Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

10. Das Prisma

urn:nbn:de:hbz:468-1-4776

Zehntes Kapitel.

Das Prisma.

215. Wie entsteht eine Prismenfläche?

I. Bewegt sich an dem als **Leitlinie** (Directrix) dienenden Umfang ABCDK (Fig. 199) eines festliegenden ebenen n-seitigen Vielecks F (der **Grundfläche**) eine unbegrenzte, die Grundfläche schneidende Gerade G (die **Erzeugende**) so hin, daß sie stets dieselbe Richtung behält, so erzeugt sie eine **Prismenfläche**.

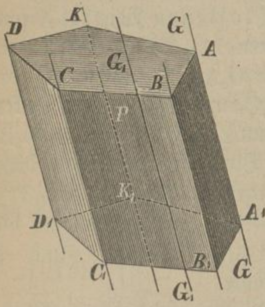

Fig. 199.

Diese besteht aus Teilen von n Ebenen, die sich in n **parallelen Kanten** (Fr. 186 XIV.) schneiden.

Der von der Prismenfläche umschlossene **prismatische Raum** ist nur halbbegrenzt.

II. Die Prismenfläche und der prismatische Raum können auch durch die Bewegung der Grundfläche F = ABCDK entlang einer die Grundfläche schneidenden Geraden G entstehen. Ändert dabei F weder seine Größe, noch seine Gestalt, bleibt ferner jede Seite der Grundfläche F (und wegen Fr. 205 VI. auch die ganze Grundfläche) immer parallel zu sich selbst, so beschreibt jede Seite eine der n Ebenen, AB z. B. die durch AB und G bestimmte Ebene (Fr. 182 III.), mit welcher ja alle Ebenen zusammenfallen (Fr. 182 II.), welche sich durch AB und eine ihrer späteren Lagen, z. B. A_1B_1, nach Fr. 186 VI. legen lassen. Jeder Eckpunkt von F beschreibt wegen Fr. 108 V. und 57 I. bei jener Parallelbewegung der Grundfläche eine zu G parallele Gerade, also nach I. eine Kante.

III. Bei einer endlichen solchen Parallelbewegung der Grundfläche F beschreibt also jede Grundflächenseite nach II. ein Parallelogramm.

216. Welche Eigenschaften hat die Prismenfläche?

I. Jede durch einen Punkt P der Prismenfläche gelegte Parallele G_1 zur Erzeugenden G liegt ganz in der Prismenfläche (Fr. 198 III.).

II. Jede zur Grundfläche F parallele Ebene schneidet alle Ebenen der Prismenfläche in Strecken, welche je einer Seite der Grundfläche parallel (Fr. 205 II.) und gleich (Fr. 108 III.) sind. Wegen Fr. 189 IX. sind demnach der Schnitt $A_1B_1C_1D_1K_1$ und die Grundfläche F auch gleichwinkelig und daher endlich kongruent (Fr. 66 II.).

III. Gleiches gilt von jedem Paar paralleler Ebenen, welche eine Kante (und dann wegen Fr. 189 VI. auch alle Kanten) schneiden.

217. Was ist ein Prisma und ein Parallelepiped?

I. Der zwischen zwei parallelen Schnittebenen (Fr. 216 III.) gelegene Teil $ABCDKK_1D_1C_1B_1A_1$ eines prismatischen Raumes mit n-eckiger Grundfläche heißt ein n-seitiges Prisma.

Dieses Prisma wird von zwei kongruenten Grundflächen ABCDK und $A_1B_1C_1D_1K_1$ (Fr. 216 II.) und von n in einer Seite übereinstimmenden Parallelogrammen (Fr. 215 III.) als Seitenflächen begrenzt; es besitzt 2n Grundkanten AB, BC ꝛc., A_1B_1, B_1C_1 ꝛc., welche paarweise parallel und gleich sind, n parallele (und gleichlange) Seitenkanten AA_1, BB_1 ꝛc. und 2n dreiseitige Ecken A, B ꝛc., A_1, B_1 ꝛc. Die n Seitenflächen zusammen bilden den Prismenmantel. Die Entfernung H der beiden Grundflächen (Fr. 206 III.) heißt die Höhe des Prismas.

