

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

9. Das Dreikant

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

sich in dem Punkte O die drei Ebenen und auch ihre drei Durchschnitte G_1 , G_2 und G_3 .

Die drei Ebenen haben aber außer O keinen Punkt gemein, weil sonst auch dieser Punkt in jedem der drei Durchschnitte liegen und allen drei Durchschnitten gemeinsam sein müßte, da ja nach Zr. 185 II. je zwei Ebenen sich nur in einer Geraden schneiden können.

Neuntes Kapitel.

Das Dreikant.

209. Was ist ein Dreikant?

I. Denkt man sich die drei nicht in einer Ebene liegenden Durchschnitte OA , OB und OC (Fig. 194) der drei sich in bloß einem Punkte O schneidenden Ebenen E_1 , E_2 und E_3 (Zr. 208 VII.) als drei von O auslaufende Strahlen, so bilden sie zunächst drei ebene Winkel $AOB = c$, $BOC = a$ und $COA = b$.

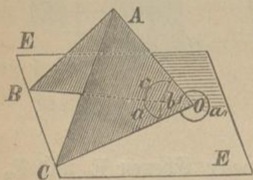


Fig. 194.

Zwischen diesen drei ebenen Winkeln ist aber ein halbbegrenztes Stück des unendlichen Raumes enthalten, welches man eine dreiseitige Ecke, einen dreiseitigen körperlichen Winkel oder ein Dreikant nennt und durch $O(ABC)$ bezeichnet.

II. Nimmt man mehrere von O auslaufende Strahlen und Ebenen, so erhält man in gleicher Weise ein Vielkant.

III. Der Punkt O ist der Scheitel oder die Spitze, die drei Strahlen OA , OB und OC sind die Kanten und die von ihnen gebildeten ebenen Winkel a , b , c die Kantenwinkel, Seitenwinkel oder Seiten des Dreikants. Von den (nicht über die Kanten hinaus erweiterten) drei Seitenebenen werden gegen das Innere des Dreikants hin drei Flächenwinkel $A(OB)C$

$= B$, $B(OC)A = C$ und $C(OA)B = A$ gebildet (Fr. 202 IV.) und heißen die (inneren) Winkel des Dreikants. Die Seiten a , b , c liegen der Reihe nach den Winkeln A , B , C gegenüber.

210. Wie vielerlei Dreikante giebt es?

I. Dreikante mit flachen Seiten giebt es nicht; wird nämlich $\angle a = 180^\circ$, so fallen die Ebenen AOB und AOC zusammen (Fr. 182 III.), ihr Flächenwinkel wird zu einem flachen (vgl. Fr. 203 III.), und man hat dann kein Dreikant mehr, sondern bloß einen Flächenwinkel.

II. Ebenso wird ein Dreikant zu einem Flächenwinkel, sobald ein Winkel des Dreikants flach wird.

III. Weil die drei Seiten das Dreikant begrenzen (Fr. 209 I.), so darf keine Seite durch das Dreikant hindurchgehen oder zum Teil innerhalb des Dreikants liegen. Da nun die dritte Kante OA mit keiner Geraden in der durch die beiden anderen Kanten OB und OC gelegten Ebene E einen überstumpfen Winkel macht (Fr. 192 III.), so müssen die Seiten b und c hohl sein, sobald man für die Seite a die Möglichkeit, hohl oder überstumpf zu sein, zulassen will.

Daher giebt es kein Dreikant mit mehr als einer überstumpfen Seite.

IV. Jedes Dreikant hat demnach wenigstens zwei hohle Seiten. Ist die dritte Seite hohl, oder überstumpf, so ist auch ihr Gegenwinkel kleiner, oder größer als ein flacher Winkel, d. h. hohl, oder überstumpf (I., Fr. 203 III. und V.).

Ist umgekehrt der dritte Winkel hohl, oder überstumpf, so ist auch seine Gegenseite hohl, oder überstumpf.

