Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

5. Einige Aufgaben und Übungssätze

urn:nbn:de:hbz:468-1-4776

N, O, P ꝛc., in denen sich je zwei benachbarte Tangenten schneiden, so zerfällt jedes Viereck in zwei kongruente (Nr. 81 I.) rechtwinkelige Dreiecke. Die 2 n Winkel um M sind daher sämtlich gleich, weil die Strecken MN, MO ꝛc. die nach Nr. 54 IV. gleichen Centriwinkel AMB, BMC ꝛc. halbieren. Da deshalb die 2n rechtwinkeligen Dreiecke unter sich kongruent sind (Nr. 81 II.), so folgert man daraus nach Nr. 67 II. leicht die Gleichheit sämtlicher (halben und ganzen) Seiten und Winkel des umgeschriebenen Vielecks.

VIII. Werden durch dieselben n Teilpunkte A, B, C ꝛc. (Fig. 125) eines Kreises ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck von n Seiten gezeichnet, so halbieren die Strecken MN, MO ꝛc. die Bögen AB, BC ꝛc.

Der Kreis ist daher nunmehr in 2n gleiche Bögen AK = KB = BL ꝛc. geteilt.

Zeichnet man jetzt die beiden 2n-ecke, so zeigt sich das eingeschriebene größer, das umgeschriebene kleiner als das eingeschriebene, beziehentlich das umgeschriebene n-eck. Durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahlen erhält man dann Vielecke von 4n, 8n ꝛc. Seiten, und da sich diese Vielecke immer inniger an den Kreis anschmiegen, je größer ihre Seitenzahl wird, so pflegt man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unzählig vielen Seiten zu betrachten.

Fünftes Kapitel.

Einige Aufgaben und Übungssätze.

114. Wie zeichnet man ein gleichseitiges Dreieck?

Schlägt man aus den Endpunkten A und B der (gegebenen oder willkürlich gewählten) Strecke AB zwei Kreise mit AB als Halbmesser, so schneiden sich die Kreise, da die in Nr. 102 VII. gestellten Bedingungen erfüllt sind, in zwei Punkten C_1 und C_2. Die beiden (kongruenten, Nr. 80 I.) Dreiecke ABC_1 und ABC_2

sind gleichseitig (Fr. 20 V.), da AC = AB und BC = AB (Fr. 48 III.).

x +

115. Wie zeichnet man ein gleichschenkeliges Dreieck?

Man verfahre wie in Fr. 114, schlage aber die zwei gleichen Kreise mit einem der Strecke AB nicht gleichenden Halbmesser, der größer als die Hälfte von AB ist.

+

116. Wie zeichnet man ein Dreieck aus den drei Seiten?

Genügen die drei Seiten a, b und c den in Fr. 76 gestellten Bedingungen, so schneiden sich die aus den Endpunkten von AB = c mit den Halbmessern b und a geschlagenen Kreise in zwei Punkten C_1 und C_2 (Fr. 102 VII.) und Seiten der (kongruenten, Fr. 80 I.) Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind a, b und c.

117. Wie zieht man von einem Punkte P zwei gleiche Strecken nach einer Geraden G?

Schlägt man aus P, wie in Fig. 96, durch einen jenseits G gelegenen Punkt N einen Kreis K, so schneidet dieser G in 2 Punkten M_1 und M_2 (Fr. 83 XIII.) und es ist $M_1P = M_2P$ (Fr. 48 III.).

118. Wie trägt man an einen Strahl AB in A einen gegebenen Winkel DEF an?

Man verbinde zwei auf den Schenkeln ED und EF willkürlich gewählte Punkte H und K durch eine Strecke HK und zeichne nach Fr. 116 an AB ein dem Dreieck HEK kongruentes Dreieck H_1AK_1, so daß $AK_1 = EK$ von A aus in AB liegt, und $AH_1 = EH$ wird. Dann ist:

$$\angle H_1AK_1 = \angle HEK = \angle DEF \text{ (Fr. 67 II.)}.$$

119. Wie zieht man in einer gegebenen Ebene durch einen gegebenen Punkt C eine Parallele DL zu einer gegebenen Geraden FK?

Man verbinde C mit einem Punkte E in FK und mache $\angle ECD = \angle CEK$ (Fr. 118), so daß D und K auf verschiedenen Seiten von CE liegen (wie in Fig. 32 auf S. 40); dann ist DCL // FK (Fr. 62 II. 2.). Vergl. Fr. 57 I.

120. Wie fällt man von einem Punkte P auf eine nicht durch P gehende Gerade G eine Senkrechte?

Zieht man von P nach zwei beliebigen Punkten M_1 und M_2 in G (wie in Fig. 93 bis 96) Strecken, so schneiden sich zwei aus M_1 und M_2 mit M_1P und M_2P als Halbmessern geschlagene Kreise noch in einem Punkte Q und es ist $PQ \perp G$ (Fr. 102 III.). Nach Fr. 117 könnte man dabei zwei gleiche Kreise erhalten.

121. Wie errichtet man in einem Punkte N einer Geraden G eine Senkrechte?

In G mache man $ND = NC$ (Fig. 55) und über CD $\triangle$ DQC gleichschenkelig (Fr. 115), so ist $QN \perp G$ (Fr. 74 XVII.).