II. Das Prisma ist also der bei einer endlichen Bewegung der in Fr. 215 II. beschriebenen Art von der Grundfläche F durchlaufene Raum.

III. Beim geraden Prisma stehen die Seitenkanten auf den Grundflächen normal (vergl. Fig. 201) und sind der Höhe gleich (Fr. 206 III.). Beim schiefen Prisma sind die Seitenkanten gegen die Grundflächen geneigt (Fr. 192) und größer als die Höhe H (Fr. 190 IV.).

IV. Das *Parallelepiped* ABCDNLKF (Fig. 200) ist ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche; es wird von drei Paar parallelen und kongruenten Parallelogrammen begrenzt.

Da jedes der drei Paare als Grundflächen gelten kann, so sind je vier der zwölf Kanten parallel und gleich.

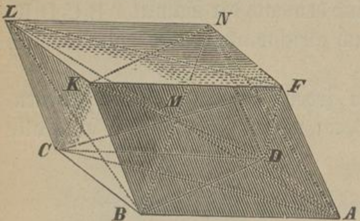

Fig. 200.

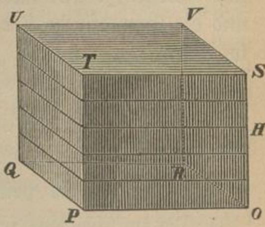

Fig. 201.

V. Im Parallelepiped lassen sich drei Paar *Diagonalebenen* AFLC und BKND, FKCD und NLBA, KLDA und FNCB durch je zwei gegenüberliegende Kanten (I., Fr. 182 IV.), auch vier *Diagonalen* AL, CF, BN und DK durch je zwei gegenüberliegende Ecken ziehen; erstere schneiden sich in einem Punkte M, denn letztere schneiden und halbieren sich in M (I. und Fr. 110 III.).

Auch die drei den Kanten parallelen Strecken, in denen sich die drei Paare der Diagonalebenen schneiden, halbieren sich gegenseitig in M (Fr. 110 IV.).

VI. Beim dreimalrechtwinkeligen Parallelepiped OPQRVUTS (Fig. 201), einem geraden (Fr. 217 III.) mit rechteckiger Grundfläche, sind alle sechs Begrenzungsflächen Rechtecke, weil alle Kanten auf einander senkrecht stehen.

VII. Sind bei einem dreimalrechtwinkeligen Parallelepiped alle Kanten gleichgroß, so wird es von sechs kongruenten Quadraten begrenzt und heißt ein *Würfel* (Cubus).

218. Wie berechnet man die Oberfläche eines Prismas?

I. Die Oberfläche des Prismas wird nach Fr. 178 I. und 177 VI. berechnet.

II. Beim geraden Prisma (Fr. 217 III.) haben alle Seitenflächen die nämliche Höhe H wie das Prisma selbst; daher ist die Oberfläche $O = 2F + UH$, wenn F eine Grundfläche und U deren Umfang bedeutet (Fr. 177 IV.).

219. Wenn sind zwei Prismen kongruent?

I. Zwei gerade Prismen von kongruenter Grundfläche und von gleicher Höhe lassen sich zum Decken bringen, sind kongruent.

Denn bringt man ein Paar ihrer Grundflächen zum Decken, so decken sich auch die Kanten (Fr. 188 II., 22 V.).

II. Zwei schiefe Prismen sind bei gleicher Höhe und kongruenten Grundflächen nur dann kongruent, wenn die Seitenkanten (und deren Projektionen) gleiche Neigung und Lage gegen die Grundfläche haben (vergl. Fr. 201 VI., 186 VII.).

III. Teilt man die Höhe H eines Prismas in n gleiche Teile (vergl. Fig. 201), und legt man durch die Teilpunkte Parallelebenen zur Grundfläche, so erhält man n kongruente Prismen (Fr. 216 II. und 219 I., oder II.).

