DNKVU$ in die Kante NK (Fr. 204 I. und VI.). Nach Fr. 177 IX. ist die Grundfläche $UNKV =$

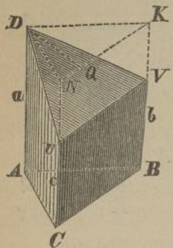


Fig. 211.

$\frac{1}{2}(NU + KV) NK = \frac{1}{2}[(a - c) + (a - b)] NK = \frac{1}{2}(2a - b - c) NK$; denn NK soll ja auf CN und KB senkrecht sein (Vor. und Fr. 181 X.).

Daher hat die Pyramide $DNKVU$ den Inhalt: $Y = \frac{1}{3}(UNKV)h$
 $= \frac{1}{3}(2a - b - c) \frac{1}{2} NK \cdot h$
 $= \frac{1}{3}(2a - b - c) \triangle DNK$
 $= \frac{1}{3} F (2a - b - c).$

Daraus ergibt sich aber wegen Fr. 221 VIII. der Inhalt des schief, aber eben abgeschnittenen Prismas $ABCUVD$ zu:

$$J = Fa - \frac{1}{3} F (2a - b - c)$$

$$= \frac{1}{3} F (a + b + c).$$

Dieselbe Formel ergibt sich, wenn auch noch auf der anderen Seite des Prismas ein Stück durch eine Ebene abgeschnitten wird. (Vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. Fr. 155.)

IX. Zwei ähnliche Pyramiden (vergl. Fr. 230 III.) und deshalb auch zwei ähnliche eckige Körper (welche sich in ähnliche Pyramiden zerlegen lassen; vergl. Fr. 150 II.) verhalten sich wie die dritten Potenzen ähnlichliegender Seiten oder Strecken (V.); denn bei den ähnlichen Pyramiden ist $F_1 : F_2 = H_1^2 : H_2^2$ (Fr. 229 IV.).

Auch zwei ähnliche Körper, welche ganz oder zumteil von krummen Flächen begrenzt werden, verhalten sich wie die dritten Potenzen ähnlichliegender Strecken.