122. Wie errichtet man im Endpunkte B einer Strecke AB eine Senkrechte?

Man zeichne über AB (Fig. 67) ein gleichschenkeliges $\triangle$ AVB (Fr. 115), verlängere AV nach F, bis $VF = VB = VA$ wird; dann ist $FB \perp AB$ (Fr. 71 III.), da $\angle VAB + \angle VFB = \angle ABV + \angle FBV$ (Fr. 74 I.).

123. Wie schlägt man um ein rechtwinkeliges Dreieck einen Kreis? Vergl. Fr. 88 IV. und 89.

I. Teilt man den rechten Winkel B so, daß (wie in Fig. 86) $\angle ABM = \angle BAZ$ wird, dann schneidet die Teillinie BM die Hypotenuse AZ im Mittelpunkte M des gesuchten Kreises (Fr. 71 II. und 73 I.).

II. Eine andere Lösung bietet Fr. 96 VII. mit Hilfe von Fr. 127.

124. Wie legt man einen rechten Winkel so, daß seine Schenkel durch zwei gegebene Punkte A und Z gehen und sein Scheitel auf einer gegebenen Geraden G liegt?

Hat der über $\overline{AZ}$ (Fig. 86) als Durchmesser geschlagene Kreis mit der Geraden G einen, oder zwei Punkte, z. B. B und C, gemein (Fr. 83), so sind ABZ und ACZ eine, bezw. zwei der gestellten Bedingung genügende Lagen des rechten Winkels (Fr. 96 III.).

125. Wie halbiert man einen gegebenen Winkel?

Macht man vom Scheitel M_1 des zu halbierenden $\angle PM_1Q$ aus (wie in Fig. 93 und 94) $M_1P = M_1Q$ und beschreibt man über PQ ein gleichschenkeliges $\triangle PM_2Q$ (Fr. 115), so halbiert M_1M_2 den $\angle PM_1Q$ (Fr. 102 IX.); denn aus M_1 und M_2 lassen sich Kreise durch P und Q ziehen (Fr. 47 II.).

Am zweckmäßigsten legt man das $\triangle PM_2Q$ nicht auf dieselbe Seite von PQ, auf welcher $\triangle PM_1Q$ liegt (vergl. Fig. 95).

Ist der Scheitel C des zu halbierenden $\angle W_1CW_2$, Fig. 102, nicht zugänglich, so ziehe man beliebig AB und halbiere durch AM_0, AM_3, BM_0, BM_3 die Winkel bei A und B; dann liegen M_0 und M_3 in der Halbierungslinie M_3M_0C (Fr. 104 II.).

126. Wie teilt man einen rechten Winkel in drei Teile?

Man beschreibe in dem gegebenen rechten Winkel XBY über der in dem einen Schenkel BX liegenden Strecke BA ein gleichseitiges $\triangle ABC$ (Fr. 114), dann ist $\angle CBX = \frac{2}{3}\mathfrak{R}$ (Fr. 74 V.), folglich $\angle CBY = \frac{1}{3}\mathfrak{R}$.

127. Wie halbiert man eine Strecke $\overline{PQ}$ oder einen Bogen $\widehat{PQ}$?

Zeichnet man über $\overline{PQ}$ (wie in Fig. 93 S. 101 am besten auf verschiedenen Seiten von PQ) zwei gleichschenkelige Dreiecke PQM_1 und PQM_2 (Fr. 115), so halbiert M_1M_2 sowohl $\overline{PQ}$ (Fr. 102 VIII.), als $\widehat{PQ}$ (Fr. 90 V.).

128. Wie teilt man eine Strecke KU in n gleiche Teile?

Man trage in K an KU unter beliebig großem Winkel UKN einen Strahl an, trage (wie in Fig. 122 S. 125) auf diesem von K aus n gleiche Teile ($KS = SA = AB = \cdots\cdots = CN$) auf, verbinde den letzten Teilpunkt N mit U und ziehe durch die anderen Teilpunkte S, A, B 2c. Parallele zu NU; dann teilen diese Parallelen die Strecke KU in n gleiche Teile (Fr. 111 VI.).

129. Wie zeichnet man ein Dreieck mit einer gegebenen Seite a und einem gegebenen Gegenwinkel A dieser Seite?

I. Man verfahre, wie in Fr. 79 III. 4. angedeutet wurde; man mache über CB = a, z. B. $\angle CBX = \angle BCY = \frac{180° - A}{2} = 90° - \frac{1}{2} A$ und lege durch B, C und den Schnittpunkt A zwischen CY und BX einen Kreis (Fr. 88 I.).

II. Wären für ein Dreieck a, A und $CA_2 = b$ (Fig. 72) gegeben, so brauchte man in den nach I. geschlagenen Kreis nur noch die Sehne $CA_2 = b$ einzutragen (Fr. 102 XII.). Bei $b > a$ lassen sich wegen Fr. 91 VIII. aus a, A und b zwei verschiedene Dreiecke zeichnen. Vergl. Fr. 79 VIII.

130. Wie zeichnet man ein Dreieck, von dem ein Winkel A eine anliegende Seite c und I. die Summe a + b, oder II. die Differenz a — b der beiden anderen Seiten gegeben ist?

Auf dem einen Schenkel AX des Winkels A trage man die Seite AB = c, auf dem andern Schenkel AY die Strecke:

I. AD = a + b, oder II. AE = b — a

auf; dann:

I. schneide man von dem $\angle DBA$ den $\angle DBC = \angle BDA$ (Fr. 118) ab; schneiden sich nun BC und AD in C, so ist ABC das gesuchte Dreieck (Fr. 74 VI.). Vergl. Fig. 58 S. 70.