220. Wie verhalten sich die Rauminhalte zweier Prismen?

I. Zwei gerade Prismen M_1 und M_2 mit kongruenter Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Sind die beiden Höhen $H_1 = xm$ und $H_2 = ym$ kommensurabel und man teilt sie in x und y gleiche Teile von der Größe m, so läßt sich M_1 durch Parallelebenen in x, M_2 in y kongruente Teile p (Fr. 219 III. und I.) zerlegen; daher ist $M_1 : M_2 = xp : yp = x : y = xm : ym = H_1 : H_2$.

Sind H_1 und H_2 inkommensurabel, so sind auch M_1 und M_2 inkommensurabel, ihr Verhältnis liegt aber (ähnlich wie in Fr. 173 III.) stets zwischen denselben Grenzen, wie das Verhältnis der Höhen, weshalb nach Fr. 147 wieder:

$$M_1 : M_2 = H_1 : H_2.$$

II. Körper zwischen parallelen Ebenen haben gleiche Höhe und umgekehrt (Fr. 206 III.).

III. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede P_1 und P_2 von gleicher Höhe H verhalten sich wie ihre (kommensurabeln, oder inkommensurabeln) Grundflächen F_1 und F_2.

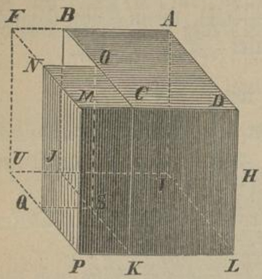

Fig. 202.

Legt man P_1 und P_2 (Fig. 202) mit der Kante CK so an einander, daß die an dieser Kante gelegenen Flächenwinkel Nebenwinkel werden, und erweitert man die Grundflächen F_1 = ABCD = VJKL und F_2 = CMNO = KPQS, sowie die Seitenflächen ABJV und PMNQ, bis sie sich in FU schneiden, so ist noch ein drittes dreimalrechtwinkeliges Parallelepiped P_3 = JBFUPMCK von der nämlichen Höhe CK entstanden. Da nun P_3 mit P_1 = VABJKCDL die Grundfläche BJKC, mit P_2 = KCMPQNOS aber die Grundfläche KCMP gemeinschaftlich hat, so ist nach I. $P_1 : P_3 = CD : CM$ und $P_3 : P_2 = BC : CO$; daher $P_1 : P_2 = (P_1 : P_3) . (P_3 : P_2) = CD . BC : CM . CO$ (Fr. 20 VIII.) und nach Fr. 177 IV. endlich $P_1 : P_2 = F_1 : F_2$.

IV. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede P_1 und P_2 verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen F_1 und F_2 und ihren Höhen H_1 und H_2.

Denkt man sich noch ein drittes dreimalrechtwinkeliges Parallelepiped P von der Grundfläche $F \cong F_1$ und der Höhe $H = H_2$, so ist nach I. $P_1 : P = H_1 : H = H_1 : H_2$ und nach III. $P : P_2 = F : F_2 = F_1 : F_2$, daher nach Fr. 20 VIII. $P_1 : P_2 = (P_1 : P)(P : P_2) = F_1H_1 : F_2H_2$.

V. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede verhalten sich wie die Produkte aus ihren in einer Ecke zusammenstoßenden drei Seiten (IV. und Fr. 177 IV.).

VI. Jedes schiefe Prisma ABCDVUYX (Fig. 203) läßt sich in ein gerades $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ von demselben Inhalte und derselben Seitenkante AX verwandeln, indem man durch die Endpunkte A und X einer Kante AX zwei Ebenen $AB_1C_1D_1$ und $XY_1U_1V_1$ legt, welche auf dieser Kante (und daher auch auf allen anderen Kanten, Fr. 189 VII.) normal stehen. Denn die Körper $ABCDD_1C_1B_1A$ und $XYUVV_1U_1Y_1X$ sind dann kongruent, da sie sich wegen der Übereinstimmung in allen ihren Stücken zum Decken bringen lassen. Addiert man nun zu diesen beiden Körpern den Körper $AB_1C_1D_1VUYX$, so erhält man die Prismen

ABCDVUYX und $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$,

welche nach Fr. 20 VIII. inhaltsgleich sind.

