

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

7. Gleichheit, Proportionalität und Ausmessung des Flächeninhaltes ebener Figuren

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechteinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechteinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

$$\begin{aligned}
 EK &= EH + HK \\
 &= KL + HK = HL \text{ (Zr. 20 VIII., 108 III.)} \\
 EF &= HG \text{ (Zr. 108 III.)} \\
 \angle FEK &= \angle GHL \text{ (Zr. 62 I.)} \\
 \triangle FEK &\cong \triangle GHL \text{ (Zr. 80 II.);}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ferner: } FG &= GN \text{ (Vor.)} \\
 GK &= NL \text{ (Zr. 108 III.)} \\
 \angle FGK &= \angle FNL \text{ (Zr. 62 I.)} \\
 \triangle FGK &\cong \triangle GNL \text{ (Zr. 80 II.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangle FEK + \triangle FGK &= \triangle GHL + \triangle GNL \text{ (Zr. 20 VIII.)} \\
 EFGK &= HGNL \text{ (Zr. 20 II.)} \\
 EFGK - \triangle HGK &= HGNL - \triangle HGK \text{ (Zr. 20 VIII.)} \\
 EFGH &= KGNL \text{ (Zr. 20 II.)}
 \end{aligned}$$

IV. Dreiecke FGH und GNL (Fig. 148) von gleicher Grundseite ($FG = GN$) und gleicher Höhe sind inhaltsgleich, da sie nach Zr. 108 II. die Hälfte der gleichen Parallelogramme EFGH und KGNL sind.

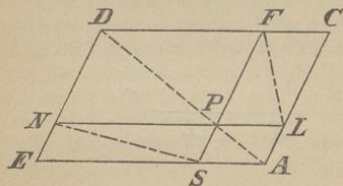


Fig. 149.

V. Gleiche Parallelogramme und gleiche Dreiecke haben bei gleicher Höhe auch gleiche Grundseiten, bei gleichen Grundseiten aber auch gleiche Höhen (III., IV.).

VI. Zieht man durch einen Punkt P der Diagonale AD eines Parallelogramms ACDE (Fig. 149) zwei Parallele LN und SF zu den Seiten, so zerfällt das Parallelogramm in vier mit dem Ganzen gleichwinkelige Parallelogramme, von denen die zwei um die Diagonale liegenden ALPS und PFDN ähnlich sind; die beiden anderen LPFC und SPNE heißen die Ergänzungen (Komplemente) der ersteren und sind inhaltsgleich.

Da nämlich $\angle LPA = \angle FDP$ und $\angle LAP = \angle FPD$ (Fr. 62 I.), so ist $\triangle ALP \sim \triangle PFD$ (Fr. 156 I.) und $ALPS \sim PFDN$ (Fr. 108 I. und 150 I.).

Zieht man ferner von den nach Fr. 108 I. kongruenten $\triangle \triangle ACD$ und DEA die ebenfalls kongruenten $\triangle \triangle ALP$ und PSA , PFD und DNP ab, so bleiben die (wenn auch nicht stets kongruenten, so doch sicher) gleichen Parallelogramme $LPFC$ und $SPNE$ übrig (Fr. 20 VIII.).

VII. Weil in VI. $\triangle ALP \sim \triangle PFD$, so ist $LP : LA = FD : FP$, oder auch $LP : PS = PN : FP$ (Fr. 108 III.) und $LP \cdot FP = PS \cdot PN$, d. h. es sind die Produkte der auf derselben Seite der Diagonale DA gelegenen Abschnitte der Parallelen LN und SF gleichgroß. — Vergl. Fr. 161 I.

VIII. Zwei Parallelogramme $LPFC$ und $SPNE$ (Fig. 149) (oder zwei Dreiecke LPF und SPN , Fr. 108 II.), welche in einem Winkel P übereinstimmen (also zwei Rechtecke stets), sind inhaltsgleich, wenn die Produkte aus ihren jenen Winkel P einschließenden Seiten gleich sind.

Legt man die Parallelogramme so an einander, daß die Winkel P Scheitelwinkel werden, und verlängert CL und ES , CF und EN , bis sie sich in A und D schneiden, und zieht man PA und PD , so ist $AL = SP$ und $DF = NP$ (Fr. 108 III.), und man erhält aus der vorausgesetzten Gleichung $SP \cdot NP = PL \cdot PF$, nach Fr. 20 IV. $AL \cdot DF = PL \cdot PF$, also $AL : PL = PF : DF$. Da außerdem $\angle ALP = \angle PFD$ (Fr. 63 I.), so ist $\triangle ALP \sim \triangle PFD$ (Fr. 156 II.) und $\angle LAP = \angle FPD$ (Fr. 153 I.). Weil aber auch $\angle LAP = \angle SPA$ (Fr. 62 I.), so ist weiter $\angle SPA = \angle FPD$ (Fr. 20 V.) und deshalb muß APD eine Gerade sein (Fr. 43.), nämlich die Diagonale des Parallelogramms $ACDE$; demnach ist endlich:

$$LPFC = SPNE \text{ (VI.)}$$

IX. Zwei Parallelogramme (deshalb auch zwei Dreiecke, Fr. 108 II.) sind inhaltsgleich, wenn die Produkte aus Höhe und Grundseite gleich sind (Fr. 20 IV.); denn jedes der

beiden Parallelogramme gleich dann nach III. dem Rechtecke, welches dieselben Höhen und Grundseiten hat, die beiden Rechtecke aber sind nach VIII. inhaltsgleich.

X. Die der Grundseite gegenüber liegenden Seiten solcher Parallelogramme, welche gleichen Flächeninhalt und eine gemeinschaftliche Grundseite haben, liegen in einer zur Grundseite parallelen Geraden.

XI. Die Spitzen aller Dreiecke von gleichem Flächeninhalte, welche sich über der nämlichen Grundseite zeichnen lassen, liegen in einer zu dieser Grundseite parallelen Geraden.

167. Wenn lassen sich zwei Parallelogramme unmittelbar addieren und subtrahieren?

I. Stimmen zwei Parallelogramme $ABEF$ und $ABCD$ in einer Seite $AB = a$ (Fig. 150 und 151) und einem

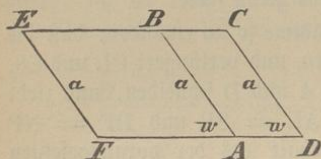


Fig. 150.

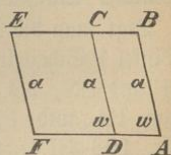


Fig. 151.

Winkel w überein, so lassen sich dieselben mit dieser gleichen Seite AB so an einander legen, daß (entweder wegen Fr. 107 I. und 40, oder wegen Fr. 31) die anstoßenden Seiten AF und AD in eine Gerade fallen. Daher ist ihre Summe und ihre Differenz ein Parallelogramm von dem nämlichen Winkel w und der nämlichen Seite a , dessen zweite Seite DF aber in Fig. 150 die Summe $AF + AD$, in Fig. 151 dagegen die Differenz $AF - AD$ der anderen Seiten AF und AD der beiden Parallelogramme $ABEF$ und $ABCD$ ist.

