Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

Zweiter Abschnitt. Die Geometrie des Raumes

Zweiter Abschnitt.

Die Geometrie des Raumes.

Achtes Kapitel.

Gerade und Ebenen im Raum.

181. Wenn steht eine Gerade normal auf einer Ebene?

I. Macht man (Fr. 120) in einem ebenen $\triangle$ ABC (Fig. 166) AF $\perp$ BC, errichtet man in F auf BC eine (außerhalb der Ebene des $\triangle$ ABC liegende, Fr. 57 III.) zweite Senkrechte FJ (Fr. 121), und macht in der Ebene AFJ endlich AU $\perp$ AF in A, so werden sich AU und FJ in K schneiden, sofern nur nicht etwa $\angle$ JFA $= 90°$ genommen wurde (Fr. 62 IV.). Dann steht AK $=$ p zugleich auch auf den beiden Seiten AB $=$ c und AC $=$ b senkrecht.

Bew. Man ziehe KB $=$ e, KC $=$ d; zugleich sei AF $=$ f, KF $=$ k, FC $=$ q, FB $=$ n.

Fällt F zwischen B und C, so ist (nach Fr. 170 I.):

$$k^2 = p^2 + f^2; \quad q^2 = b^2 - f^2; \quad n^2 = c^2 - f^2$$
$$d^2 = k^2 + q^2 = \{p^2 + f^2\} + \{b^2 - f^2\} = p^2 + b^2$$
$$e^2 = k^2 + n^2 = \{p^2 + f^2\} + \{c^2 - f^2\} = p^2 + c^2$$

$$\angle \text{KAC} = \Re = \angle \text{KAB (Fr. 170 VII.)}.$$

Fällt AF auf eine Seite AC, so vereinfacht sich der vorstehende Beweis, insofern nur $\angle$ KAB als $\Re$ nachzuweisen ist.

Fällt endlich AC zwischen AF und AB z. B. auf AL, so ändert sich in der Beweisführung nichts wesentliches.

II. Nach I. kann man im Eckpunkte A eines $\triangle$ ABC stets eine Gerade AU ziehen, welche auf den Seiten AB und AC zugleich senkrecht steht.

III. Steht eine Gerade AU (Fig. 166) im Eckpunkte A eines $\triangle$ ABC auf den Dreiecksseiten AB $=$ c und AC $=$ b zugleich senkrecht, und trifft eine von A auf die Seite BC $=$ a gefällte Senkrechte AF $=$ f die Seite BC in F, so steht BC auch senkrecht auf jeder Strecke FK $=$ k, welche sich von F nach einem Punkte K in AU ziehen läßt.

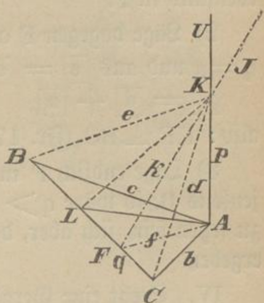

Fig. 166.

Bew. 1) Es liege zunächst F zwischen B und C; zieht man noch die Strecken KC $=$ d und KB $=$ e, und bezeichnet man AK mit p, CF mit q, BF mit n $=$ a $-$ q, so ist (zufolge Fr. 170 I. und 169 II.):

$$\boxed{d} = \boxed{p} + \boxed{b} = \boxed{p} + \boxed{f} + \boxed{q}$$
$$\boxed{e} = \boxed{p} + \boxed{c} = \boxed{p} + \boxed{f} + \boxed{a-q}$$
$$= \boxed{p} + \boxed{f} + \left\{ \boxed{q} + \boxed{a} - 2\,\boxed{a, q} \right\}$$
$$= \boxed{d} + \boxed{a} - 2\,\boxed{a, q}.$$

Fiele nun der Fußpunkt F′ der in dem ebenen (Fr. 14 II.) Dreiecke BKC von K auf BC gefällten Senkrechten auf C, oder auf einen, etwa um x von C entfernten Punkt in der über C hinaus liegenden Verlängerung von BC, so wäre bez.

$$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} \text{ (Fr. 170 I.), oder}$$
$$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} + 2\,\boxed{a, x} \text{ (Fr. 170 V.).}$$

Beides widerstreitet dem für $\boxed{e}$ eben gefundenen Werte, und deshalb muß F′ von C aus nach B hin liegen; ist aber dabei CF′ $=$ q′, so ist weiter noch:

$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q'}$ (Fr. 170 IV.),
$\boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q'} = \boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q}$ (Fr. 20 V.), also $\boxed{a, q} = \boxed{a, q'}$ (Fr. 20 VIII.) oder $q = q'$ (Fr. 166 V.), d. h. die Senkrechte von K auf CB hat ihren Fußpunkt (F') ebenfalls in F.

2) Läge dagegen F auf C, oder B, so wäre $q = o$, oder $q = a$ und aus $\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q}$ würde

$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a}$, oder $\boxed{e} = \boxed{d} - \boxed{a}$,

also: $KF \perp BC$ (Fr. 170 VII.).

3) Läge endlich F in der Verlängerung von BC, z. B. jenseits B, so wäre $q > a$, also würde zwar $BF = q - a$ zu setzen sein, sich aber, da C wieder spitz ist, wieder $q' = q$ ergeben.

IV. Steht eine Gerade UA (Fig. 166) im Eckpunkte A eines $\triangle ABC$ auf den Dreiecksseiten $AB = c$ und $AC = b$ zugleich senkrecht, so steht UA auch auf der von A auf BC gefällten Normalen $AF = f$ senkrecht.

Bew. Nach III. steht $KF = k$ auf BC senkrecht, nach Fr. 170 I. ist also:

$$\boxed{k} = \boxed{d} - \boxed{q}$$
$$= \{\boxed{b} + \boxed{p}\} - \{\boxed{b} - \boxed{f}\} = \boxed{p} + \boxed{f},$$

und deshalb $\angle KAF = 90°$ (Fr. 170 VII.).

V. Steht eine Gerade UA (Fig. 166) im Eckpunkte A eines Dreiecks ABC auf den Dreiecksseiten $AB = c$ und $AC = b$ zugleich senkrecht, so steht sie auch auf jeder Strecke AL senkrecht, welche von A nach einem beliebigen Punkte L in BC (oder deren Verlängerung) gezogen wird.

Bew. Nach III. und IV. ist

$$\overline{KL}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{FL}^2$$
$$= \{\overline{AF}^2 + \overline{AK}^2\} + \{\overline{AL}^2 - \overline{AF}^2\}$$
$$= \overline{AK}^2 + \overline{AL}^2$$

$\angle KAL = 90°$ (Fr. 170 VII.).

VI. Steht eine Gerade UA (Fig. 167) im Durchschnittspunkte A zweier sich schneidenden Geraden XT und YV auf diesen beiden Geraden zugleich senkrecht, so steht sie auch auf jeder Geraden NL senkrecht, welche man in der (nach Fr. 14 II.) durch XT und YV gelegten Ebene E durch den Schnittpunkt A ziehen kann.

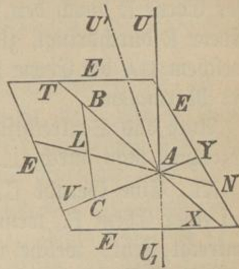

Fig. 167.

Bew. Verbindet man zwei beliebige Punkte B und C der Strahlen AT und AV, zwischen denen AL liegt, durch eine Gerade BC, so schneidet diese auch AL, und nach V. ist:

$$\angle \mathrm{UAL} = 90^\circ.$$

VII. Weder der Strahl UA, noch seine Verlängerung AU_1 kann wegen Fr. 57 III., oder 12 II. in der Ebene E liegen.

VIII. Ebensowenig kann aber auch die Verlängerung AU_1 von UA auf der nämlichen Seite der Ebene E liegen, wie UA selbst. Denn wenn AU' die Verlängerung von UA wäre und man durch UAU' und durch NAL eine Ebene legte (Fr. 14 II.), so müßte dann die Gerade UAU' ganz auf der einen Seite der Geraden NAL liegen*), was nach Fr. 27 II. unmöglich ist.

IX. Daher hat UAU_1 (in VI.) mit der Ebene bloß den Punkt A gemein und durchdringt in diesem Punkte die Ebene E (vergl. auch Fr. 184 II.).

*) Dabei ist allerdings stillschweigend angenommen, daß von der durch UAU' und NAL gelegten Ebene nur die eine Halbebene (Fr. 15 IV.) oberhalb E liegt, was doch erst in Fr. 185 bewiesen wird. Daß indessen in Fig. 170 (S. 220) nicht KLN und VLN zwei zusammengehörige, E in Fig. 167 entsprechende Halbebenen sein können, während ULN und U'LN die beiden durch LN und UAU' gelegten Halbebenen wären, geht daraus hervor, daß bei Drehung der letzteren um LN sich ULN von VLN entfernt, wenn U'LN sich KLN nähert, und daß deshalb die beiden Ebenen ULNU' und VLNK nicht zum Decken gebracht werden können, im Widerspruch mit Frage 14 IV. Vergl. auch die Anm. zu Fr. 27 II.

X. Eine Gerade UA nennt man normal (senkrecht, perpendikular) zu einer Ebene E (Fig. 167), wenn sie rechte Winkel mit allen den Geraden macht, welche sich in der Ebene E durch den Punkt A, worin die Gerade UA die Ebene E durchdringt, ziehen lassen (VI.). Der Punkt A, in welchem DA die Ebene E durchdringt, heißt der Fußpunkt der Normalen.

Auch das Senkrechtstehen einer Geraden auf einer Ebene bezeichnet man durch $\perp$.

XI. Eine Gerade UA steht (wegen VI.) schon normal auf einer Ebene E, wenn sie auf zwei Geraden XT und YV senkrecht steht, welche in der Ebene E durch den Punkt A gezogen sind, in welchem die Gerade DA die Ebene E durchdringt.

XII. Denkt man sich in Fig. 167 durch AU und die willkürliche Gerade AL eine Ebene E_1 gelegt, so muß jede Gerade AL_1, welche noch in E_1 durch A gezogen wird, nach Fr. 57 III. mit AU schiefe Winkel machen. Dreht sich AL in der Ebene E um A um 360°, so überstreicht die Ebene E_1 dabei den ganzen Raum um die Gerade UAU_1.

Daher machen alle durch A gehende Gerade, welche nicht in der Ebene E liegen, mit UA schiefe Winkel.

XIII. Alle Gerade, welche in demselben Punkte A auf einer Geraden UA normal stehen, liegen (wegen XII.) in einer Ebene.

XIV. Dreht sich ein rechter Winkel UAC um seinen festgehaltenen Schenkel UA, so beschreibt der andere Schenkel AC nach XIII. eine Ebene E. Ist der Schenkel AC begrenzt, so beschreibt dessen Endpunkt C einen Kreis.

182. Wodurch ist die Lage einer Ebene bestimmt?

Die Lage einer Ebene ist bestimmt, sobald man von ihr kennt:

I. drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen;

II. eine Gerade und einen Punkt außer dieser Geraden;

III. zwei sich schneidende Gerade;

IV. zwei parallele Gerade;

V. ihre Normale und einen ihrer Punkte, mag dieser letztere in oder außerhalb der Normalen liegen.

Für die Fälle I. bis III. liegt der Beweis in Fr. 14 II. bis IV., für den Fall IV. in II. und Fr. 26. Im V. Falle kann man, wenn der gegebene Punkt P außerhalb der Normalen UA liegt, durch ihn und die Normale eine Ebene legen (II.), und dann läßt sich von ihm nur eine Senkrechte auf die Normale fällen (Fr. 57 IV.), daher auch nur eine Ebene durch P und normal zu UA legen (Fr. 181 XIII.). Liegt dagegen im V. Falle der gegebene Punkt P in der Normalen UA, so kann ebenfalls bloß eine auf UA normale Ebene durch den gegebenen Punkt P gelegt werden, weil diese (nach Fr. 181 XIII.) alle Normalen enthält, welche in P auf UA errichtet werden können.

VI. Über andere Bestimmungsweisen der Ebene vergl. Fr. 198 V. und Fr. 203 II.

183. Wenn fallen zwei Ebenen zusammen?

Zwei Ebenen fallen zusammen, wenn sie die in Fr. 182 I. bis V. aufgeführten Stücke gemein haben.

184. Welche Lagen kann eine Gerade gegen eine Ebene haben?

I. Eine Gerade G_1 (Fig. 168) liegt in einer Ebene E, d. h. alle ihre Punkte sind zugleich Punkte der Ebene E, sobald sie mit dieser Ebene zwei Punkte A und B gemein hat (Fr. 11 II., oder 12 II.). Vergl. Fr. 186 XV.

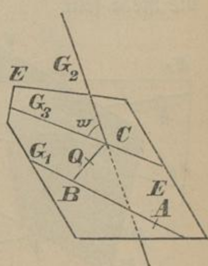

Fig. 168.

II. Hat eine Gerade G (Fig. 169 S. 220) bloß einen Punkt A mit einer Ebene E gemein, so liegen ihre anderen Punkte zu beiden Seiten der

Ebene E, also in den beiden halbbegrenzten Räumen, in welche die Ebene E den unbegrenzten Raum teilt.

Der Beweis lautet wörtlich wie in Fr. 181 VIII., nur ist überall D statt U zu setzen.

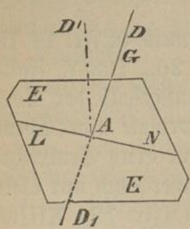

Fig. 169.

III. Eine Gerade G, welche bloß einen Punkt A mit einer Ebene E gemein hat, (kann die Ebene nicht berühren, sondern) muß die Ebene E durchdringen oder schneiden (II.).

Der Punkt A, in welchem die Gerade G die Ebene E durchdringt, heißt die Spur der Geraden G in der Ebene E.

IV. Eine Gerade schneidet eine Ebene nur in einem Punkte (I.).

V. Eine Gerade schneidet eine Ebene, wenn einer ihrer Punkte in der Ebene, ein anderer außerhalb der Ebene liegt (I.).

VI. Eine Gerade schneidet eine Ebene, wenn sie durch zwei zu verschiedenen Seiten der Ebene liegende Punkte gelegt ist.

VII. Es bleibt nun noch ein dritter Fall denkbar, nämlich daß eine unbegrenzte Gerade G ganz auf der einen Seite einer Ebene E läge, also mit der Ebene E gar keinen Punkt gemein hätte; eine solche Gerade soll parallel (//) zur Ebene E genannt werden. In Fr. 196 ff. wird davon weiter die Rede sein.

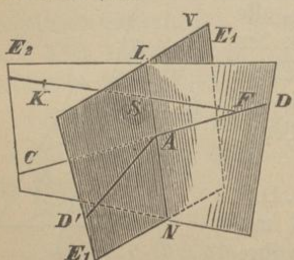

Fig. 170.

185. Welche Lagen einer Ebene gegen eine Ebene sind denkbar?

I. Eine Ebene E_1 kann mit einer andern Ebene E_2 nicht bloß einen Punkt A (Fig. 170) gemein haben. Da nämlich E_1 und E_2 nicht zusammenfallen (Fr. 183) sollen, so kann man durch A höchstens eine Gerade ziehen, welche beiden

Ebenen gemein ist; sicher läßt sich also in E_2 durch A eine Gerade, z. B. DC, ziehen, welche nicht in E_1 liegt; da nun DC doch mit E_1 den Punkt A gemein hat, so muß sie E_1 schneiden (Fr. 184 V.), d. h. die Punkte von DC liegen teils auf der einen, teils auf der andern Seite von E_1 (Fr. 184 II.). Verbindet man nun irgend einen in der Ebene E_2 und zwar etwa jenseits E_1 gelegenen Punkt K mit einem in der Geraden DC, aber diesseits der Ebene E_1 liegenden Punkte F, so muß die Strecke KF die Ebene E_1 in einem Punkte S durchdringen (Fr. 184 VI.), und die durch diesen Punkt S und den Punkt A gelegte Gerade LN liegt nicht bloß (wie KF) in E_2, sondern zugleich auch in E_1 (Fr. 184 I.), weil S und A auch in E_1 liegen.

II. Der Durchschnitt zweier (unbegrenzten) Ebenen ist also eine (unbegrenzte) Gerade.

Die Gerade LN, in welcher die Ebene E_1 die Ebene E_2 schneidet, heißt die Spur der Ebene E_1 in der Ebene E_2.

III. Wenn zwei Ebenen zusammenfallen, sagt Fr. 183.

IV. Als dritter Fall der Lage zweier Ebenen gegen einander wäre nur noch denkbar, daß eine unbegrenzte Ebene E_1 ganz auf der einen Seite einer andern unbegrenzten Ebene E_2 liegt, also mit der Ebene E_2 gar keinen Punkt gemein hat. Eine solche Ebene E_1 soll der Ebene E_2 parallel (//) heißen. In Fr. 205 werden weitere Untersuchungen darüber folgen.

186. Welche Lagen gegen einander können bei zwei Geraden im Raum vorkommen?

I. Liegt die Gerade G_1 (Fig. 171) in der Ebene E, während die Gerade G_2 diese Ebene in dem außerhalb G_1 liegenden Punkte C schneidet, so kann G_2 die Gerade G_1 nicht schneiden, weil alle Punkte von G_1 in E liegen (Fr. 184 I.), von G_2 hingegen nur der Punkt C.

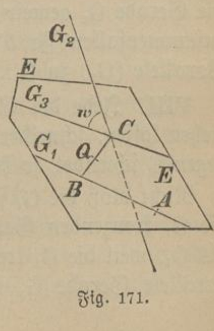

Fig. 171.

II. Gäbe es ferner eine Ebene E_1, in welcher G_1 und G_2 zugleich enthalten wären, so müßte der in G_2 liegende Punkt C sowohl als auch G_1 in dieser Ebene E_1 liegen; C und G_1 lagen aber auch in E, und deshalb müßte E_1 mit E zusammenfallen (Fr. 183, 182 II.), könnte jedoch dann sicher nicht G_1 und G_2 zugleich enthalten, weil ja E von G_2 geschnitten wurde.

III. Wenn also G_2 eine Ebene E, welche G_1 enthält, in einem außerhalb G_1 liegenden Punkte C schneidet, so läßt sich keine Ebene durch G_1 und G_2 zugleich legen.

IV. Zwei Gerade, durch welche man eine Ebene legen kann, sind entweder parallel, oder sie schneiden sich (Fr. 56 V.).

V. Zwei Gerade kreuzen sich, wenn es nicht möglich ist, eine Ebene durch beide zugleich zu legen (III.).

VI. Durch zwei parallele und ebenso durch zwei sich schneidende Gerade kann man stets eine Ebene legen (Fr. 26; 182 III. und IV.).

VII. Auch im Raum kann man durch einen gegebenen Punkt C nur eine Parallele G_3 zu einer gegebenen (nicht durch C gehenden) Geraden G_1 ziehen (vergl. Fr. 119, 57 I.).

G_3 liegt nämlich in der Ebene E (Fig. 171), welche man durch C und G_1 legen kann. Wäre nun auch die durch C gehende Gerade G_2 zu G_1 parallel, so würde die durch G_2 und G_1 gelegte Ebene E_1 (VI.) mit E zusammenfallen (Fr. 183 und 182 II.), weil sie mit E den Punkt C und die Gerade G_1 gemein hat; dann müßte aber G_2 auch mit G_3 zusammenfallen (Fr. 57 I.); es giebt daher durch C nur eine Parallele (G_3) zu G_1.

VIII. Jede der Geraden, welche sich außer G_3 durch C ziehen lassen, schneidet G_1, wenn sie in E liegt, wenn sie dagegen E schneidet, so kreuzt sie G_1.

Nicht bloß die G_1 schneidenden (Fr. 56 I.), sondern auch die G_1 kreuzenden Geraden haben eine andere Richtung als G_1, weil die G_1 kreuzenden Geraden, z. B. G_2, die zu G_1 parallele Gerade G_3 in C schneiden (Fr. 26), daher eine andere Richtung als G_3 und die mit ihr gleichgerichtete (Fr. 56 IV.) G_1 haben.

IX. Zwei sich kreuzende Gerade haben weder einen Punkt mit einander gemein (V. und I.; vergl. VI., oder Fr. 13), noch haben sie gleiche Richtung (VIII.). Vergl. XII.

X. Es läßt sich also durch einen gegebenen Punkt C auch im Raume nur eine Gerade G_3 ziehen, welche mit G_1 in der Richtung übereinstimmt (VIII.). Vergl. Fr. 57 I.

XI. Zwei Gerade von gleicher Richtung sind (auch im Raume) parallel (X. und Fr. 56 II.), liegen also stets in einer Ebene (VI.).

XII. Die Richtungsverschiedenheit zweier sich kreuzenden Geraden G_1 und G_2, Fig. 171, mißt man durch den Winkel w, welchen zwei durch denselben Punkt C gehende Parallele zu G_1 und G_2 einschließen; diesen Winkel nennt man kurzweg den Winkel *zwischen* den beiden sich kreuzenden Geraden.

XIII. Haben zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 171) von verschiedener Richtung keinen Punkt gemein, so muß jede durch die eine Gerade G_1 und einen Punkt C von G_2 gelegte Ebene E von G_2 geschnitten werden (d. h. G_1 und G_2 kreuzen sich), weil sonst G_1 und G_2 sich schneiden müßten (Fr. 56 III.).

XIV. Bei zwei Geraden im Raum können also nur die in IV. und V. aufgeführten Fälle vorkommen; denn die beiden Geraden haben:

{entweder *einen* Punkt gemein (schneiden sich),
{oder *keinen* Punkt gemein und dabei:
  {*gleiche* Richtung (sind parallel),
  {*ungleiche* Richtung (kreuzen sich).

XV. Nach VI. (oder VII.) ist Fr. 184 I. zu ergänzen:

Die Gerade G_1 liegt in der Ebene E, wenn sie durch einen Punkt A in E hindurchgeht und zu einer in E liegenden Geraden parallel ist. Vergl. Fr. 198 III.

XVI. Durch einen gegebenen Punkt Q läßt sich *höchstens eine* Gerade CB, Fig. 171, legen, welche zwei sich kreuzende (nicht durch Q gehende) Gerade G_1 und G_2 zugleich schneidet.

Eine durch Q und G_1 gelegte Ebene E muß (nach V.) entweder G_2 schneiden (wie in III.), oder G_2 parallel sein (Fr. 184 VII.). Jede durch Q und einen Punkt von G_1 gelegte Gerade liegt in E (Fr. 184 I.); ist demnach $G_2 \parallel E$, d. h. hat G_2 keinen Punkt mit E gemein, so kann auch G_2 von keiner durch Q und einen Punkt in G_1 gelegten Geraden geschnitten werden; wenn dagegen G_2 die Ebene E in C schneidet, so kann (weil ja G_2 nur den Punkt C mit E gemein hat) nur die durch C und Q gelegte Gerade CQ die beiden Geraden G_1 und G_2 zugleich schneiden, und CQ schneidet beide wirklich, sofern nicht $CQ \parallel G_1$ ist.

187. **Wie zieht man durch einen gegebenen Punkt eine Normale zu einer gegebenen Ebene?**

I. Will man von einem Punkte K (Fig. 172) außerhalb einer Ebene E auf diese Ebene eine Normale fällen, so fälle man von K auf eine in der Ebene E liegende Gerade BC eine Senkrechte KF (Fr. 120), errichte darauf in der Ebene E eine durch den Fußpunkt F der ersten Senkrechten KF gehende zweite Senkrechte FQ auf der Geraden BC (Fr. 121) und fälle endlich von dem Punkte K auf die zweite Senkrechte FQ eine dritte Senkrechte KA (Fr. 120);

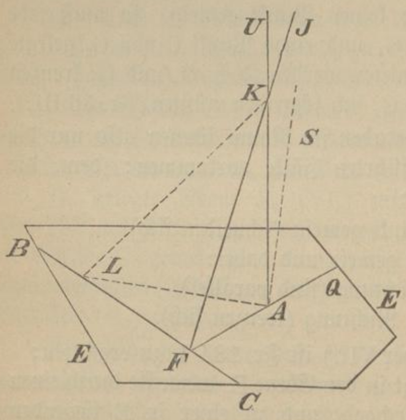

Fig. 172.

dann steht KA (auch wenn sie mit KF zusammenfällt) auf der Ebene E normal.

Bew. Zieht man noch KL und AL nach einem in BC gelegenen Punkte L, so ist:

$$\begin{array}{ll} & KF \perp FL \text{ (Konstr.)} \\ \hline & \overline{KL}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{FL}^2 \text{ (Fr. 160 III.)} \\ KA \perp FA & AF \perp FL \text{ (Konstr.)} \\ \hline \overline{KF}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{AK}^2 & \overline{FL}^2 = \overline{AL}^2 - \overline{FA}^2 \text{ (Fr. 160 III.)} \end{array}$$

$$\overline{KL}^2 = \{\overline{FA}^2 + \overline{AK}^2\} + \{\overline{AL}^2 - \overline{FA}^2\} \text{ (Fr. 20 IV.)}$$

$$\overline{KL}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{AL}^2$$

$$KA \perp AL \text{ (Fr. 170 VII.)}$$

$$KA \perp QF \text{ (Konstr.)}$$

$$KA \perp E \text{ (Fr. 181 XI.)}.$$

Fiele KA mit KF zusammen, so wäre KF ebenfalls auf E normal (Fr. 181 XI.), weil dann KF $\perp$ BC und KF $\perp$ FQ.

II. Will man in einem Punkte A einer Ebene E (Fig. 172) auf dieser Ebene eine Normale errichten, so fälle man von A auf eine in E liegende, nicht durch A gehende Gerade BC eine Senkrechte AF (Fr. 120), dann ziehe man in einer andern durch BC gelegten Ebene E_1 in F eine Senkrechte FJ auf BC, und errichte endlich in der durch AF und FJ bestimmten Ebene E_2 im Punkte A eine Senkrechte AU auf AF (Fr. 121); dann steht UA auf E normal.

Bew. Schneiden sich AU und FJ in K, so ist der Beweis gleichlautend mit dem in I. (oder Fr. 181 I.).

Wäre AU // FJ, so brauchte man in E_2 bloß eine AU schneidende Gerade FK_1 zu ziehen; dann wäre, weil BC $\perp$ E_2 (Fr. 181 XI.), auch $FK_1 \perp$ BC (Fr. 181 X.), und man könnte den Beweis wieder wie in I. führen.

188. Wie viele Normale zu einer gegebenen Ebene lassen sich durch einen gegebenen Punkt ziehen?

I. Von einem Punkte K kann auf eine Ebene E nur eine Normale herabgefällt werden; denn wäre in Fig. 172 KA $\perp$ E und auch KF $\perp$ E, so hätte das nach Fr. 186 VI.

ebene Dreieck KAF zwei rechte Winkel (Fr. 181 X.), was Fr. 69 IV. widerspräche.

II. In einem Punkte A (Fig. 172) einer Ebene E läßt sich auf E nur eine Normale AU errichten; denn wäre AS auch normal zu E, und würde E in der Geraden AF von der durch AU und AS bestimmten (Fr. 182 III.) Ebene E' geschnitten (Fr. 185 II.), so müßte nach Fr. 181 X. $\angle UAF = 90° = \angle SAF$ sein, was nach Fr. 20 III. unmöglich ist.

III. Durch einen gegebenen Punkt läßt sich also nur eine Gerade normal zu einer gegebenen Ebene ziehen.

189. Welche Sätze über die Normalen sind noch zu erwähnen?

I. Zieht man in einer Ebene E (Fig. 172) vom Fußpunkte A der Normalen UA die Gerade AF senkrecht zu einer in E liegenden Geraden BC, so steht die letztere Gerade BC auch senkrecht auf jeder Geraden KF, welche einen Punkt K der Normalen mit dem Schnittpunkte F zwischen AF und BC verbindet.

Der vorstehende Satz ist von jenem in Fr. 181 III. nicht verschieden, weil dort UA normal zur Ebene E des $\triangle ABC$ ist (Fr. 181 XI.).

II. Fällt man auf eine in der Ebene E liegende Gerade BC (Fig. 172) eine Senkrechte KF von einem Punkte K der Normalen UA auf E, so steht die Gerade AF, welche die Fußpunkte F und A der Senkrechten KF und der Normalen UA verbindet, auch auf der Geraden BC senkrecht.