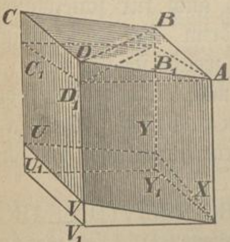

Fig. 203.

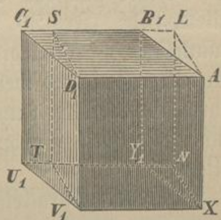

Fig. 204.

VII. Wegen Fr. 166 III. ist in VI. $ADVX = AD_1V_1X$; faßt man diese Parallelogramme als Grundflächen auf, so ist in VI. das Parallelepiped ABCDVUYX in ein inhaltgleiches $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ von gleicher Höhe (II.) und inhaltgleicher, rechteckiger Grundfläche verwandelt worden, das mit jenem die Kante AX gemein hat, die aber jetzt auf den Seitenflächen $AB_1C_1D_1$ und $XY_1U_1V_1$ normal steht.

VIII. Wiederholt man das in VI. angegebene Verfahren bei dem Parallelepiped $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ (Fig. 204) in betreff der Kante AD_1, so laufen die auf AD_1 normalen Ebenen ALNX und D_1STV_1 durch die Kanten AX und D_1V_1 (Fr. 181 X.).

Zwischen diesen Ebenen und den Parallelebenen AB_1Y_1X und $D_1C_1U_1V_1$ liegen dann zwei (nach Fr. 219 I.) kongruente dreiseitige Prismen AB_1LNY_1X und $D_1C_1STU_1V_1$; addiert man zu diesen den Körper $AB_1SD_1V_1TY_1X$, so erhält man die (nach Fr. 20 VIII.) inhaltgleichen Parallelepipede AD_1SLNTV_1X und $D_1AB_1C_1U_1Y_1XV_1$. Da nun in ersterem $ALSD_1 \perp AX$ und $ALNX \perp AD_1$ gemacht wurde, so ist $\angle XAL = 90°$ und $\angle D_1AL = 90°$ (Fr. 181 X.), also auch:

$$AL \perp AD_1V_1X \text{ (Fr. 181 XI.).}$$

Demnach läßt sich jedes schiefe Parallelepiped ABCDVUYX in ein dreimalrechtwinkeliges $ALSD_1V_1TNX$ von gleichem Inhalt, gleicher Höhe AL (VII. und Fr. 206 III.) und gleicher Grundfläche ($AD_1V_1X = ADVX$) verwandeln, welches mit dem erstern in einer Seite AX übereinstimmt.

IX. Daher gilt der Satz IV. auch für schiefwinkelige Parallelepipede (Fr. 20 IV.); denn die zwei dreimalrechtwinkeligen Parallelepipede, in welche sie sich nach VIII. verwandeln lassen, und welche sich nach IV. wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen verhalten, haben ja die nämliche Höhe und gleichgroße Grundfläche wie die schiefwinkeligen.

X. Jedes gerade Parallelepiped ABCDLKJV ($DL \perp ABCD$; Fig. 202) wird durch die Diagonalebene BDLJ in zwei kongruente Hälften zerlegt (Fr. 108 I. und 219 I.).

XI. Jedes schiefe Parallelepiped ABCDVUYX (Fig. 203) wird durch die Diagonalebene BDVY in zwei inhaltgleiche Hälften zerlegt.

Bringt man die Körper

$$ABCDD_1C_1B_1A \quad \text{und} \quad XYUVV_1U_1Y_1X$$

zum Decken (VI.), so decken sich auch die Trapeze BDD_1B_1 und YVV_1Y_1 und die Körper $ABDD_1B_1A$ und $XYVV_1Y_1X$, sowie $BDCC_1D_1B_1$ und $YVUU_1V_1Y_1$; nach X. und Fr. 20 VIII. ist daher:

$$ABDVYX = AB_1D_1V_1Y_1X = B_1C_1D_1V_1U_1Y_1$$
$$= BCDVUY.$$

Ganz dasselbe gilt für die Diagonalebene ACUX.

XII. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich als die Hälfte eines Parallelepipeds ansehen (X., oder XI.).