II. Bezeichnen wir der Kürze halber ein aus den Seiten $AB = a$ und $AD = b$ konstruiertes Rechteck $ABCD$ mit $\boxed{AB, AD}$ oder $\boxed{a, b}$, dann läßt sich der auf zwei Rechtecke angewendete Satz I. kurz so schreiben:

$$\boxed{a, b} + \boxed{a, c} = \boxed{a, (b+c)}$$

und

$$\boxed{a, b} - \boxed{a, c} = \boxed{a, (b-c)}.$$

III. Umgekehrt ist auch

$$\boxed{a, (b+c)} = \boxed{a, b} + \boxed{a, c}$$

und

$$\boxed{a, (b-c)} = \boxed{a, b} - \boxed{a, c}.$$

IV. Ein über der Seite a konstruiertes Quadrat wäre nach II. durch $\boxed{a, a}$ zu bezeichnen, möge aber kürzer durch $\boxed{a}$ bezeichnet werden.

168. Welchen Inhalt besitzt die von einer Strecke bei ihrer Parallelverschiebung in einer Ebene erzeugte Figur?

Bewegt sich eine Strecke $AB = a$, Fig. 152, von unveränderlicher Länge (wie in Fr. 55 II.) parallel zu sich selbst in einer Ebene an einer krummen Linie BCD hin, ohne denselben Teil der Ebene wiederholt zu überstreichen, so erzeugt sie eine gemischtlinige Figur $ABCDKL$, deren Inhalt dem des Rechtecks aus der Strecke AB und dem von ihr in der zur Strecke AB senkrechten Richtung zurückgelegten Wege $SQ = q$ gleicht.

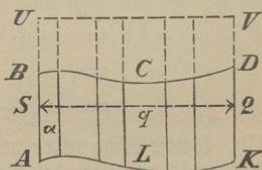


Fig. 152.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich sofort, wenn man die Figur $ASQKL$ abschneidet und auf der andern Seite als $BUVDC$ ansetzt (Fr. 62 V., 108 XIII.).

169. Wie groß sind die Quadrate über der Summe und Differenz zweier Strecken, ferner die Differenz zweier Quadrate?

I. Das Quadrat über der Summe $(a+b)$ zweier Strecken a und b besteht aus der Summe der Quadrate über den

beiden Strecken und dem doppelten Rechteck aus den beiden Strecken*). Nach Fr. 167 III. und IV., sowie Fr. 20 XI. ist nämlich:

$$\begin{aligned} a+b &= (a+b), (a+b) \\ &= (a+b), a + (a+b), b \\ &= \{a, a + b, a\} + \{a, b + b, b\} \\ &= a + 2a, b + b. \end{aligned}$$

II. Das Quadrat über der Differenz $a-b$ zweier Strecken a und b ist gleich der Differenz zwischen der Summe der Quadrate über beiden Strecken und dem doppelten Rechteck aus ihnen. Aus Fr. 167 III. und IV. nebst 20 XI. folgt ja:

$$\begin{aligned} a-b &= (a-b), (a-b) \\ &= (a-b), a - (a-b), b \\ &= \{a, a - b, a\} - \{a, b - b, b\} \\ &= a + b - 2a, b. \end{aligned}$$

III. Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Rechteck aus der Summe und der Differenz ihrer Seiten**). Denn wegen Fr. 20 XI. und nach Fr. 167 III. und IV. ergibt sich:

$$\begin{aligned} (a+b), (a-b) &= (a+b), a - (a+b), b \\ &= \{a, a + a, b\} - \{a, b + b, b\} \\ &= a - b. \end{aligned}$$

170. Welche Sätze gelten von den Quadraten über den Seiten eines Dreiecks und über der Projizierenden?

I. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse $AB = h$ gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten $AC = a$ und $BC = b$ (vergl. Fr. 160 III.).

*) Die drei Sätze I. bis III., welche sich mit einer Fig. 149 ähnelnden Figur auch leicht rein geometrisch beweisen lassen, sind die Seitenstücke zu den drei arithmetischen Sätzen:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \text{ und} \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b). \end{aligned}$$

Ähnliches gilt von den Sätzen in Fr. 170 in Bezug auf die Sätze in Fr. 160. Vergl. auch Fr. 177 V.

**) Der Satz läßt sich auch unmittelbar beweisen, durch Ineinanderlegen der Quadrate.

Beschreibt man über AB das Quadrat AEFB (Fig. 153), fällt man von E und F Senkrechte EK und FD auf die verlängerte CB, darauf von A und F Senkrechte AM und FL auf EK, so sind die Winkel v , m , u und n gleich (Fr. 71 VI.), weil ihre Schenkel der Reihe nach auf einander senkrecht stehen. Die rechtwinkligen $\triangle ABC$, AEM , EFL und BFD , welche außerdem noch in den Hypotenusen $AB = AE = EF = BF$ übereinstimmen

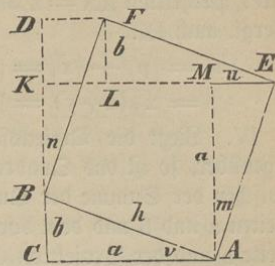


Fig. 153.

(Fr. 108 VII.), sind deshalb kongruent (Fr. 81 II.); daher ist $AM = AC$ und $FL = FD = BC$ (Fr. 67 II.), oder es sind $AMKC$ und $LFDK$ die Quadrate über AC und $FL = BC$ (Fr. 108 VII.). Schneiden wir nun die beiden Dreiecke AEM und EFL von $AEFB$ ab und setzen sie als ABC und BFD an den Rest $AMLEB$ wieder an, so wird: $AEFB = AMKC + LFDK$ (Fr. 20 II.), oder

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

Dieser Satz heißt der Pythagoräische Lehrsatz.

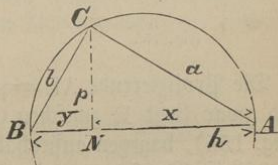


Fig. 154.

II. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Projizierenden $CN = p$ (vergl. Fig. 154) gleich dem Rechtecke aus den Projektionen $AN = x$ und $NB = y$ der Katheten:

$$h^2 = x + y = x + y + 2xy \quad (\text{Fr. 169 I.})$$

$$h^2 = a^2 + b^2 = \{x + p\} + \{y + p\} \quad (\text{I.})$$

$$x, y = \frac{1}{2} \{h - x - y\} = p \quad (\text{Fr. 20 VIII.})$$

III. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete $AC = a$ (Fig. 154) gleich dem Rechteck aus ihrer Projektion $AN = x$ und der Hypotenuse $AB = h$. — Vergl. auch IX.

$$\boxed{a} = \boxed{p} + \boxed{x} = \boxed{x, y} + \boxed{x, x} \\ = \boxed{x, (x+y)} = \boxed{x, h} \quad (\text{I, II.; Fr. 167 II.}).$$

IV. Liegt die Dreiecksseite c einem spitzen Winkel C gegenüber, so ist das Quadrat über ihr gleich der Differenz zwischen der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten a und b und dem doppelten Rechteck aus der zweiten Seite a und der Projektion $CE = q$ der dritten Seite b auf die zweite a .