Träfe die von A auf BC gefällte Senkrechte die Gerade BC in F_1, dann wäre $KF_1 \perp BC$ (I.); da sich aber von K nur eine Senkrechte auf BC ziehen läßt (Fr. 57 IV.), so muß KF_1 mit KF, d. h. F_1 mit F zusammenfallen, und es ist:

$$AF \perp BC.$$

III. BC steht auch senkrecht auf der durch die Normale UA und die Gerade AF, oder KF gelegten Ebene (Fr. 181 XI.).

IV. Zwei Normalen KA und YF (Fig. 173) auf derselben Ebene E sind parallel.

Um zunächst zu beweisen, daß sich — was wegen Fr. 26 erforderlich ist — durch KA und YF eine Ebene legen läßt, ziehe man auf der ihre Fußpunkte A und F verbindenden Strecke AF in F eine in E liegende Senkrechte BC; dann steht BC normal auf der Ebene KFA (III.); weil ferner YF ⊥ E vorausgesetzt wurde, so ist auch $\angle$YFC $= 90°$ (Fr. 181 X.), und YF liegt ebenfalls in der Ebene KFA (Fr. 181 XIII.); somit liegen KA und YF in derselben Ebene.

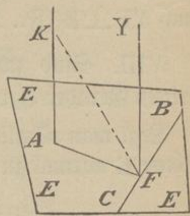

Fig. 173.

Da nun nach Fr. 181 X. $\angle KAF = 90° = \angle YFA$, so ist UF // KA (Fr. 62 II. 3.).

V. Steht eine Gerade G auf der Ebene E normal, so ist dadurch die Richtung der Geraden bestimmt (IV.); denn alle parallele Gerade haben ja gleiche Richtung (Fr. 56 IV.). Vergl. auch Fr. 188 III. und Fr. 25 II.

VI. Wird eine Ebene E von der einen KA von zwei parallelen Geraden in A geschnitten, so wird sie auch von der anderen YF geschnitten. Denn die durch KA und YF gelegte Ebene (Fr. 186 VI.) schneidet (Fr. 185 II.) E in einer Geraden AF, welche (nach Fr. 60 II.) YF in F schneidet. YF hat demnach mit der in E liegenden AF, also auch mit E selbst den Punkt F gemein, außerdem aber keinen Punkt, weil sonst YF ganz in E läge (Fr. 184 I.) und KA kreuzen müßte (Fr. 186 III., V.), während doch KA // YF sein sollte.

VII. Steht die eine KA (Fig. 173) von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene E normal, so steht auch die andere YF auf E normal.

Da nämlich E von KA in A geschnitten wird (Fr. 181 X.), so wird E auch von YF geschnitten (VI.). Zieht man nun durch den Schnittpunkt F zwischen E und YF erst in der durch KA und YF gelegten (Fr. 186 VI.) Ebene E_1 die Geraden FA und FK nach den Punkten A und K in KA, darauf in E die Gerade BFC ⊥ FA, so ist BC normal zu der durch

FK, KA und YF gehenden Ebene E_1 (I. und III.), also $BC \perp YF$ (Nr. 181 X.). Da aber $YF \parallel KA$ vorausgesetzt wurde und demnach $YF \perp FA$ (Nr. 62 V.) sein muß, so ist auch $YF \perp E$ (Nr. 181 XI.).

VIII. Sind zwei Gerade G_1 und G_2 (im Raum) einer dritten Geraden G_3 parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Legt man nämlich durch irgend einen Punkt von G_3 eine Ebene E normal zu G_3 (Nr. 181 XI.), so ist nach VII.:

$$\frac{G_1 \perp E \quad \text{und} \quad G_2 \perp E}{G_1 \parallel G_2 \text{ (IV.).}}$$

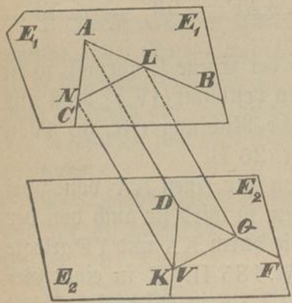

Fig. 174.

IX. Sind die Schenkel zweier nicht in derselben Ebene liegender Winkel BAC und FDK (Fig. 174) paarweise gleichsinnig parallel, so sind die Winkel gleich. Vergl. Nr. 63 I.

Vor. $AB \parallel DF$,
$AC \parallel DK$.

Beh. $\angle BAC = \angle FDK$.

Konstr. Man mache $AL = DQ$, $AN = DV$ und ziehe die Strecken AD, LQ, NV.

Bew. $\underline{AL \# DQ} \quad \underline{AN \# DV}$ (Vor. und Konstr.)

$DA \# LQ \quad DA \# NV$ (Nr. 108 V., III.)

$\overline{\underline{LQ \# NV}}$ (VIII. und Nr. 20 V.)

$LN = QV$ (Nr. 108 V., III.)

$\underline{AL = DQ, \quad AN = DV}$ (Konstr.)

$\angle LAN = \angle QDA$ (Nr. 80 I., 67 II.).

X. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß auch der Satz Nr. 63 II. noch für in verschiedenen Ebenen liegende Winkel gilt.

190. Was ist die Projektion eines Punktes auf eine Ebene?

I. Den Fußpunkt N (Fig. 175) der vom Punkte P auf die Ebene E gefällten Normalen PN nennt man die (rechtwinkelige, orthogonale oder normale) **Projektion** des Punktes P auf die als **Projektionsebene** gewählte Ebene E.

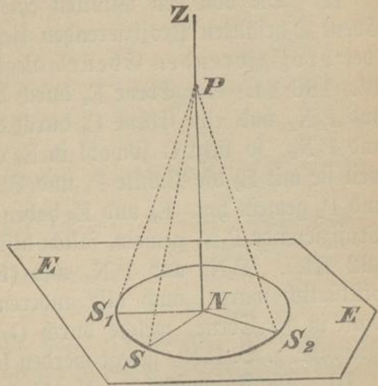

Fig. 175.

Die Normale PN heißt die **Projizierende**.

II. Jeder Punkt P hat nur **eine** Projektion N auf dieselbe Ebene E (Fr. 188 I.).

III. Der Punkt N ist zugleich die Projektion aller in der durch P auf E gefällten Normalen ZN gelegenen Punkte oder die Projektion der ganzen Normalen ZN.

IV. Die Projizierende PN ist kleiner als jede andere von dem Punkte P nach einem Punkte S in der Projektionsebene E gezogene Gerade PS (Fr. 181 X., 74 VIII.).

Die Projizierende PN mißt den **Abstand** oder die **Entfernung des Punktes P von der Ebene E**.

V. Nach Fr. 160 III. ist $\overline{PN}^2 + \overline{NS}^2 = \overline{PS}^2$.

VI. Ist $NS = NS_1 = NS_2 = \cdots$, so ist auch $PS = PS_1 = PS_2 = \cdots$ (V.), d. h. alle Punkte in E, welche im Kreise um N liegen, haben gleiche Entfernung von demselben Punkte P der Projizierenden NZ. Vergl. Fr. 47 II.

VII. Ist umgekehrt $SP = S_1P = S_2P = \cdots$, so ist nach V. auch $NS = NS_1 = NS_2 = \cdots$, d. h. alle Punkte der Ebene E, welche von dem Punkte P gleichweit entfernt sind, liegen im Kreise um N (Fr. 47 II.).

191. Was ist die Projektion einer Geraden auf eine Ebene?

I. Die Projektionen sämtlicher Punkte einer Geraden G auf eine Ebene E (Fr. 190) bilden die Projektion G' der Geraden G auf die Ebene E.

II. Die von den Punkten einer Geraden G auf eine Ebene E gefällten Projizierenden liegen in derselben Ebene (der projizierenden Ebene). Legt man nämlich (Fr. 189 IV., 186 VI.) eine Ebene E_2 durch die Projizierenden P_1N_1 und P_2N_2 und eine Ebene E_3 durch die Projizierenden P_1N_1 und P_3N_3, so liegt G sowohl in E_2 als in E_3 (Fr. 184 I.), weil sie mit E_2 die Punkte P_1 und P_2, mit E_3 die Punkte P_1 und P_3 gemein hat. E_2 und E_3 haben außer G auch noch die Projizierende P_1N_1 gemein, fallen also zusammen (Fr. 183, 182 III.). P_2N_2 und P_3N_3 und (weil ja P_2 und P_3 ganz willkürlich waren) auch alle anderen Projizierenden liegen somit in der Ebene, welche durch G und irgend eine Projizierende, z. B. P_1N_1, gelegt werden kann.

III. Die Fußpunkte N_1, N_2, N_3 2c. der von Punkten P_1, P_2, P_3 2c. einer Geraden G auf eine Ebene E gefällten Normalen liegen sämtlich in der Geraden G', in welcher nach Fr. 185 I. und II. die Ebene E von der durch die Normalen zu legenden (II.) Ebene geschnitten wird.

IV. Die Projektion einer Geraden G auf eine Ebene E ist wegen I. und III. wieder eine Gerade G'. Steht jedoch G auf E senkrecht, wie ZN in Fig. 175, so besitzt sie als Projektion (nach Fr. 190 III.) bloß den Punkt N.

Jede Gerade hat nur eine Projektion auf dieselbe Ebene.

V. Schneidet die Gerade G (Fig. 176) die Projektionsebene E, so liegt die Spur S in der Projektion G'; zur Bestimmung der letzteren braucht man dann außer S nur noch die Projektion N eines einzigen Punktes P der Geraden G.

192. Wodurch zeichnet sich der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene aus?

I. Der Winkel w (Fig. 176) zwischen einer Geraden G und ihrer Projektion G' auf die Ebene E heißt der Neigungswinkel der Geraden G gegen die Ebene E.

II. Der spitze Neigungswinkel w der Geraden G negeg die Ebene E und der Winkel NPS zwischen G und einer Normalen NP zur Ebene E ergänzen sich zu 90° (Fr. 71 II.).

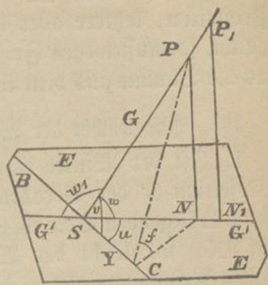

Fig. 176.

III. Der (spitze) Neigungswinkel w einer Geraden G gegen eine Ebene E ist kleiner (sein Nebenwinkel w_1 also größer) als jeder Winkel PSC = v, welchen die Gerade G mit einer in der Ebene E durch die Spur S gezogenen Geraden BC einschließt. (Die Betrachtung überstumpfer Winkel bleibe dabei ausgeschlossen. Vergl. Fr. 193 VI.)

Bew. Macht man SY = SN, so muß, weil PS = PS (Fr. 20 I.) und PY > PN (Fr. 190 IV.) ist, nach Fr. 78 III. $\angle v > \angle w$ sein und wegen Fr. 39 IV. weiter $180° - v < 180° - w$ oder $\angle PSB < w_1$.

Ganz dieselben Schlüsse gelten für $\angle PSB$; also ist auch $\angle w < \angle PSB$, und daraus folgt nach Fr. 39 IV.:

$$180° - w_1 < 180° - v \quad \text{oder} \quad w_1 > v.$$

IV. Würde $\angle w = 90°$, so müßte auch $\angle w_1 = 90°$ und $v = 90°$ werden, weil nach III. $\angle w < \angle v < \angle w_1$ sein muß. Dann wäre die in der Ebene PNS liegende Gerade $G \perp E$ (Fr. 181 X.). — Vergl. Fr. 189 VII.; denn jetzt ist G // PN.

V. Hätte man in Fig. 176 $NY \perp BC$ gemacht, so wäre auch $PY \perp BC$ (Fr. 189 I.). Man kann also die Strecke SY aus PS entweder durch einmalige Projektion unter dem Winkel v, oder durch zweimalige Projektion: erst unter dem Neigungswinkel w und dann unter dem in der Ebene E liegenden, von G' und BC gebildeten Winkel NSC = u erhalten.

Da nun nach Fr. 112 IX. die Projektion von PS unter $\angle(u + w)$ kleiner sein würde, als die durch die zweimalige Projizierung unter $\angle w$ und dann unter $\angle u$ erlangte Projektion, letztere aber der Projektion von PS unter $\angle v$ gleicht, so muß wegen Fr. 112 IV. der Winkel v kleiner sein als die Summe aus dem Winkel u und dem Neigungswinkel w.

193. Wie wächst der Winkel v mit dem Winkel u?

I. Ist der Winkel $NSC = u$ (Fig. 176), welchen die Projektion G' der Geraden G mit dem in der Projektionsebene E liegenden Strahle SC einschließt, $= 0$, fällt also SC auf SN, so gleicht der Winkel v zwischen G und SC dem spitzen Neigungswinkel w der Geraden G gegen E.

II. Ist der Winkel u spitz ($0 < \angle u < 90°$), so fällt der Fußpunkt Y der vom Fußpunkte N der Normalen PN auf SC gefällten Senkrechten NY zwischen S und C (Fr. 71 V.), und da $\angle PYS = 90°$ (Fr. 189 I.), so ist auch $\angle v$ spitz (Fr. 70 I.). Wegen Fr. 192 III. ist also $\angle w < \angle v < 90°$.

Je größer aber $\angle u$ wird, desto näher rückt Y an S heran, desto größer wird also auch $\angle v$ (Fr. 112 III. und IV.).

Zugleich ist stets $\angle v > \angle u$; wenn man nämlich das $\triangle PYS$ um YS in die Ebene E niederklappt, so kommt YP auf YN zu liegen (Fr. 31 und 39 III.), P fällt aber von Y aus jenseits N (Fr. 190 IV.), also SP jenseits SN.

III. Ist $\angle u = 90°$, so fällt Y mit S zusammen (Fr. 57 IV.), und es ist auch $\angle v = 90°$ (Fr. 189 I.).

IV. Ist der Winkel u stumpf ($90° < \angle u < 180°$), so fällt Y in die Verlängerung SB (Fig. 177) des Strahls SC (Fr. 71 V.), $\angle PSY$ ist daher spitz (Fr. 70 I.), v stumpf (Fr. 39 IV.). Wegen Fr. 192 III. ist aber

$$90° < \angle v < \angle w_1.$$

Je größer $\angle u$ wird, desto weiter rückt Y von S gegen B hin, desto größer wird v (Fr. 39 IV.). Die größte Entfernung von S, welche Y erreichen kann, gleicht aber nach Fr. 160 III. der Strecke SN. Vergl. V.

Beim Niederklappen des $\triangle$ PSY in die Ebene E fällt jetzt P von Y aus wieder jenseits N, also P und SP in den Winkelraum NSC, d. h. jetzt ist $\angle v < \angle u$.

V. Ist $\angle u = 180°$, so fällt wieder Y auf N, aber SC in die Verlängerung von SN; daher ist $\angle v = \angle w_1$.

VI. Wird $\angle u$ überstumpf, so vertauschen in Fig. 176 und 177 die Strahlen SB und SC ihre Rolle. Während also $\angle u$ von 180° bis 360° wächst, wiederholen sich die schon dagewesenen Werte des $\angle v$, d. h. es wird der erst stumpfe Winkel v wieder kleiner, darauf = 90° (bei u = 270°), dann spitz und endlich wieder = $\angle w$.

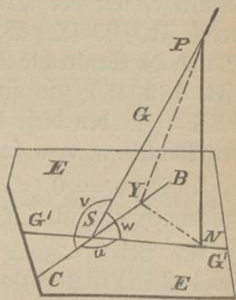

Fig. 177.

VII. Macht man in den beiden Fig. 176 und 177 SP = SP und ist $\angle$ NSC in Fig. 176 dem $\angle$ NSB in Fig. 177 gleich, so ist $\triangle PNS \cong \triangle PNS$ (Fr. 81 II.), also NS = NS (Fr. 67 II.); daher weiter $\triangle NSY \cong \triangle NSY$ (Fr. 81 II.) und SY = SY (Fr. 67 II.); daher endlich $\triangle PSY \cong \triangle PSY$ (Fr. 81 I.) und $\angle$ PSC in Fig. 176 gleicht (Fr. 67 II.) dem $\angle$ PSB in Fig. 177.

Wenn man also in E links und rechts von SN einen Strahl unter demselben Winkel (u) gegen SN anträgt, so machen diese beiden Strahlen auch gleiche Winkel (v) mit SP.

VIII. Ebenso müssen daher auch zwei in E gelegene Strahlen gleiche Winkel mit SP bilden, wenn der eine unter dem $\angle u$, der andere unter dem $\angle (360° - u)$ gegen SN geneigt ist.

IX. Aus dem Vorhergehenden folgt noch, daß jeder $\angle v$, welcher größer als $\angle w$, aber kleiner als $\angle w_1$ ist, zweimal vorkommt und zwar bei zwei Strahlen SC und SC_1, deren Winkel C_1SC (= 2 u) von SN halbiert wird.

194. Wie wächst der Winkel $f = PYN$ mit dem Winkel u?

Ist w wieder der (spitze) Neigungswinkel der Geraden G (Fig. 176 und 177) gegen die Projektionsebene E und N der Fußpunkt der von dem Punkte P in G auf E gefällten Normalen PN, legt man in der Ebene E durch die Spur S der Geraden G einen Strahl SC, welcher mit G den (hohlen) Winkel v, mit der Projektion G′ von G aber den (hohlen, vergl. Fr. 193 IX.) Winkel u einschließt, und fällt man von P und N Senkrechte PY und NY auf die Gerade BSC (Fr. 189 II.), so finden zwischen dem (spitzen) Winkel $PYN = f$, den diese beiden Senkrechten einschließen, und den Winkeln u, v, w folgende Beziehungen statt:

I. Bei $u = 0$ ($v = w$, Fr. 193 I.) fällt PY mit PN zusammen, also ist $\angle f = 90°$ (Fr. 181 X.).

II. Bei $0 < \angle u < 90°$ ($\angle w < \angle v < 90°$, Fr. 193 II.) ist NY zwar stets kleiner als NS (Fr. 74 VIII.), wird aber um so größer (Fr. 160 III.), je kleiner SY, je größer also $\angle u$ (und $\angle v$) wird. Klappt man nun das $\triangle$ PYN um PN in die Ebene PSN, so kommt Y stets zwischen N und S zu liegen, rückt aber desto näher an S, je größer $\angle u$ wird. Daher ist stets $90° > \angle f > \angle w$ (Fr. 69 VII.), und $\angle f$ nimmt ab, wenn $\angle u$ (und $\angle v$) zunimmt.

III. Bei $\angle u = 90°$ ($\angle v = 90°$, Fr. 193 III.) fällt PY auf PS, also ist $\angle f = \angle w$.

IV. Bei $90° < \angle u < 180°$ ($90° < \angle v < \angle w_1$, Fr. 193 IV.) fällt beim Umklappen des $\triangle$ PYN in die Ebene PSN wieder Y stets zwischen S und N, aber um so näher an N, je größer $\angle u$ wird. Es ist daher zwar wieder $90° > \angle f > \angle w$ (Fr. 69 VII.), aber $\angle f$ wächst mit $\angle u$ (und $\angle v$) gleichzeitig.

V. Bei $\angle u = 180°$ ($\angle v = \angle w_1$, Fr. 193 V.) wird wieder $\angle f = 90°$.

VI. Bei $\angle u > 180°$ wiederholen sich dieselben Werte von f, ähnlich wie in Fr. 193 VI.

VII. Zieht man in der Ebene E zwei Strahlen SC und SC_1 unter gleichem Winkel ($u = u_1$) gegen SN, so ist wieder $\angle v = \angle v_1$ und $\triangle NSY \cong \triangle NSY_1$ (Fr. 193 VII.), daher $NY = NY_1$ (Fr. 67 II.), $\triangle PNY \cong PNY_1$ (Fr. 81 I.) und wegen Fr. 67 II. endlich $\angle f = \angle f_1$.

VIII. Aus dem Vorhergehenden folgt noch, daß jeder $\angle f$, welcher kleiner als 90°, aber größer als w ist, zweimal vorkommt, und zwar bei zwei Strahlen SC und SC_1, deren Winkel C_1SC von SN halbiert wird ($\angle u = \angle u_1$), welche also nach Fr. 193 IX. mit SP gleiche Winkel machen ($\angle v = \angle v_1$).

195. **Wenn schneidet eine Gerade eine Ebene?**

Die Gerade G (Fig. 176) schneidet die Ebene E, wenn G nicht ihrer Projektion G' auf die Ebene E parallel ist, oder wenn G nicht auf einer aus einem Punkte P in G auf die Ebene E gefällten Normalen PN senkrecht steht, oder wenn zwei aus den Punkten P und P_1 in G auf E gefällte und auf derselben Seite von E liegende Normalen PN und P_1N_1 ungleich sind.

In allen drei Fällen liegen die Gerade G und ihre Projektion G' (Fr. 191 II.), also auch PN und P_1N_1 in derselben Ebene, zugleich schneiden sich G und G' (nach Fr. 26, oder Fr. 62 IV., oder Fr. 108 XIII. und XIV.), und da G' ganz in E liegt (Fr. 191 I.), so ist der Schnittpunkt zwischen G und G' zugleich ein Punkt vor E, d. h. G schneidet E (Fr. 184 III., V.).

196. **Wie zieht man eine Gerade parallel zu einer Ebene?**

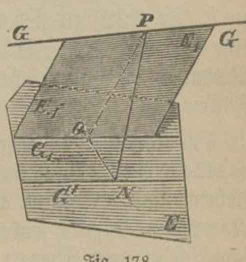

Fig. 178.

I. Eine Gerade G (Fig. 178) ist einer Ebene E parallel (Fr. 184 VII.), wenn sich in E eine zu G parallele Gerade G_1 ziehen läßt.

Denn dann kann man durch G und G_1 eine Ebene E_1 legen (Fr. 186 VI.), und wenn es nun einen Punkt, etwa Q, gäbe, welchen G mit E gemein hätte, so müßte Q in E und G zugleich und (weil alle Punkte von G in E_1 liegen, Fr. 184 I.) auch in E_1 liegen, also zugleich in E und E_1, d. h. in der Geraden G_1, welche E und E_1 gemein haben (Fr. 185 II.). Da aber G_1 und G nach der Voraussetzung keinen Punkt gemein haben (Fr. 26), so hat auch G keinen Punkt mit E gemein, und es ist $G \parallel E$.

II. Eine Gerade G ist daher auch einer Ebene E parallel, wenn sie ihrer Projektion G' auf die Ebene E parallel ist (I.).

III. Steht eine Gerade G (Fig. 178) auf der Normalen PN einer Ebene E senkrecht, so ist sie der Ebene E parallel. Denn G liegt mit ihrer Projektion G' in einer Ebene (Fr. 191 II. und III.); zugleich ist $\angle NPG = 90°$ (nach d. Vor.) und $\angle PNG' = 90°$ (Fr. 181 X.), daher $G \parallel G'$ (Fr. 62 II.) und $G \parallel E$ (II.).

IV. Sind die Projizierenden P_1N_1 und P_2N_2 (Fig. 179) zweier auf derselben Seite der Projektionsebene E gelegenen Punkte P_1 und P_2 einer Geraden G gleichlang, so ist diese Gerade G der Ebene E parallel. In der Ebene $N_1P_1P_2N_2$ (Fr. 191 II.) ist ja $P_1N_1 = P_2N_2$ (Vor.), daher $N_1 N_2 \parallel P_1P_2$ (Fr. 108 XV.), folglich $G \parallel E$ (II.).

V. Will man nun durch einen gegebenen, oder durch einen willkürlich gewählten Punkt P, Fig. 178, eine Gerade G parallel zur Ebene E ziehen, so braucht man nur durch P eine Parallele G zu einer in E gezogenen Geraden G_1 (Fr. 119), oder eine Senkrechte G auf der Normalen PN zu E (Fr. 122) zu ziehen; oder man errichtet auf E noch eine Normale N_2P_2 (Fr. 187 II.) von gleicher Länge wie die Normale NP und zieht G durch P und P_2. In allen drei Fällen ist $G \parallel E$ (I. bis IV.).

VI. Durch einen gegebenen Punkt P lassen sich unzählige parallele Gerade zu einer nicht durch P gehenden Ebene E ziehen; dieselben stehen aber wegen Fr. 195 sämtlich auf der Normalen PN zu E senkrecht, liegen also nach Fr. 181 XIII. sämtlich in einer Ebene.

197. Was folgt noch aus Fr. 195 und 196 über eine Gerade, welche eine Ebene schneidet, oder dieser parallel ist?

I. Ist die Gerade G (Fig. 178) der Ebene E parallel, so ist sie ihrer Projektion G' auf die Ebene E parallel, weil sie sonst nach Fr. 195 die Ebene schneiden müßte.

II. Ist die Gerade G der Ebene E parallel, so schneidet eine durch G und einen Punkt Q in E gelegte Ebene E_1 (Fr. 182 II.) die Ebene E in einer Parallelen G_1 zu G. Wäre nämlich G_1 nicht parallel zu G, so müßte sie G schneiden (Fr. 26), und G schnitte dann auch E, was der Voraussetzung widerspricht.

III. Ist die Gerade G der Ebene E parallel, so steht sie senkrecht auf jeder aus einem ihrer Punkte P auf die Ebene E gefällten Normalen PN. Sonst müßten sich ja G und E nach Fr. 195 schneiden.

IV. Alle aus einer zur Ebene E (Fig. 179) parallelen Geraden G nach dieser Ebene E gezogenen parallelen Strecken sind gleichlang. Legt man durch die Parallelen P_1S_1 und P_2S_2, welche die Ebene E in S_1 und S_2 schneiden, eine Ebene E_1 (Fr. 186 VI.), und schneidet letztere die Ebene E in S_1S_2, so ist:

$S_1S_2 \parallel P_1P_2$ (II.)
$P_1S_1 \parallel P_2S_2$ (Vor.)

$P_1S_1 = P_2S_2$ (Fr. 108 III.).

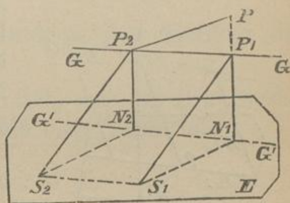

Fig. 179.

V. Ist die Gerade G der Ebene E parallel, so sind alle ihre Punkte, z. B. P_1 und P_2 (Fig. 179), gleichweit von E entfernt (Fr. 190 IV., 189 IV., 197 IV.).

Die Entfernung oder den Abstand der zur Ebene E parallelen Geraden G von E mißt eine aus G auf E gefällte Senkrechte PN.

VI. Lassen sich von zwei auf der nämlichen Seite der Ebene E gelegenen Punkten P_1 und P_2 einer Geraden G zwei gleiche Parallelen P_1S_1 und P_2S_2 nach dieser Ebene E ziehen, so ist $G \parallel E$.

Bew. In der Ebene (Fr. 186 VI.) $P_1S_1S_2P_2$ ist $P_1S_1 \#$ P_2S_2 (Vor.), folglich $S_1S_2 \parallel P_1P_2$ (Fr. 108 V.), folglich $G \parallel E$ (Fr. 196 I.).

VII. Schneidet die Gerade G die Ebene E, so schneidet G auch ihre Projektion G' auf E; dann steht ferner G schief auf jeder aus ihr auf E gefällten Normalen PN, endlich liegen die Punkte von G in ungleicher Entfernung von E. Sonst müßte ja $G \parallel E$ sein (Fr. 196 I. bis IV.).

VIII. Während eine Ebene und eine ihr parallele Gerade unzählige gemeinschaftliche Normalen besitzen (III.), haben eine Ebene und eine sie schneidende Gerade keine einzige gemeinschaftliche Normale (VII.).

198. Wie legt man eine Ebene parallel zu einer Geraden?

I. Will man eine Ebene E (Fig. 180) durch einen gegebenen, oder einen willkürlich gewählten Punkt Q parallel zu einer gegebenen Geraden G legen, so darf man nur (in der durch Q und G bestimmten Ebene E_1) durch Q eine Parallele G_1 zu G ziehen (Fr. 119); jede durch G_1 gehende Ebene E ist dann zu G parallel (Fr. 196 I.).

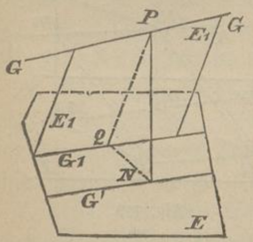

Fig. 180.

II. Sind zwei Gerade G und G_1 parallel, so kann man durch jede dieser beiden Geraden unzählige Ebenen parallel zur anderen Geraden legen (I.).

III. Ist die Gerade G parallel zur Ebene E, so liegt eine zu G parallele Gerade G_1 in der Ebene E, sobald sie mit dieser einen Punkt Q gemein hat. Vergl. 186 XV. — Nach Fr. 185 II. wird E von einer durch Q und G gelegten Ebene E_1 in einer Geraden G_2 geschnitten, nach Fr. 197 II. aber muß $G_2 \parallel G$ sein; nun gehen G_1 und die in E liegende

G_2 durch Q, sind beide // G und müssen deshalb wegen Fr. 186 VII. zusammenfallen.

IV. Durch einen gegebenen Punkt Q läßt sich nur eine Ebene E legen, welche zugleich zu zwei sich schneidenden, oder sich kreuzenden Geraden G_1 und G_2 parallel ist.