XIII. Daher verhalten sich dreiseitige Prismen wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen (XII. und IX.).

XIV. Jedes Prisma läßt sich in dreiseitige zerlegen; daher gilt (wegen XIII.) der Satz IV. für alle Prismen, d. h.:

Zwei Prismen verhalten sich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe.

XV. Zwei Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind inhaltgleich (XIV.).

221. Wie berechnet man den Inhalt eines Prismas?

I. Als Maß für den Rauminhalt der Körper wählen wir das Kubikmeter ($1 \boxplus^{m} = 1^{cbm}$), d. h. einen Würfel (Fr. 217 VII.), dessen Seite der Längeneinheit (1 Meter) gleicht. Vergl. Fr. 146 III. und Fr. 176.

II. Ein Kubikcentimeter 2c. ist ein Würfel von 1 Centimeter 2c. Seite.

III. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Kubikmeter ein Körper enthält, heißt dessen Inhaltszahl oder Raumzahl.

Damit die nachfolgenden Formeln den Rauminhalt in Kubikmetern liefern, sind die in ihnen vorkommenden Maße in Metern einzusetzen.

IV. Die Inhaltszahl eines Würfels W ist die dritte Potenz der Längenzahl a seiner Seite a. Denn nach Fr. 220 IV. findet man $W : 1 \boxplus^{m} = (a^2 \square^{m} . a^{m}) : (1 \square^{m} . 1^{m}) = a^3$, also
$$W = a^3 \boxplus^{m}.$$

V. Für die Würfel W_1 und W_2 der Summe $(a + b)$ oder der Differenz $(a - b)$ zweier Strecken hat man nach IV.*):
$$W_1 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$W_2 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

---

*) Vergl. Katechismus der Raumberechnung Fr. 33. — Eine hübsche Deutung dieser zwei Formeln gestattet VII. in Verbindung mit Fr. 177 I. Hiernach läßt sich nämlich W_1 in zwei Würfel und sechs Parallelepipede zerlegen. — Vergl. die Anmerkung *) zu Fr. 178.

VI. Aus IV. folgt leicht, weshalb

$$1 \boxplus^m = 10^3 \text{ d. h. } 1000 \boxplus \text{Decimeter}$$
$$= 100^3 \text{ d. h. } 1\,000\,000 \boxplus \text{Centimeter ꝛc.}$$

VII. Die Raumzahl eines dreimalrechtwinkeligen Parallelepipeds P ist das Produkt aus den Längenzahlen seiner drei Seiten a, b, c (Fr. 220 V.):

$$P = a\,b\,c \boxplus^m.$$

Jede Diagonale dieses Körpers hat nach Fr. 170 I. (wegen Fr. 181 X.) die Länge $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

VIII. Die Raumzahl eines Prismas M ist das Produkt aus der Flächenzahl $\mathfrak{F}$ seiner Grundfläche und der Längenzahl $\mathfrak{H}$ seiner Höhe:

$$M = \mathfrak{F}\mathfrak{H} \boxplus^m.$$

Beispiele enthält der Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. 1888. Fr. 139 ff.

Elftes Kapitel.

Der Cylinder.

222. **Was ist eine Cylinderfläche und ein Cylinder?**

I. Bewegt sich an einer festliegenden als Leitlinie L, Fig. 205, dienenden Kreislinie eine unbegrenzte, die Ebene der Leitlinie schneidende Gerade (die Erzeugende) G, von unveränderlicher Richtung (Fr. 186 XI.) hin, so beschreibt sie eine Kreis-Cylinderfläche, welche (da andere Cylinderflächen hier nicht betrachtet werden sollen) kurzweg Cylinderfläche genannt werde.

II. Die durch den Mittelpunkt C der Leitlinie L gelegte Parallele A zur Erzeugenden G heißt die Axe, die Ebene F der Leitlinie die Grundfläche der Cylinderfläche.

III. Steht die Erzeugende G und demnach (wegen Fr. 189 VII.) auch die Axe A normal, oder schief auf der Ebene der Leitlinie, so ist die Cylinderfläche gerade, oder schief.