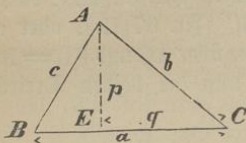


Fig. 155.

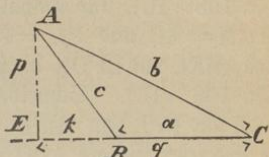


Fig. 156.

Die Projizierende $AE = p$ trifft die Seite $CB = a$ in E und zwar liegt E zwischen C und B , wenn $\angle B < 90^\circ$ (Fig. 155), dagegen außerhalb BC (Fig. 156), wenn $\angle B > 90^\circ$ ist (Fr. 71 V.); im ersteren Falle ist $BE = a - q$, im anderen $BE = q - a$.

Nun ist nach I. und Fr. 169 II.:

$$\boxed{a-q} = \boxed{a} + \boxed{q} - 2\boxed{a, q} = \boxed{q-a}.$$

$$\boxed{c} = \boxed{BE} + \boxed{p} = \boxed{a + q - 2\boxed{a, q}} + \boxed{b - q} \\ = \boxed{a} + \boxed{b} - 2\boxed{a, q}.$$

Bei $\angle B = 90^\circ$ endlich ist $q = a$, also $BE = 0$ und $\boxed{c} = \boxed{a} + \boxed{b} - 2\boxed{a, a} = \boxed{b} - \boxed{a}$, wie es I. verlangt.

V. Liegt die Dreiecksseite b (Fig. 156) einem stumpfen Winkel B gegenüber, so ist das Quadrat über ihr gleich der

Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten und dem doppelten Rechteck aus der zweiten Seite a und der Projektion $BE = k$ der dritten Seite c auf die zweite a .

Die Projizierende $AE = p$ trifft CB in E außerhalb CB (Fr. 71 V.); daher ist $CE = k + a$ und nach I. und Fr. 169 I.:

$$\boxed{b} = \boxed{p} + \boxed{k+a} = \boxed{p} + \boxed{k} + \boxed{a} + 2\boxed{a, k} \\ = \boxed{c} + \boxed{a} + 2\boxed{a, k}.$$

VI. In I., IV. und V. liegt eine weitere Entwicklung von Fr. 78 II.

VII. Ist das Quadrat der Seite h eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten a und b , so ist der h gegenüberliegende Winkel C ein rechter, weil sonst nach IV., oder nach V. $\boxed{h} > \boxed{a} + \boxed{b}$ sein müßte.

VIII. Aus I. findet sich in Berücksichtigung der Anmerkungen zu 159 I. und 169 I. eine weitere Lösung der Aufgabe in Fr. 143. Fällt man von A und B , Fig. 128, die Senkrechten $AJ = p_a$ und $BZ = p_b$ auf G und stehen deren Fußpunkte um $ZJ = g$ von einander ab, während M von p_a um $JM = x$, von p_b um $ZM = y = g - x$ entfernt ist, dann hat man

$$\overline{AM}^2 = a^2 = p_a^2 + x^2 \quad \text{und}$$

$$\overline{BM}^2 = b^2 = [s-a]^2 = p_b^2 + y^2 = p_b^2 + [g-x]^2;$$

$$[s - \sqrt{p_a^2 + x^2}]^2 = p_b^2 + [g-x]^2,$$

woraus sich x durch Rechnung finden läßt.

IX. Wie III. mit Fr. 160 IV. bezügl. der Werte a^2 und b^2 übereinstimmt, so folgt aus III. auch ferner, daß in Übereinstimmung mit Fr. 160 V. (vergl. auch Fr. 161 VIII.):

$$\boxed{a} = \boxed{h, x} = \boxed{h, (h-y)} \quad \text{und}$$

$$\boxed{b} = \boxed{h, y} = \boxed{h, (h-x)}.$$

Ebenso findet sich aus I. und Fr. 169 III. noch:

$$\boxed{a} = \boxed{h} - \boxed{b} = \boxed{h+b, h-b},$$

was schon in Fr. 160 IV. liegt und in Fr. 161 IX. benutzt worden ist.

X. In jedem Dreieck ABC, Fig. 126 S. 142, ist die Summe $\boxed{a} + \boxed{b}$ der Quadrate über zwei Seiten gleich der Summe aus dem halben Quadrate der dritten Seite $AB=c$ und aus dem doppelten Quadrate der zu c gehörigen Mittellinie $CE=m$.

Wäre $b < a$ (wie in Fig. 126 S. 142), so wäre $\angle B < \angle A$ (Fr. 73 III.), somit $\angle B < 90^\circ$ (Fr. 71 I.). Deshalb liegt der zufolge Fr. 71 V. von B aus nach A hin fallende Fußpunkt D der Höhe $h_c = CD$ von B aus noch jenseits der Mitte E der Seite c , weil doch nach Fr. 112 X. $DA < DB$, also $DA < \frac{1}{2}AB$ sein muß. Mag daher CA von CB aus jenseits CE liegen, oder zwischen CB und CD, immer ist $\angle BEC > 90^\circ$ (Fr. 69 VII.) und $\angle AEC < 90^\circ$ (Fr. 39 IV.). Für die Projektion $DE=e$ der Mittellinie m , die Seiten c und a und die Strecke m des Dreiecks BEC besteht daher nach V. die Gleichung:

$$\boxed{a} = \boxed{\frac{1}{2}c} + \boxed{m} + 2\boxed{\frac{1}{2}c, e};$$

ebenso für die Seiten des Dreiecks AEC nach IV. die Gleichung:

$$\boxed{b} = \boxed{\frac{1}{2}c} + \boxed{m} - 2\boxed{\frac{1}{2}c, e}.$$

Deshalb ist nach Fr. 20 VIII., und weil $\boxed{\frac{1}{2}c} = \frac{1}{4}\boxed{c}$

$$\boxed{a} + \boxed{b} = \frac{1}{2}\boxed{c} + 2\boxed{m}.$$

Wäre dagegen $b = a$, so fiel E auf D, und es wäre $DE=e=0$, $CE=CD$ und in Übereinstimmung mit I. immer wieder:

$$\boxed{a} + \boxed{b} = 2\left\{\boxed{\frac{1}{2}c} + \boxed{m}\right\}.$$

XI. Sind in X. die Punkte A und B und somit auch $AB=c$ gegeben und liegt C auf einem um E mit dem Halbmesser m geschlagenen Kreise, so ist die rechte Seite der in X. gefundenen Gleichung bekannt und demnach die Summe $\boxed{a} + \boxed{b}$ unveränderlich, wenn C auf dem Kreise fortrückt.

Nach I. darf diese Summe $= \boxed{f}$ gesetzt werden. Demnach muß

der geometrische Ort (Fr. 74 XVII.) eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate der Abstände a und b

von zwei gegebenen Punkten A und B einem gegebenen Quadrate $\boxed{f}$ gleicht, ein Kreis sein, welcher um die Mitte E von $AB = c$ mit dem Halbmesser m zu schlagen ist, für welchen $\boxed{m} = \frac{1}{2} \boxed{f} - \frac{1}{4} \boxed{c}$ sein müßte.