II. trage man in B an BE auf der BA entgegengesetzten Seite den (spitzen) $\angle EBC = \angle BEY$ an (Fr. 118); schneiden sich nun BC und AY in C, so ist das Dreieck ABC das gesuchte (Fr. 74 VI.). Vergl. Fig. 59 S. 70.

131. Wie zeichnet man ein Dreieck aus zwei Winkeln u und v und der Summe der drei Seiten? Vergl. Fr. 79 VII.

An den Endpunkten N und M der Strecke NM = a + b + c trage man $\angle MNX = \frac{1}{2} \angle u$ und $\angle NMY = \frac{1}{2} \angle v$ an; ist nun $u + v < 2\mathfrak{R}$ (Fr. 69 IV.), so ist $\angle MNX + \angle NMY < \mathfrak{R}$ und NX und MY schneiden sich in C (Fr. 62 IV. 3.); schneidet man jetzt vom (stumpfen) Winkel

NCM die $\angle NCU = \frac{1}{2}u$ und $\angle MCV = \frac{1}{2}v$ ab und verbindet C mit den Punkten A und B, in denen NM von CU und CV geschnitten wird (Fr. 62 IV. 3.), so hat das $\triangle ABC$ die drei Seiten $AB = c$, $AC = AN = b$ und $BC = BM = a$ (Fr. 74 VI.), während $\angle CAB = u$ und $\angle CBA = v$ ist (Fr. 69 VI.).

132. Wie teilt man einen Kreis in 4, 8, 16 ꝛc. und in 3, 6, 12, 24 ꝛc. gleiche Teile? und wie zeichnet man ein regelmäßiges Vieleck von dieser Seitenzahl?

I. Zeichnet man in einem Kreise zwei auf einander senkrechte Durchmesser AB und CD (Fr. 121), so ist:

$\widehat{AC} = \widehat{CB} = \widehat{BD} = \widehat{DA}$ (Fr. 39 III., 54 III.).

II. Zeichnet man über einem Halbmesser MA ein gleichseitiges $\triangle AMB$, so ist der Centriwinkel $AMB = 60°$ (Fr. 74 V.), also $\widehat{AB}$ der sechste Teil vom ganzen Kreise (Fr. 54 V. und 50 II.).

Ein aus A mit AM als Halbmesser geschlagener Kreis geht durch B (Fr. 48 III., 64 III.) und schneidet auf der anderen Seite von AM einen Bogen $\widehat{AC}$ ab, der $\widehat{AB}$ gleicht ꝛc.

III. Zwei benachbarte Bögen von 60° (II.) geben als Summe einen Bogen von 120°, d. h. den dritten Teil des ganzen Kreises.

IV. Durch fortgesetzte Halbierung der Bögen (Fr. 127) erhält man aus I. bezw. II. die Teilung in 8, 16, 32 ꝛc., bezw. 12, 24, 48 ꝛc. gleiche Teile. Vergl. Fr. 113 VIII.

V. Ein regelmäßiges Vieleck mit 3, 6, 12 u. s. f. und mit 4, 8, 16 u. s. f. Seiten erhält man nach I. bis IV. und Fr. 113 VII.

Anm. Über das Zeichnen des regelmäßigen Vielecks von 5, 10, 20 .... Seiten vergl. Fr. 164 VI. in Verbindung mit Fr. 113 VIII.

133. Wie beweist man die Richtigkeit folgender Sätze?

I. Ein Viereck, dessen Winkel sämtlich rechte sind, ist ein Rechteck, oder ein Quadrat (Fr. 62 II. 3., oder 107 III.).

II. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Rechtecks begrenzen ein Quadrat (Fr. 74 VI., 68 II.).

III. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Rhomboids begrenzen ein Rechteck (Fr. 107 I., 68 II.).

IV. In jedem Sehnenvielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften rc. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten rc. (Fr. 48 III. und 74 I.). Vergl. Fr. 96 VIII.

V. In jedem Tangentenvielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften rc. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten rc. Seite (Fr. 103 V.). Vergl. Fr. 104 X.

VI. Jeder Punkt V innerhalb der Centralstrecke M_1M_2 (Fig. 93) zweier sich schneidenden Kreise ist von der gemeinschaftlichen Tangente T dieser Kreise weiter entfernt als von jedem der Schnittpunkte P und Q der beiden Kreise (Fr. 91 VI., oder XIII., 20 III.).

Jeder Punkt U in der Verlängerung der Centralstrecke liegt dem nächsten Berührungspunkte und deshalb (Fr. 74 VIII.) auch der gemeinschaftlichen Tangente näher als dem Schnittpunkte der beiden Kreise (Fr. 91 VI., oder XIII., 74 IX.).

Es giebt demnach in der Centralstrecke und ihren Verlängerungen keinen dritten Punkt, aus dem sich ein die gemeinschaftliche Tangente T berührender Kreis durch einen der Schnittpunkte P oder Q der beiden ersten Kreise schlagen läßt.

VII. Der Umfang eines Vielecks mit lauter hohlen Winkeln ist kleiner als der Umfang eines dasselbe umschließenden Vielecks.

VIII. Der geometrische Ort für die Endpunkte aller gleich langen Tangenten desselben Kreises ist ein dem gegebenen concentrischer Kreis.