V. Ein Dreikant mit drei hohlen Winkeln hat auch drei hohle Seiten (IV.).

VI. Zu jedem Dreikant mit drei hohlen Seiten und Winkeln giebt es ein Dreikant (Außendreikant) mit denselben Kanten und Seiten, aber mit drei überstumpfen

Winkeln, deren jeder einen Winkel des ursprünglichen Dreikants (des Urdreikants) zu 360° ergänzt*). Vgl. VIII.

VII. Auch zu jedem Dreikant mit zwei hohlen und einer überstumpfen Seite und Winkel giebt es ein Außendreikant mit denselben Kanten und Seiten, aber mit zwei überstumpfen und einem hohlen Winkel, deren jeder einen Winkel des Urdreikants zu 360° ergänzt. Vgl. VIII.

VIII. Sowohl in VI. als in VII. erfüllen die beiden zusammengehörigen Dreikante den ganzen körperlichen Winkelraum um den Scheitel. Nennt man diesen ganzen Winkelraum Volldreikant, so macht jedes Dreikant mit seinem Außendreikant ein Volldreikant aus. (Vgl. Fig. 195.)

IX. Zu jedem Dreikant mit drei hohlen Seiten und Winkeln giebt es drei Dreikante (Gegendreikante) mit denselben Kanten, aber mit je einer überstumpfen Seite und Winkel, z. B. a_1 und A_1 in Fig. 194, welche die betreffende Seite a , bezieh. Winkel A des Urdreikants zu 360° ergänzen; die beiden anderen Seiten in beiden Dreikanten sind gleich; die beiden anderen Winkel ergänzen die Winkel des Urdreikants zu 180° . Man erhält ein solches Gegendreikant durch Erweiterung einer Seitenebene E des Urdreikants.

X. Jedes Dreikant erfüllt mit seinem Gegendreikant den Flächenwinkelraum auf der einen Seite einer Ebene E , bildet also einen flachen Flächenwinkel oder macht eine flache oder gestreckte Ecke, ein Flachdreikant, d. h. die Hälfte eines Volldreikants aus.

XI. Wegen VI. bis VIII. braucht man bloß Dreikante, welche kleiner sind als ein Flachdreikant, und wegen IX. und X. bloß hohle oder konvexe Dreikante mit drei hohlen Winkeln und Seiten zu betrachten. Im Folgenden wird daher stets von solchen die Rede sein.

*) Denkt man sich das Urdreikant aus einem Stoff gebildet, so wird der leere Raum um dasselbe von dem Außendreikant eingenommen. Wenn man dagegen das Urdreikant (als Modell) in eine Formmasse eindrückt und wieder herauszöge, so würde die mit einem dem Urdreikante gleichenden Loch versehenen Formmasse das Außendreikant stofflich darstellen. Vergl. VIII.

211. Wie entsteht ein Neben-, Hinter-, Scheitel-Dreikant?

Erweitert man die drei Kanten und Ebenen eines Dreikants $O(ABC)$ über dessen Scheitel O (Fig. 195) hinaus, so erhält man noch sieben Dreikante:

I. Die drei Nebendreikante $O(A_1BC)$, $O(AB_1C)$ und $O(ABC_1)$ haben mit dem Urdreikant nur je zwei Kanten und eine Seite gemein, während die anderen Seiten und Winkel die Seiten und Winkel des Urdreikants zu 180° ergänzen.

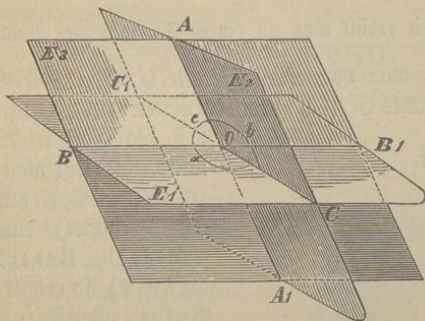


Fig. 195.