Nach Fr. 20 VI. und nach Berücksichtigung von Fr. 177 V. ließe sich der Halbmesser m aus

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{4} c^2}$$

ausrechnen.

Wäre in einem besonderen Falle $m = \frac{1}{2} c$, so erhielte man $\boxed{c} = \boxed{f} = \boxed{a} + \boxed{b}$ und käme somit auf I. zurück.

171. Wie verwandelt man eine Figur in eine inhaltsgleiche?

I. Zieht man in einem ebenen Vieleck $ABCDE$ (Fig. 157) eine Diagonale AC und zu dieser durch B eine Parallele BB_1 , bis sie die verlängerte DC in B_1 schneidet, dann ist $\triangle AB_1C = \triangle ABC$ (Fr. 166 IV.), daher auch $AB_1DE = ABCDE$, AB_1DE hat jedoch eine Seite weniger als $ABCDE$.

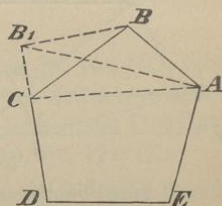


Fig. 157.

II. Durch Wiederholung des in I. beschriebenen Verfahrens läßt sich jedes Vieleck endlich in ein inhaltsgleiches Dreieck verwandeln.

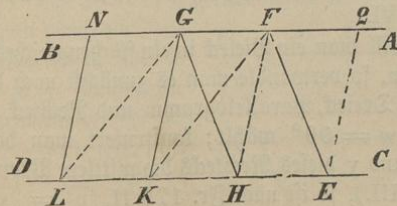


Fig. 158.

III. Will man ein Dreieck KEF (Fig. 158) in ein flächengleiches Parallelogramm verwandeln, so halbiere man

Winkel w , so lassen sie sich nach Fr. 167 I. addieren und subtrahieren.

II. Soll die Summe, oder die Differenz der Vielecke ein Quadrat sein, so muß man die Vielecke nach Fr. 171 VI. in Quadrate verwandeln.

Trägt man dann die Seiten $CA = a$ und $CB = b$ (Fig. 154 S. 193) zweier Quadrate auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitel C aus auf, so erhält man eine Hypotenuse $AB = h$, für welche nach Fr. 170 I.

$$[h] = [a] + [b] \text{ ist.}$$

Zu $[h]$ addiert man in gleicher Weise das dritte Quadrat $[c]$ etc.

Schlägt man dagegen über der Seite $AB = h$ des ersten Quadrats als Durchmesser einen Halbkreis und schneidet denselben in C mit einem aus A mit dem der Seite $AB = a$ des zweiten Quadrates gleichenden Halbmesser geschlagenen Kreise, so ist (Fr. 170 I.)

$$[b] = [h] - [a].$$

Zu demselben Ziele würde es (nach Fr. 169 III.) führen, wenn man zunächst ein Rechteck mit den Seiten $u = (h + a)$ und $v = (h - a)$ bildete und dieses noch in ein Quadrat $[b]$ (Fr. 171 VI.) verwandelte. — Vergl. Fr. 170 IX.

173. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Parallelogramme?

I. Teilt man die Grundseite AD eines Parallelogramms $P = ABCD$ (Fig. 160) in n gleiche Teile $AN = NQ = \dots$, und zieht man durch die Teilpunkte Parallelen zu AB , so zerfällt P in n kongruente Parallelogramme $ABSN = NSUQ = \dots = p$ (Fr. 108 XIII. und 109 I.). Es ist also:

$$P = np \text{ oder } p = P : n.$$

II. Teilt man die Höhe AX eines Parallelogramms

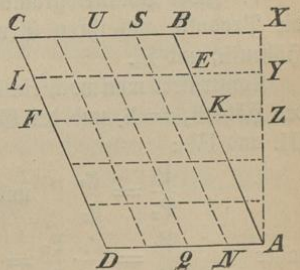


Fig. 160.

$P = ABCD$ (Fig. 160) in n gleiche Teile $XY = YZ = \dots$, und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zur Grundseite AD , so zerfällt P in n kongruente Parallelogramme $EBCL = KELF = \dots = p'$ (Zr. 111 VI., 109 I.). Es ist also $P = np'$ oder $p' = P : n$.

III. Zwei Parallelogramme P_1 und P_2 von gleicher Höhe h verhalten sich wie ihre Grundseiten g_1 und g_2 .

Sind die Grundseiten kommensurabel (Zr. 144 II.), ist z. B. $g_1 = xm$ und $g_2 = ym$, so kann man nach I. P_1 in x Parallelogramme p_1 von der Höhe h und der Grundseite m , P_2 aber in y Parallelogramme p_2 von der Höhe h und der Grundseite m zerlegen; daher ist $p_1 = p_2$ (Zr. 166 III.) und

$$P_1 : P_2 = xp_1 : yp_2 = x : y = xm : ym = g_1 : g_2.$$

Sind die Grundseiten inkommensurabel und etwa $g_1 = xm$, dann ist $ym < g_2 < (y+1)m$, aber wegen Zr. 166 III. auch $P_1 = xp$ und $yp < P_2 < (y+1)p$, also:

$$\frac{y}{x} < \frac{g_2}{g_1} < \frac{y+1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x} < \frac{P_2}{P_1} < \frac{y+1}{x},$$

d. h. $g_2 : g_1$ und $P_2 : P_1$ haben immer dieselben Grenzverhältnisse; daher ist (ähnlich wie in Zr. 148 I.) auch hier $P_1 : P_2 = g_1 : g_2$.

IV. Zwei Parallelogramme P_1 und P_2 von gleicher Grundlinie g verhalten sich wie ihre Höhen h_1 und h_2 .

Der Beweis ist genau so wie in III. zu führen, nur hat man anstatt I. den Satz in II. zu benutzen.

V. Zwei Parallelogramme P_1 und P_2 verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien g_1 und g_2 und ihren Höhen h_1 und h_2 .

Konstruiert man noch ein drittes Parallelogramm P_3 mit der Höhe $h_3 = h_1$ und der Grundlinie $g_3 = g_2$, so ist nach III. und IV.:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_3} &= \frac{g_1}{g_3} \quad \text{und} \quad \frac{P_3}{P_2} = \frac{h_3}{h_2}, \\ \text{daher} \quad \frac{P_1}{P_2} &= \frac{P_1}{P_3} \cdot \frac{P_3}{P_2} = \frac{g_1}{g_3} \cdot \frac{h_3}{h_2} = \frac{g_1 h_1}{g_2 h_2}. \end{aligned}$$

VI. Zwei Parallelogramme FLAT und KAND (Fig. 161), welche in einem Winkel A übereinstimmen, verhalten sich wie Produkte aus den diesen Winkel einschließenden Seiten. Legt man nämlich die Parallelogramme so an einander, daß die $\angle A$ Scheitelwinkel werden, und verlängert FT und DN, bis sie sich in C schneiden, so ist nach III.:

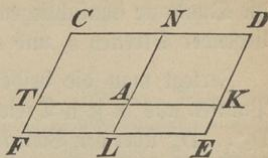


Fig. 161.

$$\frac{\text{FLAT}}{\text{TANC}} = \frac{\text{LA}}{\text{AN}}, \quad \frac{\text{TANC}}{\text{KAND}} = \frac{\text{TA}}{\text{AK}},$$

folglich wegen Fr. 20 VIII.:

$$\frac{\text{FLAT}}{\text{KAND}} = \frac{\text{LA}}{\text{AN}} \cdot \frac{\text{TA}}{\text{AK}} = \frac{\text{LA} \cdot \text{TA}}{\text{AN} \cdot \text{AK}}.$$

174. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke?

