

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

6. Die Ähnlichkeit ebener Figuren

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

schneiden sich K_3 und K_1 in B und B_1 (Fr. 102 III.), K_3 und K_2 in Y und X (Fr. 102 VII. und Fr. 76), weil $AN > AU - NU > AU - NB_1$ und $AN < AU + NU < AU + NB_1$, (Fr. 91 XIII.). BB_1 und XY schneiden sich in einem Punkte Q, und es muß die nach dem Berührungspunkte U zwischen K_1 und K_2 gezogene Strecke QU die beiden Kreise K_1 und K_2 zugleich berühren.

Lösung. Man mache $BZ \perp G$ und $B_1Z = BZ$, schlage aus A den Kreis K_2 mit dem Halbmesser $AU = s$ (oder d), aus einem Punkte N in G den Kreis K_3 durch B und B_1 , welcher K_2 in Y und X schneidet, und ziehe vom Schnittpunkte Q zwischen BB_1 und YX die Tangente QU an K_2 (Fr. 103 I.); dann schneidet UA die Gerade G in M. — Nach Fr. 103 II. giebt es zwei Tangenten QU an K_2 , zwei Berührungspunkte U und zwei Punkte M in G.

Der Beweis folgt in Fr. 161 XI.

Dürfen A und B auf verschiedenen Seiten von G liegen? Darf G durch A, durch B, oder durch beide gehen? Wie gestaltet sich dann die Lösung?

II. Wie ließe sich die Aufgabe mittels eines biegsamen Fadens von der Länge s (oder d) lösen, dessen Enden in A und B festzumachen wären?

III. Über eine dritte Lösung vergl. 170 VIII.

Sechstes Kapitel.

Die Ähnlichkeit ebener Figuren.

144. Wenn sind zwei Strecken kommensurabel? wenn inkommensurabel?

I. Ist eine Strecke $CD = a$ (Fig. 129) genau 2, 3, 4... x mal so groß als eine andere Strecke $AB = m$, so heißt a ein ganzes

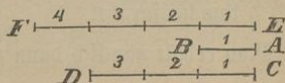


Fig. 129.

Vielfaches von m , während m ein Maß von a genannt wird. Vergl. Fr. 23 III.

Dabei ist $a = xm$, oder $a : m = x$, und m geht also in a auf. Die ganze Zahl x , welche angiebt, wieviel mal m in a enthalten ist, heißt die Maßzahl von a .

II. Geht dieselbe Strecke $AB = m$ sowohl in der Strecke $CD = a$, als in der Strecke $EF = b$ auf, so ist m ein gemeinschaftliches Maß von a und b , und die beiden Strecken a und b heißen dann *kommenfurabel*.

Zwei Strecken, welche kein gemeinschaftliches Maß haben, werden *inkommenfurabel* genannt.

III. Sind u und v ganze Zahlen, also ua und vb ganze Vielfache von a und b , dann geht das gemeinschaftliche Maß m von a und b auch in der Summe und dem Unterschiede von ua und vb auf. Ist nämlich $a = xm$ und $b = ym$, wobei x und y ganze Zahlen sind, so ist (Fr. 20 XIII.):

$$ua \pm vb = uxm \pm vym = (ux \pm vy)m,$$

und hier ist $(ux \pm vy)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

IV. Nimmt man die kleinere a von zwei Strecken a und b so oft als möglich (z_0 mal) von der größeren b hinweg, so bleibt, wenn a nicht in b aufgeht, ein Rest r_0 , welcher kleiner als a ist; es ist dann $b = z_0 a + r_0$.

Nimmt man nun r_0 so oft als möglich (z_1 mal) von a weg und bleibt dabei ein weiterer Rest r_1 , so ist dieser kleiner als r_0 , und es ist $a = z_1 r_0 + r_1$. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens erhalte man der Reihe nach die ferneren Reste $r_2, r_3, \dots$

Wird dabei endlich einmal ein Rest $= 0$, dann sind a und b *kommenfurabel*.

Man erhält nämlich dann zu :

$$b = z_0 a + r_0$$

$$a = z_1 r_0 + r_1$$

weiter :

$$r_0 = z_2 r_1 + r_2$$

$$r_1 = z_3 r_2 + r_3$$

$$r_2 = z_4 r_3 + r_4$$

.....

$$r_{n-2} = z_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = z_{n+1} r_n$$

Demnach ist also zunächst r_{n-1} ein Vielfaches von r_n ; Gleiches gilt wegen III. auch von r_{n-2} und allen vorhergehenden Resten, und endlich ebenso von a und b .

V. Sind die Strecken a und b kommensurabel, ist z. B. $a = xm$ und $b = ym$, so geht m nach III. auch in $r_0 = b - z_0 a$ auf, daher ferner noch in $r_1 = a - z_1 r_0$, dann in $r_2 = r_0 - z_2 r_1$ und in allen folgenden Resten r_3, r_4 2c.

Da ferner nach IV. jeder folgende Rest kleiner ist als der vorhergehende, so werden auch die Maßzahlen der späteren Reste immer kleiner und kleiner; zudem sind alle Maßzahlen $x, y, \dots$ ganze Zahlen (I.), daher muß, wenn man das in IV. beschriebene Verfahren lange genug fortsetzt, endlich eine Maßzahl $= 0$, also der zugehörige Rest ebenfalls $= 0$ werden.

VI. Aus IV. und V. folgt sofort, daß kein Rest $= 0$ werden kann, falls die Strecken a und b inkommensurabel sind, und daß letztere

VII. inkommensurabel sind, sobald kein Rest verschwindet.

VIII. Etwas umständlicher läßt sich nachweisen, daß in IV. der letzte nicht verschwindende Rest r_n das größte gemeinschaftliche Maß*) für a und b ist.

145. Wie verhalten sich zwei Strecken?

I. Das (geometrische) Verhältniß zweier Strecken findet man nach Fr. 23 IV. durch Division der einen durch die andere. (Vergl. Katech. d. prakt. Arithmetik, S. 135 bis 157; desgl. ebenda Fr. 45.)

*) Vergl. Katechismus der praktischen Arithmetik. 3. Aufl. Leipzig 1889. S. 64.

Der hierbei auftretende Quotient ist eine unbenannte Zahl, und jenachdem diese Zahl rational, oder irrational ist (d. h. jenachdem diese Zahl zur Zahl 1 kommensurabel, oder inkommensurabel ist), heißt das Verhältniß selbst ein rationales, oder ein irrationales Verhältniß.

Auf einfache rationale Verhältnisse in Dreiecken sind wir bereits in Fr. 111 VI. bis VIII. gestoßen.

II. Zwei kommensurable Strecken a und b verhalten sich wie ihre Maßzahlen und stehen in einem rationalen Verhältniß zu einander; denn ihre Maßzahlen sind ganze Zahlen, weshalb ihr Quotient rational sein muß. Ist nämlich $a = xm$ und $b = ym$, so ist (nach Fr. 20 IV.):

$$\frac{a}{b} = \frac{xm}{ym} = \frac{x}{y}.$$

III. Sind die Strecken a und b inkommensurabel, so geht ein Maß m von $b = ym$ nicht in a auf, vielmehr ist jedes Vielfache von m entweder größer, oder kleiner als a .

Ist nun xm das größte unter den Vielfachen von m , welche kleiner als a sind, so wird das nächste Vielfache, nämlich $(x+1)m$, schon größer sein als a ; a liegt also zwischen diesen beiden Vielfachen, oder es ist (nach Fr. 20 VIII. und IV.):

$$xm < a < (x+1)m$$

$$\frac{xm}{b} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)m}{b}$$

$$\frac{xm}{ym} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)m}{ym}$$

$$\frac{x}{y} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{y}.$$

Also läßt sich das Verhältniß der inkommensurablen Strecken a und b zwischen zwei rationale Verhältnisse $\frac{x}{y}$ und $\frac{x+1}{y}$ einschließen. Der Unterschied dieser beiden

Verhältnisse ist $\frac{x+1}{y} - \frac{x}{y} = \frac{1}{y}$ und wird um so kleiner, je größer der Nenner y wird; $y = b : m$ aber kann man beliebig groß machen, wenn man nur das Maß m immer kleiner und kleiner wählt. Wenn nun y wächst, so wächst zugleich auch x , sowohl xm , als $(x+1)m$ nähert sich a , und es rücken sich die beiden Grenzverhältnisse einander immer näher und näher, denn der Unterschied zwischen beiden vermindert sich dadurch, daß $\frac{xm}{b} = \frac{x}{y}$ bei wachsendem y nach und nach größer, $\frac{(x+1)m}{b} = \frac{x+1}{y}$ nach und nach kleiner wird. Je näher aber diese beiden Grenzverhältnisse an einander gerückt sind, desto geringer ist der Fehler, welchen man begeht, wenn man das zwischen ihnen liegende Verhältnis $\frac{a}{b}$ der einen, oder anderen Grenze, z. B. $\frac{x}{y}$, gleichsetzt.

Genau jedoch läßt sich das Verhältnis der beiden inkommensurablen Strecken a und b nie durch das Verhältnis zweier ganzen Zahlen ausdrücken, wie groß man auch y wählen mag; das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist vielmehr irrational, und als genaues Verhältnis hätte die Zahl zu gelten, welcher sich die beiden Grenzenverhältnisse $\frac{x}{y}$ und $\frac{x+1}{y}$ immer mehr und mehr nähern, je mehr sie sich bei Vergrößerung von y einander selbst nähern, indem das eine immer größer, das andere immer kleiner wird.

146. Was versteht man unter Längeneinheit und Längenzahl?

I. Da man nach Fr. 145 III. das Verhältnis zweier inkommensurablen Strecken mit beliebig großer Genauigkeit durch ein rationales Verhältnis ersetzen kann, so darf man eine Strecke m als Maß für alle anderen Strecken wählen und nennt dieses Maß dann die Längeneinheit (Maßstab).

II. Die Maßzahl x einer anderen Strecke $a = xm$ heiße die Längenzahl dieser Strecke.

Zwei Strecken verhalten sich dann wie ihre Längenzahlen. Geht zwar nicht die Längeneinheit, wohl aber ein Teil derselben in einer Strecke auf, so ist die Längenzahl der letzteren ein Bruch.

III. Wegen seiner großen Verbreitung benutzen wir als Längeneinheit das Meter oder den Stab (1^m).

Tabellen über die Unterabteilungen und Vielfachen des Meters und sein Verhältnis zu anderen Längeneinheiten, namentlich den verschiedenen Fußmaßen und deren Unterabteilungen, folgen am Schluß dieses Katechismus.

147. Wenn bilden vier Strecken eine Proportion?

I. Vier Strecken a, b, c und d sind einander proportional oder bilden eine (geometrische) Proportion

$$a:b = c:d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

wenn a und b dasselbe Zahlenverhältnis haben, wie c und d ; sind dagegen a und b inkommesurabel, so stehen a, b, c und d in Proportion, wenn a und b bei jeder beliebigen Annäherung immer dieselben Grenzverhältnisse haben, wie c und d .