Um nämlich eine Ebene E zu erhalten, welche zu G_1 und G_2 zugleich parallel ist, müßte man nach I. durch Q eine Gerade $G_3 // G_1$ und eine andere Gerade $G_4 // G_2$ ziehen, und E muß dann sowohl durch G_3 als durch G_4 gehen; durch G_3 und G_4 läßt sich aber nur eine einzige Ebene legen (Fr. 182 III.).

V. Die Lage einer Ebene E läßt sich also auch durch einen ihrer Punkte Q und zwei Gerade G_1 und G_2 bestimmen, zu denen E parallel ist.

Aus einer Nebeneinanderstellung dieses Satzes mit Fr. 25 II. kann man eine Bestätigung dafür schöpfen, daß die Ebene zwei Ausdehnungen hat (Fr. 5 III.).

199. Wie verhält sich eine Strecke zu ihrer Projektion auf eine Ebene E?

I. Die Projektion N_1N_2 (Fig. 181) einer zur Projektionsebene E parallelen Strecke P_1P_2 ist dieser Strecke gleich.

Weil $P_1N_1 \# P_2N_2$ (Fr. 189 IV. und 197 V.), so ist auch: $N_1N_2 = P_1P_2$ (Fr. 108 V., III.).

II. Die Projektion N_1N_2 (Fig. 181) einer gegen die Projektionsebene E geneigten Strecke PP_2 ist kleiner als diese Strecke.

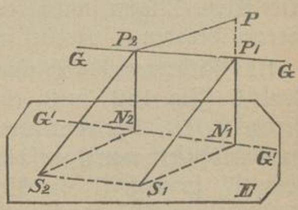

Fig. 181.

Da PP_2 nicht parallel zu N_1N_2 ist (Fr. 197 VII.), so kann man $P_2P_1 // N_2N_1$ machen und hat dann: $N_1N_2 = P_1P_2$ (I.) und $PP_2 > P_1P_2$ (Fr. 74 VIII.), daher auch $PP_2 > N_1N_2$.

(Dieser Beweis hört nicht auf zu gelten, wenn PP_2 die Ebene E in einem zwischen P und P_2 gelegenen Punkte schneidet.)

III. Eine Strecke P_1P_2, welche ihrer Projektion N_1N_2 gleicht, ist der Projektionsebene E parallel; denn sonst müßte nach II. die Projektion kleiner sein als die Strecke.

IV. Eine Strecke P_1P_2, welche größer ist als ihre Projektion N_1N_2, schneidet die Projektionsebene E; denn sonst müßte sie nach I. ihrer Projektion gleichen.

V. Ähnlich wie in I. läßt sich auch beweisen, daß $S_1S_2 \mathrel{\#} P_1P_2$, wenn $G \parallel E$ und $P_1S_1 \parallel P_2S_2$. Vergl. Fr. 197 IV.

200. Wie zieht man eine Gerade G senkrecht zu zwei sich kreuzenden Geraden G_1 und G_2?

I. Zieht man durch einen Punkt U in der einen G_2 (Fig. 182) von zwei sich kreuzenden Geraden G_1 und G_2 eine Gerade $G_3 \parallel G_1$ und legt durch G_2 und G_3 eine Ebene E (Fr. 182 III.), so ist $E \parallel G_1$ (Fr. 196 I.).

II. Nach Fr. 198 III. enthält E in I. zugleich alle Gerade, welche durch irgend einen Punkt in G_2 parallel zu G_1 gezogen werden können.

Daher läßt sich durch G_2 nur eine Ebene E legen, welche der anderen Geraden G_1 parallel ist.

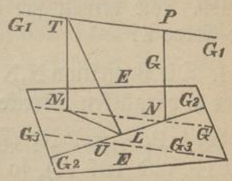

Fig. 182.

III. Zieht man durch einen Punkt U (Fig. 182) in G_2 eine Gerade $G_3 \parallel G_1$, legt man dann durch G_2 und G_3 eine Ebene E und projiziert man G_1 auf diese (zu G_1 parallele, Fr. 196 I.) Ebene E, so muß G_2 die Projektion G' von G_1 schneiden (Fr. 60 II., weil ja $G' \parallel G_1 \parallel G_3$ (Fr. 197 I. und Fr. 189 VIII.). Ist nun der Schnittpunkt N zwischen G' und G_2 die Projektion des Punktes P in der Geraden G_1, so ist $PN \perp E$ (Fr. 190 I.), daher $PN \perp G_2$ (Fr. 181 X.), zugleich aber auch $PN \perp G_1$ (Fr. 197 III.).

Fällt man also von N eine Senkrechte NP auf G_1, so ist NP die gesuchte gemeinschaftliche Normale G zu G_1 und G_2.

IV. Die Lage der in I. durch G_2 und G_3 gelegten, zu G_1 parallelen Ebene E ist wegen Fr. 200 II. nicht abhängig von der Lage des Punktes U; daher ändert sich auch weder die Lage der Projektion G' (Fr. 191 IV.), noch des Schnittpunktes N, wenn man auch einen anderen Punkt U in G_2 wählen wollte; endlich läßt sich in N nur eine einzige Normale NP auf E (Fr. 188 II.) errichten.

Daher giebt es nur eine einzige Gerade G, welche auf den sich kreuzenden Geraden G_1 und G_2 zugleich senkrecht steht.

V. Die auf den sich kreuzenden Geraden G_1 und G_2 zugleich senkrechte Strecke NP ist kürzer als jede andere Strecke TL, welche zwei Punkte T und L in G_1 und G_2 verbindet.

Macht man nämlich $TN_1 \perp E$ (Fr. 187 I.), und zieht man in der durch G_2 gelegten, zu G_1 parallelen (Fr. 200 II.) Ebene E noch N_1L, so ist $\angle TN_1L = 90°$ (Fr. 181 X.), daher $TL > TN_1$ (Fr. 74 VIII.); weil nun $G_1 \parallel G'$ (Fr. 197 I.), so ist $TN_1 = PN$ (Fr. 108 XIII.) und $TL > PN$ (Fr. 20 IX.).

VI. Die kürzeste Entfernung zweier sich kreuzenden Geraden G_1 und G_2 (III.) gleicht der Entfernung der einen Geraden G_1 von der (nach Fr. 200 II.) durch die andere Gerade G_2 gelegten, zu G_1 parallelen Ebene E und steht zugleich senkrecht auf den beiden Geraden und der Ebene E.

201. Welche Beziehungen bestehen zwischen einer Ebene und zwei parallelen Geraden?

I. Ist die eine von zwei parallelen Geraden einer Ebene E parallel, so kann auch die andere diese Ebene nicht schneiden; denn sonst müßte E nach Fr. 189 VI. von beiden Geraden geschnitten werden. Die zweite Gerade liegt also entweder in E (Fr. 198 III.), oder sie ist $\parallel$ E (Fr. 184 VII.).

II. Sind G' und G'' die Projektionen zweier Geraden G_1 und G_2 auf dieselbe Ebene und schneiden sich G' und G'' in einem Punkte A', so ist A' zugleich die Projektion eines Punktes

A_1 in G_1 und eines Punktes A_2 in G_2 (Fr. 191 I.); wegen Fr. 190 I. schneidet daher die in A' auf der gemeinschaftlichen Projektionsebene E errichtete Normale (Fr. 188 II.) beide Gerade G_1 und G_2; deswegen brauchen jedoch A_1 und A_2 nicht zusammenzufallen.

III. Werden zwei parallele Gerade G_1 und G_2 auf dieselbe Ebene E projiziert, so sind ihre Projektionen G' und G'' entweder parallel, oder sie fallen zusammen; letzteres tritt ein, sobald G' und G'' einen Punkt gemein haben.

Haben nämlich G' und G'' einen Punkt A' gemein, so schneidet die in A' auf E errichtete Normale die Gerade G_1 in einem Punkte A_1, die Gerade G_2 in einem Punkte A_2 (II.); da nun die durch die Parallelen G_1 und G_2 gelegte Ebene E_3 (Fr. 186 VI.) mit der durch G_1 und G' gelegten projizierenden Ebene E_1 (Fr. 191 II.) den Punkt A_2 und die Gerade G_1 gemein hat, und da E_3 mit der durch G_2 und G'' gelegten projizierenden Ebene E_2 den Punkt A_1 und die Gerade G_2 gemein hat, so fallen die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 zusammen (Fr. 182 II.), und deshalb fallen auch ihre Schnitte G' und G'' in E zusammen (Fr. 185 II.).

Fallen dagegen die projizierenden Ebenen E_1 und E_2 der beiden Geraden G_1 und G_2 nicht zusammen, so können die in E liegenden Projektionen G' und G'' von G_1 und G_2 auch keinen Punkt gemein haben, sondern es ist:

$$G' \,/\!/\, G'' \text{ (Fr. 186 IV.).}$$

IV. Zwei parallele, die Ebene E schneidende Gerade G_1 und G_2 (vergl. Fr. 189 VI.) machen mit E gleiche Winkel w_1 und w_2 nach derselben Seite hin. Sind nämlich G' und G'' die Projektionen von G_1 und G_2, so ist:

$$\frac{G_1 \,/\!/\, G_2 \text{ (Vor.)} \qquad G' \,/\!/\, G'' \text{ (III.)}}{\angle w_1 = \angle w_2 \text{ (Fr. 192 I. und Fr. 189 IX.).}}$$

Der Fall, wo G'' und G' zusammenfallen (III.), ist hier nicht weiter zu berücksichtigen, vielmehr schon in Fr. 62 I. 1. erledigt.

V. Die Projektionen N_1L_1 und N_2L_2 gleichlanger Strecken P_1Q_1 und P_2Q_2 in zwei parallelen Geraden G_1 und G_2 auf dieselbe Ebene E sind gleichlang.

Bew. 1) Sind G_1 und G_2 parallel zur gemeinschaftlichen Projektionsebene E, so ist:

$$N_1L_1 = P_1Q_1 \quad \text{und} \quad N_2L_2 = P_2Q_2 \text{ (Fr. 199 I.)}$$
$$P_1Q_1 = P_2Q_2 \text{ (Vor.)}$$
$$\overline{N_1L_1 = N_2L_2 \text{ (Fr. 20 IV.).}}$$

2) Wird dagegen E von G_1 und G_2 geschnitten, so ziehe man (ähnlich wie in Fig. 181) durch Q_1 und Q_2 parallel zu L_1N_1 und L_2N_2 die Strecken Q_1V_1 und Q_2V_2, bis sie die Projizierenden P_1N_1 und P_2N_2 in V_1 und V_2 treffen; dann sind die Winkel $P_1V_1Q_1$ und $P_2V_2Q_2$ rechte (Fr. 62 V.), da ja $\angle P_1N_1L_1 = \mathfrak{R} = P_2N_2L_2$ (Fr. 190 I.); ferner ist $\angle P_1Q_1V_1 = \angle P_2Q_2V_2$ (Fr. 20 IV.), denn diese Winkel gleichen den zugehörigen (nach IV. unter sich gleichgroßen) Neigungswinkeln w_1 und w_2 (Fr. 192 I.); da endlich $P_1Q_1 = P_2Q_2$ vorausgesetzt wurde, so ist $\triangle P_1V_1Q_1 \cong \triangle P_2V_2Q_2$ (Fr. 81 II.) und $V_1Q_1 = V_2Q_2$ (Fr. 67 II.). Nach Fr. 199 I. ist aber $V_1Q_1 = N_1L_1$ und $V_2Q_2 = N_2L_2$, daher endlich auch $N_1L_1 = N_2L_2$ (Fr. 20 IV.).

VI. Sind die Projektionen G' und G'' zweier mit der Projektionsebene E nach derselben Seite hin gleiche Winkel w_1 und w_2 machenden Geraden G_1 und G_2 parallel, so sind die Geraden G_1 und G_2 selbst parallel.

Wäre G_2 nicht parallel zu G_1, so könnte man durch einen Punkt P in G_2 eine Gerade $G_3 \,/\!/\, G_1$ ziehen. Die Projektion P' von P liegt dann zugleich in G'' und in der Projektion G''' von G_3 (Fr. 191 I.), auch fallen G''' und G' entweder zusammen, oder es ist $G''' \,/\!/\, G'$ (III.). Fiele nun G''' auf G', so hätten auch G' und G'' den Punkt P' gemein, im Widerspruch gegen die Vor. $G' \,/\!/\, G''$ und Fr. 26. Wäre dagegen $G''' \,/\!/\, G'$, so müßte G''' mit G'' zusammenfallen, weil $G'' \,/\!/\, G'$ vorausgesetzt wurde, und sich durch P' nur eine Parallele zu G' ziehen läßt (Fr. 57 I.); da ferner zugleich $G_1 \,/\!/\, G_3$, so gliche $\angle w_1$ dem Neigungswinkel w_3 von G_3 gegen E (IV.)

und aus $\angle w_1 = \angle w_2$ (Vor.) folgte weiter $\angle w_3 = \angle w_2$; nun liegen w_1 und w_2 (Vor.) und ebenso w_3 und w_1 (nach IV.) nach derselben Seite hin, und in $w_3 = w_2$ würde daher ein Widerspruch gegen Fr. 69 VII. stecken, wenn nicht w_3 und w_2 sich deckten und demnach (wegen Fr. 46) auch die durch P gelegte G_3 und G_2; also ist:

$$G_2 \parallel G_1.$$

VII. Zieht man in der einen (E_1) von zwei sich schneidenden Ebenen E_1 und E eine zur anderen (E) parallele Gerade G, so ist diese dem Durchschnitte G_1 beider Ebenen parallel (Fr. 26).

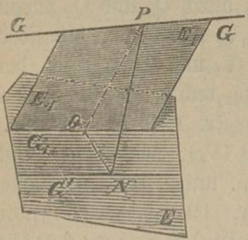

Fig. 183.

G und G_1 liegen ja beide in der Ebene E_1, Fig. 183, und können sich nicht schneiden, weil sich sonst auch G und E schneiden müßten, da jeder Punkt von G_1 auch ein Punkt von E ist. (G und G_1 fallen nicht zusammen, Fr. 184 VII.)

VIII. Ist eine Gerade G parallel zu zwei sich schneidenden Ebenen E_1 und E_2, so ist G auch parallel zum Durchschnitt G_1 der beiden Ebenen E_1 und E_2.

G ist nämlich zu ihrer Projektion G auf E_1 parallel (Fr. 197 I.), zugleich ist entweder $G' \parallel G_1$, oder G' fällt mit G_1 zusammen (I.); daher ist — im erstern Falle nach Fr. 189 VIII., im andern unmittelbar — auch $G \parallel G_1$.

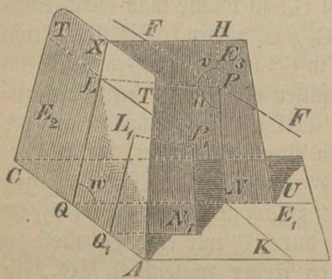

Fig. 184.

202. Was versteht man unter einem Flächen- oder Keilwinkel und was unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen?

I. Fällt man von einem Punkte P (Fig. 184) zwei Normalen PN und PL auf zwei sich schneidende Ebenen

E_1 und E_2, so schließen die beiden Normalen immer den nämlichen Winkel u ein, wo auch P liegen mag. Fällt man nämlich von einem andern Punkte P_1 die Normalen P_1N_1 und P_1L_1 auf E_1 und E_2, so ist nach Fr. 189 IV. $P_1N_1 \parallel PN$ und $P_1L_1 \parallel PL$, daher auch:

$$\angle N_1P_1L_1 = \angle NPL = \angle u \text{ (Fr. 189 IX.).}$$

II. Legt man durch die beiden Normalen PN und PL eine Ebene E_3, so schneidet E_3 die Ebenen E_1 und E_2 in zwei Geraden UQ und XQ, welche sich ebenfalls stets unter demselben Winkel w schneiden. In dem ebenen Vierecke PNQL ist nämlich $\angle PNQ = 90° = \angle PLQ$ (Fr. 181 X.), folglich $\angle NPL + \angle NQL = 180°$ (Fr. 72 III.), oder: $\angle w = \angle NQL = 180° - \angle NPL = 180° - \angle u$.

III. Zieht man durch den Punkt P eine Parallele PF zur Schnittlinie AC zwischen E_1 und E_2, so ist nach Fr. 196 I. $PF \parallel E_1$ und $PF \parallel E_2$; daher steht PF zugleich senkrecht auf den beiden Normalen PN und PL (Fr. 197 III.), also ist $PF \perp E_3$ (Fr. 181 XI.) und, weil ja $PF \parallel AC$ gemacht wurde, so steht auch die Schnittlinie AC auf E_3 normal (Fr. 189 VII.).

IV. Zwischen den beiden durch die Schnittlinie AC halbbegrenzten Ebenen E_1 und E_2 ist ein halbbegrenzter Raum enthalten, welcher ein Flächen- oder Keilwinkel heißt. E_1 und E_2 heißen die Seiten, AC die Kante des Flächenwinkels.

Dieser Raum wird von der Ebene E_2 überstrichen, wenn sich dieselbe von der Ebene E_1 aus bis in ihre schließliche Lage um die Schnittlinie AC dreht. Bei dieser Drehung bewegt sich die nach III. und Fr. 181 X. auf AC normale Schnittlinie QX zwischen E_3 und E_2 von der Schnittlinie QU zwischen E_3 und E_1 aus in der Ebene E_3 bis in ihre endliche Lage (Fr. 181 XIV.) und beschreibt dabei den ebenen Winkel NQL = w.

V. Dieser ebene Winkel NQL = w, dessen Schenkel in den Ebenen E_1 und E_2 liegen und beide auf der Schnittlinie

AC dieser beiden Ebenen senkrecht stehen, wird der **Neigungswinkel** der beiden Ebenen E_1 und E_2 genannt.

Seine Größe ist zwar von der Größe des Flächenwinkels (IV.), nicht aber von der Lage des Punktes P oder Q abhängig (II.).

VI. Den Flächenwinkel der zwei Ebenen E_1 und E_2, welche sich in AC schneiden, bezeichnet man entweder durch $\angle(E_1, E_2)$, oder durch $\angle$ U(AC)X, wobei U und X zwei Punkte in E_1 und E_2 bedeuten.

203. Welche Sätze über den Neigungswinkel zweier Ebenen ergeben sich aus Fr. 202?

I. Nach Fr. 202 IV. und V. läßt sich der (ebene) Neigungswinkel w zur Bestimmung der Größe des Flächenwinkels und der gegenseitigen Lage der beiden Ebenen E_1 und E_2 benutzen.

Jede Änderung des Winkels w hat eine Änderung des Flächenwinkels im Gefolge, und umgekehrt.

Wird der eine Winkel 2, 3, ꝛc. mal so groß, so wird auch der andere 2, 3, ꝛc. mal so groß. Neigungswinkel und Flächenwinkel sind also einander proportional.

Wenn man daher für die Flächenwinkel ganz ähnliche Begriffsbestimmungen einführt, wie früher für die ebenen Winkel, so erhält man sehr leicht eine ganze Reihe von Sätzen, welche mit früher dagewesenen wörtlich gleichlauten.

II. Zur Bestimmung der Lage der Ebene E_2 braucht man außer der Ebene E_1 und der Spur AC nur die Gerade QL, oder den Neigungswinkel NQL = w (Fr. 182 III.).

III. Ist der Neigungswinkel w zweier Ebenen E_1 und E_2 spitz, recht, stumpf, flach oder überstumpf, so ist es auch ihr Flächenwinkel.

IV. Jeder hohle Flächenwinkel ist kleiner, jeder überstumpfe größer als ein flacher.

V. Zu jedem hohlen Flächenwinkel giebt es einen überstumpfen, welcher mit ersterem zusammengenommen den ganzen Flächenwinkelraum um die Schnittgerade AC herum erfüllt.

VI. Zwei Flächenwinkel heißen Nebenwinkel und Scheitelwinkel, wenn ihre Neigungswinkel es sind.

VII. Jeder Flächenwinkel ist seinem Scheitelwinkel gleich.

VIII. Jeder Flächenwinkel ergänzt seinen Nebenwinkel zu einem flachen.

IX. Alle rechten Flächenwinkel sind unter sich gleich.

X. Eine Ebene E_2, deren Neigungswinkel gegen eine andere E_1 ein rechter ist, steht normal oder senkrecht ($\perp$) auf E_1.

XI. Der spitze Neigungswinkel w (Fig. 184) zweier Ebenen E_1 und E_2 ist gleich dem spitzen Winkel $HPL = v$ zwischen ihren Normalen NP und LP (Fr. 202 II. und Fr. 39 IV.).

204. Was ist über zwei auf einander senkrecht stehende Ebenen zu bemerken?

I. Steht eine Gerade PN (Fig. 184) auf einer Ebene E_1 senkrecht, so steht jede durch PN gelegte Ebene E_3 auch auf E_1 senkrecht.

Zieht man nämlich in E_1 im Fußpunkte N eine Senkrechte NK zu der Schnittgeraden QU zwischen E_3 und E_1, so ist $\angle PNK$ der Neigungswinkel zwischen E_3 und E_1 (Fr. 202 V.); weil nun $\angle PNK = 90°$ (Fr. 181 X.), so ist:

$$E_3 \perp E_1 \text{ (Fr. 203 X.).}$$

II. Will man durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2, oder die durch P_1 und P_2 gehende Gerade G (Fig. 179 S. 237) eine Ebene E_3 senkrecht auf eine andere Ebene E fällen, welche auf G, bezw. auf der Strecke P_1P_2 nicht normal steht, so braucht man nur zwei Normalen P_1N_1 und P_2N_2 auf E_1 zu fällen (Fr. 187 I.); durch diese beiden Normalen ist dann die Ebene E_3 zu legen (Fr. 191 II.).

Es giebt nur eine solche Ebene (Fr. 191 IV.).

III. Will man durch einen gegebenen Punkt P eine Ebene E_3 legen, welche zu der Ebene E_1 normal und zu einer Geraden G parallel ist, so ziehe man durch P eine Gerade PL // G (Fr. 196 V.), mache $PN \perp E_1$ (Fr. 187 I.) und lege E_3 durch PL und PN. Vergl. Fig. 184.

Es giebt nur eine solche Ebene (Fr. 186 VII., 188 I.).

IV. Schneiden sich die beiden auf einander normalen Ebenen E_3 und E_1 in UQ (Fig. 184), so steht die in E_3 gezogene, auf UQ senkrechte Gerade NP auch auf E_1 senkrecht.

Zieht man in E_1 noch $NK \perp UQ$, so ist der Neigungswinkel $PNK = 90°$ (Fr. 202 V. und 203 X.), und da auch $\angle PNQ = 90°$ (Vor.), so ist $PN \perp E_1$ (Fr. 181 XI.).

V. Steht die Ebene E_1 auf einer Ebene E_3 senkrecht, so läßt sich die Schnittgerade UQ dieser beiden Ebenen als die Projektion von E_3 auf E_1 ansehen. Denn die durch einen Punkt P in E_3 auf UQ gefällte Senkrechte PN steht auch auf E_1 senkrecht (IV.) und N ist also die Projektion von P (Fr. 190 I.).

VI. Fällt man von einem Punkte P einer Ebene E_3 eine Normale PN auf eine zu E_3 normale Ebene E_1, so trifft PN nach V. und wegen Fr. 188 I. die Schnittlinie UQ der beiden Ebenen. PN liegt also ganz in der Ebene E_3.

VII. Errichtet man in einem Punkte N der Schnittlinie UQ zweier auf einander senkrechten Ebenen E_3 und E_1 auf der Ebene E_1 eine Normale NP, so liegt dieselbe wegen IV. in der andern Ebene E_3, weil sich in N nur eine Normale auf E_1 errichten läßt (Fr. 188 II.).

VIII. Steht eine Ebene E_3 zugleich senkrecht auf zwei sich schneidenden Ebenen E_1 und E_2, so steht jene Ebene E_3 auch auf der Schnittlinie AC zwischen E_1 und E_2 senkrecht.

Schneiden sich in Q (Fig. 184) die Schnittlinien NQ zwischen E_3 und E_1 und LQ zwischen E_3 und E_2, so liegt eine in Q auf E_3 errichtete Normale in E_2 und in E_1 zugleich (VII.) und fällt deshalb mit AC zusammen (Fr. 185 II.).

IX. Jeder Punkt P der Ebene E_4, welche den Winkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 halbiert, ist von diesen Ebenen E_1 und E_2 gleichweit entfernt.

Um die Entfernung des Punktes P von E_1 und E_2 zu finden, müßte man von P zwei Normalen PN und PL auf E_1 und E_2 fällen. Die durch PN und PL gelegte Ebene E_3 (vergl. Fig. 184) stünde dann auf E_1 und auf E_2 zugleich senkrecht (I.), folglich stünde E_3 in Q auf dem Schnitt AC zwischen E_1 und E_2 senkrecht (VIII.) und ebenso auf E_4 (I.). Der Neigungswinkel NQL zwischen E_1 und E_2 soll nun durch E_4, d. h. durch PQ (Fr. 202 V.) halbiert werden; daher ist

$$\triangle PQL \cong \triangle PQN \text{ (Fr. 81 II.)}$$

und

$$PL = PN \text{ (Fr. 67 II.)}.$$

205. Wenn sind zwei Ebenen parallel?

I. Jede Gerade G_1 (Fig. 185), welche in der einen E_1 von zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2 liegt, ist der anderen E_2 parallel.

Da nämlich E_1 keinen Punkt mit E_2 gemein hat (Fr. 185 IV.), so kann auch die in E_1 liegende (Fr. 184 I.) G_1 keinen Punkt mit E_2 gemein haben, sondern es ist $G_1 \parallel E_2$ (Fr. 184 VII.).

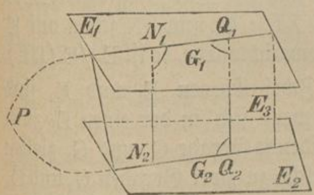

Fig. 185.

II. Werden zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 von einer dritten Ebene E_3 geschnitten, so sind die Schnittlinien G_1 und G_2 parallel.

Wenn sich nämlich G_1 und G_2 in einem Punkte P schnitten, so läge dieser Punkt P zugleich in E_1 und E_2 (Fr. 184 I.); weil nun $E_1 \parallel E_2$ sein soll, so können auch G_1 und G_2 keinen Punkt gemein haben (Fr. 185 IV.), und da G_1 und G_2 beide in E_3 liegen, so ist:

$$G_1 \parallel G_2 \text{ (Fr. 26)}.$$

III. Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind parallel, wenn sie eine gemeinschaftliche Normale N_1N_2 haben.

Hätten E_1 und E_2, Fig. 185, einen Punkt P gemein, so würde die durch P und N_1N_2 gelegte Ebene E_3 die Ebenen E_1 und E_2 in zwei Geraden G_1 und G_2 schneiden, welche parallel wären (II., oder Fr. 181 X. und 62 II.) und doch den Punkt P gemein hätten, was Fr. 26 widerspricht. Daher ist

$$E_1 \parallel E_2 \text{ (Fr. 185 IV.).}$$

IV. Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind parallel, wenn ihre Normalen N_1N_2 und Q_1Q_2 parallel sind.

Ist in Fig. 185 $N_1N_2 \perp E_1$ und $Q_1Q_2 \perp E_2$, so muß, wenn $Q_1Q_2 \parallel N_1N_2$ vorausgesetzt wird, auch $Q_1Q_2 \perp E_1$ sein (Fr. 189 VII.); Q_1Q_2 steht demnach sowohl auf E_1 als auf E_2 normal, weshalb $E_1 \parallel E_2$ sein muß (III.).

V. Zwei Ebenen E_1 und E_2 (Fig. 186) sind parallel, wenn sich in E_1 zwei sich schneidende Gerade G_1 und G_2 ziehen lassen, welche zu E_2 parallel sind.

Fällt man vom Schnittpunkte S der Geraden G_1 und G_2 eine Normale SN auf E_2 (Fr. 187 I.), so ist nach Fr. 197 III. $SN \perp G_1$ und $SN \perp G_2$, folglich $SN \perp E_1$ (Fr. 181 XI.); da nun SN schon auf E_2 normal gemacht wurde, so ist $E_1 \parallel E_2$ (III.).

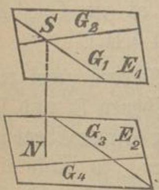

Fig. 186.

VI. Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind parallel, wenn sich in der einen E_1 zwei sich schneidende Gerade G_1 und G_2 ziehen lassen, welche zu zwei Geraden G_3 und G_4 in der anderen Ebene E_2 parallel sind (V.), weil ja dann auch $G_1 \parallel E_2$ und $G_2 \parallel E_2$ ist (Fr. 196 I.).

VII. Zwei Ebenen E_1 und E_2 (Fig. 187) sind parallel, wenn drei zwischen ihnen gezogene, nicht in einer Ebene liegende (vergl. Fr. 182 I.) parallele Strecken AD, LQ, NV gleichlang sind; wegen Fr. 189 IV. können an Stelle dieser drei Parallelen auch drei Normale treten.