Da jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist (Fr. 108 II.), so verhalten sich zwei Dreiecke:

- I. bei gleicher Höhe wie ihre Grundlinien (Fr. 173 III.);
- II. bei gleicher Grundlinie wie ihre Höhen (Fr. 173 IV.);
- III. bei verschiedenen Höhen und Grundlinien wie die Produkte aus den Höhen und Grundlinien (Fr. 173 V.);
- IV. bei Übereinstimmung in einem Winkel A wie die Produkte aus den diesen Winkel einschließenden Seiten (Fr. 173 VI.).

175. Wie verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren?

I. Ähnliche Dreiecke D und D' verhalten sich wie die Quadrate (vergl. Fr. 19 V.) ähnlich liegender Seiten b und b' (c und c'), oder ähnlich liegender Strecken s und s'.

Weil $\angle A = \angle A'$ und $b : b' = c : c' = s : s'$ (Fr. 153 I., 154 II.), so ist nach Fr. 174 IV.:

$$\frac{D}{D'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{b}{b'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{s}{s'}\right)^2 = \frac{b^2}{(b')^2} = \frac{s^2}{(s')^2}.$$

II. Ähnliche Vielecke V_1 und V_2 (und ebenso krummlinige sowie gemischtlinige Figuren, Fr. 153 II.) verhalten sich wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten a_1 und a_2 , oder ähnlichliegender Strecken s_1 und s_2 .

Zerlegt man die beiden n -ecke von zwei ähnlichliegenden Punkten aus in je n Dreiecke $D_1, D_2, D_3 \dots D_n$ und $D_1', D_2', D_3' \dots D_n'$ über den Vielecksseiten a_1, b_1, c_1 zc. und a_2, b_2, c_2 zc., so ist nach I. und Fr. 153 I.:

$$\begin{aligned} V_1 &= D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n \\ &= D_1 \left(1 + \frac{D_2}{D_1} + \frac{D_3}{D_1} + \dots + \frac{D_n}{D_1} \right); \\ V_2 &= D_1' + D_2' + D_3' + \dots + D_n' \\ &= D_1' \left(1 + \frac{D_2'}{D_1'} + \frac{D_3'}{D_1'} + \dots + \frac{D_n'}{D_1'} \right). \end{aligned}$$

Nun ist: $b_2 : b_1 = a_2 : a_1$ (Fr. 153 I.)

$$\frac{b_2^2}{b_1^2} = \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \frac{a_2^2}{a_1^2} \quad (\text{Fr. 19 V. und 20 VIII.})$$

$$b_1^2 : b_2^2 = D_2 : D_2', \quad D_1 : D_1' = a_1^2 : a_2^2 \quad (\text{I.})$$

$$D_2 : D_2' = D_1 : D_1' \quad (\text{Fr. 20 IV.})$$

$$D_2 : D_1 = D_2' : D_1' \quad (\text{Fr. 147 V.}).$$

Ebenso ist: $D_3 : D_1 = D_3' : D_1'$ zc.,

daher nach Fr. 20 VIII. auch

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{D_1}{D_1'} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

III. Werden über den Seiten a, b, h eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren F_a, F_b und F_h beschrieben, so ist die über der Hypotenuse h beschriebene F_h gleich der Summe der Figuren F_a und F_b über den Katheten a und b .

$$F_a : F_h = a^2 : h^2, \quad F_b : F_h = b^2 : h^2 \quad (\text{II.})$$

$$(F_a + F_b) : F_h = (a^2 + b^2) : h^2 = 1 \quad (\text{Fr. 160 III.})$$

$$F_a + F_b = F_h.$$

IV. Um sowohl, wie in einen Kreis beschriebene ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Kreise (II.), weil diese Halbmesser ähnlichliegende Strecken sind.

V. Regelmäßige Figuren von gleicher Seitenzahl (Fr. 154 IV.) verhalten sich wie die Quadrate der (ähnlichliegenden) Halbmesser der eingeschriebenen oder umgeschriebenen Kreise.

VI. Für das demselben Kreise eingeschriebene und umgeschriebene n -eck f_n und F_n hat man nach II. und Fr. 163 III.:

$$f_n : F_n = s^2 : t^2 = e^2 : r^2 = r^2 : r_1^2.$$

176. Welche Figur benutzt man als Maß für die Figuren?

I. Als Flächeneinheit, d. h. als Maß für die Figuren, wählt man das Quadrat über der Längeneinheit (1 Meter oder Stab, Fr. 146 III.) und nennt dasselbe ein Quadratmeter oder einen Quadratstab ($1 \square^m = 1^{qm}$).

II. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Quadratmeter eine Figur enthält, heißt die Flächenzahl derselben.

Damit die nachfolgenden Formeln den Flächeninhalt in Quadratmetern liefern, sind die in ihnen vorkommenden Maße in Metern einzusetzen.

III. Wollte man nicht das Meter als Längeneinheit benutzen, sondern z. B. das Centimeter, so würde die Flächenzahl auch den Inhalt in Quadratcentimetern (vergl. die Tabellen I und II im Anhange) angeben.

Stets aber müssen die in Fr. 177 bis 179 für die Ausmessung verwerteten Strecken in einer und derselben Längeneinheit ausgedrückt sein, dürfen also nie mehrfach benannte Zahlen sein.

177. Wie findet man den Flächeninhalt eines Dreiecks und eines Vierecks*).

I. Die Flächenzahl eines Quadrates ist das Quadrat (vergl. Fr. 19 V.) der Längenzahl a seiner Seite a , weil nach Fr. 175 II. $a : 1 \square^m = a^2 : 1^2 = a^2$ ist, also:

$$a = a^2 \cdot 1 \square^m = a^2 \square^m.$$

II. Ist die Seite des Quadrates 10^m , 100^m zc., so enthält das Quadrat ($10^2 =$) $100 \square^m$, ($100^2 =$) $10\,000 \square^m$ zc.

III. Ist die Seite des Quadrates $0,1^m$, $0,01^m$ zc., so enthält das Quadrat ($0,1^2 =$) $0,01 \square^m$, ($0,01^2 =$) $0,0001 \square^m$ zc.

IV. Die Flächenzahl eines Rechtecks ist das Produkt aus den Längenzahlen a und b von zwei nicht-parallelen Seiten a und b ; weil nach Fr. 173 VI. $a, b : 1 \square^m = ab : 1 \cdot 1 = ab$ ist, so wird:

$$a, b = ab \square^m.$$

V. Kürzer sagt man: der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt aus dessen beiden Seiten a und b .

In ähnlicher Weise pflegt man auch die Sätze über den Inhalt des Quadrates (I.) und anderer Figuren (VI. bis IX.,

Fr. 178 und 179) kurz auszusprechen. Vergl. die Anm. zu Fr. 159 II. und zu Fr. 169 I.