II. In jeder richtigen Proportion $a:b = c:d$ gleicht wegen Fr. 20 VIII. das Produkt ad der äußern Glieder dem Produkte bc der innern Glieder.

III. In der stetigen Proportion $a:b = b:d$ heißt $b = \sqrt{ad}$ das geometrische Mittel oder die mittlere Proportionale zu a und d . Vergl. Fr. 19 V. und VI.

IV. Ist eine Strecke a in stetiger Proportion (III.), d. h. so geteilt, daß ihr größerer Abschnitt x das geometrische Mittel zwischen a und ihrem kleinern Abschnitte ($a-x$) ist, so heißt der x liefernde Schnitt der Strecke der goldene Schnitt. Vergl. Fr. 164 V.

$$\text{Aus } a:x = x:(a-x) \text{ findet sich: } x = \frac{a}{2} (\sqrt{5}-1).$$

V. In jeder richtigen Proportion darf man wegen II. die innern Glieder mit einander vertauschen und ebenso die äußern; denn dadurch ändern sich die Produkte nicht.

VI. Über die Prüfung der Richtigkeit einer Proportion und über das Rechnen mit Proportionen vergl. Kateschismus der prakt. Arithm. Fr. 129 bis 131 und Fr. 132 ff.

Die geometrische Lösung der Proportionsaufgaben wird in Fr. 164 gezeigt werden.

148. Wie erhält man an einem Dreieck, oder allgemeiner zwischen zwei Geraden proportionale Strecken?

I. Zieht man in einem Dreieck ABC (Fig. 130) eine Parallele A_1C_1 zu einer Seite AC, so werden die Seiten AB und BC durch die Parallele in je zwei Abschnitte geteilt; dabei sind die oberen Abschnitte BA_1 und BC_1 den Seiten BA und BC, die Parallele A_1C_1 aber der dritten Seite AC proportional.

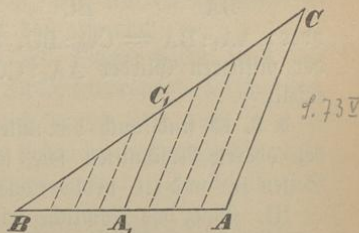


Fig. 130.

Vor. $A_1C_1 \parallel AC$.

Beh. $BA_1 : BA =$

$BC_1 : BC = A_1C_1 : AC$.

Bew. Sind BA_1 und BA kommensurabel, wäre also etwa $BA_1 = xm_3$ und $BA = ym_3$, so trage man das gemeinschaftliche Maß m_3 auf ihnen ab und ziehe durch die Teilpunkte (deren einer mit A_1 zusammenfällt) Parallelen zu AC; dann werden BC_1 und BC beziehungsweise auch in x und y gleiche Teile m_1 geteilt (Fr. 111 VI.); daher steht:

$$BA_1 : BA = xm_3 : ym_3 = x : y = xm_1 : ym_1 = BC_1 : BC.$$

Nach Fr. 111 VII. verhält sich ferner auch $A_1C_1 : AC = xm_2 : ym_2 = x : y = BA_1 : BA$. Verbindet man aber die gleichen Verhältnisse (nach Fr. 20 V.), so ergibt sich (wie auch schon in Fr. 111 VI. bis VII.):

$$A_1C_1 : AC = BA_1 : BA = BC_1 : BC.$$

Wären dagegen BA_1 und BA incommensurabel, so sind auch BC_1 und BC incommensurabel; sind m_3 und m_1 wieder Maße von BA_1 und BC_1 , so fällt zwar ein Teilpunkt auf A_1 und auf C_1 , nicht aber auf A und auf C , AC liegt vielmehr zwischen der y^{ten} und $(y+1)^{\text{ten}}$ Parallelen, und deshalb liegt das Verhältnis $BC_1 : BC$, ebenfalls nach Fr. 111 VI., zwischen denselben Grenzen (Fr. 145 III.), wie das Verhältnis $BA_1 : BA$. Daher gilt (nach Fr. 147 I.) der ausgesprochene Satz auch jetzt noch.

II. Subtrahiert man die gleichen Verhältnisse $BA_1 : BA$ und $BC_1 : BC$ von 1 (Fr. 20 VIII.) und macht die Reste gleichnamig, so wird:

$$1 - \frac{BA_1}{BA} = 1 - \frac{BC_1}{BC}; \quad \frac{BA - BA_1}{BA} = \frac{BC - BC_1}{BC},$$

oder: $AA_1 : BA = CC_1 : BC$, wofür man bei Vertauschung der mittleren Glieder $AA_1 : CC_1 = BA : BC = BA_1 : BC_1$ erhält,

d. h. es sind auch die unteren Abschnitte AA_1 und CC_1 den oberen Abschnitten BA_1 und BC_1 , sowie den ganzen Seiten BA und BC proportional.

III. Ganz das Nämliche tritt auf, wenn die Punkte A_1 und C_1 nicht in den Schenkeln AB und CB , sondern auf deren Verlängerungen jenseits B liegen.

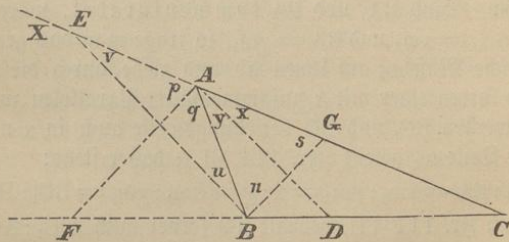


Fig. 131.

IV. Die Halbierungslinie AD (Fig. 131) eines Winkels A des Dreiecks ABC teilt die Gegenseite BC in zwei Abschnitte

BD und DC, welche den anliegenden Seiten AB und AC proportional sind. Vergl. Fr. 73 V.

Zieht man durch B eine Parallele BE zu DA, bis sie in E von der verlängerten CA getroffen wird, dann ist $\angle u = \angle y$ und $\angle v = \angle x$ (Fr. 62 I.); da nun AD den Winkel A halbiert, also $\angle x = \angle y = \frac{1}{2} \angle BAC$ ist, so muß nach Fr. 20 IV. auch $\angle u = \angle v$, und weiter nach Fr. 74 VI. noch $AE = AB$ sein. Aus $AD \parallel EB$ folgt nun nach II., daß $BD : DC = EA : AC$ und daher (wegen Fr. 20 IV.) auch $BD : DC = BA : AC$ ist.

V. Halbirt AF in Fig. 131 den Außenwinkel BAX des $\triangle ABC$ und ist $BG \parallel AF$, so läßt sich ganz so wie in IV. nachweisen, daß $\angle n = \angle q = \angle p = \angle s$, also $AG = AB$ ist, woraus dann nach II. folgt, daß $BF : CF = GA : CA$, oder $BF : CF = AB : AC$ ist, daß also auch

die Halbierungslinie AF des Außenwinkels BAX die Gegenseite BC den beiden anderen Seiten proportional schneidet.

VI. Weil in Fig. 131 nach Fr. 20 VIII. auch $\angle q + \angle y = \angle p + \angle x$ ist, so stehen die beiden Halbierungslinien AD und AF auf einander senkrecht (Fr. 34 III. und 39 II.).

Der Scheitel A liegt demnach im Halbkreise über FD.

VII. Also ist der geometrische Ort (Fr. 74 XVII.) eines Punktes A einer Ebene, dessen Entfernungen AB und AC von zwei gegebenen Punkten B und C dieser Ebene in einem gegebenen Verhältnisse stehen (vergl. Fr. 144), ein Kreis vom Halbmesser $r = \frac{1}{2} DF$. Dieser Kreis heißt der apollonische Kreis.

Für $AB : AC = 1$ fällt D in die Mitte der Seite BC (Fr. 80 II.), DA wird senkrecht BC und F rückt unendlich weit fort, indem $\angle p = \angle C$ und $\angle q + \angle y = \angle D = 90^\circ$ werden, und r wächst ins Unendliche: der Kreis wird zur Geraden. Vergl. Fr. 86 V.

VIII. Auch BG steht auf BE senkrecht (Fr. 71 III.), da:
 $\angle n + \angle u = \angle s + \angle v$.

IX. Eine Erweiterung von I. und von Fr. 111 VI. bis VIII. bezw. Fr. 108 III. bildet der Satz: Werden zwei Gerade G_1 und G_2 , Fig. 132, von drei Parallelen P_1 , P_2 und P_3 geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte H_1J_1 , J_1K_1 und H_1K_1 auf der einen zu einander, wie die entsprechenden Abschnitte H_2J_2 , J_2K_2 und H_2K_2 auf der andern.

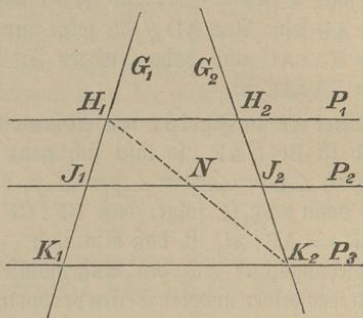


Fig. 132.

Beweis. Man ziehe H_1K_2 , so ist nach I. und Fr. 20 V. $H_1J_1 : J_1K_1 : H_1K_1 = H_1N : NK_2 : H_1K_2 = H_2J_2 : J_2K_2 : H_2K_2$.

X. Für die Abschnitte der Parallelen gilt in Fig. 132 die Gleichung*):

$$J_1J_2 \cdot H_1K_1 = H_1H_2 \cdot J_1K_1 + K_1K_2 \cdot H_1J_1.$$

Beweis. Nach I. und Fr. 147 II. ist:

$$J_1N = \frac{K_1K_2 \cdot H_1J_1}{H_1K_1} \text{ und}$$

$$J_2N = \frac{H_1H_2 \cdot K_2J_2}{K_2H_2} = \frac{H_1H_2 \cdot K_1J_1}{K_1H_1}, \text{ folglich}$$

$$\begin{aligned} J_1J_2 \cdot H_1K_1 &= (J_1N + J_2N) H_1K_1 \\ &= H_1J_1 \cdot K_1K_2 + K_1J_1 \cdot H_1H_2. \end{aligned}$$

Bei $H_1J_1 = K_1J_1 = \frac{1}{2} H_1K_1$ wird (wie in Fr. 111 III.):

$$J_1J_2 = \frac{1}{2} (K_1K_2 + H_1H_2).$$

*) Über die Bedeutung der Produkte in dieser Gleichung vergl. die Anmerkung zu Fr. 159 II.

XI. Aus IV. und V. fließt wegen Fr. 20 V. auch noch:

$$CD : BD = CF : BF,$$

die Gegenseite CB wird also von den beiden Winkelhalbierenden AD und AF innerlich und äußerlich in gleichem Verhältnisse (harmonisch) geschnitten.

149. Lassen sich die Sätze in Fr. 148 umkehren?

I. Schneidet die Strecke A_1C_1 (Fig. 133) die beiden Seiten BA und BC des Dreiecks ABC so, daß die oberen Abschnitte BA_1 und BC_1 den ganzen Seiten BA und BC, oder den unteren Abschnitten A_1A und C_1C proportional sind, so ist die Strecke A_1C_1 der dritten Seite AC parallel.