134. Wie lassen sich die geometrischen Aufgaben einteilen und welche Teile umfaßt ihre Auflösung?

I. Die in Fr. 114 bis 132 vorgeführten einfachen Aufgaben (vergl. Fr. 136 IV.) aus dem Gebiete der ebenen

Geometrie lassen erkennen, daß den Gegenstand derselben die Auffindung und Zeichnung von Punkten, Geraden, Dreiecken, Vielecken und Kreisen bildet. Im Grunde genommen kommt es immer auf die Bestimmung von Punkten hinaus, welche ihrerseits (vergl. z. B. Fr. 9 I., 88 III. ꝛc.) für die Bestimmung der andern Gebilde bestimmend sind.

Die geometrischen Aufgaben lassen sich in örtliche und nichtörtliche einteilen. Bei ersteren ist der Ort, wo die Lösung der Aufgabe vorgenommen werden soll, im voraus bestimmt, wie z. B. in Fr. 123 und 132 I. bis IV.; bei den letzteren, z. B. in Fr. 129, 130, 132 V., ist dieser Ort nicht bestimmt.

In der Aufgabe lassen sich ferner die gegebenen Stücke von den gesuchten, aus jenen zu findenden Stücken unterscheiden.

II. Zur Auffindung der Lösung ist es meist sehr förderlich und deshalb zu empfehlen, daß man eine der Aufgabe entsprechende Figur zeichne, welche man als die zu findende und bereits gefundene ansieht, und daß man aus dieser Figur, besonders aus den in ihr enthaltenen Dreiecken, maßgebende Beziehungen zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken herzuleiten trachtet. Dies ist der Zweck der Analysis der Aufgabe.

So gelangt man zur Konstruktion, welche angiebt, wie die Aufgabe gelöst wird. Dann folgt der Beweis, welcher aus der Konstruktion und aus bekannten Sätzen nachweist, daß die Lösung richtig ist und wirklich die gesuchten Stücke aus den gegebenen liefert.

Dann hat endlich noch die Determination zu folgen, welche darthut: 1. ob die Lösung immer und allgemein, oder nur unter gewissen Bedingungen möglich ist, und 2. ob die Aufgabe eindeutig, zweideutig, oder mehrdeutig ist, d. h. eine, zwei, oder mehrere Figuren den Forderungen der Aufgabe genügen. Hierbei ist namentlich die Größe der gegebenen Stücke und ihre gegenseitige Lage ins Auge zu fassen und als veränderlich zu behandeln.

III. Eine Aufgabe ist bestimmt, wenn die gegebenen Stücke nur eine endliche Anzahl, unbestimmt, wenn sie unendlich viele Lösungen zulassen, überstimmt, wenn mehr Stücke gegeben sind, als zur Bestimmtheit erforderlich sind.

IV. Fehlt zur Bestimmtheit einer Aufgabe nur ein Stück, oder nur eine Bedingung, so kann man doch häufig aus bekannten Sätzen sagen, daß der einzige, nicht völlig bestimmte Punkt auf einer bestimmten Geraden, oder auf einem bestimmten Kreise liegen muß (vergl. z. B. Fr. 74 XVII.). Man nennt dann die Gerade und den Kreis den geometrischen Ort dieses Punktes.

Unter dem geometrischen Orte eines nicht völlig bestimmten Punktes (oder eines andern Raumgebildes; vergl. Fr. 166 X. und XI.) versteht man im allgemeinen eine Linie, oder eine Fläche, welche so beschaffen ist, daß alle ihre Punkte und nur ihre Punkte allein eine bestimmte Bedingung für die Lage jenes Punktes (oder jenes Raumgebildes) erfüllen.

Bei völlig bestimmten Aufgaben können sich für einen noch unbekannten Punkt mehrere geometrische Örter angeben lassen, welche jedoch dann nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben werden.

V. Ist die Lösung einer Aufgabe so einfach und von selbst einleuchtend, daß eine besondere Konstruktion gar nicht erst angegeben zu werden pflegt, Analysis, Beweis und Determination daher auch wegfallen, so nennt man sie eine Forderung (ein Postulat). Vergl. z. B. Fr. 15 V. und Fr. 47 VII.

135. Wie zeichnet man ein Dreieck aus einer Seite a, der Projektion p derselben auf die Seite c und der Mittellinie m_a?

I. An dieser Aufgabe möge der Inhalt von Fr. 134 erläutert werden.

Analysis. Man zeichne irgend ein Dreieck $A_0B_0C_0$ hin, mache $C_0D_0 \perp A_0B_0$ und ziehe A_0E_0 nach der Mitte N_0 von B_0C_0. Man sieht dann, daß das $\triangle B_0C_0D_0$ aus a_0, p_0 und $\angle D_0$ bestimmt ist (Fr. 81 I.), und erkennt, daß der Punkt A_0

in B_0D_0, oder in seiner Verlängerung liegt, und zwar in der Entfernung N_0A_0 von N_0 liegt.

Konstruktion. Man ziehe die Gerade BY und nehme $BD = p$, mache $\angle BDZ = 90°$ und schneide in C die Senkrechte DZ mit einem Kreise aus B vom Halbmesser a; dann halbiere man CB in N und schlage um N einen Kreis vom Halbmesser m_a, welcher BY in A schneidet. ABC (vergl. Fig. 126) ist das gesuchte Dreieck.

Beweis. $BC = a$ (Konstr.); $CD \perp BY$ und $BD = p$, also p Projektion von a auf c (Fr. 112 I.); $CN = NB$, also NA Mittellinie und $= m_a$ (Konstr.).