Je zwei Nebendreikante liefern als Summe einen Flächenwinkel. Vgl. Fr. 210 I. und II.

II. Die drei Hinterdreikante $O(AB_1C_1)$, $O(A_1BC_1)$ und $O(A_1B_1C)$ haben mit dem Urdreikant nur je eine Kante gemein.

Die Seiten und Winkel an dieser Kante sind als Scheitelwinkel gleich (Fr. 42 II.); die anderen Winkel und Seiten ergänzen sich paarweise zu 180° .

III. Das Scheiteldreikant $O(A_1B_1C_1)$ hat keine Kante mit dem Urdreikant gemein; seine Seiten und Winkel sind als Scheitelwinkel denen des Urdreikants gleich.

Diese beiden Dreikante können aber trotzdem (weil ihre Seiten und Winkel in umgekehrter Folge *) an einander stoßen) im allgemeinen nicht zum Decken gebracht werden, sondern nur wenn in jedem zwei Winkel gleich sind.

Man nennt solche Dreikante symmetrisch=gleich, da sie sich mit je einer Seite [durch Drehung von $O(A_1B_1C_1)$ um OA_1 z. B. mit $\angle COB$ und $\angle C_1OB_1$] so auf einander legen lassen, daß die beiden dritten Kanten [OA und OA_1] symmetrisch zu beiden Seiten der durch die anderen beiden Kanten gelegten Ebene [COB] liegen.

212. Wie erhält man zu einem Dreikant das Polardreikant?

I. Fällt man von einem Punkte O_1 (Fig. 196) innerhalb eines Dreikants $O(ABC)$ drei Normalen O_1A_1 , O_1B_1 und O_1C_1

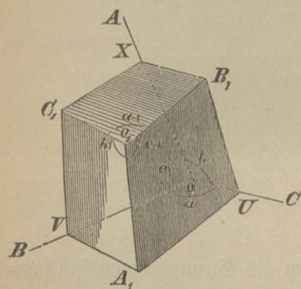


Fig. 196.

auf die Ebenen des Dreikants, und legt man durch je zwei Normalen (als Strahlen betrachtet) eine Ebene [$A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$, oder $C_1O_1A_1V$], so erhält man das Polar- oder Supplementardreikant $O_1(A_1B_1C_1)$;

II. Die Seiten und Winkel des Polardreikants ergänzen die Winkel und Seiten des Urdreikants zu je 180° .

Es stehen nämlich auch die Ebenen $A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$ und $C_1O_1A_1V$ auf den Kanten OC , OA und OB normal (Fr. 204 I., VIII.); daher ist nach Fr. 202 V. und 181 X.:

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle B_1XC_1, \quad \angle B = \angle C_1VA_1, \quad \angle C = \angle A_1UB_1 \\ \angle A_1 &= \angle UA_1V, \quad \angle B_1 = \angle XB_1U, \quad \angle C_1 = \angle VC_1X. \end{aligned}$$

*) Ähnlich wie die Finger an der rechten und an der linken Hand; der rechte Handschuh paßt ja auch nicht an die linke Hand.

In jedem der sechs Vierecke $A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$, $C_1O_1A_1V$, A_1VOU , B_1UOX und C_1XOV sind aber zwei Winkel rechte (Fr. 181 X.), und deshalb ist nach Fr. 72 III.:

$$\begin{array}{ll} \angle A + \angle a_1 = 180^\circ & \angle A_1 + \angle a = 180^\circ \\ \angle B + \angle b_1 = 180^\circ & \angle B_1 + \angle b = 180^\circ \\ \angle C + \angle c_1 = 180^\circ & \angle C_1 + \angle c = 180^\circ. \end{array}$$

III. Das Polardreikant vom Polardreikante gleicht in seinen Seiten und Winkeln dem Urdreikante (II. oder I.).

213. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Seiten und Winkeln des Dreikants?