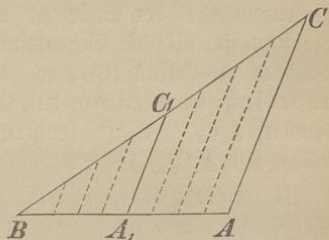


Fig. 133.

Sind BA_1 und BC_1 den ganzen Seiten BA und AC proportional, so sind sie auch den Abschnitten A_1A und C_1C proportional (vergl. Fr. 148 II.) und umgekehrt. Beide Voraussetzungen fallen also wesentlich zusammen und der Satz braucht bloß noch für die erstere Voraussetzung ($BA_1 : BC_1 = BA : BC$) bewiesen zu werden.

Zieht man nun durch A_1 eine Parallele zu AC, so muß dieselbe die Seite BC in einem zwischen B und C gelegenen Punkte C_2 schneiden, und es wäre dann:

$$\frac{BC_2}{BC} = \frac{BA_1}{BA} \quad (\text{Fr. 148 I.})$$

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} \quad (\text{Vor.})$$

$$\frac{BC_2}{BC} = \frac{BC_1}{BC} \quad (\text{Fr. 20 V.})$$

$$BC_2 = BC_1 \quad (\text{Fr. 20 VIII.}).$$

Es fällt also der Punkt C_2 auf C_1 , d. h. die Strecke A_1C_2 fällt mit A_1C_1 zusammen, und es ist demnach $A_1C_1 \parallel AC$.

II. Versucht man in gleicher Weise wie in I. den Parallelismus zwischen A_1C_1 und AC für den Fall nachzuweisen, wo $BA_1 : A_1C_1 = BA : AC$ ist, so findet man, daß dann $A_1C_2 = A_1C_1$ sein müsse. Da es nun aber in BC (und seiner Verlängerung) im allgemeinen zwei Punkte C_1 und C_3 giebt, welche von A_1 um die Strecke $A_1C_2 = A_1C_1$ entfernt sind (Fr. 74 XI. und XII.), und da diese zwei Punkte in BC von B aus nach C hin liegen (Fr. 69 VII.), sobald der Gegenwinkel B der Seite AC und der Schneidenden A_1C_1 kleiner ist, als die Gegenwinkel C und C_1 der Seite BA und des Abschnitts BA_1 , so ist es in diesem Falle nicht unbedingt notwendig, daß C_2 mit C_1 zusammenfällt und demnach $A_1C_1 \parallel AC$ ist, sondern es könnte C_2 auch auf C_3 fallen, also $A_1C_3 \parallel AC$ sein.

III. Sobald dagegen in II. $\angle C_1 < \angle B > \angle C$ oder $BA_1 < A_1C_1$ und $BA < AC$ ist, fällt B zwischen jene zwei Punkte C_1 und C_3 , und in der Seite BC selbst liegt deshalb nur der eine dieser Punkte, nämlich C_1 (während der andere C_3 in der Verlängerung von CB liegt).

Daher muß jetzt der ebenfalls zwischen B und C liegende Punkt C_2 mit C_1 zusammenfallen, oder es muß $A_1C_1 \parallel AC$ sein.

IV. Fallen die in II. und III. erwähnten beiden Punkte C_1 und C_3 , welche von A_1 um A_1C_1 entfernt sind, von B aus beide nach C hin, so ist von den beiden Winkeln A_1C_1B und A_1C_3B der eine spitz, der andere stumpf (Fr. 74 III.).

Verhält sich daher die schneidende Strecke A_1C_1 zur dritten Seite AC wie der obere Abschnitt BA_1 zu seiner Seite BA , so ist die Strecke A_1C_1 der Seite AC parallel, sobald die Gegenwinkel des Abschnitts BA_1 und seiner Seite BA entweder beide spitz oder beide stumpf sind.

V. Teilt man eine Dreiecksseite BC (Fig. 131) in D proportional den beiden anderen Seiten AB und AC , so halbiert AD den Gegenwinkel A der ersten Seite BC .

Verlängert man nämlich CA nach E, so daß $AE = AB$ wird, dann ist (nach der Vor.) $AB:BD = AC:DC$, also auch $EA:BD = AC:DC$ (Fr. 20 IV.), folglich $AD \parallel EB$ (nach I.), und deshalb $\angle x = \angle v$ und $\angle y = \angle u$ (Fr. 62 I.); da nun (nach Fr. 74 I.) $\angle v = \angle u$ ist, so muß (nach Fr. 20 IV.) auch $\angle x = \angle y$ sein.

150. Welche Grundsätze folgen aus dem Begriffe der Ähnlichkeit?

Da zwei ebene Figuren ähnlich genannt werden (Fr. 66 III.), sobald sie gleiche Gestalt haben, so muß man:

I. ähnliche Figuren $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ (Fig. 134) erhalten, wenn man ähnliche Figuren, z. B. Dreiecke, in gleicher Weise aneinandersetzt; und

II. ähnliche Figuren in gleicher Weise in ähnliche Teile, z. B. in ähnliche Dreiecke, zerlegen können.

151. Wenn heißen zwei Punkte oder Strecken ähnlichliegend?

I. Lassen sich zwei ähnliche Figuren, wie $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ in Fig. 134, von zwei Punkten P_1 und P_2 aus in ähnliche Figuren, z. B. in Dreiecke, zerlegen, so heißen jene zwei Punkte ähnlichliegende (homologe).

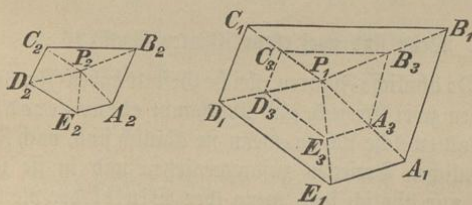


Fig. 134.

II. Haben zwei ähnliche Figuren, wie $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ in Fig. 134, einen gemeinschaftlichen ähnlichliegenden Punkt P_1 , so heißt dieser, wenn die entsprechenden Seiten paarweis parallel sind, Ähnlichkeitspunkt. (Vergl. Fr. 105 IV.)

III. Ähnlichliegende Strecken verbinden ähnlichliegende Punkte.

152. Wovon hängt die Gestalt eines Dreiecks ab?

I. Aus Fr. 78 II. und V. (vergl. Fig. 66) folgt: daß die Änderung eines Winkels A in einem Dreieck ABC auch die Änderung der Gegenseite CB nach sich zieht, also auch die der Gestalt.

II. Vergrößert man eine Seite BC (vergl. Fig. 66) eines Dreiecks ABC, ohne die beiden anderen Seiten zu ändern, so ändert sich nach Fr. 78 III. auch der Gegenwinkel A der ersteren Seite, mithin auch die Gestalt.

III. Vergrößert man (vergl. Fig. 69) eine Seite, ohne die anliegende Seite und den zwischen diesen beiden Seiten liegenden Winkel des Dreiecks zu ändern, so ändert sich ebenfalls die Gestalt.

IV. Soll sich also die Gestalt eines Dreiecks nicht ändern, so darf weder die Größe eines Winkels, noch das Verhältnis zweier Seiten geändert werden. Die Gestalt eines Dreiecks wird demnach durch die Größe seiner drei Winkel und durch das Verhältnis seiner drei Seiten bedingt.

153. Wenn sind zwei ebene Figuren ähnlich?

I. Da ähnliche Figuren gleiche Gestalt haben (Fr. 66 III.), so können zwei Dreiecke und überhaupt ebene geradlinige Figuren (welche sich ja, wenn sie ähnlich sind, nach Fr. 150 aus ähnlichen Dreiecken zusammensetzen und in sie zerlegen lassen), nur ähnlich sein, wenn ihre Winkel der Reihe nach einander gleich und ihre Seiten der Reihe nach einander proportional sind, also in demselben geometrischen Verhältnisse zu einander stehen.

II. Zwei krummlinige bzw. gemischtlinige ebene Figuren sind ähnlich, wenn sich in jeder von einem Punkte aus nach allen Punkten proportionale Strecken ziehen lassen.

154. Welche Sätze über die Ähnlichkeit folgen weiter hieraus?

I. Zwei ebene Figuren, welche einer dritten ähnlich sind, sind selbst ähnlich, weil ihre Winkel der Reihe nach den Winkeln der dritten Figur (Fr. 153 I.) und deshalb unter sich gleich sind (Fr. 20 V.), und weil die Seiten beider Figuren der Reihe nach in demselben Verhältniss zu einander stehen (Fr. 20 V.), nämlich in demselben Verhältnisse, in welchem die Seiten der dritten Figur zu einander stehen.

II. In ähnlichen ebenen Figuren verhalten sich ähnlichliegende Strecken (Fr. 151 III., I.) wie zwei ähnlichliegende Seiten.

III. In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge wie zwei ähnlichliegende Seiten oder Strecken.

Sind u_1 und u_2 die Umfänge der beiden Figuren, $a_1, b_1, c_1 \dots$ die Seiten der einen, $a_2, b_2, c_2 \dots$ die Seiten der anderen, so ist nach Fr. 153 I. und 20 VIII.)

$$\frac{a_1}{a_1} = \frac{a_2}{a_2}, \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} + \frac{c_1}{a_1} + \dots = \frac{a_2}{a_2} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{c_2}{a_2} + \dots$$

$$\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{a_1} = \frac{a_2 + b_2 + c_2 + \dots}{a_2}$$

$$\frac{u_1}{a_1} = \frac{u_2}{a_2}.$$

IV. Regelmäßige Figuren (Fr. 113 I.) von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, und ihre Umfänge verhalten sich wie die Halbmesser der eingeschriebenen und wie jene der umgeschriebenen Kreise.

V. Alle Kreisflächen, alle Ausschnitte und Abschnitte von gleichen Centriwinkeln sind unter sich ähnlich (Fr. 153 II.), und ihre Mittelpunkte sind ähnlichliegende Punkte.

155. Wie kann man von einem Dreieck ABC ein diesem ähnliches Dreieck abschneiden?

I. Da in Fr. 148 I., wo $A_1C_1 \parallel AC$ war, nicht bloß $\angle A_1 = \angle A$ und $\angle C_1 = \angle C$ (Fr. 62 I.), sondern auch $BA_1 : BA = BC_1 : BC = A_1C_1 : AC$ war, so ist dort $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ (Fr. 153 I.).

II. Jede Strecke A_1C_1 also, welche einer Seite AC des $\triangle ABC$ parallel ist, schneidet von diesem Dreiecke ein ihm ähnliches $\triangle A_1BC_1$ ab.

III. Verbindet man die Mitten der drei Seiten eines Dreiecks ABC geradlinig unter einander, so sind die drei Verbindungslinien den drei Seiten des Dreiecks ABC parallel (Fr. 149 I.) und zerlegen das Dreieck ABC in vier unter sich kongruente (Fr. 108 I.) und dem ganzen $\triangle ABC$ ähnliche Dreiecke (II.).