Determination. Die Aufgabe ist unlösbar, wenn $a \leqq p$ (Fr. 74 VIII.); ebenso wenn m_a kleiner ist als die von N auf BA gefällte Normale (Fr. 83 I.). Die Aufgabe ist eindeutig, wenn m_a der von N auf AB gefällten Senkrechten gleicht (Fr. 83 II.). Es giebt ferner zwei Lösungen (Fr. 83 III.), wenn diese Senkrechte $< m_a$ und $m_a \gtrsim \frac{a}{2}$ ist; dabei sind die beiden gefundenen Dreiecke beide spitzwinkelig bei B, wenn $m_a < \frac{a}{2}$, bei $m_a > \frac{a}{2}$ dagegen eins spitzwinkelig und eins stumpfwinkelig. Bei $m_a = \frac{a}{2}$ endlich ist die Aufgabe wieder eindeutig und das Dreieck rechtwinkelig (Fr. 83 IX.). Vergl. auch Fr. 79 VIII.

II. Aus I. erkennt man zugleich, daß das Dreieck, wenn eine Höhe h_c gegeben ist, sowohl als Summe, wie als Differenz der beiden durch diese Höhe und die Seiten a und b erzeugten Dreiecke erscheinen kann.

136. Was versteht man unter einem Datum?

I. Von den Fr. 80 I. bis III. und V. entsprechenden vier **Grundaufgaben** über das Dreieck ist unter den vorhergehenden Aufgaben nur die eine in Fr. 116 gestellt worden, eine zweite in Fr. 129 II.; die Lösung der beiden andern folgt unmittelbar aus Fr. 118.

II. In den vorausgegangenen Aufgaben konnten die gegebenen Stücke selbst und ohne weiteres zur Lösung benutzt werden. Es kann aber auch sein, daß einige der gegebenen Stücke zwar sich nicht unmittelbar zur Lösung verwenden lassen, daß man aber wohl durch sie ein nicht unmittelbar gegebenes Stück zu finden vermag, welches dann an Stelle eines unmittelbar gegebenen treten und so die ursprüngliche Aufgabe in eine andere, womöglich leichter zu lösende umwandeln kann.

Stehen eine Anzahl von Bestimmungsstücken in einem solchen Zusammenhange mit einander, daß man jedes einzelne derselben finden kann, wenn die übrigen bekannt sind, so nennt man die Gesamtheit ein Datum.

III. Der Inhalt von II. mag an einem Beispiele erläutert werden.

Ist in einem Dreiecke ABC die Winkelhalbierende $CJ = w_c$ gegeben und schneidet dieselbe die Seite c in J, so ist bei $A > B$ nach Nr. 69 VI. und 68 II. der spitze Winkel $AJC = B + \frac{1}{2} C = B + \frac{1}{2}(180^\circ - A - B) = 90^\circ - \frac{1}{2}(A - B)$. Die zugehörige Höhe $CD = h_c$ hat aber ihren Fußpunkt zwischen A und J (Nr. 71 V.), und deshalb ist der Winkel AJC auch $= 90^\circ - \angle JCD$ (Nr. 71 II.); also ist nach Nr. 20 VIII.

$$\angle JCD = \angle(w_c, h_c) = \tfrac{1}{2}(A - B), \quad \text{wenn } A > B,$$
$$= \tfrac{1}{2}(B - A), \quad \text{wenn } B > A.$$

Somit bilden die Winkelhalbierende w_c, die Höhe h_c und die Winkeldifferenz $(A - B)$ ein Datum, d. h. je zwei dieser drei Stücke bestimmen das dritte, sie genügen indessen natürlich noch nicht zur Bestimmung des Dreiecks.

IV. Außer den Winkeln und Seiten (Nr. 79) giebt es für das Dreieck und für die Vielecke auch noch andere Bestimmungsstücke. Unter diese wird aber für jetzt der Flächeninhalt noch nicht mit aufzunehmen sein, vielmehr sollen einige darauf bezügliche Aufgaben später (im siebenten Kapitel, Nr. 180) nachgetragen werden. In Nr. 139 bis 143 dagegen folgen einige Aufgaben, deren Lösung einen besondern Kunstgriff nötig macht; auf sie können verschiedene andere Aufgaben mit Vorteil zurückgeführt werden.

137. Welche Data für das Dreieck sind hier zu nennen?

I. Die drei Winkel A, B, C. Vergl. Fr. 68 II.

II. Die beiden Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks. Vergl. Fr. 71 II.

III. Im symmetrischen Dreiecke der Winkel an der Spitze und die Winkel an der Grundseite. Vergl. Fr. 75 III.

IV. Die Winkelhalbierende, die Höhe und die Winkeldifferenz. Vergl. Fr. 136 III.

V. Die Höhe und Mittellinie für eine Seite und die Differenz der Projektionen der beiden andern Seiten auf jene Seite.

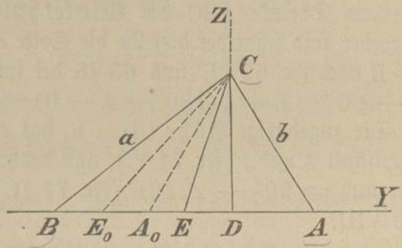

Fig. 126.

Es sei $\angle A > \angle B$; dann ist die Projektion $BD = p$, Fig. 126, der Seite a auf c größer als die Projektion $AD = q$ von b auf c (Fr. 112 X.). Nun ist $ED = EA - DA = \frac{1}{2} c - q = \frac{1}{2}(p + q) - q = \frac{1}{2}(p - q)$. Das rechtwinkelige Dreieck CDE läßt sich aber konstruieren (Fr. 81 I.), wenn von seinen drei Seiten $CD = h_c$, $CE = m_c$ und ED zwei gegeben sind; also läßt sich aus zweien die dritte finden.