I. Ein (hohles) Dreikant heißt gleichschenkelig, oder gleichseitig, wenn in ihm zwei, oder alle drei Seiten gleichgroß sind.

II. Fällt man in einem gleichschenkeligen Dreikante aus einem Punkte P der den beiden gleichen Seiten a und b gemeinschaftlichen Scheitellante OC eine Normale PN auf die Grundseite oder Basis c, so kann der Fußpunkt N der Normalen nur in der Seite c selbst, oder in ihrem Scheitelswinkel liegen, und zwar halbiert ON diese Seite c (Fr. 193 IX.). Vgl. Fig. 198.

III. Daher sind die Winkel A und B an der Basis c des gleichschenkeligen Dreikants gleichgroß (II. u. Fr. 194 VII.).

IV. Alle gleichschenkeligen Dreikante über derselben Grundseite c haben ihre Scheitellanten OC in der (durch die Normale PN in II. gelegten) Ebene, welche die Grundseite senkrecht halbiert.

V. In einem Dreikant mit zwei gleichen Winkeln A und B muß die Projektion ON der Kante OC auf die Gegenseite c mit der Halbierungslinie dieses Winkels c (oder seines Scheitelswinkels) zusammenfallen (Fr. 194 VIII.).

VI. Aus der Gleichheit zweier Winkel A und B ergibt sich daher die Gleichheit der Gegenseiten a und b (Fr. 193 VII.).

VII. Das gleichseitige Dreikant ist auch gleichwinkelig (III.), und jedes gleichwinkelige ist gleichseitig (VI.).

VIII. In einem hohlen Dreikante steht der größeren Seite ($a > b$) auch ein größerer Winkel ($A > B$) gegenüber.

Der Beweis ist aus Fr. 193 und 194 ohne besondere Schwierigkeiten zu führen, dabei aber zu unterscheiden, ob die Projektion ON der Kante OC auf die Seite c innerhalb c selbst, oder in dessen Scheitelwinkel, oder Nebenwinkel fällt.

IX. In jedem hohlen Dreikante liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber (III. und VIII.).

X. Die Differenz $a - b$ zweier Seiten a und b eines hohlen Dreikants ist kleiner als die dritte Seite c.

Macht man in der Ebene BOC (Fig. 197) den $\angle COD = \angle COA = \angle b$ (also $\angle BOD = a - b$) und $OD = OL$; zieht man durch D eine Gerade FDK, welche OB in F und OC in K schneidet, und verbindet man K, D und F geradlinig mit L, so ist:

$$\angle KOD = \angle KOL = b \text{ (Konstr.)}$$

$$OD = OL \text{ (Konstr.)}$$

$$OK = OK \text{ (Fr. 20 I.)}$$

$$\triangle KOD \cong \triangle KOL \text{ (Fr. 80 II.)}$$

$$KD = KL \text{ (Fr. 67 II.)}$$

$$\angle LDF > 90^\circ \text{ (Fr. 74 III.)}$$

$$FL > FD \text{ (Fr. 74 VIII.)}$$

$$OF = OF \text{ (Fr. 20 I.)}$$

$$OL = OD \text{ (Konstr.)}$$

$$\angle FOL > \angle FOD \text{ (Fr. 78 III.)}$$

$$\angle c > \angle a - \angle b.$$

XI. In jedem hohlen Dreikant ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

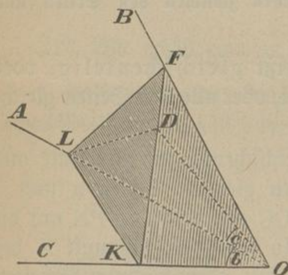


Fig. 197.

Nach X. ist $\angle c > \angle a - \angle b$, daher auch (wegen Fr. 20 IX.) $\angle c + \angle b > \{ \angle a - \angle b \} + \angle b$,
d. h. $\angle c + \angle b > \angle a$.