IV. Verbindet man die vier Seitenmitten eines Vierecks geradlinig, so begrenzen die vier Verbindungslinien ein Parallelogramm (Fr. 59 II.), weil je zwei derselben einer Diagonale parallel sind (Fr. 149 I.). Ist das Viereck ein Rechteck, oder ein Rhombus, so erhält man einen Rhombus (Fr. 81 I.), oder ein Rechteck (Fr. 110 VIII.).

156. Wenn sind zwei Dreiecke ähnlich?

Um nachzuweisen, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, braucht man nicht darzuthun, daß die drei Winkel der Reihe nach einander gleich und die drei Seiten einander proportional sind; vielmehr sind zwei Dreiecke*) $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ schon ähnlich:

I. wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen;

II. wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der diesen Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen;

) Auch bei zwei ähnlichen Dreiecken verfährt man, wie in Fr. 67 VII.) angegeben wurde; ist $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, so ist dann auch:

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2,$$

oder kürzer:

$$c_1 : a_1 : b_1 = c_2 : a_2 : b_2.$$

III. wenn sie im Verhältniß zweier Seiten und in dem Gegenwinkel der größeren dieser Seiten übereinstimmen;

IV. wenn sie im Verhältniß zweier Seiten übereinstimmen, und wenn außerdem das eine Paar der Gegenwinkel gleich ist und die beiden Winkel des anderen Paares zugleich spitz, oder zugleich stumpf sind;

V. wenn sie in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen, oder wenn die drei Seiten des einen der Reihe nach den drei Seiten des anderen proportional sind.

Beweis zu I. Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen Winkeln $B_1 = B_2$ auf einander (Fr. 31), so folgt aus der in I. vorausgesetzten Gleichheit der Winkel $A_1 = A_2$, daß $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ (Fr. 62 II.) ist; deshalb ist:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \text{ (Fr. 155 II.)}.$$

Beweis zu II. Legt man die beiden Dreiecke mit den beiden gleichen Winkeln $B_1 = B_2$ auf einander (Fr. 31), so daß die proportionalen Seiten $B_1A_1 = c_1$ und $B_2A_2 = c_2$, sowie $B_1C_1 = a_1$ und $B_2C_2 = a_2$ auf einander zu liegen kommen, dann ist $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ (Fr. 149 I.); deshalb ist

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \text{ (Fr. 155 II.)}.$$

Beweis zu III. und IV. Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen Winkeln B_1 und B_2 (vergl. Fig. 133) und den einander proportionalen anliegenden Seiten B_1A_1 und B_2A_2 auf einander (Fr. 31 und 22 V.), so werden die Gegenseiten A_1C_1 und A_2C_2 parallel (Fr. 149 III., oder IV.) und deshalb wiederum $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (Fr. 155 II.).

Beweis zu V. Dieser Fall, in welchem $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ ist, geht in II. über, sobald ein Winkelpaar gleich groß ist, z. B. $A_1 = A_2$.

Zeichnete man nun ein Dreieck $A_3B_3C_3$, in welchem $\angle A_3 = \angle A_2$, $b_3 = b_1$ und $c_3 = c_1$ wäre, also (wegen der Vor.) auch $b_3 : c_3 = b_1 : c_1 = b_2 : c_2$; dann wäre $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (II.) und $b_3 : a_3 = b_2 : a_2$ (Fr. 153 I.); da aber auch $b_1 : a_1 = b_2 : a_2$ vorausgesetzt wurde, so müßte auch

$b_3 : a_3 = b_1 : a_1$, und weil $b_3 = b_1$ gemacht wurde, so müßte weiter $b_1 : a_3 = b_1 : a_1$, d. h. $a_3 = a_1$ sein. Dann wären aber die in allen drei Seiten übereinstimmenden Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_1B_1C_1$ kongruent (Zr. 80 I.) und demgemäß $\angle A_3 = \angle A_1$ (Zr. 67 II.). Da nun $\angle A_3 = \angle A_2$ gemacht wurde, so ist auch $\angle A_1 = \angle A_2$ (Zr. 20 V.) und $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (II.).

VI. Zum Schluß möge auf die große Verwandtschaft zwischen den vorstehenden Ähnlichkeitsätzen und den Kongruenzätzen (Zr. 80) aufmerksam gemacht werden.

157. Wie findet man in ähnlichen Figuren ähnlichliegende Punkte?

Ist $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$ (Fig. 135) und will man in letzterer den Punkt P_2 suchen, welcher P_1 in ersterer ähnlich liegt, so ziehe man P_1A_1 und P_1E_1 und mache $\angle E_2A_2P_2 = \angle E_1A_1P_1$ und $\angle A_2E_2P_2 = \angle A_1E_1P_1$; dann ist der

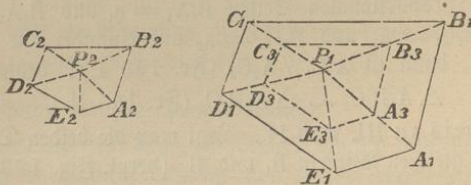


Fig. 135.

Schnittpunkt P_2 zwischen A_2P_2 und E_2P_2 der gesuchte Punkt, weil zunächst $\triangle A_2P_2E_2 \sim \triangle A_1P_1E_1$ (Zr. 156 I.), dann aber $\angle P_2A_2B_2 = \angle P_1A_1B_1$ und $P_2A_2 : P_1A_1 = A_2E_2 : A_1E_1 = A_2B_2 : A_1B_1$ (Zr. 153 I.), daher auch:

$$\triangle A_2P_2B_2 \sim \triangle A_1P_1B_1 \text{ (Zr. 156 II.) } \text{ u.}$$

158. Wie zeichnet man über einer gegebenen Strecke A_2B_2 eine Figur, welche einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich ist?

I. Man lege B_2A_2 (Fig. 135) parallel zu der ihr ähnlichliegenden Seite B_1A_1 der gegebenen Figur $A_1B_1C_1D_1E_1$, zerlege

letztere (durch Diagonalen, oder sonstwie) in Dreiecke $A_1B_1P_1$, $B_1C_1P_1$, zc. und ziehe $A_2P_2 \parallel A_1P_1$, $B_2P_2 \parallel B_1P_1$, $C_2P_2 \parallel C_1P_1$, $B_2C_2 \parallel B_1C_1$ zc.; dann ist (nach Fr. 156 I.) $\triangle A_2P_2B_2 \sim \triangle A_1P_1B_1$, $\triangle B_2P_2C_2 \sim \triangle B_1P_1C_1$ zc., also auch $A_2B_2C_2D_2E_2 \sim A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fr. 150 I.).

II. Noch einfacher wird die Lösung, wenn man P_1 zu einem Ähnlichkeitspunkte (Fr. 151 II.) der beiden Figuren macht; so wird $A_3B_3C_3D_3E_3 \sim A_1B_1C_1D_1E_1$, wenn man zwischen den Geraden P_1A_1 , P_1B_1 zc. die Strecken $A_3B_3 \parallel A_1B_1$, $B_3C_3 \parallel B_1C_1$ zc. zieht und dafür sorgt, daß $A_3B_3 = A_2B_2$ wird.

Ob dabei P_1 innerhalb $A_1B_1C_1D_1E_1$, oder in einer Seite, in einem Eckpunkte, oder außerhalb dieser Figur liegt, ist ganz gleichgültig. Man könnte daher auch $A_3B_3 = A_2B_2$ auf einer Parallelen zu B_1A_1 auftragen und P_1 als Schnittpunkt zwischen B_3B_2 und A_1A_3 bestimmen.

III. Soll von einem mit der Kette, oder dem Meßtische vermessenen Feldstück nach einem verjüngten (Transversal-) Maßstabe eine Karte angefertigt werden, so ist eine dem Feldstück ähnliche Figur zu zeichnen. Vergl. darüber Katch. d. Feldmeßkunst (fünfte Aufl. Leipzig 1891) Fr. 97 bis 107.

159. Welche proportionale Strecken in Dreiecken sind noch hervorzuheben?

I. Nach Fr. 108 XIII. und Fr. 64 III. heißt in einem Parallelogramm und Trapez die Entfernung der Paralleelseiten von einander, im Dreieck die Entfernung einer Spitze von deren Gegenseite die Höhe.

Die auf der Höhe senkrechte Seite des Dreiecks und des Parallelogramms heißt Grundseite.

II. Das Produkt*) zweier Seiten $AC = b$ und $BC = a$ (Fig. 136 S. 168) eines $\triangle ABC$ ist gleich dem Produkt

*) Da man zwei Strecken ebensowenig wie zwei benannte Zahlen mit einander multiplizieren kann, so denke man sich unter diesen Produkten die Produkte der (unbenannten) Längenzahlen (Fr. 146 II.). Eine andere Deutung dieser Produkte wird sich, im Anschluß an Fr. 169 und 170, später (Fr. 177 V.) finden.

aus der Höhe $CE = h_c$ für die dritte Seite $AB = c$ und dem Durchmesser $DA = 2r$ des umgeschriebenen Kreises.

Zieht man nämlich DC , so ist

$$\angle B = \angle D \quad (\text{Fr. 96 II.})$$

$$\angle E = R = \angle ACD \quad (\text{Fr. 96 III.})$$

$$\triangle BEC \sim \triangle DCA \quad (\text{Fr. 156 I.})$$

$$BC : CE = DA : AC \quad (\text{Fr. 153 I.})$$

$$BC \cdot AC = CE \cdot DA \quad (\text{Fr. 147 II.}).$$

III. Das Produkt der drei Seiten eines Dreiecks dividiert durch den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist gleich dem Produkt aus Grundseite und Höhe.

Da nämlich (nach II.) $ab = 2rh_c$ war, so wird nach Fr. 20 VIII. weiter $abc = 2rh_c c$, oder $abc : 2r = h_c c$.

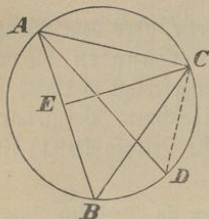


Fig. 136.

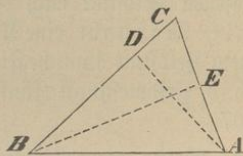


Fig. 137.

IV. Zwei Höhen AD und BE (Fig. 137) eines Dreiecks ABC verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Grundseiten BC und AC . Weil nämlich $\angle C = \angle C$ und $\angle E = R = \angle D$, so ist $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (Fr. 156 I.), also:

$$AD : AC = BE : BC \quad (\text{Fr. 153 I.})$$

$$AD : BE = AC : BC \quad (\text{Fr. 147 V.}).$$

V. Gleiches gilt von den zwei Höhen eines Parallelogramms.

VI. Zieht man durch die drei Spitzen eines Dreiecks ABC (Fig. 138) drei Gerade parallel zu den drei Seiten, bis sie sich in A_1 , B_1 und C_1 schneiden, so erhält man drei Parallelo-

gramme $ABCB_1$, AC_1BC und ABA_1C ; daher ist $AB_1 = AC_1 = BC$, $BC_1 = BA_1 = AC$ und $CA_1 = CB_1 = AB$ (Fr. 108 III.).