Wäre das Dreieck A_0BC stumpfwinkelig, so wäre $E_0D = BD - BE_0 = p - \frac{1}{2} c = p - \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2}(p + q)$. Nach Fr. 112 VII. wäre ja q als negativ aufzufassen.

VI. Der Halbmesser des umschriebenen Kreises, eine Seite c und ihr Gegenwinkel C.

Wäre r und c bekannt, so trage man c in den Kreis vom Halbmesser r ein (Fr. 102 XII.); dann ist nach 98 II. zugleich der Winkel C zweideutig bestimmt.

Wäre r und C bekannt, so mache man im Kreise vom Halbmesser r an der Tangente LK, Fig. 91 S. 99, in E den $\angle n = C$ und der Schnittpunkt D liefert dann $ED = c$ (Fr. 100 I. und 98 IV.).

Wäre c und C bekannt, so trage man $ED = c$, Fig. 91 S. 99, auf dem einen Schenkel des Winkels $n = C$ auf; der Kreis berührt dann den andern Schenkel LK in E und besitzt ED als Sehne (Fr. 100 I.); sein Mittelpunkt M ist also auf verschiedene Weise leicht zu finden, z. B. nach Fr. 89 V.

In allen Fällen ist die Lage des Punktes C auf dem Kreise und daher auch das Dreieck selbst noch nicht bestimmt.

VII. Der Halbmesser r_0 des eingeschriebenen Kreises um M_0, ein Winkel C und die um dessen Gegenseite c verminderte Summe $a + b$ der beiden anliegenden Seiten.

In Fig. 102 S. 108 ist in dem rechtwinkeligen Dreieck CM_0L_1 der $\angle M_0CL_1 = \frac{1}{2} C$ und $M_0L_1 = r_0$, nach Fr. 105 XI. und 104 VIII. aber auch $CL_1 = c_0 = b_1 = \dfrac{a + b - c}{2}$.
Das $\triangle CM_0L_1$ ist aber durch je zwei der genannten Stücke bestimmt (Fr. 81) und somit läßt sich aus den letzteren das dritte Stück finden.

VIII. Der Halbmesser r_3 des einer Seite c angeschriebenen Kreises um M_3, der Gegenwinkel C dieser Seite und die Summe $s = a + b + c$ der drei Seiten (Fr. 81).

In Fig. 102 S. 108 ist ja im rechtwinkeligen $\triangle CM_3W_1$ der $\angle M_3CW_1 = \frac{1}{2} C$ und $M_3W_1 = r_3$, nach Fr. 105 XII. aber $CW_1 = \dfrac{a + b + c}{2}$.

138. Welche Data für die Vierecke sind hier aufzuführen?

I. Die vier Winkel. Vergl. Fr. 72 III.

II. Bei Parallelogrammen zwei parallele Seiten, die Höhe (Fr. 108 XIII.) für das zweite Seitenpaar und die Winkel. Vergl. Fr. 81.

Anstatt eines Winkels könnte auch der Winkel zwischen den beiden Höhen gewählt werden; vergl. Fr. 71 VI.

III. Beim Parallelogramm eine Diagonale, eine der beiden Höhen und der Winkel, welchen sie mit jener Diagonale macht. Vergl. Fr. 81.

IV. Bei Trapezen eine der nichtparallelen Seiten, der an dieser liegende Winkel und die Höhe (Fr. 108 XIII.). Vergl. Fr. 81.

V. Bei Trapezen zwei benachbarte Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und die ihre freien Enden verbindende Diagonale. Vergl. Fr. 80 I. und II.

VI. Bei Trapezen eine Diagonale, der Winkel zwischen ihr und einer parallelen Seite und die Höhe. Vergl. Fr. 81.

VII. Bei Trapezen die Verbindungsstrecke der Mitten der beiden parallelen Seiten, die Höhe und die Differenz der Projektionen der nichtparallelen Seiten auf die parallelen. Vergl. Fr. 137 V.

139. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Höhe h_c, dem Winkel C an der Spitze und der Differenz $p-q$ der Projektionen der beiden andern Seiten a und b auf die Grundseite c.

Anleitung zur Lösung. Errichtet man beim $\triangle ABC$, Fig. 126, im Endpunkte A_0 der Projektionendifferenz $BA_0 = p - q$ eine Normale A_0Z_0, verlängert man AC, bis sie A_0Z_0 in N schneidet, und macht man noch $CK \perp A_0Z_0$, so ist

$$\triangle CA_0K \cong \triangle A_0CD \text{ (Fr. 108 XII. und I.)}$$

$$\overline{}$$

$$CK = A_0D = AD \text{ (Fr. 67 II., 75 III.)}$$

$$\overline{}$$

$$\triangle CKN \cong \triangle ADC \text{ (Fr. 81 II., 62 I.)}$$

$$\overline{}$$

$$NK = CD = A_0K \text{ (Fr. 67 II., 108 XIII.)};$$

es ist also $A_0N = 2DC = 2h_c$ und außerdem $\angle NCB = 180° - C$.