XII. Auch im Nebendreikant (Fr. 211 I.), in welchem $a_1 = a$, $b_1 = 180^\circ - b$ und $c_1 = 180^\circ - c$ ist, wäre nach XI. $b_1 + c_1 > a_1$ oder $(180^\circ - b) + (180^\circ - c) > a$, woraus sich nach Fr. 20 IX. leicht

$$360^\circ > a + b + c > 0$$

findet, d. h. in jedem hohlen Dreikant liegt die Summe der drei Seiten zwischen 0 und 360° .

XIII. Im Polardreikant (Fr. 212) ist ebenfalls $360^\circ > a_1 + b_1 + c_1 > 0$; daher im Urdreikant $360^\circ > (180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) > 0$, oder $540^\circ - A - B - C > 0$ und $360^\circ > 540^\circ - A - B - C$, woraus durch Addition von $A + B + C$ nach Fr. 20 IX. sich

$$540^\circ > A + B + C > 180^\circ$$

ergibt, d. h. in jedem hohlen Dreikant liegt die Winkelsumme zwischen 180° und 540° .

214. Welche Stücke bestimmen ein Dreikant?

I. Zwei Dreikante lassen sich zum Decken bringen (sind kongruent), wenn ihre drei Winkel und ihre drei Seiten der Reihe nach einander gleich sind und dabei auch in derselben Reihenfolge an einander stoßen.

Folgen die gleichen Seiten und Winkel in entgegengesetzter Ordnung auf einander (wie z. B. bei O(APN) und O(BPN) in Fr. 213 II. und V.), so sind die Dreikante symmetrisch = gleich und lassen sich zu Scheiteldreikanten machen (vgl. Fr. 211 III.).

II. In kongruenten (und in symmetrisch-gleichen) Dreikanten sind die Gegenwinkel gleicher Seiten und die Gegenseiten gleicher Winkel gleich.

III. Ein Dreikant ist bestimmt, wenn man von ihm so viel Stücke (und deren Reihenfolge) kennt, daß sich aus diesen Stücken bloß e in Dreikant zeichnen läßt, oder daß alle Dreikante

kongruent sind, welche diese Stücke in der nämlichen Reihenfolge besitzen.

IV. Davon, daß ein, oder zwei Stücke eines Dreikants zur Bestimmung desselben nicht ausreichen, kann man sich (ähnlich wie in Fr. 79 II. und III.) leicht überzeugen.

V. Zwei Dreikante $O_1(A_1B_1C_1)$ und $O_2(A_2B_2C_2)$ sind kongruent, wenn ihre drei Seiten der Reihe nach gleich sind und in derselben Ordnung auf einander folgen.

Trägt man auf den Kanten O_1C_1 und O_2C_2 (Fig. 198) zwei gleiche Stücke O_1P_1 und O_2P_2 auf, fällt von P_1 und P_2 zwei Normalen P_1N_1 und P_2N_2 auf die Ebenen $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$, dann die Senkrechten P_1E_1 , P_1D_1 und P_2E_2 , P_2D_2 auf O_1A_1 und O_1B_1 , O_2A_2 und O_2B_2 , so ist nach Fr. 189 II. auch $N_1E_1 \perp O_1A_1$, $N_2E_2 \perp O_2A_2$, $N_1D_1 \perp O_1B_1$, $N_2D_2 \perp O_2B_2$. Nun ist $\triangle P_1O_1E_1 \cong \triangle P_2O_2E_2$ und $\triangle P_1O_1D_1 \cong \triangle P_2O_2D_2$ (Fr. 81 II.), daher $O_1E_1 = O_2E_2$ und $O_1D_1 = O_2D_2$. Legt man also die beiden Dreikante $O_1(A_1B_1C_1)$ und $O_2(A_2B_2C_2)$ mit den gleichen

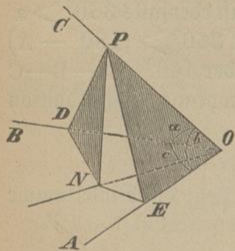


Fig. 198.