Die auf den Seiten des $\triangle A_1B_1C_1$ in deren Mitten A , B und C errichteten Senkrechten AA_2 , BB_2 und CC_2 , welche sich nach Fr. 88 V. in einem Punkte H schneiden, sind zugleich (wegen Fr. 62 V.) die drei Höhen des $\triangle ABC$ und demnach schneiden sich die drei Höhen jedes Dreiecks in einem Punkte H . Dieser Punkt kann innerhalb, oder außerhalb des Dreiecks, oder in einer Spitze desselben liegen.

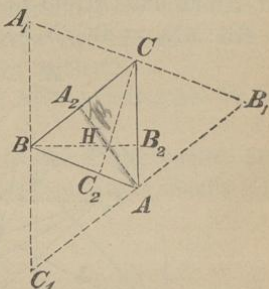


Fig. 138.

VII. Verbindet man die drei Höhen-Fußpunkte A_2 , B_2 und C_2 geradlinig, so halbieren die drei Höhen AA_2 , BB_2 und CC_2 die drei Winkel des Fußpunktendreiecks $A_2B_2C_2$.

Da nämlich $\angle HC_2B = \angle HA_2B = R$, so läßt sich durch die vier Punkte B , C_2 , H , A_2 und in gleicher Weise auch durch die vier Punkte C , B_2 , H , A_2 ein Kreis legen (Fr. 97 III.); daher ist $\angle HA_2C_2 = \angle HBC_2$ und $\angle HA_2B_2 = \angle HCB_2$ (Fr. 96 II.). Nun ist aber $\angle BHC_2 = \angle CHB_2$ (Fr. 42 II., oder 20 I.) und $\angle BC_2H = R = CB_2H$, daher weiter $\angle HBC_2 = \angle HCB_2$ (Fr. 69 I.). Deshalb ist endlich $\angle HA_2C_2 = \angle HA_2B_2$ (Fr. 20 IV.). Ebenso findet man, daß $\angle HB_2A_2 = \angle HB_2C_2$ und $\angle HC_2A_2 = \angle HC_2B_2$ ist.

VIII. Der Höhenschnittpunkt H ist daher, jenachdem er innerhalb, oder außerhalb des Dreiecks ABC liegt, der Mittelpunkt des eingeschriebenen, oder des einen der drei äußeren Berührungskreise des Fußpunktendreiecks $A_2B_2C_2$, und die drei Eckpunkte A , B , C sind die Mittelpunkte der drei anderen dieser Kreise. — Vergl. auch Fig. 102 auf S. 108.

IX. Verbindet man den Höhengschnittpunkt H (Fig. 139) mit den Endpunkten B und C der einen Seite BC, den Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises (Fr. 88 IV.) mit den Mitten N_2 und N_3 der beiden anderen Seiten AC und AB, so erhält man zwei Dreiecke BHC und N_2MN_3 , deren Seiten paarweise parallel sind (Fr. 57 II., 149 I.). Da diese Dreiecke ähnlich sind (Fr. 63 I., 156 I.), so verhält sich

$$HB : MN_2 = BC : N_2N_3 = 2 : 1 \text{ (Fr. 148 I.), d. h.}$$

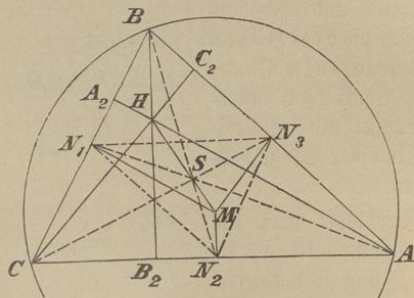


Fig. 139.

der Höhengschnittpunkt H ist von einem Eckpunkte B doppelt so weit entfernt, als jener Mittelpunkt M von der Gegenseite AC.

X. Zieht man in einem $\triangle ABC$ (Fig. 140) eine Schwerpunkts-Transversale, d. h. eine Strecke AN von einer Spitze A nach der Mitte N der Gegenseite BC (die Mittellinie m_a , Fr. 64 III.), so halbiert diese jede Parallele DE zur Gegenseite.

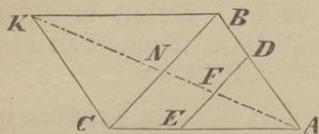


Fig. 140.

Nach Fr. 148 I. verhält sich nämlich:

$$\frac{DF}{BN} = \frac{AF}{AN} = \frac{FE}{NC},$$

und weil $BN = NC$ ist, so muß auch $DF = FE$ sein (Fr. 20 VIII.). Vergl. Fr. 111 IX.

XI. Jede Diagonale AK (Fig. 140) eines Parallelogramms $ABKC$ halbiert jede zur anderen Diagonale BC parallele Strecke DE (X.); denn im $\triangle ABC$ ist $BN = NC$ (Fr. 110 III.), und zugleich soll $DE \parallel BC$ sein.

XII. Aus X. ergibt sich leicht, daß die durch die Mitten F und N der Paralleelseiten DE und BC eines Trapezes $EDBC$ gelegte Gerade durch den Schnittpunkt A der nicht-parallelen Seiten BD und CE geht (vergl. Fr. 111 X.) und alle Parallelen zu den Paralleelseiten halbiert.

Denn verbindet man A mit N , so schneidet AN die Seite DE in ihrer Mitte F .

XIII. Die drei Mittellinien oder Schwerpunkts-Transversalen des $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkte S (dem Schwerpunkte des $\triangle ABC$).

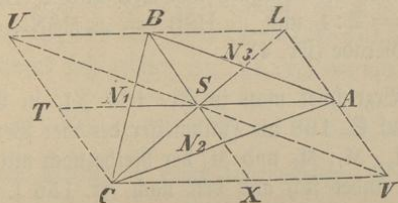


Fig. 141.

Zieht man durch die Spitzen des Dreiecks ABC je zwei Parallelen UL und CV , UC und LV (Fig. 141), zu den (bis T und X verlängerten) Transversalen AN_1 und BN_2 , so ist nach Fr. 148 II. $CT = TU$ und $CX = XV$, weil ja bez. $CN_1 = N_1B$ und $CN_2 = N_2A$ ist (X.). Daher ist der Schnittpunkt S zwischen AN_1 und BN_2 zugleich der Schnittpunkt der Diagonalen VU und CL (Fr. 110 IV.), und es ist $CS = SL$ (Fr. 110 III.). Da nun weiter $AS \parallel LB$ und $AL \parallel SB$ (nach der Konstruktion), so ist der Punkt N_3 , worin AB von der Diagonale CL geschnitten wird, die Mitte von AB (Fr. 110 III.), d. h. die dritte Transversale CN_3 geht ebenfalls durch S .

XIV. Da ferner in Fig. 141 im Parallelogramm ASBL wegen Fr. 110 III. noch $SN_3 = N_3L$ sein muß, so ist $N_3S = \frac{1}{2}LS = \frac{1}{2}SC$, also $SC = 2N_3S$ und $N_3C = 3N_3S$, d. h.

die drei Mittellinien oder Schwerpunkts-Transversalen schneiden sich gegenseitig im Verhältnis 1 : 2.

XV. Von den vier*) merkwürdigen Punkten des Dreiecks (XIII., VI., Fr. 88 V., Fr. 104 II.) liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises in einer Geraden HSM, und es verhält sich $MS : SH = 1 : 2$.

In den beiden $\triangle\triangle BHS$ und N_2MS (Fig. 139) ist nämlich $\angle HBS = \angle MN_2S$ (Fr. 62 I.) und $BH : N_2M = 2 : 1 = BS : N_2S$ (IX. und XIV.), also $\triangle BHS \sim \triangle N_2MS$ (Fr. 156 II.), und deshalb nach Fr. 153 I. $HS : MS = BH : N_2M = 2 : 1$ und $\angle HSB = \angle MSN_2$, also auch HSM eine Gerade (Fr. 43).

XVI. Bezeichnet man in Fr. 105 XI. in Bezug auf Fig. 102 auf S. 108 die Halbmesser der vier Berührungskreise um M_0, M_1, M_2 und M_3 der Reihe nach mit r_0, r_1, r_2 und r_3 , so findet sich aus den nach Fr. 156 I. ähnlichen $\triangle\triangle AM_1U_2$ und AM_0L_2 die Proportion $M_1U_2 : M_0L_2 = AU_2 : AL_2$; da aber $AU_2 = AN_2 + N_2C + CU_2 = a_2 + c_2 + c_1 = c_0 + a_0 + b_0 = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$ ist, so wird:

$$r_1 : r_0 = s : a_0, \quad r_2 : r_0 = s : b_0, \quad r_3 : r_0 = s : c_0.$$

Daher verhält sich

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{1}{a_0} : \frac{1}{b_0} : \frac{1}{c_0}.$$

*) Auch die drei von den Spitzen A, B und C nach den Berührungspunkten (N_1, N_2 und N_3 in Fig. 102 auf S. 108) der drei äußeren Berührungskreise gezogenen drei Transversalen schneiden sich in einem Punkte P. Dieser fünfte merkwürdige Punkt des Dreiecks liegt mit M_0 und dem Schwerpunkte S des Dreiecks in einer Geraden, wobei letzterer die Strecke PM_0 auch im Verhältnis 1 : 2 teilt.

Nach ist

$$\frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2} + \frac{r_0}{r_3} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{s} = 1,$$

oder

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_0}.$$

XVII. Weil aber in Fig. 102 $M_0C \perp CM_1$ und $M_0L_1 \perp CB \perp N_1M_1$, so sind die nach Fr. 71 VI. gleichwinkligen Dreiecke M_0L_1C und CN_1M_1 ähnlich (Fr. 156 I.), und es verhält sich $r_0 : c_0 = c_1 : r_1$. Da nun nach XVI. $r_0s = a_0r_1$ und nach Fr. 105 XI. $c_1 = b_0$ ist, so ergibt sich weiter:

$$r_0r_1 = c_0c_1 = c_0b_0 \quad \text{und} \quad r_0r_1 \cdot r_0s = c_0b_0 \cdot a_0r_1$$

oder $r_0^2s = a_0b_0c_0 = (s-a)(s-b)(s-c).$

$$\text{Ebenso ist } r_0r_2 = a_0c_0$$

$$r_0r_3 = b_0a_0,$$

$$\text{daher } r_0^3r_1r_2r_3 = a_0^2b_0^2c_0^2 = (r_0^2s)^2 = r_0^4s^2$$

$$r_0r_1r_2r_3 = r_0^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Endlich findet sich weiter $r_0r_1 \cdot (r_1 : r_0) = c_0b_0 \cdot (s : a)$ und hieraus $r_1^2 = sb_0c_0 : a_0.$

$$\text{Ebenso } r_2^2 = sc_0a_0 : b_0 \quad \text{und} \quad r_3^2 = sa_0b_0 : c_0.$$

160. Welche Strecken in einem rechtwinkligen Dreieck sind proportional?

I. Die von der Spitze C (Fig. 142) des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ABC auf die Hypotenuse AB = h gefällte Senkrechte CN = p werde entsprechend Fr. 112 als die Projektierende, die Hypotenusenabschnitte AN = x und BN = y als die Projektionen der Katheten AC = a und BC = b bezeichnet.