Lösung. Man konstruiere $\triangle BA_0N$ aus $BA_0 = p - q$, $\angle A_0 = 90°$ und $A_0N = 2\,DC$. Der Eckpunkt C des gesuchten Dreiecks liegt dann zugleich in einer Parallelen zu BA_0 im Abstande $A_0K = h_c$ und auf einem Kreise mit dem Peripheriewinkel $(180° - C)$ über der Sehne BN (Fr. 98 VII.). Der Eckpunkt A findet sich schließlich am bequemsten aus $CA = CA_0$, oder auch durch Verlängerung von NC.

Von den beiden Schnittpunkten zwischen dem Kreise und KC ist nur der von BN aus nach A_0Z hin liegende zu gebrauchen; der andere liefert ~~k~~ein unbrauchbares Dreieck, welches nicht alle gegebenen Stücke enthält.

Wäre h_c nicht gegeben, so wäre die Aufgabe unbestimmt; jedes andere h_c liefert ein anderes A_0N und BN, sowie einen anderen Kreisbogen, aber doch ein Dreieck mit $A_0B = p - q$ und C.

140. Wie konstruiert man ein Dreieck aus der Grundseite c, der Höhe h_c und der Differenz A—B der Grundseitenwinkel?

Anleitung zur Lösung. Ist im $\triangle ABC$, Fig. 126, $BA_0 = BD - DA_0 = BD - DA = p - q$ die Differenz der Projektionen der Seiten a und b auf c, so ist $\angle A_0CB = \angle CA_0A - \angle B$ (Fr. 69 VI.) $= \angle CAA_0 - \angle B$ (Fr. 75 VII.) $= \angle A - \angle B$. Ferner ist $A_0E_0 = E_0B$ und $DE_0 = DA_0 + A_0E_0 = DA + E_0B = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$.

Lösung. Man mache $DE_0 = \frac{1}{2} c$, $\angle E_0DZ = 90°$ und $DC = h_c$, sodann verlängere man CE_0 um $E_0X = E_0C$ und zeichne über CX ein Parallelogramm $CBXA_0$, worin der $\angle CBX = 180° - \angle A_0CB = 180° - \angle (A - B)$. Dazu hätte man einen Kreis zu schlagen, in welchem der Peripheriewinkel über der Sehne CX die Größe $180° - (A - B)$ hat (Fr. 98 VII.), und diesen mit der Verlängerung von DE_0 in B zu schneiden. A findet sich endlich aus $BA = c$.

Der Punkt B (und ähnlich C in Fr. 139) erscheint bestimmt durch zwei geometrische Örter (Fr. 74 XVII.), nämlich: den Kreis und die Gerade DE_0.

141. Ein Dreieck ABC zu zeichnen aus dem Halbmesser r des umschriebenen Kreises, der Grundseite AB = c und der Winkelhalbierenden CJ = w_c.

I. Anleitung zur Lösung. Ist in Fig. 127 der Kreis K um das $\triangle ABC$ geschlagen und schneidet ihn die Winkelhalbierende CJ in J_0, so entstehen nach Fr. 69 I. zwei gleichwinkelige Dreiecke J_0JA und J_0AC, wenn man J_0A zieht. Denn es ist ja

$$\angle J_0CA = \angle J_0CB = \angle J_0AB \text{ (Vor. und Fr. 96 II.)}$$
$$\angle AJ_0C = \angle JJ_0A \text{ (Fr. 20 I.).}$$

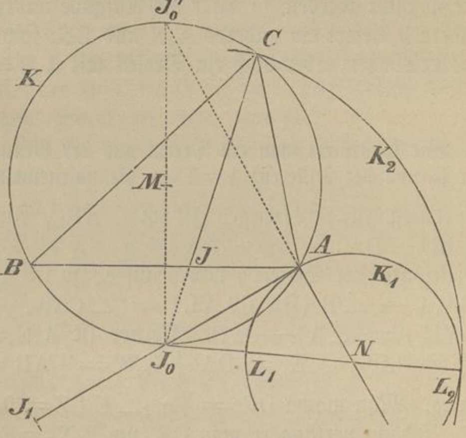

Fig. 127.

Lösung*). Man schlage einen Kreis K um M mit dem Halbmesser MA = r, trage in ihn die Sehne AB = c ein (Fr. 102 XII.; vergl. auch Fr. 98 VII.) und mache $\widehat{AJ_0} = \widehat{J_0B}$ (Fr. 90 III.); dann geht die Winkelhalbierende durch J_0 (Fr. 98 IV.). Ferner mache man $AN \perp AJ_0$ und $AN = \frac{1}{2} w_c$,

*) Allgemeiner (aber etwas umständlicher) lautete die Lösung: Man trage in den um M geschlagenen Kreis K vom Halbmesser r die Sehne AB = c ein,

schlage aus N den Kreis K_1 durch A, schneide ihn durch die Gerade J_oNL_2 und schlage aus J_o den Kreis K_2 durch L_2; dann schneidet K_2 den Kreis K im gesuchten Punkte C des Dreiecks ABC. — Der zweite Schnittpunkt zwischen K und K_2 liefert nichts Neues.

Natürlich muß auch $J_oJ = J_oL_1$ sein und man könnte damit den Punkt J in BA bestimmen; wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeiten im Zeichnen ist es aber für die Praxis im allgemeinen vorzuziehen, J_oC durch die weiter von einander entfernten Punkte J_o und C zu bestimmen.

Der Beweis folgt in Fr. 161 VIII. Ein anderer Beweis liegt in Fr. 160 IV.