Legt man durch AD und LQ, desgleichen durch AD und NV eine Ebene (Fr. 186 VI.), so ist:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{AD} \# \mathrm{LQ} \quad \text{und} & \mathrm{AD} \# \mathrm{NV} \ (\text{Vor.}) \\ \hline \mathrm{AL} \parallel \mathrm{DQ} & \mathrm{AN} \parallel \mathrm{DV} \ (\text{Fr. } 108 \text{ V.}) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{E_1 \parallel E_2 \ (\text{VI.}).} \end{array}$$

206. Welche Eigenschaften haben zwei parallele Ebenen?

I. Sind zwei Ebenen E_1 und E_2 parallel, so steht jede Normale SN der einen Ebene E_2 auch auf E_1 normal.

Zieht man durch S in E_1 zwei Gerade G_1 und G_2, Fig. 186, so ist $G_1 \parallel E_2$ und $G_2 \parallel E_2$ (Fr. 205 I.), folglich $G_1 \perp \mathrm{SN} \perp G_2$ (Fr. 197 III.) und deshalb:

$$\mathrm{SN} \perp E_1 \ (\text{Fr. } 181 \text{ XI.}).$$

II. Sind zwei Ebenen E_1 und E_2 parallel, so sind alle zwischen ihnen gezogenen Parallelen gleichlang.

Legt man nämlich durch irgend zwei Parallelen AD und NV, Fig. 187, eine Ebene, so sind die Schnittlinien AN und DV dieser Ebene mit E_1 und E_2 auch parallel (Fr. 205 II.) und deshalb AD = NV (Fr. 108 III.).

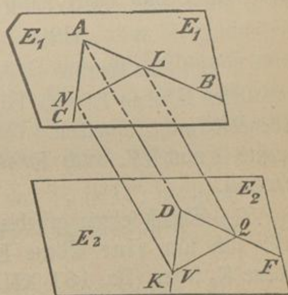

Fig. 187.

III. Alle Normalen zwischen zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2 sind parallel (I. und Fr. 189 IV.) und gleichlang (II.).

Jede dieser Normalen mißt den **Abstand** oder die **Entfernung der beiden parallelen Ebenen.**

Der **geometrische Ort** (vergl. 74 XVII.) eines Punktes, welcher auf der einen Seite einer Ebene E_1 in einem gegebenen Abstande von dieser liegt, ist eine zu E_1 parallele Ebene E_2.

IV. Schneidet eine Gerade G die eine E_1 von zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2, so schneidet G auch die andere Ebene E_2.

Fällt man von dem Punkte S_1 (Fig. 188), in dem G die Ebene E_1 schneidet, eine Normale S_1N auf E_2, und legt man dann durch G und S_1N eine Ebene E_3, so sind die Schnittlinien A_1S_1 und A_2N zwischen E_3 und den Ebenen E_1 und E_2 parallel (Fr. 205 II.); daher muß G auch A_2N schneiden (Fr. 60 II.) und der Punkt S_2, in welchem dies geschieht, ist zugleich der Schnitt zwischen G und E_2, weil ja A_2N ganz in E_2 liegt.

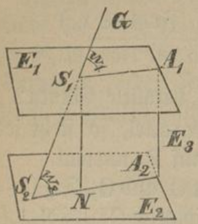

Fig. 188.

V. Zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 machen nach derselben Seite hin gleiche Winkel w_1 und w_2 mit der sie schneidenden Geraden G.

Weil S_1N in Fig. 188 nicht bloß auf E_2 (IV.), sondern auch auf E_1 normal ist (I.), so sind GS_1A_1 und GS_2A_2 die Neigungswinkel zwischen G und den Ebenen E_1 und E_2 (Fr. 192 I. und 191); nach Fr. 62 I. 1. aber ist:

$$\angle GS_1A_1 = \angle GS_2A_2.$$

VI. Ist eine Gerade G parallel zu der einen E_1 von zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2, so kann sie auch die andere Ebene E_2 nicht schneiden. Denn schnitten sich G und E_2, so müßte G nach IV. auch E_1 schneiden, während doch $G /\!/ E_1$ sein soll.

VII. Durch einen gegebenen Punkt S (vergl. Fig. 186) läßt sich nur eine Ebene E_1 parallel zu einer gegebenen Ebene E_2 legen (Fr. 181 XIII.); denn nach I. muß E_1 alle Geraden enthalten, welche in S senkrecht zu der von S auf E_2 herabgefällten Normalen SN stehen. — Vergl. Fr. 198 IV.

VIII. Daher läßt sich auch nur eine einzige Ebene E_1 parallel zu E_2 durch eine zu E_2 parallele Gerade G_1 legen.

IX. Durch zwei sich kreuzende Gerade G_1 und G_2 läßt sich nach Fr. 200 II. nur ein Paar parallele Ebenen E_1 und E_2 legen; denn wegen Fr. 205 I. muß z. B. die durch G_2 zu legende Ebene E_2 auch zu G_1 parallel sein.

Die Entfernung dieser beiden Ebenen ist zugleich die kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Vergl. Fr. 200 VI.

207. Welche Sätze gelten von zwei sich schneidenden Ebenen?

I. Zwei Ebenen müssen sich schneiden, sobald eine auf E_1 errichtete Normale nicht auch zugleich auf E_2 normal steht (Fr. 206 I.).

II. Zwei Ebenen, welche sich schneiden, haben wegen Fr. 205 III. keine gemeinschaftliche Normale*).

III. Zwei Ebenen schneiden sich, wenn zwei zwischen ihnen gezogene parallele Strecken ungleich sind (Fr. 206 II.).

IV. Wenn zwei Ebenen E_1 und E_2 sich schneiden, so sind zwei zwischen ihnen gezogene Parallelen P_1 und P_2 ungleich, sofern die durch diese Parallelen gelegte Ebene E_3 nicht etwa zur Schnittlinie G_3 der Ebenen E_1 und E_2 parallel ist.

Bei $E_3 /\!/ G_3$ (vergl. Fig. 192 S. 255) sind nämlich die Geraden G_1 und G_2, worin E_2 und E_1 von E_3 geschnitten werden, zunächst mit G_3 (Fr. 197 II.), deshalb auch unter sich parallel (Fr. 189 VIII.) und $P_1 = P_2$ (Fr. 108 III.). Daher können wegen Fr. 205 VII. P_1 und P_2 nicht noch einer außer E_3 liegenden Parallelen gleich sein.

V. Wie die Parallelen P_1 und P_2 in IV. wachsen, wenn ihre Ebene E_3 die Gerade G_3 in O schneidet (Fig. 193), sagt Fr. 148 I.

VI. Umgekehrt wäre bei $P_1 = P_2$ in Fig. 192 auch $G_1 /\!/ E_1$ (Fr. 197 VI.), daher $G_1 /\!/ G_3$ (Fr. 197 II.) und $G_3 /\!/ E_3$ (Fr. 196 I.).

---

*) Nennt man zwei Ebenen mit einer gemeinschaftlichen Normalen, oder mit parallelen Normalen Ebenen von gleicher Stellung, so lauten I., II., Fr. 206 I. (III.) und 205 III. (IV.) ähnlich, wie die Sätze in Fr. 56. — Vergl. Fr. 182 III.

208. Welche Lagen können drei Ebenen gegen einander haben?

I. Drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 können nur fünf verschiedene Lagen gegen einander haben. Es lassen sich nämlich zwei Hauptfälle unterscheiden:

zwei Ebenen sind parallel;
keine Ebene ist der anderen parallel.

Beim ersten Hauptfalle kann dann die dritte Ebene der ersten Ebene parallel sein, oder sie schneiden.

Beim zweiten Hauptfalle kann die dritte Ebene den Durchschnitt der beiden anderen in sich enthalten, ihm parallel sein, oder ihn schneiden.

II. Sind zwei Ebenen E_1 und E_2 einer dritten E_3 parallel, so sind sie unter sich selbst parallel.

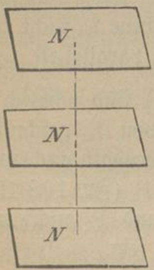

Fig. 189.

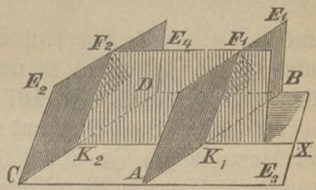

Fig. 190.

Dann steht nämlich jede auf E_3 errichtete Normale NN (Fig. 189) auch auf E_1 und E_2 normal (Fr. 206 I.), und daher ist:

$$E_1 \,//\, E_2 \text{ (Fr. 205 III.).}$$

III. Schneidet eine Ebene E_3 (Fig. 190) die eine E_1 von zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2, so schneidet sie auch die andere E_2. Eine auf E_1 errichtete Normale ist zwar auf E_2 normal (Fr. 206 I.), aber nicht auf E_3 (Fr. 207 II.); E_2 und E_3 müssen sich daher schneiden (Fr. 207 I.).

Dabei sind die beiden Schnittlinien AB und CD parallel (Fr. 205 II.).

IV. Werden zwei Ebenen E_1 und E_2, Fig. 190, von einer dritten Ebene E_3 in den parallelen Geraden AB und CD geschnitten, so steht jede auf AB normale Ebene E_4 auch auf CD normal (Fr. 189 VII.). Schneidet nun E_4 die Ebenen E_1, E_2 und E_3 in F_1K_1, F_2K_2 und XK_1K_2, so sind $\angle F_1K_1X$ und $\angle F_2K_2X$ die Neigungswinkel (Fr. 202 V. und 181 X.) von E_3 gegen E_1 und E_2. Demnach gelten von diesen Neigungswinkeln und daher auch von ihren Flächenwinkeln ganz die nämlichen Sätze, welche in Fr. 62 für zwei Gerade aufgeführt wurden; denn bei $E_1 \parallel E_2$ ist $F_1K_1 \parallel F_2K_2$ (III.) und umgekehrt aus $F_1K_1 \parallel F_2K_2$ bei $AB \parallel CD$ folgt $E_1 \parallel E_2$ (Fr. 205 VI.).

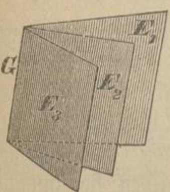

Fig. 191.

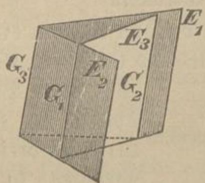

Fig. 192.

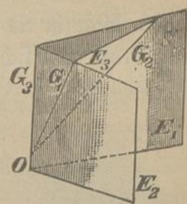

Fig. 193.

V. Liegt der Durchschnitt G zweier Ebenen E_1 und E_2 (Fig. 191) in der dritten Ebene E_3, so haben alle drei Ebenen die Gerade G gemein, sonst aber nichts weiter.

Denn die drei Ebenen fielen nach Fr. 182 II. zusammen, sobald sie nur noch einen Punkt außer G gemein hätten.

VI. Ist der Durchschnitt G_3 (Fig. 192) zweier Ebenen E_1 und E_2 der dritten Ebene E_3 parallel (und ist keine Ebene der anderen parallel), so schneiden sich auch E_3 und E_1, sowie E_3 und E_2, letztere in G_1, erstere in G_2.

Hierbei ist nach Fr. 197 II. $G_1 \parallel G_3$ und $G_2 \parallel G_3$, daher auch $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$ (Fr. 189 VIII.), d. h. die drei Durchschnitte G_1, G_2 und G_3 sind einander parallel.

VII. Schneidet die dritte Ebene E_3 den Durchschnitt G_3 der beiden Ebenen E_1 und E_2 in O (Fig. 193), so schneiden sich in dem Punkte O die drei Ebenen und auch ihre drei Durchschnitte G_1, G_2 und G_3.

Die drei Ebenen haben aber außer O keinen Punkt gemein, weil sonst auch dieser Punkt in jedem der drei Durchschnitte liegen und allen drei Durchschnitten gemeinsam sein müßte, da ja nach Fr. 185 II. je zwei Ebenen sich nur in einer Geraden schneiden können.

Neuntes Kapitel.

Das Dreikant.

209. Was ist ein Dreikant?

I. Denkt man sich die drei nicht in einer Ebene liegenden Durchschnitte OA, OB und OC (Fig. 194) der drei sich in bloß einem Punkte O schneidenden Ebenen E_1, E_2 und E_3 (Fr. 208 VII.) als drei von O auslaufende Strahlen, so bilden sie zunächst drei ebene Winkel AOB = c, BOC = a und COA = b.

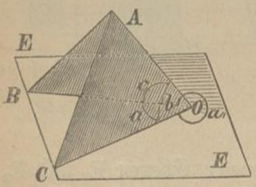

Fig. 194.

Zwischen diesen drei ebenen Winkeln ist aber ein halbbegrenztes Stück des unendlichen Raumes enthalten, welches man eine dreiseitige Ecke, einen dreiseitigen körperlichen Winkel oder ein Dreikant nennt und durch O(ABC) bezeichnet.

II. Nimmt man mehrere von O auslaufende Strahlen und Ebenen, so erhält man in gleicher Weise ein Vielkant.

III. Der Punkt O ist der Scheitel oder die Spitze, die drei Strahlen OA, OB und OC sind die Kanten und die von ihnen gebildeten ebenen Winkel a, b, c die Kantenwinkel, Seitenwinkel oder Seiten des Dreikants. Von den (nicht über die Kanten hinaus erweiterten) drei Seitenebenen werden gegen das Innere des Dreikants hin drei Flächenwinkel A(OB)C

$=$B, B(OC)A $=$ C und C(OA)B $=$ A gebildet (Fr. 202 IV.) und heißen die (inneren) Winkel des Dreikants. Die Seiten a, b, c liegen der Reihe nach den Winkeln A, B, C gegenüber.

210. Wie vielerlei Dreikante giebt es?

I. Dreikante mit flachen Seiten giebt es nicht; wird nämlich $\angle a = 180°$, so fallen die Ebenen AOB und AOC zusammen (Fr. 182 III.), ihr Flächenwinkel wird zu einem flachen (vgl. Fr. 203 III.), und man hat dann kein Dreikant mehr, sondern bloß einen Flächenwinkel.

II. Ebenso wird ein Dreikant zu einem Flächenwinkel, sobald ein Winkel des Dreikants flach wird.

III. Weil die drei Seiten das Dreikant begrenzen (Fr. 209 I.), so darf keine Seite durch das Dreikant hindurchgehen oder zum Teil innerhalb des Dreikants liegen. Da nun die dritte Kante OA mit keiner Geraden in der durch die beiden anderen Kanten OB und OC gelegten Ebene E einen überstumpfen Winkel macht (Fr. 192 III.), so müssen die Seiten b und c hohl sein, sobald man für die Seite a die Möglichkeit, hohl oder überstumpf zu sein, zulassen will.

Daher giebt es kein Dreikant mit mehr als einer überstumpfen Seite.

IV. Jedes Dreikant hat demnach wenigstens zwei hohle Seiten. Ist die dritte Seite hohl, oder überstumpf, so ist auch ihr Gegenwinkel kleiner, oder größer als ein flacher Winkel, d. h. hohl, oder überstumpf (I., Fr. 203 III. und V.).

Ist umgekehrt der dritte Winkel hohl, oder überstumpf, so ist auch seine Gegenseite hohl, oder überstumpf.

V. Ein Dreikant mit drei hohlen Winkeln hat auch drei hohle Seiten (IV.).

VI. Zu jedem Dreikant mit drei hohlen Seiten und Winkeln giebt es ein Dreikant (Außendreikant) mit denselben Kanten und Seiten, aber mit drei überstumpfen

Winkeln, deren jeder einen Winkel des ursprünglichen Dreikants (des Urdreikants) zu 360° ergänzt*). Vgl. VIII.

VII. Auch zu jedem Dreikant mit zwei hohlen und einer überstumpfen Seite und Winkel giebt es ein Außendreikant mit denselben Kanten und Seiten, aber mit zwei überstumpfen und einem hohlen Winkel, deren jeder einen Winkel des Urdreikants zu 360° ergänzt. Vgl. VIII.

VIII. Sowohl in VI. als in VII. erfüllen die beiden zusammengehörigen Dreikante den ganzen körperlichen Winkelraum um den Scheitel. Nennt man diesen ganzen Winkelraum Volldreikant, so macht jedes Dreikant mit seinem Außendreikant ein Volldreikant aus. (Vgl. Fig. 195.)

IX. Zu jedem Dreikant mit drei hohlen Seiten und Winkeln giebt es drei Dreikante (Gegendreikante) mit denselben Kanten, aber mit je einer überstumpfen Seite und Winkel, z. B. a_1 und A_1 in Fig. 194, welche die betreffende Seite a, bezieh. Winkel A des Urdreikants zu 360° ergänzen; die beiden anderen Seiten in beiden Dreikanten sind gleich; die beiden anderen Winkel ergänzen die Winkel des Urdreikants zu 180°. Man erhält ein solches Gegendreikant durch Erweiterung einer Seitenebene E des Urdreikants.

X. Jedes Dreikant erfüllt mit seinem Gegendreikante den Flächenwinkelraum auf der einen Seite einer Ebene E, bildet also einen flachen Flächenwinkel oder macht eine flache oder gestreckte Ecke, ein Flachdreikant, d. h. die Hälfte eines Volldreikants aus.

XI. Wegen VI. bis VIII. braucht man bloß Dreikante, welche kleiner sind als ein Flachdreikant, und wegen IX. und X. bloß hohle oder konkave Dreikante mit drei hohlen Winkeln und Seiten zu betrachten. Im Folgenden wird daher stets von solchen die Rede sein.

---

*) Denkt man sich das Urdreikant aus einem Stoff gebildet, so wird der leere Raum um dasselbe von dem Außendreikant eingenommen. Wenn man dagegen das Urdreikant (als Modell) in eine Formmasse eindrückte und wieder herauszöge, so würde die mit einem dem Urdreikante gleichenden Loche versehene Formmasse das Außendreikant stofflich darstellen. Vergl. VIII.

211. Wie entsteht ein Neben-, Hinter-, Scheitel-Dreikant?

Erweitert man die drei Kanten und Ebenen eines Dreikants O(ABC) über dessen Scheitel O (Fig. 195) hinaus, so erhält man noch sieben Dreikante:

I. Die drei Nebendreikante $O(A_1BC)$, $O(AB_1C)$ und $O(ABC_1)$ haben mit dem Urdreikant nur je zwei Kanten und eine Seite gemein, während die anderen Seiten und Winkel die Seiten und Winkel des Urdreikants zu 180° ergänzen.

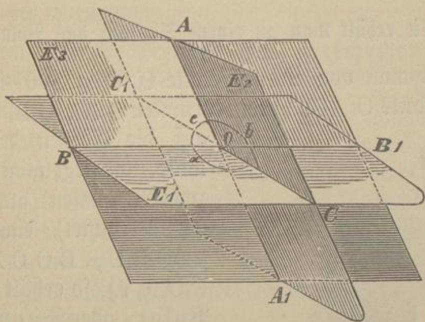

Fig. 195.

Je zwei Nebendreikante liefern als Summe einen Flächenwinkel. Vgl. Fr. 210 I. und II.

II. Die drei Hinterdreikante $O(AB_1C_1)$, $O(A_1BC_1)$ und $O(A_1B_1C)$ haben mit dem Urdreikant nur je eine Kante gemein.

Die Seiten und Winkel an dieser Kante sind als Scheitelwinkel gleich (Fr. 42 II.); die anderen Winkel und Seiten ergänzen sich paarweise zu 180°.

III. Das Scheiteldreikant $O(A_1B_1C_1)$ hat keine Kante mit dem Urdreikant gemein; seine Seiten und Winkel sind als Scheitelwinkel denen des Urdreikants gleich.

17*

Diese beiden Dreikante können aber trotzdem (weil ihre Seiten und Winkel in umgekehrter Folge *) an einander stoßen) im allgemeinen nicht zum Decken gebracht werden, sondern nur wenn in jedem zwei Winkel gleich sind.

Man nennt solche Dreikante symmetrisch-gleich, da sie sich mit je einer Seite [durch Drehung von $O(A_1B_1C_1)$ um OA_1 z. B. mit $\angle COB$ und $\angle C_1OB_1$] so auf einander legen lassen, daß die beiden dritten Kanten [OA und OA_1] symmetrisch zu beiden Seiten der durch die anderen beiden Kanten gelegten Ebene [COB] liegen.

212. **Wie erhält man zu einem Dreikant das Polardreikant?**

I. Fällt man von einem Punkte O_1 (Fig. 196) innerhalb eines Dreikants $O(ABC)$ drei Normalen O_1A_1, O_1B_1 und O_1C_1 auf die Ebenen des Dreikants, und legt man durch je zwei Normalen (als Strahlen betrachtet) eine Ebene [$A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$, oder $C_1O_1A_1V$], so erhält man das Polar- oder Supplementardreikant $O_1(A_1B_1C_1)$;

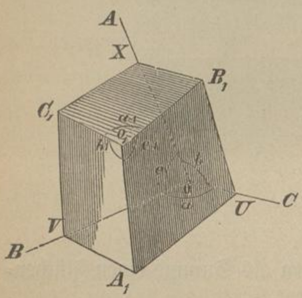

Fig. 196.

II. Die Seiten und Winkel des Polardreikants ergänzen die Winkel und Seiten des Urdreikants zu je 180°.

Es stehen nämlich auch die Ebenen $A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$ und $C_1O_1A_1V$ auf den Kanten OC, OA und OB normal (Fr. 204 I., VIII.); daher ist nach Fr. 202 V. und 181 X.:

$$\angle A = \angle B_1XC_1,\quad \angle B = \angle C_1VA_1,\quad \angle C = \angle A_1UB_1$$
$$\angle A_1 = \angle UA_1V,\quad \angle B_1 = \angle XB_1U,\quad \angle C_1 = \angle VC_1X.$$

---

*) Ähnlich wie die Finger an der rechten und an der linken Hand; der rechte Handschuh paßt ja auch nicht an die linke Hand.

In jedem der sechs Vierecke $A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$, $C_1O_1A_1V$, A_1VOU, B_1UOX und C_1XOV sind aber zwei Winkel rechte (Fr. 181 X.), und deshalb ist nach Fr. 72 III.:

$$\angle A + \angle a_1 = 180^\circ \qquad \angle A_1 + \angle a = 180^\circ$$
$$\angle B + \angle b_1 = 180^\circ \qquad \angle B_1 + \angle b = 180^\circ$$
$$\angle C + \angle c_1 = 180^\circ \qquad \angle C_1 + \angle c = 180^\circ.$$

III. Das Polardreikant vom Polardreikante gleicht in seinen Seiten und Winkeln dem Urdreikante (II. oder I.).

213. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Seiten und Winkeln des Dreikants?

I. Ein (hohles) Dreikant heißt gleichschenkelig, oder gleichseitig, wenn in ihm zwei, oder alle drei Seiten gleichgroß sind.

II. Fällt man in einem gleichschenkeligen Dreikante aus einem Punkte P der den beiden gleichen Seiten a und b gemeinschaftlichen Scheitelkante OC eine Normale PN auf die Grundseite oder Basis c, so kann der Fußpunkt N der Normalen nur in der Seite c selbst, oder in ihrem Scheitelwinkel liegen, und zwar halbiert ON diese Seite c (Fr. 193 IX.). Vgl. Fig. 198.

III. Daher sind die Winkel A und B an der Basis c des gleichschenkeligen Dreikants gleichgroß (II. u. Fr. 194 VII.).

IV. Alle gleichschenkeligen Dreikante über derselben Grundseite c haben ihre Scheitelkanten OC in der (durch die Normale PN in II. gelegten) Ebene, welche die Grundseite senkrecht halbiert.

V. In einem Dreikant mit zwei gleichen Winkeln A und B muß die Projektion ON der Kante OC auf die Gegenseite c mit der Halbierungslinie dieses Winkels c (oder seines Scheitelwinkels) zusammenfallen (Fr. 194 VIII.).

VI. Aus der Gleichheit zweier Winkel A und B ergiebt sich daher die Gleichheit der Gegenseiten a und b (Fr. 193 VII.).

VII. Das gleichseitige Dreikant ist auch gleichwinkelig (III.), und jedes gleichwinkelige ist gleichseitig (VI.).

VIII. In einem hohlen Dreikante steht der größeren Seite ($a > b$) auch ein größerer Winkel ($A > B$) gegenüber.

Der Beweis ist aus Fr. 193 und 194 ohne besondere Schwierigkeiten zu führen, dabei aber zu unterscheiden, ob die Projektion ON der Kante OC auf die Seite c innerhalb c selbst, oder in dessen Scheitelwinkel, oder Nebenwinkel fällt.

IX. In jedem hohlen Dreikante liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber (III. und VIII.).

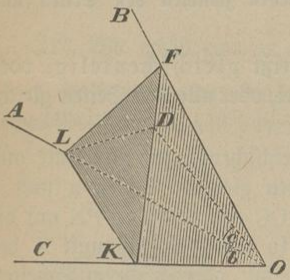

Fig. 197.

X. Die Differenz $a - b$ zweier Seiten a und b eines hohlen Dreikants ist kleiner als die dritte Seite c.

Macht man in der Ebene BOC (Fig. 197) den $\angle$ COD $= \angle$ COA $= \angle$ b (also $\angle$ BOD $=$ a $-$ b) und $\overline{OD} = \overline{OL}$; zieht man durch D eine Gerade FDK, welche OB in F und OC in K schneidet, und verbindet man K, D und F geradlinig mit L, so ist:

$$\angle KOD = \angle KOL = b \text{ (Konstr.)}$$
$$OD = OL \text{ (Konstr.)}$$
$$OK = OK \text{ (Fr. 20 I.)}$$
$$\triangle KOD \cong \triangle KOL \text{ (Fr. 80 II.)}$$
$$KD = KL \text{ (Fr. 67 II.)}$$
$$\angle LDF > 90^\circ \text{ (Fr. 74 III.)}$$
$$FL > FD \text{ (Fr. 74 VIII.)}$$
$$OF = OF \text{ (Fr. 20 I.)}$$
$$OL = OD \text{ (Konstr.)}$$
$$\angle FOL > \angle FOD \text{ (Fr. 78 III.)}$$
$$\angle c > \angle a - \angle b.$$

XI. In jedem hohlen Dreikant ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Nach X. ist $\angle c > \angle a - \angle b$, daher auch (wegen Fr. 20 IX.) $\angle c + \angle b > \{\angle a - \angle b\} + \angle b$,

d. h. $\angle c + \angle b > \angle a$.

XII. Auch im Nebendreikant (Fr. 211 I.), in welchem $a_2 = a$, $b_2 = 180° - b$ und $c_2 = 180° - c$ ist, wäre nach XI. $b_2 + c_2 > a_2$ oder $(180° - b) + (180° - c) > a$, woraus sich nach Fr. 20 IX. leicht

$$360° > a + b + c > 0$$

findet, d. h. in jedem hohlen Dreikant liegt die Summe der drei Seiten zwischen 0 und 360°.

XIII. Im Polardreikant (Fr. 212) ist ebenfalls $360° > a_1 + b_1 + c_1 > 0$; daher im Urdreikant $360° > (180° - A) + (180° - B) + (180° - C) > 0$, oder $540° - A - B - C > 0$ und $360° > 540° - A - B - C$, woraus durch Addition von $A + B + C$ nach Fr. 20 IX. sich

$$540° > A + B + C > 180°$$

ergiebt, d. h. in jedem hohlen Dreikant liegt die Winkelsumme zwischen 180° und 540°.

214. Welche Stücke bestimmen ein Dreikant?

I. Zwei Dreikante lassen sich zum Decken bringen (sind kongruent), wenn ihre drei Winkel und ihre drei Seiten der Reihe nach einander gleich sind und dabei auch in derselben Reihenfolge an einander stoßen.

Folgen die gleichen Seiten und Winkel in entgegengesetzter Ordnung auf einander (wie z. B. bei O(APN) und O(BPN) in Fr. 213 II. und V.), so sind die Dreikante symmetrisch-gleich und lassen sich zu Scheiteldreikanten machen (vgl. Fr. 211 III.).

II. In kongruenten (und in symmetrisch-gleichen) Dreikanten sind die Gegenwinkel gleicher Seiten und die Gegenseiten gleicher Winkel gleich.

III. Ein Dreikant ist bestimmt, wenn man von ihm so viel Stücke (und deren Reihenfolge) kennt, daß sich aus diesen Stücken bloß ein Dreikant zeichnen läßt, oder daß alle Dreikante kongruent sind, welche diese Stücke in der nämlichen Reihenfolge besitzen.

IV. Davon, daß ein, oder zwei Stücke eines Dreikants zur Bestimmung desselben nicht ausreichen, kann man sich (ähnlich wie in Fr. 79 II. und III.) leicht überzeugen.