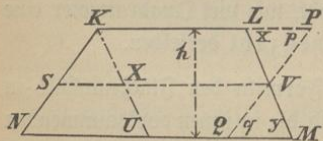


Fig. 162.

VI. Die Flächenzahl eines Parallelogramms NKPK, Fig. 162, ist das Produkt gh aus den Längen-

zahlen g und h der Grundseite $NQ = g$ und der Höhe h (IV.); denn das Parallelogramm gleicht dem Rechteck $[g, h]$ (Fr. 166 III.).

VII. Die Flächenzahl D des Dreiecks $NKU = D$, Fig. 162, ist das halbe Produkt aus den Längenzahlen g

*) Weiteres hierüber und Beispiele hierzu enthält der „Katechismus der Raumberechnung“ (3. Aufl. Leipzig 1888, Fr. 61 bis 128) und der „Katechismus der Feldmessaunst“ (5. Aufl. Leipzig 1891, Fr. 108 bis 121).

und h der Grundseite $NU = g$ und Höhe h (VI.). Da nämlich D die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe ist (Fr. 108 II.), so ist:

$$D = \frac{1}{2} gh \square^m.$$

VIII. Das Dreieck D mit den drei Seiten a, b, c läßt sich aber auch vom Mittelpunkte M , (vergl. Fig. 102 auf S. 108) des eingeschriebenen Kreises in drei Dreiecke zerlegen, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser r_0 jenes Kreises ist, deren Grundlinien aber a, b, c sind; daher findet man mit Fr. 159 XVII., wenn a, b, c, s und r_0 die Längenzahlen von a, b, c, s und r_0 bedeuten:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} ar_0 + \frac{1}{2} br_0 + \frac{1}{2} cr_0 = \frac{1}{2} r_0 (a + b + c) \\ &= r_0 s = \sqrt{r_0^2 s^2} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)} \square^m. \end{aligned}$$

IX. Die Flächenzahl T des Trapezes $T = NKLM$, Fig. 162, ist das halbe Produkt aus den Längenzahlen p und h der mittleren Parallelen $p = SV = \frac{1}{2} (KL + MN)$ und der Höhe h .

Man kann nämlich das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke von der Höhe h und den Grundlinien $KL = a^m$ und $NM = b^m$ zerlegen; daher ist nach VII.:

$$T = \frac{1}{2} ha + \frac{1}{2} hb = \frac{a+b}{2} h = ph \square^m.$$

X. Die Flächenzahl Z des Trapezoids Z (vergl. Fr. 106 V. und Fig. 165 in Fr. 180) ist das Produkt aus der Längenzahl d einer Diagonale $XD = d$ und dem arithmetischen Mittel der Längenzahlen h_1 und h_2 der Entfernungen h_1 und h_2 jener Diagonale d von den beiden anderen, auf verschiedenen Seiten von d liegenden Eckpunkten Y und V , bezw. U und S .

Denn diese Diagonale d teilt Z in zwei Dreiecke von der Grundlinie d und den Höhen h_1 und h_2 ; daher ist nach VII.:

$$Z = \frac{1}{2} d h_1 + \frac{1}{2} d h_2 = \frac{h_1 + h_2}{2} d = h_0 d \square^m,$$

wenn $h_0 = \frac{1}{2} (h_1 + h_2)$ dem arithmetischen Mittel aus h_1 und h_2 ist. Vergl. Zr. 180 VI.

178. Wie findet man den Flächeninhalt*) eines Vielecks?

I. Das Vieleck läßt sich behufs seiner Ausmessung oder der Berechnung seines Flächeninhaltes auf verschiedene Weise in Dreiecke, Trapeze, Trapezoide zerlegen. (Vergl. Katech. der Raumberechnung, 3. Aufl. Zr. 78 bis 81 und Katech. der Feldmefskunst, 5. Aufl. Zr. 122 bis 131.)

II. Für die Inhalte f_n und F_n der demselben Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen n -ecke findet man wegen Zr. 113 IV. nach Zr. 177 VII., 163 VI. und VII.:

$$f_n = \frac{1}{2} e s \cdot n = \frac{1}{2} u_n e \quad \text{und} \quad F_n = \frac{1}{2} r t \cdot n = \frac{1}{2} U_n r.$$

Während also bei demselben Kreise das Verhältnis $F_n : U_n$ von n unabhängig und unveränderlich $= \frac{1}{2} r$ ist, wird das Verhältnis $f_n : u_n = \frac{1}{2} e$ um so größer, je größer e , d. h. je größer n wird, doch bleibt $f_n : u_n$ stets kleiner als $\frac{1}{2} r$, weil $e = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$ (Zr. 163 I.).

III. Dividiert man die nach II. bestimmten beiden Inhalte f_m und F_m mit r^2 , so erhält man die beiden Quotienten $f_m : r^2 = (u_m : 2r)(e' : r)$ und $F_m : r^2 = U_m : 2r$, worin e' den Abstand der Seite des m -ecks vom Mittelpunkte bedeutet.

Ferner würde man aus II. nach Zr. 163 IV., I. und VI. finden:

*) Will man in Zr. 178 und 179 die Flächenzahlen, so muß man anstatt der in den Formeln vorkommenden Strecken deren Längenzahlen einsetzen, wie in Zr. 177.

$$f_{2n} = \frac{1}{2} u_{2n} \cdot e_2 = \frac{1}{2} 2n \cdot s_2 e_2 = n \sqrt{2r(r-e)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} r(r+e)} \\ = nr \sqrt{(r-e)(r+e)} = \frac{1}{2} nrs = \frac{1}{2} ru_n, \text{ und} \\ f_{2n} : r^2 = u_n : 2r.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen und $F_{2n} = \frac{1}{2} r U_{2n}$ erkennt man, daß sich die beiden Verhältnisse $f_{2n} : r^2$ und $F_{2n} : r^2$ derselben Grenze (Fr. 163 XI.) nähern, wie die Verhältnisse $u_n : 2r$ und $U_{2n} : 2r$.