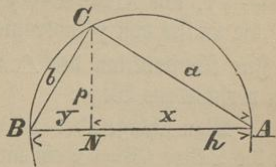


Fig. 142.

Nun stimmen die $\triangle\triangle$ ANC und CNB mit dem $\triangle ACB$ in je zwei Winkeln überein, sind also nach Fr. 156 I. unter sich und mit dem $\triangle ACB$ ähnlich.

Aus den Proportionen $x:p = p:y$, $x:a = a:h$ und $y:b = b:h$ (Fr. 153 I.) findet sich daher (unter Berücksichtigung der Anmerkung zu Fr. 159 II.) weiter:

$$p^2 = xy, \quad a^2 = xh, \quad b^2 = yh,$$

d. h. die Projizierende p ist die mittlere Proportionale zu den beiden Hypotenusenabschnitten x und y ,

jede Kathete aber ist die mittlere Proportionale zu ihrer Projektion und der Hypotenuse h . Vergl. Fr. 147.

II. Weiter folgt hieraus $ab = ph$ (Fr. 19 VI.). Nach Fr. 159 II. wäre $ab = 2rp$; also ist $h = 2r$. Vergl. Fr. 96 V.

III. Durch Addition ergibt sich weiter:

$$a^2 + b^2 = xh + yh = (x + y)h = h \cdot h = h^2,$$

d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. Vergl. Fr. 19 V.

IV. Da $h = x + y$, so kann man nach I. auch schreiben:

$$a^2 = x(y + x) \quad \text{und} \quad b^2 = y(y + x).$$

Trägt man nun auf CB von C aus das Stück $CU = \frac{1}{2}y$ auf, so ist nach III. und Fr. 20 V.

$$\begin{aligned} \overline{AU}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CU}^2 = a^2 + (\tfrac{1}{2}y)^2 = x(y+x) + (\tfrac{1}{2}y)^2 \\ &= x^2 + 2x(\tfrac{1}{2}y) + (\tfrac{1}{2}y)^2 = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 \end{aligned}$$

$$AU = x + \tfrac{1}{2}y.$$

Man kann demnach aus a und y sowohl $AN = x = AU - \frac{1}{2}y$, wie $AB = x + y = h$ finden, indem man von AU die Hälfte von y subtrahiert, bezw. sie zu ihm addiert.

Zur Konstruktion des $\triangle ABC$ aus a und y bieten sich nun verschiedene Wege:

1. Man schlage über $AC = a$ einen Halbkreis, trage in ihn die Sehne $AN = x$ ein und verlängere sie um $NB = y$;

2. man verlängere $BN = y$ um $AN = x$, schlage über AB einen Halbkreis und trage in ihn die Sehne AC ein;

3. man mache von A aus $AN = x$, $NC \perp AN$ und schneide NC mit einem Kreise aus A vom Halbmesser a .

V. In gleicher Weise hätte man nach I. auch

$$a^2 = h(h-y) \quad \text{und} \quad b^2 = h(h-x),$$

und könnte h (und x) aus a und y durch Vermittelung von $AU = h - \frac{1}{2}y$ ganz wie in IV. finden.

161. Welche Proportionen bestehen zwischen den Sehnen und den Tangenten eines Kreises?

Unter Bezugnahme auf die Anmerkung zu Fr. 159 II. lassen sich folgende Sätze aussprechen:

I. Die Produkte aus den Abschnitten zweier sich innerhalb des Kreises in E , oder außerhalb des Kreises in F (Fig. 143) schneidenden Sehnen desselben Kreises sind gleich.

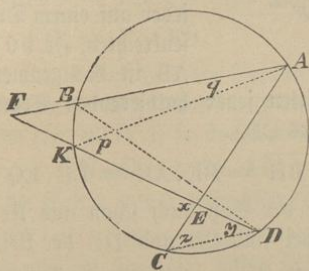


Fig. 143.

Bew. 1.

$$\begin{aligned} \angle E &= \angle E \quad (\text{Fr. 42 II.}) \\ \angle KAE &= \angle CDE \quad (\text{Fr. 96 II.}) \\ \triangle KAE &\sim \triangle CDE \quad (\text{Fr. 156 I.}) \\ KE:AE &= CE:DE \quad (\text{Fr. 153 I.}) \\ KE \cdot DE &= AE \cdot CE. \end{aligned}$$

Bew. 2.

$$\begin{aligned} \angle F &= \angle F \quad (\text{Fr. 20 I.}) \\ \angle FAK &= \angle FDB \quad (\text{Fr. 96 II.}) \\ \triangle FAK &\sim \triangle FDB \quad (\text{Fr. 156 I.}) \\ KF:AF &= BF:DF \quad (\text{Fr. 153 I.}) \\ KF \cdot DF &= AF \cdot BF. \end{aligned}$$

Das Produkt $FA \cdot FB$ (bez. $EA \cdot EC$) heißt die Potenz des Punktes F (bez. E) in Bezug auf den Kreis.

II. Da nach Fr. 94 III. in Fig. 144 die durch E gelegte, auf ME senkrechte Sehne BA die kleinste Sehne ist, welche sich durch E ziehen läßt, und da nach Fr. 81 I. zugleich $EB = EA$ ist, so

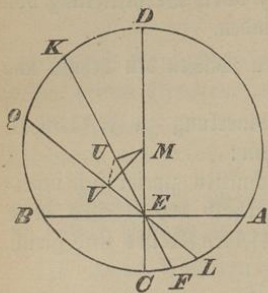


Fig. 144.

gleichet die Potenz des Punktes E in Bezug auf den Kreis dem Quadrate der Hälfte der kleinsten durch E gehenden Sehne. Oder:

Die Hälfte $BE = EA$ (Fig. 144) einer von einer zweiten Sehne LQ halbierten (also auch jeder auf einem Durchmesser CD senkrechten, Fr. 90 VIII.) Sehne AB ist das geometrische Mittel aus den Abschnitten jener halbierenden Sehne LQ (oder jenes Durchmessers CD).

Nach I. ist ja $\overline{BE^2} = BE \cdot AE = LE \cdot EQ = CE \cdot ED$.

Für CD folgt der Satz auch schon aus Fr. 160 I. und Fr. 96 III. Dabei sind CE und DE der kleinste und der größte der dem Satze $\overline{BE^2} = CE \cdot ED$ genügenden Abschnitte, welche der Kreis zu liefern vermag. Verlangt man den einen Faktor noch größer als ED, so muß man einen Kreis von größerem Halbmesser nehmen, oder sich auf IV. einlassen.

III. Schneiden sich in Fig. 144 die Strecken LQ und FK in E so, daß $FE \cdot EK = LE \cdot EQ$, dann liegen die vier Endpunkte L, F, Q und K auf demselben Kreise.

Bezeichnet man nämlich den Punkt, worin der durch L, F und Q gelegte Kreis FK zum zweiten Male schneidet (Fr. 83 VIII.) mit K_1 , so ist (nach I.) $FE \cdot EK_1 = LE \cdot EQ$, daher nach unserer Voraussetzung ($FE \cdot EK = LE \cdot EQ$) und Fr. 20 V. auch $FE \cdot EK_1 = FE \cdot EK$, oder $EK_1 = EK$, d. h. K_1 fällt mit K zusammen.

Ähnliches gilt für B, A, D, K (Fig. 143) in Bezug auf F.

IV. Schneiden sich eine Tangente FT (Fig. 145) und eine Sehne AB desselben Kreises, so ist die Strecke FN zwischen dem Schnittpunkte F und dem Berührungspunkte N die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Secante.

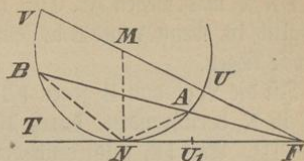


Fig. 145.

Bew.

$$\begin{aligned} \angle F &= \angle F \quad (\text{Fr. 20 I.}) \\ \angle FBN &= \angle FNA \quad (\text{Fr. 100 I.}) \\ \triangle FNB &\sim \triangle FAN \quad (\text{Fr. 156 I.}) \\ \hline FN : FB &= FA : FN \quad (\text{Fr. 153 I.}) \\ \hline FN^2 &= FA \cdot FB. \end{aligned}$$

Denkt man sich in Fig. 143 die Secante FD so weit verschoben, bis die beiden Schnittpunkte D und K in einen (N) zusammenfallen (Fr. 85 IV.), so findet man aus I. ebenfalls:

$$FN \cdot FN = FA \cdot FB.$$

V. Wird die Sehne zum Durchmesser $UV = 2r$, so wird $\overline{FN}^2 = FU \cdot FV = (FM - r)(FM + r) = FM^2 - r^2$, was man auch aus Fr. 160 III. hätte finden können, weil wegen Fr. 83 X. doch $r = MN \perp TF$ ist.

VI. Ist umgekehrt $\overline{FN}^2 = FA \cdot FB$, so berührt FN in N den Kreis durch A, B und N.

Trifft nämlich eine von F an diesen Kreis gelegte Tangente (Fr. 103 I.) den Kreis in N_1 , so ist $\overline{FN}_1^2 = FA \cdot FB$ (IV.), daher $\overline{FN}^2 = \overline{FN}_1^2$ (Vor. und Fr. 20 V.), oder $FN = FN_1$; deshalb muß nach Fr. 91 XVII. entweder N auf N_1 fallen, oder FN_1 ist die zweite Tangente, welche sich von F an den Kreis ziehen läßt (Fr. 103 II., V.).

VII. Ist ferner $\overline{FN}^2 = FA \cdot FB$ und FN Tangente des um M geschlagenen Kreises in N, so liegen B und A entweder auf dem Kreise um M, oder auf einem anderen Kreise, welcher FT in N berührt. Denn weil $FN : FB = FA : FN$,

und $\angle F = \angle F$, ist $\triangle FNB \sim \triangle FAN$ und $\angle FBN = \angle FNA$, was wegen Zr. 100 I. und Zr. 97 I. und II. nur möglich ist, wenn A und B auf einem von FT in N berührten Kreise liegen.

Ist die Lage von B gegen FT gegeben, so muß A auf dem FT in N berührenden, durch B geschlagenen Kreise liegen.