V. Zwei Dreikante $O_1(A_1B_1C_1)$ und $O_2(A_2B_2C_2)$ sind kongruent, wenn ihre *drei Seiten* der Reihe nach gleich sind und in derselben Ordnung auf einander folgen.

Trägt man auf den Kanten O_1C_1 und O_2C_2 (Fig. 198) zwei gleiche Stücke O_1P_1 und O_2P_2 auf, fällt von P_1 und P_2 zwei Normalen P_1N_1 und P_2N_2 auf die Ebenen $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$, dann die Senkrechten P_1E_1, P_1D_1 und P_2E_2, P_2D_2 auf O_1A_1 und O_1B_1, O_2A_2 und O_2B_2, so ist nach Fr. 189 II. auch $N_1E_1 \perp O_1A_1$, $N_2E_2 \perp O_2A_2$, $N_1D_1 \perp O_1B_1$, $N_2D_2 \perp O_2B_2$. Nun ist $\triangle P_1O_1E_1 \cong \triangle P_2O_2E_2$ und $\triangle P_1O_1D_1 \cong \triangle P_2O_2D_2$ (Fr. 81 II.), daher $O_1E_1 = O_2E_2$ und $O_1D_1 = O_2D_2$. Legt man also die beiden Dreikante $O_1(A_1B_1C_1)$ und $O_2(A_2B_2C_2)$ mit den gleichen Seiten $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$ auf einander, so fällt E_1 auf E_2 und D_1 auf D_2 (Fr. 22 V.), deshalb fällt E_1N_1 auf E_2N_2, D_1N_1 auf D_2N_2 (Fr. 57 III.) und N_1 auf N_2 (Fr. 26). Weil somit $O_1N_1 = O_2N_2$, auch $O_1P_1 = O_2P_2$, sowie $\angle O_1N_1P_1 = 90° = \angle O_2N_2P_2$ (Fr. 181 X.) ist, so ist $\triangle O_1N_1P_1 \cong \triangle O_2N_2P_2$ (Fr. 81 I.) und $N_1P_1 = N_2P_2$ (Fr. 67 II.). Demnach fällt auch P_1 auf P_2 (Fr. 188 II., 22 V.) und das dritte Kantenpaar O_1P_1 und O_2P_2 der beiden Dreikante auf einander (Fr. 21 II.); es decken sich also auch die drei Seitenebenen (Fr. 182 III.) und die Dreikante selbst.

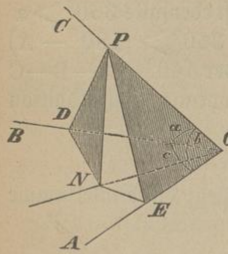

Fig. 198.

VI. *Drei Seiten* und deren Reihenfolge bestimmen wegen V. das Dreikant. — Vgl. aber Fr. 213 XII.

VII. Zwei Dreikante sind kongruent, wenn sie in ihren *drei Winkeln* und deren Aufeinanderfolge übereinstimmen.

Die Polardreikante der beiden Dreikante stimmen nach Fr. 212 II. in ihren Seiten und deren Reihenfolge überein, sind also kongruent (V.), haben daher auch gleiche Winkel in gleicher Folge (II.), und deshalb haben die Urdreikante auch gleiche Seiten in gleicher Folge (Fr. 212 II.) und sind kongruent (V.).

VIII. Drei Winkel und deren Reihenfolge bestimmen nach VII. das Dreikant. — Vgl. aber Fr. 213 XIII.

IX. Zwei Dreikante sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A und in deren Reihenfolge übereinstimmen.

Legt man die Kante O_1A_1 auf O_2A_2, so lassen sich die Ebenen $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$, $A_1O_1C_1$ und $A_2O_2C_2$ zum Decken bringen (Vor. und Fr. 203 I.); da nun $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ und $\angle A_1O_1C_1 = \angle A_2O_2C_2$ (Vor.), so decken sich diese paarweise in derselben Ebene liegenden Winkel (Fr. 31), d. h. O_1B_1 fällt auf O_2B_2, O_1C_1 auf O_2C_2 und daher auch die Ebene $B_1O_1C_1$ auf die Ebene $B_2O_2C_2$ (Fr. 182 III.), und es decken sich wieder die beiden Dreikante.

X. Zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel A bestimmen bei gegebener Reihenfolge das Dreikant (IX.).

XI. Zwei Dreikante sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln B und C und der von diesen eingeschlossenen Seite a und in deren Reihenfolge übereinstimmen. Der Beweis läßt sich mit Hilfe der nach IX. kongruenten Polardreikante ähnlich führen wie in VII.

XII. Zwei Winkel B und C und die eingeschlossene Seite a bestimmen bei gegebener Reihenfolge das Dreikant (XI.).

XIII. Aus zwei Seiten b und c und einem Gegenwinkel B oder aus zwei Winkeln B und C und einer Gegenseite b nebst deren Reihenfolge lassen sich im allgemeinen zwei Dreikante konstruieren.

Die Untersuchung darüber, wenn zwei in diesen drei Stücken übereinstimmende Dreikante kongruent sind, läßt sich mit Fr. 193 und 194 unter Berücksichtigung von Fr. 213 I. bis III. durchführen, ist aber etwas umständlicher.

Zehntes Kapitel.

Das Prisma.

215. Wie entsteht eine Prismenfläche?

I. Bewegt sich an dem als **Leitlinie** (Directrix) dienenden Umfang ABCDK (Fig. 199) eines festliegenden ebenen n-seitigen Vielecks F (der **Grundfläche**) eine unbegrenzte, die Grundfläche schneidende Gerade G (die **Erzeugende**) so hin, daß sie stets dieselbe Richtung behält, so erzeugt sie eine **Prismenfläche**.

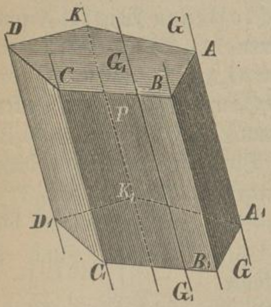

Fig. 199.

Diese besteht aus Teilen von n Ebenen, die sich in n parallelen **Kanten** (Fr. 186 XIV.) schneiden.

Der von der Prismenfläche umschlossene **prismatische Raum** ist nur halbbegrenzt.

II. Die Prismenfläche und der prismatische Raum können auch durch die Bewegung der Grundfläche F = ABCDK entlang einer die Grundfläche schneidenden Geraden G entstehen. Ändert dabei F weder seine Größe, noch seine Gestalt, bleibt ferner jede Seite der Grundfläche F (und wegen Fr. 205 VI. auch die ganze Grundfläche) immer parallel zu sich selbst, so beschreibt jede Seite eine der n Ebenen, AB z. B. die durch AB und G bestimmte Ebene (Fr. 182 III.), mit welcher ja alle Ebenen zusammenfallen (Fr. 182 II.), welche sich durch AB und eine ihrer späteren Lagen, z. B. A_1B_1, nach Fr. 186 VI. legen lassen. Jeder Eckpunkt von F beschreibt wegen Fr. 108 V. und 57 I. bei jener Parallelbewegung der Grundfläche eine zu G parallele Gerade, also nach I. eine Kante.

III. Bei einer endlichen solchen Parallelbewegung der Grundfläche F beschreibt also jede Grundflächenseite nach II. ein Parallelogramm.

216. Welche Eigenschaften hat die Prismenfläche?

I. Jede durch einen Punkt P der Prismenfläche gelegte Parallele G_1 zur Erzeugenden G liegt ganz in der Prismenfläche (Fr. 198 III.).

II. Jede zur Grundfläche F parallele Ebene schneidet alle Ebenen der Prismenfläche in Strecken, welche je einer Seite der Grundfläche parallel (Fr. 205 II.) und gleich (Fr. 108 III.) sind. Wegen Fr. 189 IX. sind demnach der Schnitt $A_1B_1C_1D_1K_1$ und die Grundfläche F auch gleichwinkelig und daher endlich kongruent (Fr. 66 II.).

III. Gleiches gilt von jedem Paar paralleler Ebenen, welche eine Kante (und dann wegen Fr. 189 VI. auch alle Kanten) schneiden.

217. Was ist ein Prisma und ein Parallelepiped?

I. Der zwischen zwei parallelen Schnittebenen (Fr. 216 III.) gelegene Teil $ABCDKK_1D_1C_1B_1A_1$ eines prismatischen Raumes mit n-eckiger Grundfläche heißt ein n-seitiges Prisma.

Dieses Prisma wird von zwei kongruenten Grundflächen ABCDK und $A_1B_1C_1D_1K_1$ (Fr. 216 II.) und von n in einer Seite übereinstimmenden Parallelogrammen (Fr. 215 III.) als Seitenflächen begrenzt; es besitzt 2n Grundkanten AB, BC ꝛc., A_1B_1, B_1C_1 ꝛc., welche paarweise parallel und gleich sind, n parallele (und gleichlange) Seitenkanten AA_1, BB_1 ꝛc. und 2n dreiseitige Ecken A, B ꝛc., A_1, B_1 ꝛc. Die n Seitenflächen zusammen bilden den Prismenmantel. Die Entfernung H der beiden Grundflächen (Fr. 206 III.) heißt die Höhe des Prismas.

II. Das Prisma ist also der bei einer endlichen Bewegung der in Fr. 215 II. beschriebenen Art von der Grundfläche F durchlaufene Raum.

III. Beim geraden Prisma stehen die Seitenkanten auf den Grundflächen normal (vergl. Fig. 201) und sind der Höhe gleich (Fr. 206 III.). Beim schiefen Prisma sind die Seitenkanten gegen die Grundflächen geneigt (Fr. 192) und größer als die Höhe H (Fr. 190 IV.).

IV. Das Parallelepiped ABCDNLKF (Fig. 200) ist ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche; es wird von drei Paar parallelen und kongruenten Parallelogrammen begrenzt.

Da jedes der drei Paare als Grundflächen gelten kann, so sind je vier der zwölf Kanten parallel und gleich.

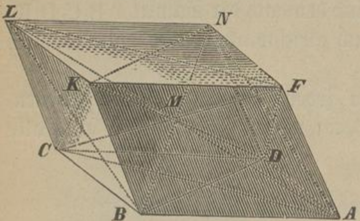

Fig. 200.

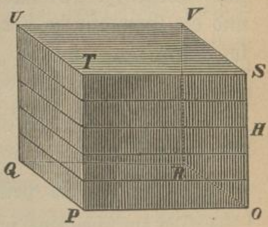

Fig. 201.

V. Im Parallelepiped lassen sich drei Paar Diagonalebenen AFLC und BKND, FKCD und NLBA, KLDA und FNCB durch je zwei gegenüberliegende Kanten (I., Fr. 182 IV.), auch vier Diagonalen AL, CF, BN und DK durch je zwei gegenüberliegende Ecken ziehen; erstere schneiden sich in einem Punkte M, denn letztere schneiden und halbieren sich in M (I. und Fr. 110 III.).

Auch die drei den Kanten parallelen Strecken, in denen sich die drei Paare der Diagonalebenen schneiden, halbieren sich gegenseitig in M (Fr. 110 IV.).

VI. Beim dreimalrechtwinkeligen Parallelepiped OPQRVUTS (Fig. 201), einem geraden (Fr. 217 III.) mit rechteckiger Grundfläche, sind alle sechs Begrenzungsflächen Rechtecke, weil alle Kanten auf einander senkrecht stehen.

VII. Sind bei einem dreimalrechtwinkeligen Parallelepiped alle Kanten gleichgroß, so wird es von sechs kongruenten Quadraten begrenzt und heißt ein Würfel (Cubus).

218. Wie berechnet man die Oberfläche eines Prismas?

I. Die Oberfläche des Prismas wird nach Fr. 178 I. und 177 VI. berechnet.

II. Beim geraden Prisma (Fr. 217 III.) haben alle Seitenflächen die nämliche Höhe H wie das Prisma selbst; daher ist die Oberfläche $O = 2F + UH$, wenn F eine Grundfläche und U deren Umfang bedeutet (Fr. 177 IV.).

219. Wenn sind zwei Prismen kongruent?

I. Zwei gerade Prismen von kongruenter Grundfläche und von gleicher Höhe lassen sich zum Decken bringen, sind kongruent.

Denn bringt man ein Paar ihrer Grundflächen zum Decken, so decken sich auch die Kanten (Fr. 188 II., 22 V.).

II. Zwei schiefe Prismen sind bei gleicher Höhe und kongruenten Grundflächen nur dann kongruent, wenn die Seitenkanten (und deren Projektionen) gleiche Neigung und Lage gegen die Grundfläche haben (vergl. Fr. 201 VI., 186 VII.).

III. Teilt man die Höhe H eines Prismas in n gleiche Teile (vergl. Fig. 201), und legt man durch die Teilpunkte Parallelebenen zur Grundfläche, so erhält man n kongruente Prismen (Fr. 216 II. und 219 I., oder II.).

220. Wie verhalten sich die Rauminhalte zweier Prismen?

I. Zwei gerade Prismen M_1 und M_2 mit kongruenter Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Sind die beiden Höhen $H_1 = xm$ und $H_2 = ym$ kommensurabel und man teilt sie in x und y gleiche Teile von der Größe m, so läßt sich M_1 durch Parallelebenen in x, M_2 in y kongruente Teile p (Fr. 219 III. und I.) zerlegen; daher ist $M_1 : M_2 = xp : yp = x : y = xm : ym = H_1 : H_2$.

Sind H_1 und H_2 inkommensurabel, so sind auch M_1 und M_2 inkommensurabel, ihr Verhältnis liegt aber (ähnlich wie in Fr. 173 III.) stets zwischen denselben Grenzen, wie das Verhältnis der Höhen, weshalb nach Fr. 147 wieder:

$$M_1 : M_2 = H_1 : H_2.$$

II. Körper zwischen parallelen Ebenen haben gleiche Höhe und umgekehrt (Fr. 206 III.).

III. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede P_1 und P_2 von gleicher Höhe H verhalten sich wie ihre (kommensurabeln, oder inkommensurabeln) Grundflächen F_1 und F_2.

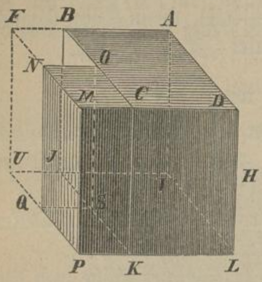

Fig. 202.

Legt man P_1 und P_2 (Fig. 202) mit der Kante CK so an einander, daß die an dieser Kante gelegenen Flächenwinkel Nebenwinkel werden, und erweitert man die Grundflächen $F_1 = ABCD = VJKL$ und $F_2 = CMNO = KPQS$, sowie die Seitenflächen ABJV und PMNQ, bis sie sich in FU schneiden, so ist noch ein drittes dreimalrechtwinkeliges Parallelepiped $P_3 = JBFUPMCK$ von der nämlichen Höhe CK entstanden. Da nun P_3 mit $P_1 = VABJKCDL$ die Grundfläche BJKC, mit $P_2 = KCMPQNOS$ aber die Grundfläche KCMP gemeinschaftlich hat, so ist nach I. $P_1 : P_3 = CD : CM$ und $P_3 : P_2 = BC : CO$; daher $P_1 : P_2 = (P_1 : P_3) . (P_3 : P_2) = CD . BC : CM . CO$ (Fr. 20 VIII.) und nach Fr. 177 IV. endlich $P_1 : P_2 = F_1 : F_2$.

IV. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede P_1 und P_2 verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen F_1 und F_2 und ihren Höhen H_1 und H_2.

Denkt man sich noch ein drittes dreimalrechtwinkeliges Parallelepiped P von der Grundfläche $F \cong F_1$ und der Höhe $H = H_2$, so ist nach I. $P_1 : P = H_1 : H = H_1 : H_2$ und nach III. $P : P_2 = F : F_2 = F_1 : F_2$, daher nach Fr. 20 VIII. $P_1 : P_2 = (P_1 : P)(P : P_2) = F_1H_1 : F_2H_2$.

V. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede verhalten sich wie die Produkte aus ihren in einer Ecke zusammenstoßenden drei Seiten (IV. und Fr. 177 IV.).

VI. Jedes schiefe Prisma ABCDVUYX (Fig. 203) läßt sich in ein gerades $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ von demselben Inhalte und derselben Seitenkante AX verwandeln, indem man durch die Endpunkte A und X einer Kante AX zwei Ebenen $AB_1C_1D_1$ und $XY_1U_1V_1$ legt, welche auf dieser Kante (und daher auch auf allen anderen Kanten, Fr. 189 VII.) normal stehen. Denn die Körper $ABCDD_1C_1B_1A$ und $XYUVV_1U_1Y_1X$ sind dann kongruent, da sie sich wegen der Übereinstimmung in allen ihren Stücken zum Decken bringen lassen. Addiert man nun zu diesen beiden Körpern den Körper $AB_1C_1D_1VUYX$, so erhält man die Prismen

ABCDVUYX und $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$,

welche nach Fr. 20 VIII. inhaltsgleich sind.

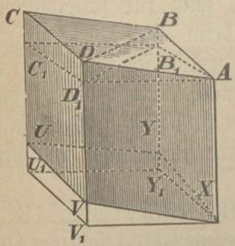

Fig. 203.

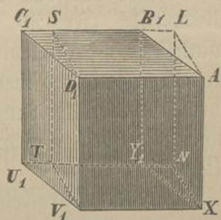

Fig. 204.

VII. Wegen Fr. 166 III. ist in VI. $ADVX = AD_1V_1X$; faßt man diese Parallelogramme als Grundflächen auf, so ist in VI. das Parallelepiped ABCDVUYX in ein inhaltgleiches $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ von gleicher Höhe (II.) und inhaltgleicher, rechteckiger Grundfläche verwandelt worden, das mit jenem die Kante AX gemein hat, die aber jetzt auf den Seitenflächen $AB_1C_1D_1$ und $XY_1U_1V_1$ normal steht.

VIII. Wiederholt man das in VI. angegebene Verfahren bei dem Parallelepiped $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ (Fig. 204) in betreff der Kante AD_1, so laufen die auf AD_1 normalen Ebenen ALNX und D_1STV_1 durch die Kanten AX und D_1V_1 (Fr. 181 X.).

Zwischen diesen Ebenen und den Parallelebenen AB_1Y_1X und $D_1C_1U_1V_1$ liegen dann zwei (nach Fr. 219 I.) kongruente dreiseitige Prismen AB_1LNY_1X und $D_1C_1STU_1V_1$; addiert man zu diesen den Körper $AB_1SD_1V_1TY_1X$, so erhält man die (nach Fr. 20 VIII.) inhaltgleichen Parallelepipede AD_1SLNTV_1X und $D_1AB_1C_1U_1Y_1XV_1$. Da nun in ersterem $ALSD_1 \perp AX$ und $ALNX \perp AD_1$ gemacht wurde, so ist $\angle XAL = 90°$ und $\angle D_1AL = 90°$ (Fr. 181 X.), also auch:

$$AL \perp AD_1V_1X \text{ (Fr. 181 XI.).}$$

Demnach läßt sich jedes schiefe Parallelepiped $ABCDVUYX$ in ein dreimalrechtwinkeliges $ALSD_1V_1TNX$ von gleichem Inhalt, gleicher Höhe AL (VII. und Fr. 206 III.) und gleicher Grundfläche ($AD_1V_1X = ADVX$) verwandeln, welches mit dem erstern in einer Seite AX übereinstimmt.

IX. Daher gilt der Satz IV. auch für schiefwinkelige Parallelepipede (Fr. 20 IV.); denn die zwei dreimalrechtwinkeligen Parallelepipede, in welche sie sich nach VIII. verwandeln lassen, und welche sich nach IV. wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen verhalten, haben ja die nämliche Höhe und gleichgroße Grundfläche wie die schiefwinkeligen.

X. Jedes gerade Parallelepiped $ABCDLKJV$ ($DL \perp ABCD$; Fig. 202) wird durch die Diagonalebene $BDLJ$ in zwei kongruente Hälften zerlegt (Fr. 108 I. und 219 I.).

XI. Jedes schiefe Parallelepiped $ABCDVUYX$ (Fig. 203) wird durch die Diagonalebene $BDVY$ in zwei inhaltgleiche Hälften zerlegt.

Bringt man die Körper

$$ABCDD_1C_1B_1A \quad \text{und} \quad XYUVV_1U_1Y_1X$$

zum Decken (VI.), so decken sich auch die Trapeze BDD_1B_1 und YVV_1Y_1 und die Körper $ABDD_1B_1A$ und $XYVV_1Y_1X$, sowie $BDCC_1D_1B_1$ und $YVUU_1V_1Y_1$; nach X. und Fr. 20 VIII. ist daher:

$$ABDVYX = AB_1D_1V_1Y_1X = B_1C_1D_1V_1U_1Y_1$$
$$= BCDVUY.$$

Ganz dasselbe gilt für die Diagonalebene $ACUX$.

XII. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich als die Hälfte eines Parallelepipeds ansehen (X., oder XI.).

XIII. Daher verhalten sich dreiseitige Prismen wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen (XII. und IX.).

XIV. Jedes Prisma läßt sich in dreiseitige zerlegen; daher gilt (wegen XIII.) der Satz IV. für alle Prismen, d. h.:

Zwei Prismen verhalten sich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe.

XV. Zwei Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind inhaltgleich (XIV.).

221. Wie berechnet man den Inhalt eines Prismas?

I. Als Maß für den Rauminhalt der Körper wählen wir das Kubikmeter ($1 \boxplus^{m} = 1^{cbm}$), d. h. einen Würfel (Fr. 217 VII.), dessen Seite der Längeneinheit (1 Meter) gleicht. Vergl. Fr. 146 III. und Fr. 176.

II. Ein Kubikcentimeter 2c. ist ein Würfel von 1 Centimeter 2c. Seite.

III. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Kubikmeter ein Körper enthält, heißt dessen Inhaltszahl oder Raumzahl.

Damit die nachfolgenden Formeln den Rauminhalt in Kubikmetern liefern, sind die in ihnen vorkommenden Maße in Metern einzusetzen.

IV. Die Inhaltszahl eines Würfels W ist die dritte Potenz der Längenzahl a seiner Seite a. Denn nach Fr. 220 IV. findet man $W : 1 \boxplus^{m} = (a^2 \square^{m} . a^{m}) : (1 \square^{m} . 1^{m}) = a^3$, also

$$W = a^3 \boxplus^{m}.$$

V. Für die Würfel W_1 und W_2 der Summe $(a + b)$ oder der Differenz $(a - b)$ zweier Strecken hat man nach IV.*):

$$W_1 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$W_2 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

---

*) Vergl. Katechismus der Raumberechnung Fr. 33. — Eine hübsche Deutung dieser zwei Formeln gestattet VII. in Verbindung mit Fr. 177 I. Hiernach läßt sich nämlich W_1 in zwei Würfel und sechs Parallelepipede zerlegen. — Vergl. die Anmerkung *) zu Fr. 178.

VI. Aus IV. folgt leicht, weshalb

$$1 \boxplus^m = 10^3 \text{ d. h. } 1000 \boxplus\text{Decimeter}$$
$$= 100^3 \text{ d. h. } 1\,000\,000 \boxplus\text{Centimeter ꝛc.}$$

VII. Die Raumzahl eines dreimalrechtwinkeligen Parallelepipeds P ist das Produkt aus den Längenzahlen seiner drei Seiten a, b, c (Fr. 220 V.):

$$P = abc \boxplus^m.$$

Jede Diagonale dieses Körpers hat nach Fr. 170 I. (wegen Fr. 181 X.) die Länge $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

VIII. Die Raumzahl eines Prismas M ist das Produkt aus der Flächenzahl $\mathfrak{F}$ seiner Grundfläche und der Längenzahl $\mathfrak{H}$ seiner Höhe:

$$M = \mathfrak{F}\mathfrak{H} \boxplus^m.$$

Beispiele enthält der Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. 1888. Fr. 139 ff.

Elftes Kapitel.

Der Cylinder.

222. Was ist eine Cylinderfläche und ein Cylinder?

I. Bewegt sich an einer festliegenden als Leitlinie L, Fig. 205, dienenden Kreislinie eine unbegrenzte, die Ebene der Leitlinie schneidende Gerade (die Erzeugende) G, von unveränderlicher Richtung (Fr. 186 XI.) hin, so beschreibt sie eine Kreis-Cylinderfläche, welche (da andere Cylinderflächen hier nicht betrachtet werden sollen) kurzweg Cylinderfläche genannt werde.

II. Die durch den Mittelpunkt C der Leitlinie L gelegte Parallele A zur Erzeugenden G heißt die Axe, die Ebene F der Leitlinie die Grundfläche der Cylinderfläche.

III. Steht die Erzeugende G und demnach (wegen Fr. 189 VII.) auch die Axe A normal, oder schief auf der Ebene der Leitlinie, so ist die Cylinderfläche gerade, oder schief.

IV. Der von der Cylinderfläche umschlossene halbbegrenzte Raum heißt ein cylindrischer Raum.

V. Eine durch einen Punkt C_1 der Axe parallel zur Grundfläche F gelegte Ebene muß die Erzeugende in allen ihren Lagen schneiden (Fr. 206 IV.), die Cylinderfläche also in einer geschlossenen Linie.

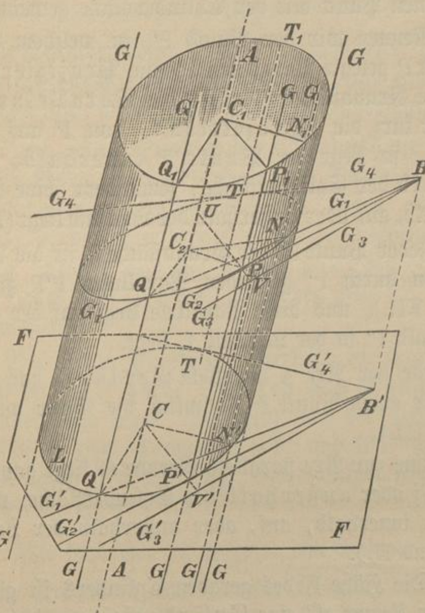

Fig. 205.

VI. Der von der Grundfläche F und einer dazu parallelen Ebene und dem zwischen beiden liegenden Stücke der geraden, oder schiefen Cylinderfläche (dem Mantel) begrenzte Körper heißt ein (gerader, oder schiefer) Cylinder (Walze). — Vergl. Fr. 224 VI.

Die Entfernung dieser beiden parallelen Ebenen (der beiden Grundflächen) heißt die Höhe H des Cylinders.

223. Welche Lagen kann ein Punkt und eine Gerade gegen eine Cylinderfläche haben?

I. Jede durch einen Punkt P, Fig. 205, der Cylinderfläche gelegte Parallele G zur Axe A liegt ganz in der Cylinderfläche (Fr. 222 I. und 186 VII.).

II. Jede andere Parallele (z. B. BB', oder VV') zur Axe A hat keinen Punkt mit der Cylinderfläche gemein (I.).

III. Nennen wir den Punkt P', in welchem eine durch den Punkt P gelegte Parallele PP' (die Projizierende) zur Axe A die Grundfläche F trifft, die Parallelprojektion (oder hier kurz die „Projektion") von P auf F (vergl. Fr. 190), so liegt der Punkt P innerhalb, auf oder außerhalb der Cylinderfläche, jenachdem seine Projektion P' innerhalb, auf oder außerhalb der Leitlinie liegt (I. und II.).

IV. Jeder Punkt P' der Grundfläche F ist die Projektion der ganzen durch P' gehenden Parallelen P'P zur Axe A (Fr. 186 VII.), und diese Parallele liegt auf der Cylinderfläche, sobald P' in der Leitlinie L liegt.

V. Jede der Axe A parallele Gerade G hat als Projektion nur einen Punkt P', nämlich die Spur von G in F (Fr. 188 III.).

VI. Eine zur Axe parallele Gerade G liegt ganz innerhalb, auf oder außerhalb der Cylinderfläche, wenn ihre Projektion innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie L liegt (I. und II.).

VII. Die Höhe H des geraden Cylinders ist gleich, die des schiefen kleiner als eine Cylinderseite a, d. h. eine auf dessen Mantel von einer Grundfläche zur andern gezogene Strecke $P'P_1$ (Fr. 190 IV.).

VIII. Die Projektion G' jeder nicht zur Axe A parallelen Geraden G ist wieder eine Gerade, was sich ganz ähnlich wie in Fr. 191 beweisen läßt.

IX. Die Cylinderfläche wird wegen III. bis V. von der Geraden G_1, G_2 oder G_3 in zwei Punkten N und Q geschnitten, in einem Punkte P berührt, oder in keinem Punkte getroffen, jenachdem die Projektion die Leitlinie schneidet wie G_1', oder berührt wie G_2', oder wie G_3' gar nicht trifft (Fr. 83).

In der durch den Berührungspunkt, oder durch einen Schnittpunkt zwischen Projektion und Leitlinie gelegten Projizierenden kann nämlich wegen Fr. 21 I. und 223 III. nur ein Punkt der Geraden G liegen.