IV. Bei Aufsuchung der in III. erwähnten Grenze kann man davon ausgehen, daß beim regelmäßigen Sechseck $s = r$ ist (Fr. 132 II.); mit Benutzung von Fr. 163 I. bis XII. findet man daraus:

Seiten- zahl	$u_n : 2r$	$U_n : 2r$	$f_n : r^2$	$F_n : r^2$
$n = 6$	3	3,464 1016	2,598 0762	3,464 1016
12	3,105 8285	3,215 3903	3	3,215 3903
24	3,132 6286	3,159 6599	3,105 8285	3,159 6599
48	3,139 3502	3,146 0862	2c.	2c.
96	3,141 0319	3,142 7146		
192	3,141 4524	3,141 8730		
384	3,141 5576	3,141 6627		
768	3,141 5838	3,141 6101		
1536	3,141 5904	3,141 5970		

V. Nach Fr. 163 XII. ist die in III. erwähnte Grenze die Zahl $\pi = 3,141 592 65 \dots$; angenähert darf für π die Zahl

$$\frac{22}{7}, \quad \text{oder} \quad \frac{311}{99}, \quad \text{oder} \quad \frac{333}{106}, \quad \text{oder} \quad \frac{355}{113}$$

gesetzt werden. Aus dem genauen Werte von π ergibt sich weiter:

$$1 : \pi = 0,318 31 \dots \\ \sqrt{\pi} = 1,772 45 \dots \quad \text{und} \quad 1 : \sqrt{\pi} = 0,564 19 \dots$$

179. Welche Formeln findet man für den Umfang und Inhalt des Kreises*) und seiner Teile?

I. Die Kreisfläche K liegt stets zwischen f_n und F_n (Zr. 113 VIII.), oder es ist

$$f_n < K < F_n.$$

II. Je mehr mit wachsendem n sich f_n und F_n einander nähern (Zr. 178 III.), desto mehr nähern sie sich auch dem stets zwischen ihnen liegenden K ; daher ist nach Zr. 178 V. auch $K : r^2 = \pi$, oder:

$$K = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2.$$

III. Rückwärts wäre

$$r = \frac{1}{2} d = \sqrt{K : \pi},$$

also: $r = \frac{1}{2} d = 0,564\,19 \sqrt{K}.$

IV. Betrachtet man den Kreis K als ein regelmäßiges Vieleck von unzähligen Seiten (Zr. 113 VIII.), so muß sich aus Zr. 163 XII. auch für den Kreisumfang u ergeben

$$u : 2r = \pi = K : r^2;$$

daher ist nicht nur $K = \frac{1}{2} ur$, sondern auch:

$$u = 2\pi r = \pi d \quad \text{und} \quad d = 2r = u : \pi = 0,318\,31 u.$$

V. Gehört in einem Kreise vom Halbmesser r zu einem Centriwinkel von w Graden der Bogen b , so hat man (Zr. 54 V.):

$$b : 2r\pi = w^\circ : 360^\circ; \quad b = \pi r w^\circ : 180^\circ.$$

VI. Beim Kreise vom Halbmesser $r = 1$ läßt sich der zu einem Centriwinkel w gehörige Bogen $\widehat{w}$ leicht finden; nach V. ist bei

$$w = 1^\circ \text{ der Bogen } \widehat{1^\circ} = \pi : 180^\circ = 0,017\,453\,2925;$$

$$w = 1' = \widehat{1'} = \widehat{1^\circ} : 60 = 0,000\,290\,8882;$$

$$w = 1'' = \widehat{1''} = \widehat{1'} : 60 = 0,000\,004\,8481.$$

*) Vergl. Anm. zu Zr. 178. — Beispiele hierzu enthält der Katech. der Raumberechnung Zr. 82 bis 119.

VII. Der dem Halbmesser r gleiche Bogen gehört zu einem Centriwinkel $w^\circ = 57^\circ 17' 44,806'' = 206264,806''$.

VIII. Der Kreisabschnitt $S = CMDEC$, Fig. 163 (vergl. Fr. 87 I.), wächst ebenfalls proportional dem Bogen $CED = b$ und dem Centriwinkel $CMD = w^\circ$. Daher verhält sich $S : K = w^\circ : 360^\circ = b : u$, und es ist:

$$S = \pi r^2 w^\circ : 360^\circ = \frac{1}{2} rb.$$

Der Abschnitt S läßt sich wie ein Dreieck (Fr. 177 VII.) berechnen; ebenso wegen IV. der Kreis. Die Höhe ist in beiden Fällen $= r$, die Grundseite gleicht im erstern Falle

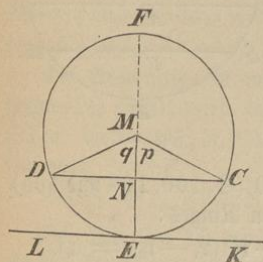


Fig. 163.

dem Bogen b , im andern dem Umfange u .

IX. Die Kreisabschnitte $A = CDEC$ und $A_1 = CDFC$ (Fig. 163) werden erhalten, wenn man das $\triangle CDM$ vom Abschnitt $S = CMDEC$ subtrahiert, bezieh. zum Abschnitt $S_1 = CMDFC$ addiert. Ihre Inhalte sind demnach:

$$A = \frac{1}{2} (br - se) \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{1}{2} (b_1 r + se),$$

wobei $b = \overline{CED}$, $b_1 = \overline{CFD}$, $e = \overline{MN}$, $s = \overline{CD}$.

Eine Tabelle zur Berechnung der Abschnitte enthält der Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. S. 52.

Wäre bloß die Sehne $CD = s$ und die Pfeilhöhe $NE = k = r - e$ des Abschnittes A gegeben, so hätte man (Fr. 163 I.):

$$s^2 = 4(r - e)(r + e) = 4k(2r - k) = 8kr - 4k^2,$$

also $8kr = s^2 + 4k^2$, woraus sich $r = (s^2 + 4k^2) : 8k$ berechnen läßt. — Ähnlich ist es beim größeren Abschnitt A_1 .

X. Ein zwischen zwei parallelen Sehnen AB und KS (Fig. 164) gelegenes Stück ABSKA der Kreisfläche heißt eine Kreiszone und läßt sich als Differenz der beiden Abschnitte AEBA und KESK berechnen.

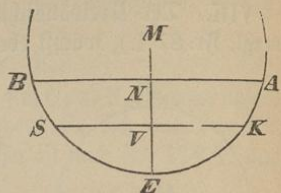


Fig. 164.

XI. Die Fläche eines Kreisringes bleibt übrig, wenn aus einem Kreise K_1 vom Halbmesser r_1 ein anderer K_2 vom Halbmesser r_2 herausgeschnitten wird, wie in Fig. 92, 98 und 100 (S. 100, 104 und 105). Daher ist die Fläche B eines solchen Ringes:

$$B = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = u_0 i,$$

wenn $i = r_1 - r_2$ die Breite eines gleichgroßen concentrischen Kreisringes und $u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = 2\pi r_0$ den mittleren Umfang bedeutet, d. h. den durch die Mitte von i gehenden Kreis K_0 vom Halbmesser $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = r_2 + \frac{1}{2}i$.

XII. Für einen concentrischen Ringausschnitt, dessen Centriwinkel w° , dessen Halbmesser r_1 und r_2 und dessen Bögen b_1 und b_2 sind, hätte man nach VIII. und V.:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2}(b_1 r_1 - b_2 r_2) = (r_1^2 - r_2^2) \pi w^\circ : 360^\circ \\ &= \frac{1}{2}(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \pi w^\circ : 180^\circ \\ &= \frac{1}{2} i (b_1 + b_2) = i b_0, \end{aligned}$$

wenn wieder $i = (r_1 - r_2)$ die Breite und $b_0 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = r_0 \pi w^\circ : 180^\circ$ den mittleren Bogen bedeutet.