Seiten $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$ auf einander, so fällt E_1 auf E_2 und D_1 auf D_2 (Fr. 22 V.), deshalb fällt E_1N_1 auf E_2N_2 , D_1N_1 auf D_2N_2 (Fr. 57 III.) und N_1 auf N_2 (Fr. 26). Weil somit $O_1N_1 = O_2N_2$, auch $O_1P_1 = O_2P_2$, sowie $\angle O_1N_1P_1 = 90^\circ = \angle O_2N_2P_2$ (Fr. 181 X.) ist, so ist $\triangle O_1N_1P_1 \cong \triangle O_2N_2P_2$ (Fr. 81 I.) und $N_1P_1 = N_2P_2$ (Fr. 67 II.). Demnach fällt auch P_1 auf P_2 (Fr. 188 II., 22 V.) und das dritte Kantenpaar O_1P_1 und O_2P_2 der beiden Dreikante auf einander (Fr. 21 II.); es decken sich also auch die drei Seitenebenen (Fr. 182 III.) und die Dreikante selbst.

VI. Drei Seiten und deren Reihenfolge bestimmen wegen V. das Dreikant. — Vgl. aber Fr. 213 XII.

VII. Zwei Dreikante sind kongruent, wenn sie in ihren drei Winkeln und deren Aufeinanderfolge übereinstimmen.

Die Polardreikante der beiden Dreikante stimmen nach Fr. 212 II. in ihren Seiten und deren Reihenfolge überein, sind also kongruent (V.), haben daher auch gleiche Winkel in gleicher Folge (II.), und deshalb haben die Urdreikante auch gleiche Seiten in gleicher Folge (Fr. 212 II.) und sind kongruent (V.).

VIII. Drei Winkel und deren Reihenfolge bestimmen nach VII. das Dreikant. — Vgl. aber Fr. 213 XIII.

IX. Zwei Dreikante sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A und in deren Reihenfolge übereinstimmen.

Legt man die Kante O_1A_1 auf O_2A_2 , so lassen sich die Ebenen $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$, $A_1O_1C_1$ und $A_2O_2C_2$ zum Decken bringen (Vor. und Fr. 203 I.); da nun $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ und $\angle A_1O_1C_1 = \angle A_2O_2C_2$ (Vor.), so decken sich diese paarweise in derselben Ebene liegenden Winkel (Fr. 31), d. h. O_1B_1 fällt auf O_2B_2 , O_1C_1 auf O_2C_2 und daher auch die Ebene $B_1O_1C_1$ auf die Ebene $B_2O_2C_2$ (Fr. 182 III.), und es decken sich wieder die beiden Dreikante.

X. Zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel A bestimmen bei gegebener Reihenfolge das Dreikant (IX.).

XI. Zwei Dreikante sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln B und C und der von diesen eingeschlossenen Seite a und in deren Reihenfolge übereinstimmen. Der Beweis läßt sich mit Hilfe der nach IX. kongruenten Polardreikante ähnlich führen wie in VII.

XII. Zwei Winkel B und C und die eingeschlossene Seite a bestimmen bei gegebener Reihenfolge das Dreikant (XI.).

XIII. Aus zwei Seiten b und c und einem Gegenwinkel B oder aus zwei Winkeln B und C und einer Gegenseite b nebst deren Reihenfolge lassen sich im allgemeinen zwei Dreikante konstruieren.

Die Untersuchung darüber, wenn zwei in diesen drei Stücken übereinstimmende Dreikante kongruent sind, läßt sich mit Fr. 193 und 194 unter Berücksichtigung von Fr. 213 I. bis III. durchführen, ist aber etwas umständlicher.