X. Die Cylinderfläche ist also krumm (Fr. 16 I. und 12 I.), da sich durch jeden ihrer Punkte P nur eine Gerade G (I.) ziehen läßt, welche ganz in der Cylinderfläche liegt.

XI. Durch jeden Punkt P der Cylinderfläche lassen sich unzählige Berührungslinien oder Tangenten an die Cylinderfläche legen (IX.); dieselben liegen aber wegen Fr. 184 I. in der (zur Axe A parallelen) Ebene PBB'P', welche sich durch P und die Tangente G_2' der Leitlinie im Punkte P' legen läßt (Fr. 182 II., oder 200 II., da A und G_2' sich kreuzen).

XII. Von jedem Punkte B außerhalb der Cylinderfläche lassen sich nach XI. zwei Scharen von Tangenten an die Cylinderfläche legen, weil sich von der Projektion B' des Punktes B zwei Tangenten B'P' und B'T' an die Leitlinie legen lassen (Fr. 103 II.). Jede Schar liegt in einer Ebene BPP'B', bezw. $BT_1T'B'$.

224. Wie kann eine Ebene gegen eine Cylinderfläche liegen?

I. Die Projektion einer zur Axe A parallelen, oder durch die Axe selbst gelegten Ebene E ist die Gerade G' (Spur), in welcher E die Grundfläche F schneidet; denn alle Projizierende von Punkten in E liegen ganz in dieser Ebene E, die Projektionen der Punkte also in G' (Fr. 223 III. und 198 III.; oder Fr. 186 XV.).

II. Die zur Axe A parallele, oder durch A gehende Ebene E schneidet die Cylinderfläche in zwei Geraden N_1N' und Q_1Q' (Fig. 205), berührt sie in einer Geraden P_1P', oder hat gar nichts mit ihr gemein, jenachdem die Projektion G, der Ebene E die Leitlinie schneidet, berührt, oder nicht trifft (vergl. Fr. 223 IX.). Die Schnitt- und Berührungs-Geraden zwischen einer solchen Ebene E und der Cylinderfläche sind der Axe A parallel (Fr. 223 X.).

III. Durch einen Punkt P der Cylinderfläche läßt sich nur eine, durch einen Punkt B außerhalb derselben lassen sich zwei Berührungsebenen an die Cylinderfläche legen (II.; vergl. Fr. 223 XI. und XII.).

IV. Nach Fr. 222 V. schneidet eine durch einen Punkt C_1, Fig. 205, der Axe A parallel zur Grundfläche F gelegte Ebene E die Cylinderfläche in einer geschlossenen Linie. Legt man durch einen beliebigen Punkt P_1 der Schnittlinie eine Parallele P_1P' zur Axe A, so liegt P_1P' ganz in der Cylinderfläche (Fr. 223 I.) und trifft die Leitlinie in einem Punkte P'. Legt man nun noch durch die Parallele P_1P' und die Axe A eine Ebene, so schneidet letztere E und F in zwei Parallelen C_1P_1 und CP' (Fr. 205 II.); deshalb ist $C_1P_1 = CP'$ (Fr. 108 III.), d. h. jeder Punkt P_1 des Schnittes ist von C_1 um den Halbmesser (CP') der Leitlinie entfernt.

Die Schnittlinie ist also ein der Leitlinie kongruenter Kreis (Fr. 47 II.), dessen Mittelpunkt in der Axe A liegt.

V. Daher sind die beiden parallelen Grundflächen des Cylinders kongruent (Fr. 222 VI.).

VI. Auch der Cylinder (vergl. Fr. 217 II.) kann daher durch stetige Parallelbewegung seiner Grundfläche entstehen; dabei muß aber der Mittelpunkt C der ihre Größe nicht ändernden Grundfläche die Axe A beschreiben.

Ein gerader Cylinder entsteht auch durch Umdrehung eines Rechtecks um die eine festgehaltene Seite, wobei die letztere die Axe C_1C liefert (Fr. 181 XIV., 106 III., 108 VII.).

VII. Eine Ebene E, welche weder der Grundfläche F, Fig. 205, noch der Axe A parallel ist, schneidet die Cylinderfläche ebenfalls in einer geschlossenen Linie, deren Punkte P jedoch in ungleicher Entfernung von dem Punkte C_2 liegen, worin E die Axe A schneidet. Zieht man nämlich $PU \parallel P'C$, so ist wieder $PU = P'C$ (IV.); mit P aber ändern sich die Strecken $CU = P'P$ (Fr. 207 IV.) und $C_2U = CU - CC_2$ (Fr. 20 IX.), ebenso der Winkel $PUC_2 = P'CA$ (Fr. 193), daher auch die Strecke PC_2 (Fr. 170 I., IV., oder V.).

VIII. Am einfachsten gestaltet es sich bezüglich des in VII. besprochenen Schnittes beim geraden Cylinder, weil bei diesem $\angle PUC_2 = 90°$ ist. Der hier auftretende Schnitt heißt eine Ellipse (vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. Fr. 123; Katechismus der analytischen Geometrie, § 21).

IX. Beim schiefen Cylinder ist der in VII. besprochene Schnitt meist auch eine Ellipse, bei einer bestimmten Lage der schneidenden Ebene jedoch ein Kreis.

X. Bei der schiefen Cylinderfläche ist ein Normalschnitt zur Axe eine Ellipse (IX.); daher läßt sich jede schiefe Kreiscylinderfläche als eine gerade elliptische Cylinderfläche auffassen.

225. Wie groß ist die Mantelfläche eines Cylinders?

I. Die Mantelfläche jedes Cylinders vom Halbmesser $P'C = R$, Fig. 205, läßt sich auf einer Ebene abwickeln, da ja nach Fr. 224 II. der Cylinder diese Ebene beständig berühren kann.

Die abgewickelte Mantelfläche ist eine Figur, welche durch Parallelverschiebung von der Cylinderseite $P_1P' = a$ beschrieben werden kann, wenn letztere sich an der abgewickelten Leitlinie $L = 2\pi R$ hinbewegt; dabei beschreibt jeder Punkt der Seite den Weg $2\pi R$. Vergl. Fr. 168 und 177.

II. Die Mantelfläche M des geraden Cylinders von der Höhe H ist ein Rechteck aus den Seiten $H = a$ und L.

Daher ist die Mantelfläche $M = HL = 2\pi RH$,

und die gesamte Oberfläche O des Cylinders

$$O = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R + H).$$

III. Die Oberfläche O des geraden Hohlcylinders oder einer Röhre (Fig. 206) besteht aus dem innern Cylindermantel $M_0 = 2\pi R_0 H$, dem äußern Cylindermantel $M_1 = 2\pi R_1 H$ und den beiden ringförmigen Grundflächen, von denen jede den Inhalt $(R_1^2 - R_0^2)\pi = (R_1 + R_0)(R_1 - R_0)\pi$ hat (Fr. 178 XI.).

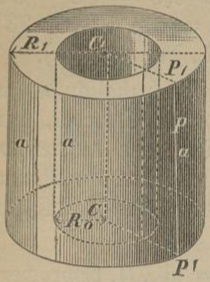

Fig. 206.

Dabei ist bei der lichten Weite $2R_0$ und der Wandstärke $e = R_1 - R_0$ der äußere Durchmesser $D_1 = 2R_1 = 2(R_0 + e)$ und der mittlere Durchmesser $D = 2R = 2R_0 + e = R_1 + R_0$. Daher ist:

$$O = 2\pi(R_1 + R_0)(e + H) = 4\pi R(e + H).$$

IV. Beim schiefen Cylinder ist die abgewickelte Mantelfläche eine gemischtlinige Figur, läßt sich aber in ein Rechteck von den Seiten a und b verwandeln, wenn b den Umfang der Ellipse bedeutet, welche ein Normalschnitt zur Axe liefert (Fr. 224 X.).

226. Wie berechnet man den Inhalt eines Cylinders und seiner Teile?

I. Da ein Prisma mit regelmäßiger Grundfläche zu einem Kreiscylinder wird, sobald die Seitenzahl der Grundfläche ins Unendliche wächst (vergl. Fr. 113 VIII.), so behält die Inhaltsformel für das Prisma (Fr. 221 VIII.) auch für den Cylinder Geltung; der Inhalt des letztern ist daher:

$$C = FH = \pi R^2 H.$$

II. Für den Inhalt T von Cylinderteilen, deren Grundfläche F ein Abschnitt, Ausschnitt, Zone, Ring, oder Mond ist, gilt (sobald nur diese Teile noch die in Fr. 224 IV. und V. vorausgesetzte Eigenschaft haben) ebenfalls die Formel:

$$T = FH.$$

III. Der Hohlcylinder (Fig. 206) hat demnach den Inhalt:

$$T_1 = \pi H(R_1^2 - R_0^2) = \pi He(R_1 + R_0) = 2\pi HeR.$$

IV. Nach derselben Formel darf auch der Inhalt von prismatischen (Fr. 217 III.) Körpern mit irgendwelcher krummlinigen, oder gemischtlinigen Grundfläche berechnet werden, weil man einen möglichst kleinen Bogen jeder krummen Linie als einen kleinen Kreisbogen ansehen darf.

227. **Wenn sind zwei Körper inhaltsgleich?**

I. Denkt man sich in Fig. 207 die einzelnen prismatischen (oder cylindrischen) Schichten so auf einander gesetzt, daß die Flächen, mit denen sie sich berühren, sich nicht decken, so entsteht ein treppenförmiger Körper, welcher dem Prisma STUVRQPO an Inhalt gleicht.

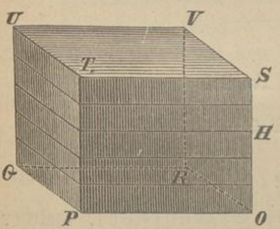

Fig. 207.

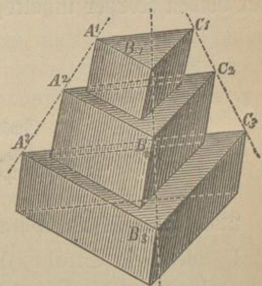

Fig. 208.

II. Zwei solche treppenförmige Körper (von gleicher Höhe) werden demnach gleichen Inhalt haben, wenn alle einzelnen prismatischen Schichten des einen denselben Inhalt haben wie die entsprechenden Schichten des anderen, d. h. (wegen Fr. 220 XV.) wenn die Schichten beider Körper paarweise gleiche Höhe und gleiche (wenn auch verschieden gestaltete) Grundflächen haben.

Dabei ist es aber keineswegs erforderlich, daß sämtliche Schichten eines jeden der beiden Körper unter sich gleich sind, vielmehr kann sich der Querschnitt jedes Körpers von Schicht zu Schicht an Größe und selbst an Gestalt ganz beliebig ändern.

III. Läßt man in II. die Schichtenhöhen immer kleiner und kleiner werden, so werden unter übrigens gleichen Umständen die Treppenabsätze immer unmerklicher, und in Fig. 208 z. B. rücken die sich entsprechenden oberen Eckpunkte A_1, A_2, A_3 2c.

der einzelnen Schichten immer näher an einander, ohne daß die in II. ermittelte Inhaltsgleichheit verloren geht.

Könnte man die Schichtenhöhen verschwindend klein machen, so würden jene Eckpunkte zu einer (geraden, oder krummen) Linie, die gebrochenen Seitenflächen zu einer (ebenen, oder krummen) Fläche zusammenrücken, welche die Kanten A_1B_1, A_2B_2 2c. enthält. Der Satz II. würde dann lauten:

IV. Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn je zwei, zu den Grundflächen der beiden Körper parallele und in gleicher Entfernung von diesen Grundflächen liegende Querschnitte der beiden Körper inhaltsgleich sind.

Zwölftes Kapitel.

Die Pyramide.

228. Was ist eine Pyramide?

I. Wenn ein Strahl OS (die Erzeugende), welcher in seinem Endpunkte O (Fig. 209) fest gehalten wird, sich so bewegt, daß er stets einen Punkt mit dem Umfange (der Leitlinie) eines seine Lage nicht ändernden Vielecks ABCD (der Grundfläche F) gemein hat, dessen Ebene nicht durch den festgehaltenen Punkt O (die Spitze) geht, so erzeugt OS eine Pyramidenfläche.

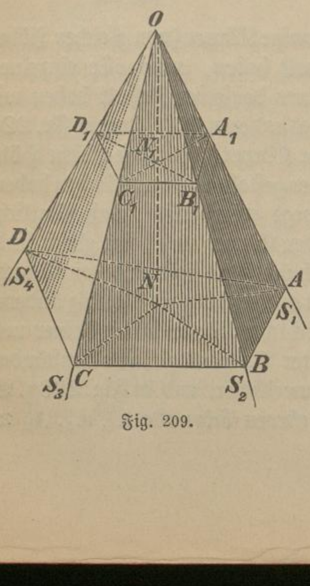

Fig. 209.

II. Ist die Grundfläche F ein n-eck, so besteht die Pyramidenfläche aus Teilen von n sich schneidenden Ebenen und hat n Kanten OS_1, OS_2 2c.

III. Das an der Spitze O entstehende Dreikant, oder Vielkant (Fr. 209) ist durch die Leitlinie und die Lage der Spitze gegen die Leitlinie bestimmt.

Zur Bestimmung der Lage der Spitze O gegen die Grundfläche F genügt der Punkt N, in welchem eine von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Normale ON die Grundfläche trifft, und die Länge dieser Normalen (Fr. 188 II.).

Die Lage und die (von der Grundfläche aus gerechnete) Länge einer Kante (Fr. 214), oder die Länge von drei Kanten (Fr. 79 V.) würden die Lage von O gegen F ebenfalls bestimmen.

IV. Verlängert man die Kanten über die Spitze O hinaus, so entsteht noch das (symmetrisch-gleiche) Scheitelvielkant, und dessen Seiten bilden mit den schon vorhandenen die Doppelpyramidenfläche.

V. Der innerhalb der Pyramidenfläche liegende, von ihr halbbegrenzte Raum (das Vielkant) heiße ein pyramidaler Raum.

VI. Die n-seitige Grundfläche F und der Pyramidenmantel (d. i. der zwischen F und der Spitze O liegende Teil der Pyramidenfläche) begrenzen einen Körper, welcher eine n-seitige Pyramide heißt.

Die Normale ON von O auf F heißt die Höhe der Pyramide. Die n-seitige Pyramide hat n Seitenkanten OA, OB 2c., und n Grundkanten AB, BC 2c.; von ihren n + 1 Begrenzungsflächen und von ihren n + 1 Ecken O, A, B 2c. sind je n dreiseitig (vergl. Fr. 209 I.).

VII. Liegen die Eckpunkte A, B 2c. der Grundfläche F im Kreise um den Fußpunkt N der Höhe, so sind alle Seitenkanten gleichlang (Fr. 190 VI.), und die Pyramide heißt gerade.

VIII. Die Pyramide ist regelmäßig, wenn ihre Grundfläche eine regelmäßige Figur ist, deren Mittelpunkt mit dem Höhenfußpunkte N zusammenfällt.

IX. Die dreiseitige Pyramide heißt Tetraeder. Jede ihrer vier Flächen kann als Grundfläche angesehen werden.

229. Welche Eigenschaften hat die Pyramide?

I. Jede durch die Spitze O (Fig. 209) und einen Punkt der Leitlinie gelegte Gerade G liegt ganz in der Pyramidenfläche (Fr. 228 I.).

II. Jede durch den Punkt N_1 der Höhe $ON = H$ gelegte, zur Grundfläche $F = ABCD$ parallele Ebene E schneidet alle Ebenen der Pyramidenfläche (Fr. 208 III.), liefert also eine geschlossene Schnittfigur $A_1B_1C_1D_1$.

Zerlegt man von dem Höhenfußpunkte N und von dem Schnittpunkte N_1 aus die Grundfläche und den Schnitt in Dreiecke, so sind auch deren Seiten paarweise parallel (Fr. 205 II.), die Dreiecke, z. B. $A_1N_1B_1$ und ANB, sind also gleichwinkelig (Fr. 189 IX.) und ähnlich (Fr. 156 I.); daher ist denn (nach Fr. 150 I.) auch der Parallelschnitt der Grundfläche ähnlich.

III. Ebenso ist wegen Fr. 155 II. $\triangle A_1ON_1 \sim \triangle AON$, $\triangle B_1ON_1 \sim \triangle BON$ 2c., und demnach verhält sich

$$ON_1 : ON = OA_1 : OA = OB_1 : OB = \cdots$$
$$= A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC = \cdots$$

IV. Der Inhalt f des Parallelschnittes findet sich aus $f : F = \overline{A_1B_1}^2 : \overline{AB}^2$ (Fr. 175 II.), wofür man nach III. auch $f : F = z^2 : H^2$ setzen kann, wenn $ON_1 = z$.

V. Ähnliche Sätze, wie II. bis IV., gelten auch von je zwei anderen parallelen Ebenen, welche alle Kanten der Pyramide schneiden.

VI. Will man auch die Pyramide durch stetige Parallelbewegung eines Vielecks F entstehen lassen, so müssen dessen Seiten stets parallel zu sich selbst bleiben und die Ecken sich auf den Kanten geradlinig fortbewegen, damit die Größe von F sich nach dem in IV. gefundenen Gesetze stetig ändere.

VII. Die Summe der ebenen Winkel der n dreieckigen Seitenflächen der n-seitigen Pyramide beträgt $2n\mathfrak{R}$ (Fr. 68 II.). Da nun die zwei Winkel, welche irgend eine Kante mit den zwei zugehörigen Grundkanten einschließt, zusammen größer sind, als der von diesen Grundkanten gebildete Winkel (Fr. 213 XI.), so muß die Summe S der n ebenen Winkel bei O kleiner sein als der Rest zwischen 2nR und der Summe der n Winkel der Grundfläche (Fr. 20 IX.); nach Fr. 72 III. ist aber letztere Summe $= (2n - 4)R$, und deshalb ist die erstere Summe $S < 4R$.

VIII. Bei einem Vielkant (einer mehrseitigen Ecke) mit lauter hohlen Flächenwinkeln liegt die Summe S der Seiten zwischen 0 und 360° (VII.). Vgl. Fr. 213 XII.

IX. Die Summe der Winkel eines n-seitigen Vielkants liegt zwischen $n \cdot 180°$ und $(n-2)\,180°$, was man aus VIII. mittels des Polar-Vielkants ebenso wie in Fr. 213 XIII. findet.

230. Was versteht man unter einem Pyramidenstumpf?

I. Schneidet man von einer n-seitigen Pyramide OABCD (Fig. 209) das nach der Spitze O hin gelegene Stück $OA_1B_1C_1D_1$ durch eine zur Grundfläche F parallele Ebene weg, so bleibt ein Pyramidenstumpf (abgestutzte, abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide) übrig, mit 2n dreiseitigen Ecken, 3n Kanten und $n + 2$ Begrenzungsflächen; von den letzteren sind zwei (die Abstutzungsfläche f und die Grundfläche F) ähnliche n-Ecke (Fr. 229 II.), die n anderen sind lauter Trapeze und bilden den Mantel.

II. Ist $N_1N = h$ die Höhe des Stumpfes, d. h. der Abstand zwischen f und F, ist $ON_1 = z$ die Höhe des weggeschnittenen Teils, also $ON = H = h + z$ die Höhe der ursprünglichen Pyramide, so findet sich aus Fr. 229 IV. und Fr. 19 VI. zunächst

$$(h + z) : z = \sqrt{F} : \sqrt{f} \quad \text{und hieraus}$$

$$z\sqrt{F} = (h + z)\sqrt{f}, \quad z(\sqrt{F} - \sqrt{f}) = h\sqrt{f},$$

$$z = \frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} \quad \text{und} \quad h + z = \frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}.$$

III. Das abgeschnittene Stück ist der ganzen Pyramide ähnlich; die ähnlichen Begrenzungsflächen beider folgen in gleicher Weise auf einander, schließen gleiche Flächenwinkel ein und bilden kongruente Ecken.

231. Wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

I. Die Oberfläche der Pyramide und des Pyramidenstumpfs ist nach Fr. 177 und 178 zu berechnen.

II. Hat eine regelmäßige n-seitige Pyramide bei der Leitlinie $L = ns$ die Höhe H und der ihrer Grundfläche eingeschriebene Kreis den Halbmesser r, so ist die Höhe jeder Seitenfläche $k = \sqrt{H^2 + r^2}$ (Fr. 189 II.). Die Grundfläche hat nach Fr. 178 II. den Inhalt $F = \frac{1}{2}Lr$. Daher mißt die Oberfläche

$$O = \tfrac{1}{2}Lr + \tfrac{1}{2}Lk = \tfrac{1}{2}L(r + k).$$

III. Ähnlich ist's, wenn die Fußpunkte aller Dreieckshöhen im Kreise um den Fußpunkt N der Höhe ON der Pyramide liegen (Fr. 190 VI.).

IV. Beim regelmäßigen n-seitigen Pyramidenstumpf haben alle Trapeze gleiche Höhe k (Fr. 189 II.), daher ist die Oberfläche

$$O = F + f + \tfrac{1}{2}(U + u)k,$$

wenn F und f (Fr. 230) die Umfänge U und u haben.

232. Welchen Inhalt haben Pyramiden, Pyramidenstumpfe und in solche zu zerlegende eckige Körper?

I. Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche F_1 und F_2 und gleicher Höhe H sind inhaltsgleich (Fr. 227 IV.). Denn legt man bei beiden in der Entfernung z von der Spitze einen Parallelschnitt f_1 und f_2 zu der Grundfläche F_1 und F_2, so ist nach Fr. 229 IV. $f_1 : F_1 = z^2 : H^2 = f_2 : F_2$, d. h. $f_1 : F_1 = f_2 : F_2$ oder $f_1 = f_2$, weil ja $F_1 = F_2$ vorausgesetzt wurde.

II. Das dreiseitige Prisma ABCKNQ (Fig. 210) läßt sich durch die Ebenen AKN und ACN in drei inhaltsgleiche

Pyramiden zerlegen. Weil nämlich $\triangle ABC \,\#\, \triangle QNK$ (Fr. 217 I.); so ist (I.; Fr. 220 II.) NABC = AQKN; die beiden Pyramiden AQKN und ACKN ferner haben gleiche Höhe, weil sie eine gemeinschaftliche Spitze N besitzen und ihre Grundflächen AQK und KCA (welche nach Fr. 108 I. kongruent sind) in einer Ebene ACKQ liegen; daher ist auch AQKN = ACKN (I.) und nach Fr. 20 V. endlich:

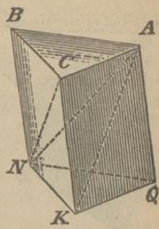

Fig. 210.

$$NABC = AQKN = ACKN.$$

III. Jede dreiseitige Pyramide ist also der dritte Teil eines Prismas von derselben Höhe H und derselben Grundfläche F.

Dasselbe gilt aber auch von jeder n-seitigen Pyramide, weil sich diese in lauter dreiseitige Pyramiden mit einer gemeinschaftlichen Spitze zerlegen läßt.

IV. Die Raumzahl einer Pyramide ist $\frac{1}{3}$ von dem Produkt aus der Flächenzahl der Grundfläche und der Längenzahl der Höhe (III. und Fr. 221 VIII.).

V. Zwei Pyramiden verhalten sich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe (IV.);

$$Y_1 : Y_2 = F_1H_1 : F_2H_2.$$

VI. Bei der abgestutzten Pyramide A von der Höhe h, der Grundfläche F und der Abstutzungsfläche f sei z die Höhe des weggeschnittenen Teils (Fr. 230 I.). Dann ist nach IV.

$$A = \tfrac{1}{3} F(h+z) - \tfrac{1}{3} fz,$$

woraus nach Fr. 230 II. weiter folgt:

$$A = \tfrac{1}{3} h \frac{F\sqrt{F} - f\sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \tfrac{1}{3} h (F + \sqrt{Ff} + f).$$

VII. **Eckige Körper**, deren Berechnung nicht schon in VI. und Fr. 221 gelehrt wurde, zerlegt man durch Diagonal-ebenen in drei- oder mehrseitige Pyramiden und berechnet sie dann nach IV.

VIII. Wird ein gerades dreiseitiges Prisma ABCNKD (Fig. 211) von der Grundfläche ABC = F und der Höhe a durch eine Ebene so abgeschnitten, daß seine Seiten AD = a, CU = c und BV = b sind, so fällt der Fußpunkt Q der Höhe DQ = h der vierseitigen Pyramide DNKVU in die Kante NK (Fr. 204 I. und VI.). Nach Fr. 177 IX. ist die Grundfläche UNKV = $\frac{1}{2}(NU + KV)\,NK = \frac{1}{2}[(a-c) + (a-b)]\,NK = \frac{1}{2}(2a-b-c)\,NK$; denn NK soll ja auf CN und KB senkrecht sein (Vor. und Fr. 181 X.).

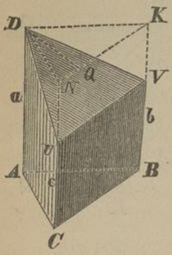

Fig. 211.

Daher hat die Pyramide DNKVU den Inhalt:

$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{1}{3}(UNKV)\,h \\ &= \tfrac{1}{3}(2a-b-c)\tfrac{1}{2}NK \,.\, h \\ &= \tfrac{1}{3}(2a-b-c)\triangle DNK \\ &= \tfrac{1}{3}F\,(2a-b-c). \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich aber wegen Fr. 221 VIII. der Inhalt des schief, aber eben abgeschnittenen Prismas ABCUVD zu:

$$\begin{aligned} J &= Fa - \tfrac{1}{3}F\,(2a-b-c) \\ &= \tfrac{1}{3}F\,(a+b+c). \end{aligned}$$

Dieselbe Formel ergiebt sich, wenn auch noch auf der anderen Seite des Prismas ein Stück durch eine Ebene abgeschnitten wird. (Vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. Fr. 155.)

IX. Zwei ähnliche Pyramiden (vergl. Fr. 230 III.) und deshalb auch zwei ähnliche eckige Körper (welche sich in ähnliche Pyramiden zerlegen lassen; vergl. Fr. 150 II.) verhalten sich wie die dritten Potenzen ähnlichliegender Seiten oder Strecken (V.); denn bei den ähnlichen Pyramiden ist $F_1 : F_2 = H_1^2 : H_2^2$ (Fr. 229 IV.).

Auch zwei ähnliche Körper, welche ganz oder zumteil von krummen Flächen begrenzt werden, verhalten sich wie die dritten Potenzen ähnlichliegender Strecken.

Dreizehntes Kapitel.

Der Kegel.

233. Was ist eine Kegelfläche und ein Kegel?

I. Bewegt sich ein an seinem Endpunkte O (Fig. 212) festgehaltener Strahl OS (die Erzeugende) an einem als Leitlinie L dienenden Kreise hin, dessen Ebene (die Grundfläche F) nicht durch den festen Endpunkt O geht, so beschreibt der Strahl eine (Kreis-)Kegelfläche, deren Spitze oder Mittelpunkt der feste Punkt O ist.

II. Bewegt sich anstatt des Strahles OS eine unbegrenzte Gerade in derselben Weise, so beschreibt sie eine aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Doppelkegelfläche.

III. Der von der Kegelfläche umschlossene halbbegrenzte Raum heißt ein kegelförmiger oder konischer Raum.

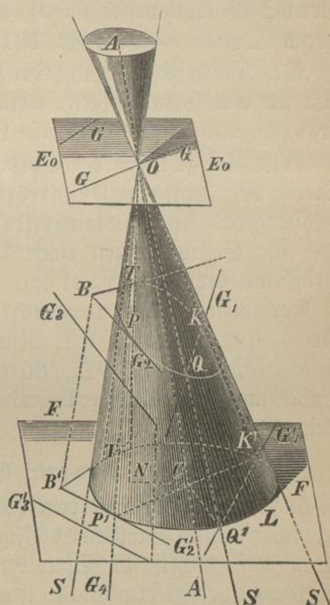

Fig. 212.

IV. Der Körper zwischen Spitze O, Grundfläche F und dem zwischenliegenden Kegelflächenstück (dem Mantel) heißt ein Kegel. — Vergl. auch Fr. 236 XIV. und XV.

V. Die durch die Spitze und den Mittelpunkt C der Grundfläche F gelegte Gerade OC heißt die Axe der Kegelfläche.

Jenachdem die Axe auf der Grundfläche normal, oder schief steht, heißen die Kegelfläche und der Kegel selbst gerade, oder schief. Die Höhe H des Kegels ist die Normale ON von der Spitze O auf die Grundfläche F.

VI. Die Kegelfläche hat als äußerste Fälle einerseits die Cylinderfläche (wenn OS // OA), oder die Gerade (wenn der Grundflächenhalbmesser = 0), anderseits aber die Ebene (wenn $\angle AOS = 90°$; Fr. 181 XIV.).