XIII. Wenn zwei Kreise vom Halbmesser r_1 und r_2 und der Centralen $M_1 M_2 = e$ sich schneiden, wie in Fig. 93 bis 95, so teilen sie sich in drei Teile: eine (konvex-konvexe) Linse $L = QAPBQ$ und zwei Monde $N_1 = DPAQD$ und $N_2 = CPBQC$ (konvex-konkave Linsen). Die Linse läßt sich als Summe, jeder Mond als Differenz zweier Kreisabschnitte ansehen.

Setzt man nun die Bögen $PBQ = b_1$ und $PDQ = b_2$, $PAQ = b_2$ und $PCQ = b_1$, ferner $M_1 P M_2 Q M_1 = \triangle M_1 P Q$

$\mp \triangle M_2PQ = 2 \triangle M_1PM_2 = v$, im $\triangle M_1PM_2$ aber $s = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + e)$, so ist nach Fr. 177 VIII.

$$v = 2 \sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-e)}$$

$$b_1 + b_3 = 2\pi r_1, \quad \text{und} \quad b_2 + b_4 = 2\pi r_2;$$

deshalb nach IX. weiter:

$$N_1 = \frac{1}{2}(b_3r_1 - b_2r_2) + v \quad L = \frac{1}{2}(b_1r_1 + b_2r_2) - v$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(b_1r_2 - b_1r_1) + v \quad 2L + N_1 + N_2 = K_1 + K_2.$$

Die Abschnitte, in welche e durch die gemeinschaftliche Sehne PQ geteilt wird, lassen sich nach Fr. 170 IV. bequem finden, weil im $\triangle M_1PM_2$ einer der Winkel M_1 und M_2 spitz sein muß.

Bei $r_1 = r_2$ wird $N_1 = N_2$.

180. Wie läßt sich der Flächeninhalt bei Aufstellung der Data für das Dreieck und die Vierecke verwerten?

I. Da nach Fr. 177 VIII. für den Inhalt des Dreiecks D die Gleichungen

$$D = r_0 s \quad \text{und}$$

$$D = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

gelten, so lassen sich auch noch

$$D, r_0, s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad \text{und} \quad D, a, b, c$$

als Data für das Dreieck den in Fr. 137 aufgeführten anreihen.

II. Ebenso bilden wegen Fr. 177 VII. die drei Größen D , g und h ein Datum für das Dreieck.

III. Nach 174 IV. verhalten sich die Inhalte zweier Dreiecke, welche einen Winkel A gemein haben, wie die Produkte aus ihren diesen Winkel einschließenden Seiten b und c . Deshalb müssen für zwei in einem Winkel A übereinstimmende flächengleiche Dreiecke die Produkte b_1c_1 und b_2c_2 gleich groß sein. Man kann daher, wenn von den drei Stücken D , A und bc zwei gegeben sind, durch Verwandlung des Dreiecks das dritte finden.

IV. Für das Parallelogramm (vergl. Fr. 138 II. und III.) bilden wegen Fr. 177 VI. auch noch der Inhalt P , die Grundseite g und die Höhe h ein Datum.

V. Für das Trapez (vergl. Fr. 138 IV. bis VII.) markiert die in Fr. 177 IX. gegebene Gleichung noch den Inhalt T , die Höhe h und die mittlere Parallele $p = \frac{a+b}{2}$ als drei zu einem Datum zusammengehörige Größen.

VI. Für das Trapezoid würde Fr. 177 X. als ein Datum Z , d und die Summe $(h_1 + h_2)$ der Höhen liefern. Außerdem besitzt man in den beiden Diagonalen d_1 und d_2 , dem von diesen eingeschlossenen Winkel w und dem Flächeninhalte Z ein Datum.

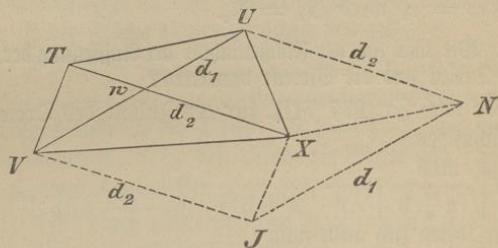


Fig. 165.

Zeichnet man nämlich in Fig. 165 über $UV = d_1$ mit dem Winkel w und der zweiten Seite $UN = TX = d_2$ das Parallelogramm $P = JNUV$ (Fr. 109 I.) und zieht NX , sowie JX , so ist

$$UN \parallel TX \parallel VJ \text{ (n. d. Konstr.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} TU = XN \\ TV = XJ \\ UV = NJ \end{array} \right\} \text{ (Fr. 108 V. und III.)}$$

$$\triangle VTU \cong \triangle JXN \text{ (Fr. 80 I.)}$$

$$JNUV = JXNUTV \text{ (Fr. 20 VIII.)}$$

$$\begin{aligned} P &= JXTV + XTUV \text{ (Fr. 20 II.)} \\ &= 2(\triangle VXT + \triangle TXU) \text{ (Fr. 108 II.)} \\ &= 2(VXUT) = 2Z. \end{aligned}$$

Aus dreien der oben genannten Stücke kann man daher das vierte finden. Indessen ist natürlich (vergl. Fr. 136 II. und III.) durch drei dieser Stücke das Trapezoid VXUT nicht bestimmt, da ja z. B. nur die Neigung der beiden Diagonalen gegen einander durch w gegeben ist, nicht aber ihr Schnittpunkt; es läßt sich somit nicht nur der Anfangspunkt T mit TX selber auf TX verschieben, wobei T auch (wie in Fig. 113 S. 117) über d_1 hinüber auf die Seite von X rücken kann, sondern es läßt sich auch d_2 parallel zu TX auf d_1 verschieben.

Z und P sind übrigens — ähnlich wie in Fr. 177 X. — proportional dem Produkte $d_1 d_2$ aus den beiden Diagonalen; denn entspricht im rechtwinkligen Dreieck mit dem $\angle w$ der Hypotenuse 1 die w gegenüberliegende Kathete k , so gehört zu der Hypotenuse d_2 die Kathete $h_1 + h_2 = 2h_0$, und es ist $1 : k = d_2 : 2h_0$ und $Z = h_0 d_1 = \frac{1}{2} k d_1 d_2$. Man könnte also mit Z und w auch $(d_1 d_2)$, oder $(h_0 d_1)$ mit w , d_1 und d_2 zu einem Datum vereinen.

VII. Im Tangentenviereck ABCD, Fig. 103 (S. 109), gehören als Datum zusammen: der Flächeninhalt F, der Umfang U (oder wegen Fr. 133 V. die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten) und der Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises.

Da man sich das Viereck in die vier Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM von der Höhe r (Fr. 83 X.) zerlegen kann, von denen jedes eine Seite des Viereckes als Grundseite hat, so ist nach Fr. 177 VII. auch $F = \frac{1}{2} Ur = (AB + CD) r$.

VIII. Es mag hier noch hervorgehoben werden, daß in Fr. 141 und 142, bezw. Fr. 161 IX. und X. nebenbei die Aufgabe: „ein Quadrat (oder auch ein Rechteck) in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Seiten einen gegebenen Längensunterschied besitzen“ auf Grund von Fr. 161 II., IV., V., Fr. 160 IV. und Fr. 170 IX. mit gelöst worden ist.