VIII. Aus IV. folgt auch der Beweis für die Richtigkeit der Lösung der in Zr. 141 gestellten Aufgabe. In Fig. 127 soll nach der dort angestellten Betrachtung

$$\triangle J_0JA \sim \triangle J_0AC \text{ (Zr. 156 I.)}$$

$$J_0J : J_0A = J_0A : J_0C \text{ (Zr. 153 I.)}$$

$J_0A^2 = J_0J \cdot J_0C = (J_0C - CJ) J_0C = (J_0C - w_c) J_0C$,
sein; nach der gegebenen Lösung und IV. ist aber:

$$J_0A^2 = J_0L_1 \cdot J_0L_2 = (J_0L_2 - w_c) J_0L_2 = (J_0C - w_c) J_0C.$$

IX. Die in VIII. gegebene Weiterbildung der in Zr. 141 angefangenen Betrachtung liefert noch eine andere Lösung für die in Zr. 142 gestellte Aufgabe.

Macht man in Fig. 127 $\angle BAJ_0 = \frac{1}{2}C$ und $J_0J_0 \perp BA$ in deren Mitte, so ist wieder (und zwar für jeden Punkt C des Kreises K): $\triangle J_0JA \sim \triangle J_0AC$ (Zr. 156 I.)

$$J_0A^2 = J_0J \cdot J_0C = J_0J (J_0J + JC).$$

Die Lösung der in Zr. 142 gestellten Aufgabe fordert aber, daß $J_0C = w_c$ sei, und dazu hätte man noch J_0J zu finden aus der Gleichung:

$$J_0A^2 = J_0J (J_0J + w_c).$$

Auch hier liefert der zweite Punkt in BA, welcher dieser Gleichung genügt (Zr. 74 XIII.), nichts Neues.

Man könnte nun die Aufgabe so lösen, daß man an $BA = c$ in A und in B den Winkel $BAJ_0 = ABJ_0 = \frac{1}{2}C$ anträgt und so zunächst mittels des gleichschenkeligen $\triangle ABJ_0$ den Punkt J_0 und die Strecke J_0A bestimmt, ohne den Kreis K zu schlagen, daß man dann $AN \perp J_0A$ und $AN = \frac{1}{2}w_c$ macht, von N aus auf J_0N die Strecken $NL_1 = NL_2 = \frac{1}{2}w_c$ abschneidet, BA in J mit einem Kreise um J_0 vom Halbmesser $J_0J = J_0L_1$ schneidet und J_0J um $J_0C = w_c$ verlängert. Nach Zr. 160 IV. (oder Zr. 161 IV.) ist dann $J_0A^2 = J_0L_1 (J_0L_1$

$+ L_1 L_2 = J_0 L_1 (J_0 L_1 + w_c) = J_0 J (J_0 J + w_c) = J_0 J \cdot J_0 C$.
 Der gefundene Punkt C liegt demnach auf dem Kreise K durch B, J_0 und A und $\angle BCA = 180^\circ - \angle B J_0 A$ (Fr. 96 VIII.) $= 2 \angle B A J_0$ hat die vorgeschriebene Größe C, wird auch von JC halbiert.

X. Eine andere Lösung für die in Fr. 141 gestellte Aufgabe (und eine dritte Lösung für die Aufgabe in Fr. 142) giebt Fr. 161 II. an die Hand. Nach Bestimmung der Sehne AJ_0 mache man $AJ_1 = 2 AJ_0$, schlage über AJ_1 aus M_0 einen Kreis K_0 von aussehend großem Halbmesser und ziehe in letzterem eine Sehne $HJ_0 H_0$, deren Mitte um $\frac{1}{2} w_c$ von J_0 absteht (Fr. 90 V., 96 VII.); dann ist nach Fr. 161 II. $AJ_0^2 = J_0 H \cdot J_0 H_0$, ferner $J_0 H = J_0 H_0 + w_c$ und deshalb $J_0 H_0 = J_0 J$, sowie $J_0 H = J_0 C$. — Am einfachsten macht man $J_0 M_0 = \frac{1}{2} w_c$.

XI. Aus IV. in Verbindung mit I. folgt ferner der Beweis für die Richtigkeit der in Fr. 143 gegebenen Lösung der dort vorgeführten Aufgabe. In Fig. 128 waren B, B_1 , X und Y Punkte des Kreises K_1 , und deshalb ist

$$BQ \cdot B_1 Q = YQ \cdot XQ \text{ (I.)};$$

zugleich war QU Tangente des Kreises K_2 , auf welchem ebenfalls X und Y liegen, und demnach ist auch

$$\overline{QU}^2 = YQ \cdot XQ \text{ (IV.)};$$

daher ist auch $\overline{QU}^2 = BQ \cdot B_1 Q$ (Fr. 20 V.) und QU Tangente an den nach Fr. 88 durch B, B_1 und U zu schlagenden Kreis K_1 (VI.). Der Mittelpunkt von K_1 muß aber M sein, denn der Mittelpunkt von K_1 muß in UA liegen (wegen Fr. 83 X.) und zugleich auf G (Fr. 74 XVII.), weil ja $BB_1 \perp G$ und $BZ = BZ$ gemacht wurde.

Man könnte den Beweis auch mit VII. führen; denn QU war ja Tangente an K_2 , also $QU \perp UA$, und deshalb müssen, weil $\overline{QU}^2 = BQ \cdot BQ_1$ sein soll, B aber nicht auf K_2 liegen kann (Fr. 76 I.), B und B_1 auf einem andern QU in U berührenden Kreise liegen, nach der Bestimmung des Punktes B_1 kann aber der Mittelpunkt dieses Kreises nur in G, also in M liegen.

162. Wie lautet der Ptolemäische Lehrsatz über das Sehnenviereck?

Macht man in dem Sehnenviereck ABCZ, Fig. 146 (vergl. 96 VIII. und 97 III.), den $\angle ZCY = \angle ACB$ und schneidet CY die Diagonale AZ in Q, so folgt aus der Gleichheit der Winkel ACQ und BCZ (Fr. 20 VIII.), CAZ und CBZ, CBA und CZA, ABC und AZC (Fr. 96 II.), daß

$$\triangle ACQ \sim \triangle BCZ \quad \text{und} \quad \triangle ACB \sim \triangle QCZ \quad (\text{Fr. 156 I.})$$

$$AQ : AC = BZ : BC \quad \quad CB : AB = CZ : QZ \quad (\text{Fr. 153 I.})$$

$$AQ = \frac{AC \cdot BZ}{BC} = AZ - QZ \quad \quad QZ = \frac{AB \cdot CZ}{BC} \quad (\text{Fr. 147 II.})$$

$$BC \cdot AZ = BZ \cdot AC + BA \cdot CZ,$$

d. h. in jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den beiden Gegenseitenpaaren.

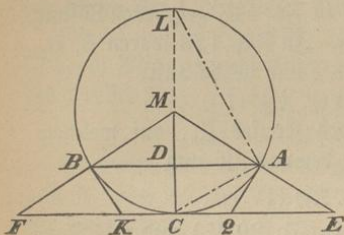


Fig. 147.

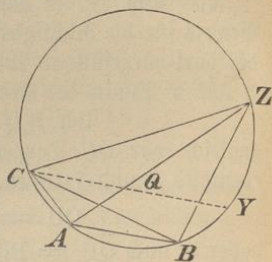


Fig. 146.

163. Wie findet man aus der Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks die Seite und den Umfang des umgeschriebenen von eben so viel, sowie des ein- und umgeschriebenen von doppelt so viel Seiten?

I. Zwischen der Sehne $BA = s$ (Fig. 147), deren Abstand $MD = e$ vom Mittelpunkte M , und dem Halbmesser $MC = r$ bestehen, nach Fr. 160 III. und Fr. 161 II., die gleichbedeutenden Gleichungen:

$$r^2 = e^2 + \left(\frac{1}{2}s\right)^2 = e^2 + \frac{1}{4}s^2$$

und

$$\frac{1}{4}s^2 = CD \cdot DL = (r - e)(r + e).$$

II. Verlängert man die nach den Endpunkten der Sehne $BA = s$ gezogenen Halbmesser $MA = MB = r$, bis sie die der Sehne BA parallele Tangente FE in E und F schneiden, so bestehen nach Fr. 148 I. zwischen den Entfernungen dieser Punkte von einander ($FE = t$) und vom Mittelpunkt ($EM = r_1$), dem Halbmesser r , der Sehne s und ihrer Entfernung e vom Mittelpunkte die drei Gleichungen:

$$s : t = r : r_1$$

$$s : t = e : r$$

$$e : r = r : r_1.$$

III. Ist die Sehne s die Seite eines in den Kreis vom Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks (n -eck), so ist t die Seite des demselben Kreise umgeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl; wegen II. ist auch da $t = \frac{rs}{e} = \frac{r_1 s}{r}$.

IV. Aus der Seite $BA = s$, Fig. 147, eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks (n -eck) kann man (Fr. 113 VIII.) die Seite $AC = s_2$ des in denselben Kreis eingeschriebenen Vielecks von doppelt so viel ($2n$) Seiten (Fr. 90 VIII.) und deren Entfernung e_2 vom Mittelpunkte finden, weil nach Fr. 160 I., 96 III. und nach Fr. 163 I.:

$$s_2^2 = \overline{AC}^2 = CL \cdot DC = 2r(r - e),$$

$$e_2^2 = r^2 - \frac{1}{4}s_2^2 = r^2 - \frac{1}{2}r(r - e)$$

$$= r^2 - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}re = \frac{1}{2}r(r + e).$$

V. Aus der Seite $EF = t$, Fig. 147, eines umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks (n -eck) läßt sich die Seite $QK = t_2$ des demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks von doppelt so viel ($2n$) Seiten finden. Macht man nämlich $AQ \perp EM$ und $BK \perp FM$, so ist nach Fr. 90 VIII., 103 IV. QK eine ganze, AQ und BK aber zwei halbe Seiten des $2n$ -eck.

Da nun $\triangle EAQ \sim \triangle ECM \sim \triangle ADM$ (Fr. 156 I.), so steht:

$$AQ:EA = CM:EC = DM:AD$$

$$AQ:EQ = CM:EM,$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{2}t_2:(r_1-r) = r:\frac{1}{2}t = e:\frac{1}{2}s$$

$$t_2 = \frac{4r(r_1-r)}{t} = \frac{4e(r_1-r)}{s}.$$

Da nun nach II. $r_1 = r^2:e$ und demnach eben sowohl $e(r+r_1) = r(e+r)$, als auch $4e(r_1-r) = 4(r^2-re) = 4r(r-e) = [4r(r-e)(r+e)]:(r+e)$ ist, so wird wegen I.: $4e(r_1-r) = rs^2:(r+e)$

$$\text{und} \quad t_2 = \frac{rs}{r+e} = \frac{te}{r+e} = \frac{tr}{r+r_1}.$$

VI. Die Umfänge u_n und u_{2n} des in einen Kreis vom Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen n -ecks und $2n$ -ecks sind (wegen I. und IV.):

$$u_n = ns = 2n \sqrt{r^2 - e^2} = 2n \sqrt{(r+e)(r-e)}$$

$$u_{2n} = 2ns_2 = 2n \sqrt{2r(r-e)}.$$

VII. Die Umfänge U_n und U_{2n} des einem Kreise vom Halbmesser r umgeschriebenen regelmäßigen n -ecks oder $2n$ -ecks sind (wegen III. und V.):

$$U_n = nt = \frac{nrs}{e} = \frac{r}{e} u_n,$$

$$U_{2n} = 2nt_2 = \frac{2nte}{r+e} = \frac{2e}{r+e} U_n.$$

VIII. Weil nun $2r > r+e$, so ist $u_{2n} > u_n$, d. h. der Umfang eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist kleiner als der Umfang eines demselben Kreise eingeschriebenen Vielecks von doppelt, viermal, achtmal u. so viel Seiten;

$$u_n < u_{2n} < u_{4n} < \dots$$

IX. Weil ferner $2e < r+e$, so ist $U_n > U_{2n}$, d. h. der Umfang eines umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist größer als der Umfang des demselben Kreise umgeschriebenen Vielecks von doppelt, viermal, achtmal u. so viel Seiten;

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > \dots$$

X. Weil endlich $r > e$, so ist

$$U_n > u_n,$$

d. h. der Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist kleiner, als der Umfang des demselben Kreise umgeschriebenen Vielecks von ebensoviel Seiten.