VII. Durch jeden Punkt P der Kegelfläche und die Spitze O läßt sich eine Gerade legen, welche ganz in der Kegelfläche liegt (I.), also (in P') durch die Leitlinie geht.

VIII. Die zwischen der Spitze und der Leitlinie gelegene Strecke OP' heißt eine Kegelseite.

Der gerade Kegel hat lauter gleiche Seiten (Fr. 190 VI.), und alle Seiten machen einen Winkel von der nämlichen Größe mit der Axe (Fr. 81 I.).

Der schiefe Kegel ist ungleichseitig (Fr. 193 und 78 II., oder 170 I., IV. und V.); seine Seiten sind nur paarweise gleich (Fr. 193 VII., 80 II.), mit Ausnahme der in der Neigungsebene der Axe liegenden kleinsten und größten Seite (Fr. 192 III.).

234. Was versteht man unter Central-Projektion?

I. Central-Projektion (oder hier kurzweg „Projektion") eines Punktes P (Fig. 212 und 213) auf die Grundfläche F heißt die Spur P' (Fr. 184 III.), worin die durch den projizierten Punkt P und die Spitze O gelegte Gerade OP die Grundfläche F durchdringt. OP' ist die Projizierende.

II. Die Spitze O ist dann streng genommen nicht projizierbar (Fr. 24 I.).

III. Alle anderen Punkte der durch die Spitze parallel zur Grundfläche F gelegten Ebene E_0 haben keine Projektion in endlicher Entfernung von C in Fig. 212 (Fr. 26; 205 I.).

IV. Die Projektion eines Punktes der Grundfläche F fällt mit dem projizierten Punkte selbst zusammen.

V. Die Punkte innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche aus O haben ihre Projektion innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie L.

235. Wie kann eine Gerade gegen eine Kegelfläche liegen?

I. Jede Gerade G in der durch die Spitze O, Fig. 212, parallel zur Grundfläche F gelegten Ebene E_0 hat mit der Kegelfläche nur die Spitze, oder gar nichts gemein und hat keine Projektion in endlicher Entfernung von C (Fr. 234 II., III.).

II. Jede durch die Spitze O gehende und der Grundfläche F nicht parallele Gerade G_4 hat als Projektion nur einen Punkt P' (Fr. 184 IV., 21 II.). Liegt dieser Punkt P' innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie, so liegt die Gerade G_4 innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche (Fr. 234 V.).

III. Jeder Punkt P' der Grundfläche F kann als die Projektion einer durch die Spitze O gehenden Geraden G_4 gelten, welche innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche liegt (II.).

IV. Die Projektion G' einer weder durch die Spitze O gehenden (II.), noch in der durch O parallel zu F gelegten Ebene E_0 liegenden (I.) Geraden G_1, G_2 oder G_3 ist wieder eine Gerade; denn alle Projizierenden liegen in der durch O und die Gerade G_1, G_2, oder G_3 bestimmten Ebene (Fr. 182 II.), diese aber schneidet F nur in einer Geraden G' (Fr. 185 II.).

V. Wenn in IV. die Projektion die Leitlinie schneidet wie G_1', oder berührt wie G_2', oder wie G_3' gar nicht trifft, so wird die Kegelfläche von der Geraden G_1, G_2, oder G_3 in zwei Punkten K und Q geschnitten, in einem Punkte P berührt, oder in keinem Punkte getroffen (Fr. 234 I. und V.).

In der durch den Berührungspunkt, oder einen Schnittpunkt zwischen Projektion und Leitlinie gelegten Projizierenden kann nämlich wegen Fr. 21 I. nur e i n Punkt der berührenden, oder schneidenden Geraden liegen.

VI. Wird eine Gerade durch einen von der Spitze O verschiedenen Punkt P der Kegelfläche gelegt, so kann sie nach I., II. und V. nur dann ganz in der Kegelfläche liegen, wenn sie auch durch die Spitze geht. Vergl. Fr. 233 I.

VII. Die Kegelfläche ist also k r u m m (Fr. 16 I. und 12 I.), da sich durch jeden ihrer (von der Spitze verschiedenen) Punkte nur e i n e Gerade (II. und VI.) ziehen läßt, welche ganz in der Kegelfläche liegt.

VIII. Schneidet die in IV. besprochene Gerade G, Fig. 213, die Grundfläche F in D, die durch O parallel zu F gelegte Ebene E_0 in D_0, und schneidet die durch O gelegte Parallele OQ zu G die Grundfläche in Q, so liegt Q in der durch O und G gelegten, E_0 in G_0 schneidenden Ebene, also in der Projektion G' von G (Fr. 186 VI., XV.). Zugleich werden G und G' durch D_0 und Q in je zwei Strahlen D_0DY und D_0X, QDY' und QX' zerlegt; D_0Y und QY' schneiden sich in D; dabei ist QX' die Projektion von XD_0, QY' die Projektion von YD_0, und zwar QD die von YD und DY' die von DD_0.

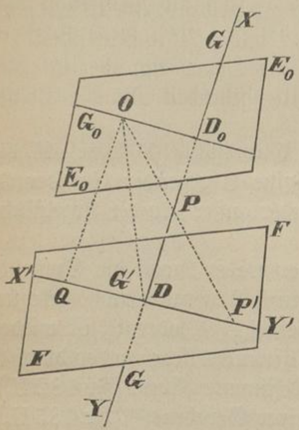

Fig. 213.

IX. Die zwei Punkte Q und K, Fig. 212, in denen eine Gerade G_1 die Kegelfläche schneidet, können entweder auf derselben oder auf verschiedenen Hälften der Doppelkegelfläche liegen.

Im ersteren Falle hat das innerhalb der Kegelfläche liegende, begrenzte Stück QK der Geraden G_1 eine endliche Projektion Q'K'; im anderen Falle (vergl. Fig. 216 S. 296) hat das außerhalb der Kegelfläche liegende, begrenzte Stück QK der Geraden zwei (unendliche) Strahlen Q'X' und K'Y' als Projektion, während die Strecke Q'K' die Projektion der beiden innerhalb der Kegelfläche gelegenen Strahlen QX und KY ist.

X. Durch jeden Punkt P der Kegelfläche lassen sich unzählige **Berührungslinien** oder **Tangenten** an den Kegel legen (V.); dieselben liegen aber in der Ebene, welche sich durch OPP' (Fig. 212) und die durch P' gehende Tangente G_2' der Leitlinie legen läßt (Fr. 182 III.).

XI. Von jedem Punkte B außerhalb der Kegelfläche lassen sich **zwei Scharen von Berührungslinien** an die Kegelfläche legen (V.), weil sich von der Projektion B' des Punktes B zwei Tangenten B'P' und B'T' an die Leitlinie legen lassen (Fr. 103 II.). Jede Schar liegt aber in einer durch P', bezw. T' und durch BB' gehenden Ebene.

236. **Wie kann eine Ebene gegen eine Kegelfläche liegen?**

I. Jede durch die Spitze O, Fig. 212, gelegte, die Grundfläche F in einer Geraden G' schneidende Ebene E **schneidet** entweder die Kegelfläche in **zwei Geraden** OQ' und OK', oder **berührt** dieselbe in **einer Geraden** OP', oder hat **bloß die Spitze** O mit der Kegelfläche gemein, wenn die (als Projektion von E aufzufassende) Spur G' die Leitlinie in Q' und K' schneidet, in P' berührt, oder gar nicht trifft (Fr. 83).

II. Jeder die Axe A enthaltende ebene Schnitt P'OK' (**Hauptschnitt**) besteht aus zwei Kegelseiten, welche durch die zwei Endpunkte P' und K' desselben Grundflächendurchmessers P'K' gehen (Fr. 48 II.).

III. Durch jeden Punkt P in der Kegelfläche kann man **eine**, durch jeden Punkt B außerhalb der Kegelfläche **zwei Berührungsebenen** an die Kegelfläche legen (Fr. 235 X.

und XI.). Die Projektion jeder Berührungsebene berührt die Leitlinie (I.).

IV. Die durch die Spitze O gehende, der Grundfläche F parallele Ebene E_0 besitzt keine Projektion in endlicher Entfernung von C und hat mit der Kegelfläche nur die Spitze O gemein (Fr. 234 II., III.).

V. Jede nicht durch die Spitze O gehende, der Grundfläche F parallele Ebene E_1 (Fig. 214) schneidet die Erzeugende in allen Lagen derselben; ihr Schnitt mit der Kegelfläche ist also eine geschlossene Linie und liegt in einer und derselben Hälfte des Doppelkegels. Alle Punkte P des Schnittes sind in gleicher Entfernung von dem Punkte C_1, worin die Schnittebene die Axe A trifft; denn weil $C_1P \parallel CP'$ (Fr. 205 II.), so ist $C_1P : C_1O = CP' : CO$ (Fr. 148 I.); die Größe der Strecke C_1P ist also nicht von der Lage des Punktes P abhängig, da ja C_1O, CP' und CO für alle Punkte P dieselbe Länge haben.

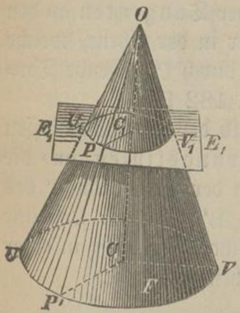

Fig. 214.

Daher ist der Schnitt ein Kreis (Fr. 47 II.). Der Halbmesser C_1P dieses Kreises verhält sich zum Halbmesser CP' der Grundfläche, wie der durch die Schnittebene E_1 erzeugte obere Abschnitt OP, OC_1, oder ON_1 einer Kegelseite OP', der Axe OC, oder der Höhe ON zur ganzen Kegelseite, Axe, oder Höhe (Fr. 148 I.).

VI. Jede durch irgend zwei Kegelseiten gelegte Ebene E schneidet jene Parallelschnittebene E_1 und die Grundfläche in zwei parallelen (Fr. 205 II.) Sehnen (bezw. nach II. in zwei parallelen Durchmessern), welche sich (Fr. 148 I.) ebenfalls wie die Halbmesser des Parallelschnitts und der Grundfläche (V.) verhalten.

VII. Schneidet eine **nicht** durch die Spitze O gehende Ebene E_2 (Fig. 215 und 216) die Grundfläche F in der Spur G', so sind nur die drei Fälle zu unterscheiden, ob eine zu E_2 parallel durch die Spitze O gelegte Ebene E bloß die Spitze, bloß eine Gerade OP', oder zwei Gerade OJ und OZ mit der Kegelfläche gemein hat (I.).

VIII. Im **ersteren** Falle in VII. schneidet die Schnittebene E_2 alle Kegelseiten (Fr. 206 IV.), und zwar alle in derselben Hälfte des Doppelkegels, weil die andere Hälfte ganz auf der E_2 entgegengesetzten Seite der Ebene E liegt; der Schnitt ist also eine geschlossene Linie TPQK (in Fig. 215) und erweist sich bei weiterer Untersuchung als eine **Ellipse** (vergl. Fr. 224 VIII.).

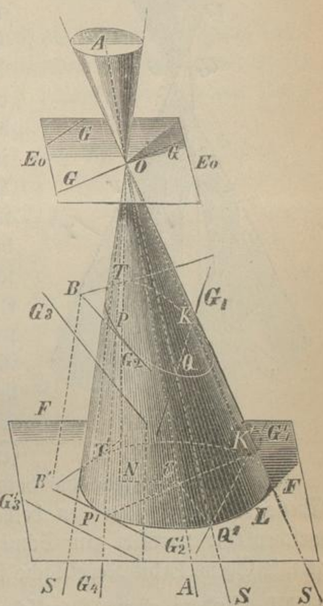

Fig. 215.

IX. Im **zweiten** Falle in VII. ist die Schnittebene E_2 zu einer Berührungsebene parallel (I.), also auch zu der betreffenden Berührungslinie OP' (Fr. 205 I.), aber bloß dieser einen Kegelseite; alle anderen Kegelseiten werden geschnitten und wieder alle auf der nämlichen Seite von E, d. h. in derselben Kegelhälfte (Fr. 206 IV.), der Schnitt AUB (Fig. 216 S. 296) ist aber keine geschlossene Linie, sondern erweist sich als eine **Parabel** (vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. S. 55; Katech. d. analytischen Geometrie, S. 167). Die Grundfläche F wird hier von E_2 in einer Geraden AB geschnitten, welche zur Tangente des Punktes P′ der Leitlinie parallel ist (I. und Fr. 205 II.).

X. Im dritten Falle in VII. endlich ist die Schnittebene E_2 zu zwei Kegelseiten OJ und OZ, Fig. 216, parallel, schneidet wieder alle anderen Kegelseiten (Fr. 206 IV.), aber einige in der einen, die anderen in der zweiten Kegelflächenhälfte, jenachdem die von O aus der Grundfläche zugewandte Hälfte der Seite mit der Schnittebene E_2 auf derselben, oder auf entgegengesetzten Seiten jener durch die Spitze gelegten Parallelebene E zur Schnittfläche E_2 liegt; der Schnitt besteht aus zwei sich nicht schließenden Zweigen CVD und $C_1V_1D_1$, und heißt eine Hyperbel (vgl. Katech. d. analyt. Geometrie, S. 152). Die Spur der Ebene ZOJ in F ist zu der Spur CD von E_2 in F parallel (Fr. 205 II.).

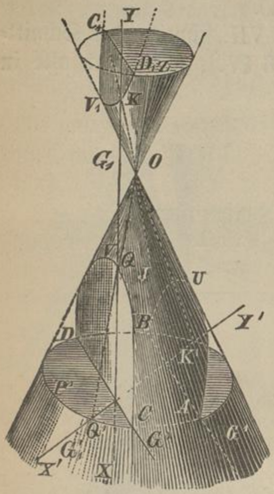

Fig. 216.

Umgekehrt ist jede die beiden Kegelhälften schneidende Ebene E_2 parallel zu den beiden Seiten OJ und OZ, in welchen eine parallel zur Schnittfläche E_2 durch die Spitze gelegte Ebene E die Kegelfläche schneidet.

XI. Andere ebene Kegelschnitte, als Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, giebt es nicht; diese Linien bilden eine abgeschlossene Gruppe. Die Parabel erscheint als Zwischenglied zwischen Ellipse und Hyperbel.

XII. Bei jeder schiefen Kreiskegelfläche ist ein (nicht durch die Spitze O gehender) Normalschnitt zur Axe eine Ellipse (VIII.).

Wegen Fr. 73 VIII. geht aber die Axe des schiefen Kreiskegels nicht durch den Mittelpunkt der Ellipse.

XIII. **Jeder schiefe Kreiskegel** läßt sich als ein **gerader elliptischer Kegel** auffassen.

Die Axe dieses elliptischen Kegels liegt in der Ebene des Neigungswinkels (Fr. 192 I.) der Axe des schiefen Kreiskegels gegen dessen Grundfläche und halbiert den Winkel, unter welchem sich die in dieser Ebene liegenden beiden Seiten schneiden (vgl. Fig. 53 S. 63).

XIV. Der Kegel entsteht durch die stetige Bewegung eines stets zu sich selbst parallel bleibenden Kreises, wenn dessen Mittelpunkt nicht aus der Axe A herausrückt und sein Halbmesser sich so, wie es V. verlangt, stetig ändert.

XV. Der gerade Kegel wird auch durch stetige Bewegung eines rechtwinkeligen Dreiecks OCP' (Fig. 217) um die eine Kathete OC erzeugt (Fr. 181 XIV).

237. Was ist ein Kegelstumpf?

I. Der Körper, welcher von der Grundfläche F, einem (in derselben Kegelflächenhälfte gelegenen) Parallelschnitte f zu ihr und dem zwischenliegenden Kegelflächenstück (dem **Mantel**) begrenzt wird, heißt ein **abgestutzter Kegel** oder ein **Kegelstumpf**; die Entfernung h seiner beiden parallelen **Grundflächen** F und f ist seine **Höhe**.

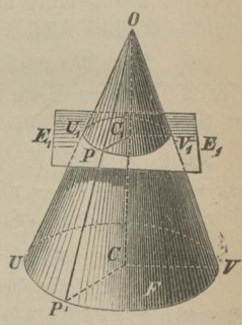

Fig. 217.

II. Der **gerade** Kegelstumpf (Fig. 217) kann durch die Umdrehung eines Trapezes PC_1CP' entstehen, dessen Parallelseiten C_1P und CP' auf der Seite CC_1, um welche die Umdrehung erfolgt, senkrecht stehen (Fr. 181 XIV.).

III. Hat der Kegelstumpf, dessen Grundfläche F und Abstutzungsfläche f Kreise vom Halbmesser r_1 und r_0 und den

Umfängen u_1 und u_0 sind, die Höhe h, während die abgeschnittene Spitze die Höhe z hatte, ist ferner r der Halbmesser und u der Umfang des in der Mitte der Höhe h (also in der Entfernung $z_m = z + \frac{1}{2}h$ von der Spitze O) gelegten Parallelschnittes, so findet sich aus Fr. 236 V. zunächst $r_0 : r_1 = z : (h + z)$ und $r : r_1 = (\frac{1}{2}h + z) : (h + z)$; hieraus ergiebt sich leicht:

$$r_1 + r_0 = r_1 + \frac{zr_1}{h + z} = \frac{r_1(h + 2z)}{h + z} = 2r.$$

Dann ist aber $u = 2\pi r = \pi(r_1 + r_0) = \frac{1}{2}(u_1 + u_0)$.

238. **Wie groß ist der Kegelmantel?**

I. Auch der Kegelmantel M läßt sich (wegen Fr. 236 III.) auf einer Ebene abwickeln. — Vgl. Fr. 225 I.

II. Beim geraden Kegel vom Halbmesser CU = R und der Höhe OC = H, Fig. 217, erhält man (Fr. 233 VIII.) einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser der Kegelseite OU $= s = \sqrt{R^2 + H^2}$ und dessen Bogen der Leitlinie $L = 2\pi R$ gleicht; daher ist nach Fr. 179 VIII. $M = \frac{1}{2}Ls = \pi Rs$. — Vgl. Fr. 230 II.

III. Der Mantel des schiefen Kegels ist kein Kreisausschnitt (Fr. 233 VIII.).

IV. Der Mantel M des geraden Kegelstumpfes (Fr. 237), dessen Seite $PP' = s = OP' - OP = s_1 - s_0$ ist, hat den Inhalt $M = \frac{1}{2}u_1s_1 - \frac{1}{2}u_0s_0 = \pi(r_1s_1 - r_0s_0)$.

Nach Fr. 236 V. ist aber $s_0 : s_1 = r_0 : r_1$; daher auch $(s_1 - s_0) : s_1 = (r_1 - r_0) : r_1$ und (wegen Fr. 237 III.) weiter:

$$M = \pi s_1(r_1^2 - r_0^2) : r_1 = \pi s_1(r_1 + r_0)(r_1 - r_0) : r_1$$
$$= \pi(r_1 + r_0)(s_1 - s_0) = \tfrac{1}{2}(u_1 + u_0)s = us.$$

Es läßt sich also der Mantel dieses Stumpfes wie ein Trapez (Fr. 177 IX.) berechnen. Vgl. Fr. 179 XII.

239. **Wie groß ist der Inhalt des Kegels?**

I. Wegen Fr. 236 V. und 229 IV. ändern sich bei einem Kegel vom Halbmesser R die der Grundfläche $F = \pi R^2$

parallelen Querschnitte genau so wie bei einer Pyramide von der nämlichen Höhe H und einer gleichgroßen Grundfläche.

Nach Fr. 227 IV. hat daher der Kegel denselben Inhalt C wie diese Pyramide, d. h. nach Fr. 232 IV. ist:

$$C = \tfrac{1}{3}FH = \tfrac{1}{3}\pi HR^2.$$

II. Der Kegelstumpf (Fr. 237) hat nach Fr. 232 VI. den Inhalt $A = \frac{1}{3}h(F + \sqrt{Ff} + f)$, woraus sich nach Fr. 179 II. weiter ergiebt: $A = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)$.

Vierzehntes Kapitel.

Die Kugel.

240. Was ist eine Kugelfläche und eine Kugel?

I. Die Kugelfläche enthält alle Punkte P des Raumes, welche in gleichem Abstande von einem Punkte M (dem Mittelpunkte) liegen. Diese unveränderliche Entfernung MP = R heißt der Halbmesser der Kugel.

II. Zwei Halbmesser, deren jeder die Verlängerung des anderen bildet, geben einen Durchmesser D = 2R. Vgl. Fr. 48 II.

III. Daher sind alle Halbmesser und alle Durchmesser der Kugelfläche unter sich gleich.

IV. Wird ein Halbkreis FCP_2 (Fig. 218 S. 300) um seinen festliegenden Durchmesser FP_2 gedreht, bis er wieder in seine anfängliche Lage kommt, so beschreibt er wegen Fr. 47 II. eine volle Kugelfläche.

Die Kugelfläche ist demnach eine geschlossene Fläche; der Mittelpunkt M liegt innerhalb derselben.

Die Kugelfläche ist der geometrische Ort (vgl. Fr. 74 XVII.) eines Kreises von gegebenem Halbmesser und von vorgeschriebenem Mittelpunkte. Vergl. Fr. 242 VI.

V. Der von einer Kugelfläche umschlossene Körper heißt eine Kugel.

VI. Ist die Entfernung eines Punktes P vom Mittelpunkte größer, oder gleich, oder kleiner als der Halbmesser R, so liegt der Punkt P außerhalb, oder auf, oder innerhalb der Kugelfläche.

241. Wie kann eine Gerade gegen eine Kugelfläche liegen?

I. Ist die Entfernung MN_1 einer Geraden G_1 vom Mittelpunkte M größer als der Halbmesser R, so liegt G_1 ganz außerhalb der Kugelfläche (Fr. 240 VI.). Denn alle anderen Punkte von G_1 sind noch weiter von M entfernt als N_1 (Fr. 74 IX.).

II. Ist die Entfernung MN_2 einer Geraden G_2 vom Mittelpunkte M dem Halbmesser R gleich, so hat G_2 bloß einen Punkt N_2 mit der Kugelfläche gemein (Fr. 240 VI.), weil alle anderen Punkte von G_2 weiter als N_2 von M entfernt sind (Fr. 74 IX.).

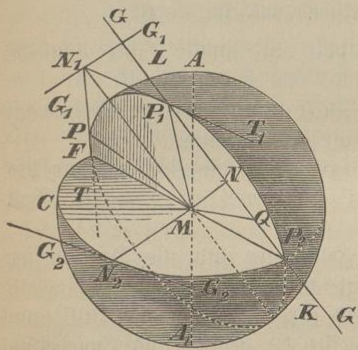

Fig. 218.

III. Eine Gerade G_2, welche mit der Kugelfläche bloß einen Punkt gemein hat, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

IV. Jede Senkrechte auf einem Halbmesser MN_2 in dessen Endpunkte N_2 ist eine Tangente (II.).

V. Ist die Entfernung $MN = e$ einer Geraden G, Fig. 218, vom Mittelpunkte M kleiner als der Halbmesser R, so schneidet G die Kugelfläche in zwei Punkten P_1 und P_2; N liegt nämlich innerhalb der Kugelfläche (Fr. 240 VI.), die beiden Punkte K und L in G aber, welche um $KN = NL = R$ von N abstehen, liegen außerhalb der Kugelfläche (Fr. 74 VIII.), und deshalb muß es in G zwei

Punkte P_1 und P_2 geben, welche in der Entfernung R von M liegen (Fr. 74 X.).

VI. Die **Kugelsehne**, d. h. die innerhalb der Kugelfläche gelegene Strecke $P_1P_2 = s$ der schneidenden Geraden G wird von der Senkrechten MN halbiert (Fr. 75 V. und VI.). Nach Fr. 160 III. ist daher $R^2 = e^2 + \frac{1}{4}s^2$.

VII. Je näher die Kugelsehne am Mittelpunkte M liegt, desto größer ist sie (VI.).

VIII. Die Kugelfläche ist **krumm** (Fr. 16 I. und 12 I.); denn nach I. bis V. lassen sich auf ihr gar keine Geraden ziehen.

IX. Jede Gerade G durch einen Punkt Q innerhalb der Kugelfläche schneidet die Kugelfläche in zwei Punkten (V.).

Denn fällt man von M eine Senkrechte MN auf G, so ist wegen Fr. 74 IX. $MN \leqq MQ$, jenachdem N mit Q zusammenfällt, oder nicht; da nun nach Fr. 240 VI. schon $MQ < R$, so ist $MN < R$ (Fr. 20 IV., oder VII.), und G schneidet die Kugelfläche.

X. Jede Gerade G durch einen Punkt P_1 der Kugelfläche und schief gegen den nach P_1 gezogenen Halbmesser MP_1 schneidet die Kugelfläche in zwei Punkten P_1 und P_2 (V.), weil der Fußpunkt N der von M auf G gefällten Senkrechten MN innerhalb der Kugelfläche liegt (Fr. 240 VI.), da ja $MN < MP_1 = R$ ist (Fr. 74 IX.).

XI. Jede Tangente (III.) steht wegen X. auf dem Halbmesser des Berührungspunktes senkrecht.

XII. In jedem Punkte der Kugelfläche giebt es unzählig viele Tangenten, dieselben liegen aber sämtlich in einer Ebene (Fr. 181 XIII.).

242. Wie kann eine Ebene gegen eine Kugelfläche liegen?

I. Eine Ebene E_1 (Fig. 219 S. 302), deren Entfernung MN_1 vom Mittelpunkte M den Halbmesser R übertrifft, liegt ganz außerhalb der Kugelfläche (Fr. 240 VI.), weil alle anderen Punkte der Ebene E_1 noch weiter von M abstehen, als N_1 (Fr. 190 IV.).

II. Eine Ebene E_2, deren Entfernung MN_2 vom Mittelpunkte M dem Halbmesser R gleicht, hat bloß einen Punkt N_2 mit der Kugelfläche gemein (Fr. 240 VI.), denn alle anderen Punkte von E_2 stehen weiter von M ab, als N_2 (Fr. 190 IV.).

III. Eine solche Ebene E_2, die mit der Kugelfläche bloß einen Punkt gemein hat, heißt eine Berührungsebene.

IV. Jede Normalebene auf einem Halbmesser MN_2 in dessen Endpunkte N_2 berührt also die Kugelfläche.

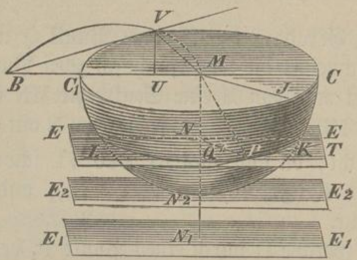

Fig. 219.

V. Ist die Entfernung $MN = e$ einer Ebene E vom Mittelpunkte M kleiner als der Halbmesser R, so liegt der mit dem Halbmesser R um den Fußpunkt N der vom Mittelpunkte M auf die Ebene gefällten Normalen MN geschlagene Kreis ganz außerhalb der Kugelfläche (Fr. 74 VIII. und 240 VI.). Alle durch N in E gezogenen Geraden schneiden die Kugelfläche zweimal (Fr. 241 V.), und letztere wird demnach von der Ebene E in einer geschlossenen Linie geschnitten. Jeder Punkt P der Schnittlinie KPL ist um $NP = r = \sqrt{R^2 - e^2}$ von dem Fußpunkte entfernt (Fr. 160 III.), d. h.

der Schnitt ist nach Fr. 47 II. ein Kreis (Kugelkreis), und sein Halbmesser r ist um so größer, je näher der Schnitt am Mittelpunkte liegt.

VI. Ein durch den Mittelpunkt M gehender Schnitt liefert einen **größten Kreis** CJC_1 der Kugelfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfällt und dessen Halbmesser MJ dem der Kugelfläche gleicht (vergl. Fr. 240 III. und IV.).

VII. Je zwei größte Kreise schneiden sich in einem Kugeldurchmesser (VI.) und halbieren einander.

VIII. Jeder größte Kreis halbiert die Kugelfläche, zerlegt sie in zwei sich deckende Halbkugeln (Fr. 22 V.).

IX. Die Normale MN vom Mittelpunkte M der Kugel auf einen Kugelkreis geht durch den Mittelpunkt N des letztern (V. und Fr. 188 I.).

X. Die Gerade MN durch den Mittelpunkt M der Kugel und den Mittelpunkt N eines Kugelkreises steht auf diesem Kreise normal (IX. und Fr. 21 II.).

XI. Die im Mittelpunkte N eines Kugelkreises auf diesem Kreise errichtete Normale geht durch den Kugelmittelpunkt M (IX. und Fr. 188 II.).

XII. Durch zwei sich schneidende Kugelsehnen läßt sich eine Ebene legen (Fr. 182 III.); in dem von dieser Ebene gelieferten (V.) Kugelkreise sind die beiden Kugelsehnen Sehnen, und deshalb gelten die Sätze in Fr. 161 auch von zwei sich schneidenden Kugelsehnen.