XI. Da nun aber $e = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$ ist, und da s um so kleiner wird, je größer die Seitenzahl n wird (Fr. 91 VI.), so nähert sich e um so mehr dem Halbmesser r , je größer n wird. Daher wird das Verhältniß $U_n : u_n$ (VII.) zugleich mit dem Verhältniß $r : e$ um so mehr $= 1$ (d. h. die beiden Umfänge U_n und u_n unterscheiden sich um so weniger von einander), je größer die Seitenzahl n wird.

Obwohl also bei wiederholter Verdoppelung der Seitenzahl der Umfang U immer kleiner, der Umfang u aber immer größer wird, so geht doch jene Verkleinerung und diese Vergrößerung nicht über alle Grenzen hinaus fort, vielmehr nähern sich (weil ja nach X. stets $U_n > u_n$ ist) hierbei U und u einem gemeinschaftlichen Grenzwerte W , es ist also:

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > \dots > W > \dots > u_{4n} > u_{2n} > u_n.$$

XII. Die gemeinschaftliche Grenze, der sich die beiden Verhältnisse $u_n : 2r$ und $U_n : 2r$ nähern, ist (vergl. Fr. 178 IV.):

$$\pi = 3,141\,592\,65 \dots;$$

Annäherungswerte von π , ferner die häufig gebrauchten Zahlenwerte von $1 : \pi$, $\sqrt{\pi}$ und $1 : \sqrt{\pi}$ folgen in Fr. 178 V.

164. Wie löst man die Aufgaben der Proportionslehre geometrisch?

I. Die vierte Proportionale BC_1 (vergl. Fig. 130) zu drei gegebenen BA , BC und BA_1 findet man, indem man BA und BC auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels ABC aufträgt, auf BA noch BA_1 abschneidet und $A_1C_1 \parallel AC$ macht. Dann ist nach Fr. 148 I.:

$$BA : BC = BA_1 : BC_1.$$

II. Macht man in I. $BA_1 = BC$, so findet man zu zwei Strecken BA und BC die dritte Proportionale BC_1 , da dann $BA : BC = BC : BC_1$ ist.

III. Zu zwei gegebenen Strecken $AN = x$ und $NB = y$ (vergl. Fig. 142) findet man die mittlere Proportionale, indem man über $AB = x + y$ als Durchmesser einen Kreis schlägt und diesen durch eine in N auf AB errichtete Senkrechte $NC = p$ in C schneidet. Weil dann $\angle ACB = 90^\circ$ (Fr. 96 III.), so ist $x : p = p : y$ (Fr. 160 I.).

Eine andere Lösung mit Hilfe von Fr. 103 II. giebt Fr. 161 IV. (oder V.) an die Hand.

IV. Da in III. $p^2 = xy$, also $p = \sqrt{xy}$, so ließe sich dieses Verfahren auch zum Ausziehen der Quadratwurzel benutzen.

In ähnlicher Weise könnte man die Auffindung der Strecke BC_1 nach I., bez. nach II. als die geometrische Konstruktion des arithmetischen (algebraischen) Ausdrucks $\frac{BC \cdot BA_1}{BA}$ und $\frac{BC^2}{BA}$ betrachten.

V. Will man eine Strecke $FN = a$ (vergl. Fig. 145) nach stetiger Proportion schneiden (goldener Schnitt, vergl. Fr. 147 IV.), d. h. so, daß der größere Abschnitt $FU_1 = x$ die mittlere Proportionale zwischen der Strecke FN und dem kleineren Abschnitt NU_1 ist, so errichte man in N eine Senkrechte $NM = \frac{1}{2}FN$, schlage aus M einen Kreis mit dem Halbmesser MN , ziehe aus F den Durchmesser $FUMV$ und mache $FU_1 = FU$.

Denn dann ist $UV = 2MN = FN$ und nach Fr. 161 V.

$$\begin{aligned} \overline{FN}^2 &= \overline{FV} \cdot \overline{FU} = (\overline{FU} + \overline{UV}) \cdot \overline{FU} \\ &= (\overline{FU} + \overline{FN}) \cdot \overline{FU} = \overline{FU}^2 + \overline{FN} \cdot \overline{FU}, \end{aligned}$$

also weiter:

$$\begin{aligned} \overline{FU_1}^2 &= \overline{FU}^2 = \overline{FN}^2 - \overline{FN} \cdot \overline{FU} = \overline{FN} (\overline{FN} - \overline{FU}) \\ &= \overline{FN} (\overline{FN} - \overline{FU_1}) = \overline{FN} \cdot \overline{NU_1}, \end{aligned}$$

oder:

$$\overline{FN} : \overline{FU_1} = \overline{FU_1} : \overline{NU_1}.$$

Man könnte aber im Einklang mit Fr. 147 IV. auch die Größe von $FU = x$ nach Fr. 160 III. finden:

$$\overline{MF}^2 = \overline{FN}^2 + \overline{MN}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$x = MF - MU = \frac{a}{2} \sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

VI. Ist in Fig. 125 DMU eines der zehn kongruenten gleichschenkeligen Dreiecke eines regelmäßigen Zehnecks (Fr. 113 IV.), so ist $\angle DMU = \frac{1}{10} \mathfrak{R} = \frac{2}{5} \mathfrak{R}$ (Fr. 34 IV.);

daher $\angle DUM = \angle UDM = \frac{1}{2} (2\mathfrak{R} - \angle DMU)$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \mathfrak{R} = \frac{4}{5} \mathfrak{R} = 2 \angle DMU$
 (Fr. 68 II.).

Halbiert nun UF den Winkel DUM, so wird $\angle DUF = \angle DMU$, daher $\triangle DUF \sim \triangle DMU$ (Fr. 156 I.), folglich $DF:DU = DU:DM$ und $DU:UF = DM:MU = 1$, d. h. $DU = UF$ (Fr. 153 I.).

Weil aber auch $\angle FUM = \frac{1}{2} \angle DUM = \angle DMU$ ist, so folgt aus $UF = FM$ (Fr. 74 VI.) weiter:

$$DU = FM \text{ (Fr. 20 V.),}$$

und endlich wird aus $DF:DU = DU:DM$ nach Fr. 20 IV. jetzt $DF:FM = FM:DM$.

Schneidet man also den Halbmesser DM eines Kreises nach stetiger Proportion (V.), so gleicht der größere Abschnitt FM der Seite DU des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks. Die Seite DC des regelmäßigen Fünfecks erhält man, wenn man $UC = UD$ macht.

165. Wie findet man einen Kreis, von welchem zwei Punkte und eine Tangente, oder ein Punkt und zwei Tangenten gegeben sind?

I. Sind zwei Tangenten T_1S und T_2S und ein im $\angle T_1ST_2$ gelegener Punkt P_1 gegeben, so muß der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises (wegen Fr. 103 VII.) auf der Geraden SX liegen, welche den $\angle T_1ST_2$ halbiert.

Liegt nun P_1 außerhalb SX, so fälle man von P_1 eine Senkrechte P_1E auf SX herab und verlängere dieselbe jenseits

SX um das Stück $EP_2 = P_1E$; dann ist P_2 auch ein Punkt des gesuchten Kreises (Zr. 74 XI.), und somit wäre die zweite Aufgabe auf die erste zurückgeführt.

Liegt dagegen P_1 in SX, so tangiert auch die in P_1 auf SX errichtete Senkrechte den gesuchten Kreis (Zr. 83 II.), und die Aufgabe ist nach Zr. 104 II. und IV. zu lösen.

II. Sind zwei Punkte P_1 und P_2 und eine Tangente TS gegeben und wird letztere von der verlängerten Sehne P_1P_2 in F, von der auf P_1P_2 in deren Mitte E errichteten (durch den Mittelpunkt M gehenden) Senkrechten XES aber in S geschnitten, so ist die Entfernung FN des Berührungspunktes N des gesuchten Kreises von dem Schnittpunkte F nach Zr. 161 IV. zu finden aus $\overline{FN}^2 = FP_1 \cdot FP_2$. Trägt man die nach Zr. 164 III. konstruierte Strecke FN von F aus in TS auf, so hat man jetzt drei Punkte: P_1 , P_2 und N des Kreises und kann diesen nach Zr. 89 II. zeichnen.

Da man aber FN auf ST von F ebensowohl nach S hin als nach der entgegengesetzten Seite hin auftragen kann, so giebt es im allgemeinen zwei Lösungen.

Anm. S ist der äußere Ähnlichkeitspunkt (Zr. 105 IV.) nicht bloß für die beiden bei Lösung der gestellten Aufgabe sich ergebenden Kreise K_1 und K_2 um M_1 und M_2 , sondern auch für alle Kreise K_0 , welche aus einem Punkte M_0 in SEX als Mittelpunkt geschlagen werden und TS berühren. Jeder dieser Kreise wird von P_1S in zwei Punkten P' und P'' geschnitten und dabei ist stets $P'M_0 \parallel P_1M_1$ und $P''M_0 \parallel P_1M_2$ (Zr. 153 I. und 156 IV.). Diese Bemerkung führt zu einer andern sehr bequemen Lösung für I. und II. durch Ziehen zweier Parallelen durch P_1 .

III. Ist in II. $P_1P_2 \parallel ST$, so wird $EMS \perp ST$, und weil auch $MN \perp ST$, so rückt der Berührungspunkt N nach S; es giebt also jetzt bloß eine Lösung. Der Schnittpunkt F ist jetzt unendlich weit von N entfernt (Zr. 77 IV. Anm.).

IV. Wenn P_1 (oder P_2) in ST liegt, d. h. mit N zusammenfällt, haben I. und II. ebenfalls bloß eine Lösung. NF ist dabei = 0.

V. Liegen P_1 und P_2 in II. auf verschiedenen Seiten von ST, so giebt es keine Lösung (Zr. 83 VI.).