XIII. Wenn zwei Kugelsehnen sich in N gegenseitig halbieren, so schneiden sie sich im Mittelpunkte N des durch sie gelegten Kugelkreises, stehen also beide senkrecht auf der Strecke MN (Fr. 93 und 242 X.).

XIV. Halbieren sich zwei Kugelkreise gegenseitig, so schneiden sie sich in einer Kugelsehne, welche für beide Kugelkreise ein Durchmesser ist, und daher haben die beiden Kreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt N; wenn nun N außerhalb M läge, so müßte die Strecke MN auf beiden Kreisen normal stehen (X.), d. h. es müßten die Ebenen beider Kreise, weil sie ja den Punkt N gemein haben, zusammenfallen

(Fr. 182 V.); weil sie dies aber nach der Voraussetzung nicht sollen, so muß $MN = o$ sein, d. h.

die beiden Kugelkreise sind größte Kreise.

XV. Jede Tangente P_1T_1 (in Fig. 218) an einen Kugelkreis im Punkte P_1 berührt auch die Kugelfläche in P_1; denn auf der Tangente steht wegen Fr. 83 X. der Kugelkreishalbmesser (NP in Fig. 219), daher auch der Kugelhalbmesser MP_1 senkrecht (Fr. 189 I.).

XVI. In jeder die Kugelfläche schneidenden Ebene lassen sich zwei Tangenten N_1T und N_1T_1 (Fig. 218) von einem in dieser Ebene, aber außerhalb der Kugel liegenden Punkte N_1 an die Kugel ziehen (XV. und Fr. 103 II.).

XVII. Jede Ebene E durch einen Punkt Q (in Fig. 219) innerhalb der Kugelfläche schneidet die Kugelfläche (V.); denn eine von M auf E gefällte Normale MN ist $\leqq MQ$ (Fr. 190 IV.), und da $MQ < R$ (Vor.), so ist $MN < R$.

XVIII. Jede Ebene E durch einen Punkt P der Kugelfläche und schief gegen den nach dem Punkte P gezogenen Halbmesser MP schneidet die Kugelfläche (V.), weil die von M auf E gefällte Normale MN kleiner ist als R (Fr. 190 IV.).

XIX. Jede Berührungsebene E_2 (Fig. 219) steht normal auf dem nach dem Berührungspunkte N_2 gezogenen Halbmesser MN_2 (XVIII.).

XX. In jedem Punkte der Kugelfläche giebt es nur eine Berührungsebene (XIX. und Fr. 182 V.).

XXI. Jede durch den Berührungspunkt N_2 (Fig. 219) gehende, in der Berührungsebene E_2 liegende Gerade berührt die Kugelfläche (XIX. und Fr. 181 X.).

XXII. Legt man durch die Verbindungsstrecke MB, Fig. 219, des Kugelmittelpunktes M und eines außerhalb der Kugelfläche gelegenen Punktes B eine Ebene E' und in dieser einen Halbkreis über der Strecke MB, so schneidet dieser die Kugelfläche in einem Punkte V, und BV ist also Tangente an den größten Kugelkreis (Fr. 103 II.) und an die Kugel (XV.).

Dreht man nun die Ebene E' um MB, so rückt V auf der Kugel fort; daher lassen sich von dem außerhalb gelegenen Punkte B unzählige Tangenten an die Kugelfläche legen; alle Berührungspunkte sind von B gleichweit entfernt (Fr. 103 V.). Bei der Drehung um MB beschreibt die von V auf MB gefällte Senkrechte VU eine Ebene (Fr. 181 XIV.). Daher liegen (nach V.) alle Berührungspunkte V im Kreise um den Fußpunkt U der Senkrechten VU auf MB. Demnach bilden aber die sämtlichen Tangenten eine gerade Kegelfläche.

XXIII. Auch in eine gerade Cylinderfläche läßt sich eine Kugelfläche einschreiben, welche mit der Cylinderleitlinie gleichen Halbmesser hat, und deren Mittelpunkt in der Axe der Cylinderfläche liegt.

XXIV. Durch jede der unzähligen Tangenten in XXII. läßt sich eine Berührungsebene legen (IV.), wenn man nur vorher durch den Berührungspunkt V noch eine zweite Normale auf MV errichtet (Fr. 181 XI.).

Daher lassen sich von einem außerhalb der Kugel gelegenen Punkte B auch unzählige Berührungsebenen an die Kugel legen und dieselben berühren zugleich den in XXII. erwähnten geraden Kegel (V.).

XXV. Eine durch den Mittelpunkt M einer Kugelfläche normal zu einer außer der Kugelfläche liegenden Geraden G_1 (Fig. 218) gelegte Ebene schneidet die Gerade in N_1, die Kugelfläche in einem größten Kreise. Zieht man in dieser Normalebene von N_1 aus die zwei Tangenten N_1P_1 und N_1P an den größten Kreis (Fr. 103 II.), so stehen die Halbmesser MP_1 und MP nicht bloß auf N_1P_1 und N_1P senkrecht (Fr. 83 X.), sondern auch auf den durch P_1 und P gelegten Parallelen zu G_1 (Fr. 189 VII. und 181 X.); daher wird die Kugelfläche (nach IV. und Fr. 181 XI.) von den beiden Ebenen berührt, welche sich durch die Gerade G_1 und je eine der beiden Tangenten N_1P_1 und N_1P legen lassen.

Die Berührungspunkte P_1 und P dieser beiden Ebenen sind gleichweit von N_1 entfernt (Fr. 103 V.).

243. Welche Sätze über Parallelkreise und Meridiane sind zu merken?

I. Sind zwei oder mehr Schnittebenen parallel, so fallen nach Fr. 206 I. die aus dem Kugelflächenmittelpunkte M (Fig. 220) auf sie gefällten Normalen in eine Gerade AA_1 (die Axe), welche die Kugelfläche in den beiden Polen A und A_1 der Parallelkreise SXYV und KPQL schneidet.

II. Der größte Parallelkreis $DBCD_1$ heißt Äquator; jeder größte Kreis AXA_1 durch die Axe heißt Meridian.

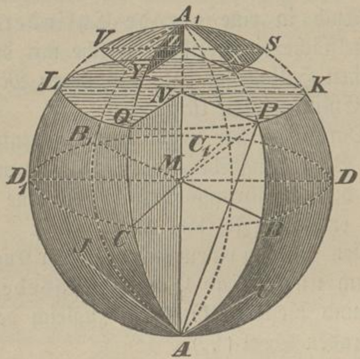

Fig. 220.

III. Jede Meridianebene steht auf den Parallelkreisen normal (Fr. 204 I.).

IV. Kugelkreise, welche die nämlichen Pole haben, liegen in parallelen Ebenen (I. und Fr. 205 III.).

V. Zieht man von einem Punkte P, Fig. 220, eines Parallelkreises Strecken PA und PA_1 nach dessen Polen A und A_1, so stehen diese auf einander senkrecht (Fr. 96 III.).

VI. Der Halbmesser $NP = r$ eines Kugelkreises ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten AN und NA_1, in welche der Kugelkreis die Axe AA_1 zerlegt (Fr. 161 II.).

VII. Jeder Pol ist von allen Punkten desselben Parallelkreises gleichweit entfernt (Fr. 190 VI.).

VIII. Die Meridianbögen XP und YQ zwischen zwei Parallelkreisen sind gleichgroß (VII., Fr. 91 IV., 20 VIII.).

IX. Zwischen denselben Meridianen liegen Parallelkreisbögen PQ und XY von gleichem Centriwinkel (Fr. 189 IX.).

Diesem Centriwinkel gleicht der Winkel zwischen den (ebenfalls auf der Axe AA_1 senkrecht stehenden) Meridiantangenten AU und AJ am Pol A.

Die nämliche Größe hat der von den beiden Meridianen am Pole gebildete sphärische Winkel PAQ und der Neigungswinkel (Fr. 202 V.) der beiden Meridianebenen.

244. Wie heißen die Teile der Kugel und der Kugelfläche?

I. Jeder Schnittkreis KPQL (Fig. 220) zerlegt die Kugelfläche in zwei Hauben, Kappen oder Kalotten, die Kugel in zwei Abschnitte oder Segmente.

II. Zwischen zwei Parallelkreisen SXYV und KPQL liegt eine Kugelflächenzone und eine Kugelschicht.

III. Zwischen einer Kappe SXYVA (oder $SXYVA_1$) und der durch ihren Schnittkreis gelegten Kegelfläche SXYVM, deren Spitze im Kugelmittelpunkte M liegt, ist ein Kugel-Ausschnitt oder Sektor enthalten.

IV. Zwei sich schneidende Meridiane $APXA_1$ und $AQYA_1$ zerlegen die Kugelfläche in vier Zweiecke (z. B. $ABPA_1QCA$) und die Kugel in vier Kugelkeile (z. B. $ABPA_1ACQA_1$).

Je zwei benachbarte der ersteren bilden eine Halbkugelfläche, je zwei benachbarte der letzteren eine Halbkugel (Fr. 242 VIII.); je zwei gegenüberliegende sind kongruent.

V. Drei (nicht parallele) größte Kreise $AQYA_1$, $APXA_1$ und $DBCD_1$, Fig. 220, schneiden sich in sechs Punkten und zerlegen die Kugelfläche in acht sphärische Dreiecke oder Kugeldreiecke, entsprechend den durch ihre Ebenen am Mittelpunkte M der Kugel entstehenden acht Dreikanten (Fr. 211).

Die sphärischen Winkel A, B und C (Fr. 243 IX.) jedes sphärischen Dreiecks ABC sind den Neigungswinkeln der Ebenen des zugehörigen Dreikants gleich; die drei Seiten AB, BC und CA des sphärischen Dreiecks sind Bögen, deren Centriwinkel den Seitenwinkeln des Dreikants gleichen. Deshalb lassen sich die Sätze in Fr. 209 bis 214 und 229 VIII. und IX. auf sphärische Dreiecke und Vielecke übertragen. Vergl. auch Fig. 222.

VI. Jede Halbkugel läßt sich als Sektor, als Segment und als Kugelkeil betrachten.

VII. Jeder größere Abschnitt, Ausschnitt, Keil, Kappe und Zweieck ist größer, jeder kleinere kleiner als die Halbkugel, beziehentlich die Halbkugelfläche.

VIII. Kappe und Zone, Segment, Schicht und Sektor entstehen bei der Erzeugung der Kugel (Fr. 240 IV.) durch die Drehung des Bogens AV und VL, des halben Kreissegments AZV, der halben Zone VZNL und des Kreissektors AMV.

245. **Welche Lage haben zwei Kugelflächen gegen einander?**

I. Zwei konzentrische Kugelflächen haben denselben Mittelpunkt und entweder keinen, oder (bei gleichem Halbmesser) alle Punkte gemein (Fr. 240 I.).

II. Legt man durch die Centralstrecke, d. h. die Entfernung $M_1M_2 = c$ der Mittelpunkte M_1 und M_2 zweier excentrischen Kugelflächen eine Ebene, so erhält man stets dieselbe, aus zwei größten Kreisen bestehende Schnittfigur (Fr. 242 VI.).

Daher müssen (wegen Fr. 240 IV.) für zwei excentrische Kugeln ganz ähnliche Sätze gelten, wie für zwei excentrische Kreise (vergl. Fr. 102). Nämlich:

III. Ist die Summe $R_1 + R_2$ der Kugelhalbmesser kleiner als die Centralstrecke c, so liegt jede der beiden Kugelflächen ganz außerhalb der anderen.

IV. Ist die Differenz $R_1—R_2$ der Halbmesser größer als die Centralstrecke c, so liegt die eine Kugel ganz innerhalb der anderen.

V. Gleicht die Summe $R_1 + R_2$, oder die Differenz $R_1 - R_2$ der Halbmesser der Centralstrecke c, so haben die Kugelflächen nur einen Punkt gemein, berühren sich von außen, oder innen. Der Berührungspunkt zweier Kugeln liegt in der Centralen $M_1 M_2$. Die gemeinschaftliche Berührungsebene der beiden Kugeln steht in dem Berührungspunkte auf der Centralen $M_1 M_2$ senkrecht.

VI. Die größere Kugelfläche schmiegt sich der Berührungsebene besser an als die kleinere; letztere krümmt sich demnach stärker. Vergl. Fr. 86 III.

VII. Ist die Summe der Halbmesser größer, und ihre Differenz gleichzeitig kleiner als die Centrale ($R_1 + R_2 > c > R_1 - R_2$), so schneiden sich die beiden Kugelflächen.

Die beiden Schnittkreise, welche eine durch die Centrale gelegte Ebene in beiden Kugelflächen liefert, haben eine gemeinschaftliche Sehne, welche von der Centralen senkrecht halbiert wird und bei jeder Lage der Schnittebene dieselbe Größe und denselben Schnittpunkt mit der Centralen hat; deshalb schneiden sich die beiden Kugeln in einem auf der Centralen normalen Kreise (Fr. 181 XIV.). — Vergl. auch Fr. 242 XXII.

VIII. Haben zwei excentrische Kugelflächen einen Punkt außerhalb der Centralen gemein, so schneiden sie sich in einem Kreise; haben sie einen Punkt der Centralen gemein, so haben sie weiter nichts gemein.

246. Wie ist die Kugeloberfläche zu berechnen?

I. Der Inhalt der durch die Umdrehung des Bogens VL = b, Fig. 221 S. 310, um die Axe MA erzeugten Kugelflächenzone nähert sich dem Inhalte des gleichzeitig von der Sehne VL = s erzeugten Mantels des abgestutzten Kegels um so mehr, je mehr sich der Bogen b seiner Sehne s nähert (Fr. 179 IV.), und je mehr er sich deshalb mit der Sehne vertauschen läßt, je kleiner also der Bogen ist.

II. Zieht man den Halbmesser MT = R (Fig. 221) nach der Mitte T des Bogens VL, und macht man TS // VZ // LN ⊥ MA und VJ // MA ⊥ LN, so sind die beiden Dreiecke MST und LJV gleichwinkelig (Fr. 71 VI.) und deshalb ähnlich (Fr. 156 I.); daher ist ST : MT = JV : LV (Fr. 153 I.) oder $r : R = h : s$, d. h. $rs = Rh$, wenn $TS = r$ und $VJ = NZ = h$ gesetzt wird. Darf man aber den Bogen b als geradlinig auffassen, so ergiebt sich nach I. und Fr. 238 IV. als Inhalt der Zone $z = 2\pi rs = 2\pi Rh$, d. h. ist die Höhe h einer Zone z so klein, daß man den die Zone erzeugenden Bogen b mit dessen Sehne s vertauschen darf, so gleicht die Zone dem Mantel eines geraden Cylinders (Fr. 225 II.), welcher mit der Zone gleiche Höhe h und mit der Kugel gleichen Halbmesser R besitzt.

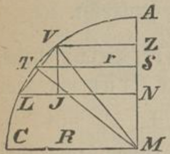

Fig. 221.

III. Teilt man den Bogen VL = b, welcher durch seine Umdrehung um MA die Kugelzone VSKL (Fig. 220) von der Höhe NZ = H erzeugte, in n Teile, deren Projektionen auf AM mit $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ bezeichnet werden mögen, so erhält man den Inhalt Z der Zone, als Summe von n kleineren Zonen von den Höhen $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$, nach II. angenähert:

$$Z = z_1 + z_2 + z_3 \cdots + z_n$$
$$= 2\pi R (h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n) = 2\pi RH.$$

Diese Formel wird um so richtiger, je größer n oder je kleiner die Bogenteile werden; bei noch so weit getriebener Verkleinerung der Bogenteile und Vergrößerung der Anzahl derselben bleibt aber die ausgeführte Summierung $h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n = H$ immer noch möglich und liefert auch immer noch das nämliche Resultat. Daher giebt die obige Formel $Z = 2\pi RH$ nicht einen angenäherten, sondern den streng richtigen Wert für den Zoneninhalt Z.

IV. Ganz die nämliche Schlußfolgerung paßt auch auf die Kugelkappe k von der Höhe H; daher ist auch deren Inhalt

$$k = 2\pi RH.$$

V. Jede Kappe und Zone gleicht demnach dem Mantel eines geraden Cylinders, welcher mit der Kugel gleichen Halbmesser R und mit der Kappe, oder Zone gleiche Höhe H hat.

VI. Der Inhalt O der ganzen Kugelfläche ergiebt sich aus IV., wenn man 2R für H setzt; $O = 4\pi R^2$, d. h. die Oberfläche jeder Kugel ist viermal so groß als deren größter Kreis.

Da man auch $O = 2\pi R(2R)$ schreiben darf, so gleicht die Kugelfläche der Mantelfläche eines der Kugel umschriebenen geraden Cylinders, im Einklang mit V.

VII. Den Inhalt des Kugelzweiecks W mit dem sphärischen Winkel $w°$ (Fr. 244 IV. und 243 IX.) erhält man (wegen Fr. 210 I., VIII. und X.) aus der Proportion $W : O = w° : 360°$, nämlich:

$$W = \pi R^2 w° : 90°.$$

VIII. Legt man durch die drei Eckpunkte A, B, C, Fig. 222 (S. 212), eines Kugeldreiecks ABC (Fr. 244 V.) eine Ebene (Fr. 182 I.), so schneidet dieselbe die Kugelfläche in einem Kreise K (Fr. 242 XVIII.); jeder Pol P (Fr. 243 I.) dieses Schnittkreises ist von den drei Eckpunkten gleichweit entfernt (Fr. 243 VII.); daher läßt sich ABC von dem einen (mit A, B, C in der nämlichen Kappe $ABCP_1$ gelegenen) Pole P_1 aus in drei gleichschenkelige sphärische Dreiecke ABP_1, BCP_1, CAP_1 zerlegen.

Jede der drei Meridian-Ebenen, durch welche diese Zerlegung bewirkt wird, geht aber auch durch den zweiten Pol P_2 und einen Eckpunkt des Scheiteldreiecks $A_1B_1C_1$ (Fr. 244 V. und 211 III.), so daß zugleich auch das Scheiteldreieck vom zweiten Pol P_2 aus in drei gleichschenkelige (Fr. 42 II.) Dreiecke $A_1B_1P_2$, $B_1C_1P_2$, $C_1A_1P_2$ zerlegt worden ist, und zwar ist jedes dieser letzteren drei Dreiecke je einem der drei Dreiecke des Urdreiecks kongruent (Fr. 214 X.; Fr. 42 II., 243 IX. und 203 VI.).

Daher hat jedes Kugeldreieck ABC gleichen Inhalt mit seinem (ihm symmetrisch-gleichen) Scheiteldreiecke $A_1B_1C_1$.

IX. Die Summe aus einem Kugeldreieck ABC und einem Hinterdreieck AC_1B_1 (Fr. 211 II.) desselben ist (wegen VIII.) dem Kugelzweieck $AC_1A_1B_1A = ACA_1BA$ gleich, welches jenem Winkel A entspricht, welcher in beiden Dreiecken (als Scheitelwinkel) vorkommt; denn dieses Zweieck ist die Summe aus dem Dreieck ABC und dem Scheiteldreieck A_1BC des Hinterdreiecks AC_1B_1.

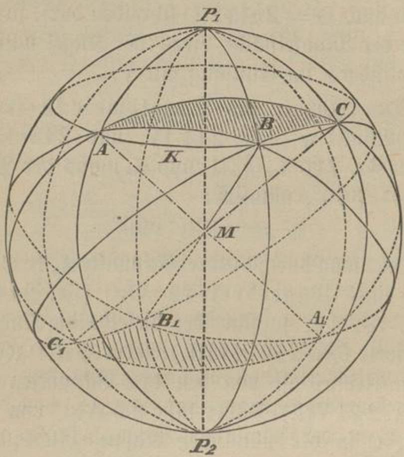

Fig. 222.

X. Addiert man die zwei Kugelzweiecke ABA_1CA und CAC_1BC, welche zu den zwei Winkeln A und C des Kugeldreiecks ABC gehören, zu den beiden Dreiecken ABC und A_1BC_1, welche nach IX. dem (zu dem Winkel $B = A_1BC_1$ gehörigen) Zweiecke $BAB_1CB = BA_1B_1C_1B$ gleichen, so erhält man (vergl. VIII.) als Summe das Doppelte des Dreiecks ABC mehr als die über dem größten Kreise ACA_1C_1A (nach vorn zu) stehende Halbkugelfläche $2\pi R^2$. Daher ergiebt sich aus VII. für den Inhalt D des sphärischen oder Kugeldreiecks:

$$2D + 2\pi R^2 = \pi R^2(A + B + C) : 90^\circ,$$

oder

$$D = \pi R^2(A + B + C - 180^\circ) : 180^\circ.$$

247. Welche Formeln liefern den Inhalt der Kugel?

I. Zieht man in dem Quadrat MAFC (Fig. 223) von der Seite R die Diagonale MF, den Quadranten AVC und eine Strecke ZE // MC, welche den Quadrant in V und die Diagonale in U schneidet, so ist MV = MC = ZE (Fr. 240 III., 108 III.); $\angle$ ZMU = 45° = $\angle$ ZUM (Fr. 110 II., 62 I.), daher ZM = ZU (Fr. 73 I.) und nach Fr. 170 I.:

$$\overline{ZV}^2 = \overline{MV}^2 - \overline{ZM}^2 = \overline{ZE}^2 - \overline{ZU}^2.$$

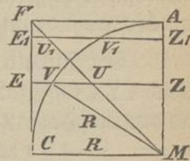

Fig. 223.

II. Läßt man nun in Fig. 223 das Quadrat, das $\triangle$ MFA und den Quadrant AVC sich um MA drehen, so erzeugt ersteres einen Cylinder, das Dreieck einen Kegel und der Quadrant eine Halbkugel, deren Halbmesser R der Höhe und dem Grundflächenhalbmesser des Cylinders und des Kegels gleicht. Jeder auf MA normale Kugelschnitt (Fr. 242 V.) hat den Inhalt $\pi \cdot \overline{ZV}^2 = \pi(\overline{ZE}^2 - \overline{ZU}^2)$, gleicht also dem Kreisringe von der Breite UE in dem durch das Dreieck MFC erzeugten Hohlkörper, welcher auch entsteht, wenn man den durch MFA erzeugten Kegel aus dem durch MCFA erzeugten Cylinder herausnimmt.

Daher hat nach Fr. 227 IV. nicht nur die Halbkugel mit jenem Hohlkörper, sondern auch jede Kugelschicht und jeder Kugelabschnitt, welcher durch eine halbe Kreiszone ZVV_1Z_1, bezw. einen halben Kreisabschnitt ZVA erzeugt wird, mit der zwischen denselben Parallelebenen enthaltenen Schicht des Hohlkörpers gleichen Inhalt.

III. Als Inhalt der Halbkugel ($\frac{1}{2}$K) findet sich aus II. nach Fr. 226 I. und 239 I.:

$$\tfrac{1}{2}K = \pi R^2 R - \tfrac{1}{3}\pi R^2 R = \tfrac{2}{3}\pi R^3.$$

Auch erkennt man leicht, daß der Cylinder, die Halbkugel und der Kegel in II. sich wie 3 : 2 : 1 verhalten.

IV. Der Inhalt der ganzen **Kugel** ist

$$K = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{3} OR.$$

Die Kugel läßt sich also auch als eine Pyramide von einer der Kugelfläche gleichen Grundfläche $O = 4\pi R^2$ (Nr. 246 VI.) und der Höhe R auffassen (Nr. 232 IV.).

V. Der Inhalt eines **Kugelabschnittes** T über dem Kreis $VYXS$ (Fig. 220 und 223) vom Halbmesser $ZV = r$ und von der Höhe $AZ = h$ ist (weil $AF = R$ und $ZU = ZM = z = R - h$) nach II., Nr. 226 I. und 239 II.:

$$T = \pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h\,[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2]$$
$$= \pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h\,[3R^2 - 3Rh + h^2]\,;$$

weil nun nach Nr. 170 II., oder 163 I. $\overline{A_1Z}\,.\,\overline{AZ} = \overline{ZV}^2$, d. h. $(2R - h)h = r^2$, also $2Rh = r^2 + h^2$ ist, so wird:

$$T = \tfrac{1}{3}\pi(3R - h)h^2 = \tfrac{1}{3}\pi(2R + z)(R - z)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi(r^2 + Rh)h = \tfrac{1}{6}\pi(3r^2 + h^2)h.$$

VI. Der Inhalt S einer **Kugelschicht**, deren zwei Kugelkreise die Halbmesser $ZV = r$ und $Z_1V_1 = r_1$ haben und in den Entfernungen $MZ = z = ZU$ und $MZ_1 = z_1 = Z_1U_1$ vom Kugelmittelpunkte auf der nämlichen Seite desselben liegen, so daß also $h = z_1 - z$ die Höhe der Schicht ist, findet sich aus II. nach Nr. 226 I. und 239 II:

$$S = \pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h\,[z_1^2 + z_1 z + z^2]$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi h\,[6R^2 - 2z_1^2 - 2z^2 - 2z_1 z].$$

Da nun aber $-2z_1^2 - 2z^2 - 2z_1z = -3z_1^2 - 3z^2 + (z_1^2 - 2z_1z + z^2) = -3z_1^2 - 3z^2 + h^2$ (Nr. 169 II.) und $3(R^2 - z_1^2) = 3r_1^2$, sowie $3(R^2 - z^2) = 3r^2$ ist, so wird:

$$S = \tfrac{1}{2}\pi h\,(r_1^2 + r^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

Auf die nämliche Formel kommt man schließlich auch, wenn man den Inhalt der Kugelschicht nach V. als Differenz des Inhaltes zweier Abschnitte berechnet.

VII. Den Inhalt J eines (von $MVAM$, Fig. 223, erzeugten) **Kugelausschnittes** findet man entweder als

Summe seines Abschnittes (V.) und des (vom $\triangle MVZ$ erzeugten) Kegels über dessen Kugelkreis, oder man faßt nach IV. den Ausschnitt als einen Kegel von der Höhe R und einer Grundfläche auf, welche seiner Kappe k (von der Höhe $AZ = h$) gleicht. Man erhält dann (wegen Fr. 246 IV.):

$$J = \tfrac{1}{3}kR = \tfrac{2}{3}\pi R^2 h.$$

VIII. Die über dem Kugeldreiecke $ABC = D$ (Fr. 246 X.) stehende, mit der Spitze im Mittelpunkte M liegende Kugelpyramide hat nach IV. den Inhalt:

$$P = \tfrac{1}{3}RD = \tfrac{1}{3}\pi R^3(A + B + C - 180^\circ) : 180^\circ.$$

IX. Der Inhalt eines Kugelkeils vom Winkel w° (Fr. 246 VII.) hat den Inhalt:

$$W = \pi R^3 w^\circ : 270^\circ.$$

248. Wie viel giebt es regelmäßige Polyeder?

I. Ein regelmäßiges Polyeder (eckiger Körper) wird von lauter kongruenten regelmäßigen Figuren begrenzt, die in lauter kongruenten, gleiche Flächenwinkel besitzenden Vielkanten aneinanderstoßen.

Alle Kanten eines regelmäßigen Polyeders sind gleich, ebenso alle seine ebenen und alle seine Flächen-Winkel.

II. Wegen Fr. 229 VIII. und 113 II. können bei einem regelmäßigen Körper

mit Dreiecken nur drei, vier, oder fünf Flächen,
mit Quadraten nur drei Flächen,
mit Fünfecken nur drei Flächen

in einer Ecke zusammenstoßen.

Es giebt also nur fünf regelmäßige Polyeder.

III. Das (regelmäßige) Tetraeder wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, hat vier Ecken und sechs Kanten. Vergl. Fr. 228 IX.

IV. Das Hexaeder gleicht dem Würfel (Fr. 217 VII.).

V. Das Dodekaeder wird von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt, hat zwanzig Ecken und dreißig Kanten.

VI. Das **Oktaeder** wird von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je vier in einer der sechs Ecken zusammenstoßen; es hat zwölf Kanten und läßt sich in zwei gerade vierseitige Pyramiden mit quadratischer Grundfläche zerlegen.

VII. Von den zwanzig gleichseitigen Dreiecken des **Ikosaeders** stoßen je fünf in einer der zwölf Ecken zusammen. Seine Kantenzahl ist dreißig.

VIII. In jedem regelmäßigen eckigen Körper giebt es einen **Mittelpunkt**, von welchem aus sich der Körper in so viel kongruente regelmäßige Pyramiden zerlegen läßt, als er Seitenflächen hat.

IX. Vom Mittelpunkte jedes regelmäßigen Körpers aus läßt sich eine Kugelfläche durch die sämtlichen Ecken, eine zweite durch die Kantenmitten und eine dritte durch die Mittelpunkte der Seitenflächen legen.