In gleicher Weise wäre die Aufgabe zu lösen, wenn statt CJ die Halbierungslinie $CJ' = w_c'$ des Außenwinkels bei C gegeben wäre; nur würde dann der Bogen $\widehat{AJ_o'B}$ in J_o' zu halbieren und die Normale $AN' = \frac{1}{2} w_c'$ auf AJ_o' zu errichten sein. Wie J_o' in der Verlängerung von NA liegt, so liegt N′ in der Verlängerung von J_oA; CJ′ liegt in Fig. 127 rechts von CA und K_2' ist um J_o' durch L_1' zu ziehen.

II. Eine andere Lösung folgt in Fr. 161 X.

142. Wie findet man das Dreieck ABC aus der Grundseite c, dem Gegenwinkel C und der Winkelhalbierenden w_c?

I. Beschreibt man über AB = c einen Kreis K, in welchem der Peripheriewinkel über c = C ist (Fr. 98 VII.), so kann man aus dessen Halbmesser r nebst c und w_c nach Fr. 141 das $\triangle$ ABC finden.

II. Zwei andere Lösungen folgen in Fr. 161 IX. und X.

---

mache $\widehat{AJ_0} = \widehat{BJ_0}$, $AZ \perp J_0A$, schlage um einen beliebigen Punkt P in AZ einen Kreis K_3 durch A, über J_0P einen Halbkreis K_4, trage in diesen von P aus eine Sehne PQ ein, welche der Entfernung einer w_c gleichenden Sehne des Kreises K_3 vom Mittelpunkte P an Länge gleicht, und ziehe J_0Q. Dann schneidet J_0Q den Kreis K_3 in zwei Punkten U_1 und U_2 und es ist nach Fr. 92 I. $U_1U_2 = w_c$, ebenso (wie in Fr. 161 IV.) $J_0U_1 \cdot J_0U_2 = \overline{J_0A}^2$, deshalb ebenfalls $J_0C = J_0U_2$ und $J_0J = J_0U_1$.

143. Wie findet man in einer gegebenen Geraden G einen Punkt M, dessen Entfernungen MA und MB von zwei gegebenen Punkten A und B eine vorgeschriebene Summe s (oder Differenz d) liefern? Vergl. Fr. 148 I.

I. Anleitung zur Lösung. Der gesuchte Punkt M läßt sich auch auffassen als Mittelpunkt eines Kreises K_1 (Fig. 128) vom Halbmesser MB = MU und letzterer berührt

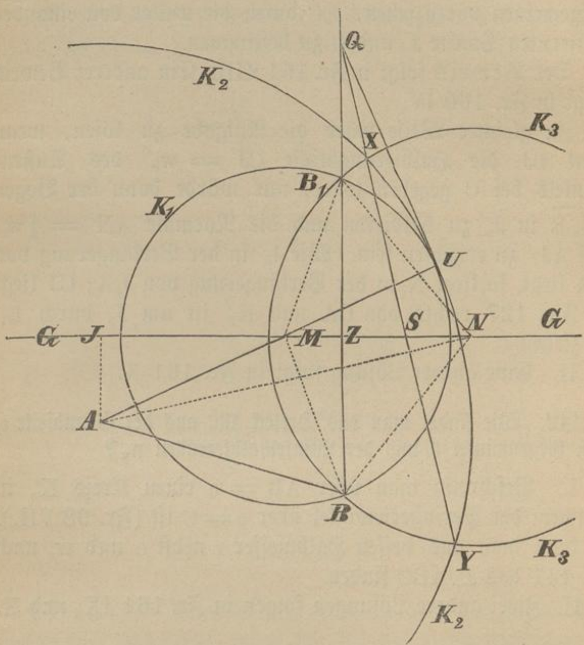

Fig. 128.

den um A mit dem Halbmesser AU = s = MA + MB (oder d = MA — MB) geschlagenen Kreis K_2 von innen (oder von außen) in U. Wird ferner um irgend einen Punkt N in G mit dem Halbmesser NB ein dritter Kreis K_3 geschlagen, so schneiden sich K_3 und K_1 in B und B_1 (Fr. 102 III.), K_3 und K_2 in Y und X (Fr. 102 VII. und Fr. 76), weil $AN > AU - NU > AU - NB_1$ und $AN < AU + NU < AU + NB_1$ (Fr. 91 XIII.). BB_1 und XY schneiden sich in einem Punkte Q, und es muß die nach dem Berührungspunkte U zwischen K_1 und K_2 gezogene Strecke QU die beiden Kreise K_1 und K_2 zugleich berühren.

Lösung. Man mache $BZ \perp G$ und $B_1Z = BZ$, schlage aus A den Kreis K_2 mit dem Halbmesser $AU = s$ (oder d), aus einem Punkte N in G den Kreis K_3 durch B und B_1, welcher K_2 in Y und X schneidet, und ziehe vom Schnittpunkte Q zwischen BB_1 und YX die Tangente QU an K_2 (Fr. 103 I.); dann schneidet UA die Gerade G in M. — Nach Fr. 103 II. giebt es zwei Tangenten QU an K_2, zwei Berührungspunkte U und zwei Punkte M in G.

Der Beweis folgt in Fr. 161 XI.

Dürfen A und B auf verschiedenen Seiten von G liegen? Darf G durch A, durch B, oder durch beide gehen? Wie gestaltet sich dann die Lösung?

II. Wie ließe sich die Aufgabe mittels eines biegsamen Fadens von der Länge s (oder d) lösen, dessen Enden in A und B festzumachen wären?

III. Über eine dritte Lösung vergl. 170 VIII.

Sechstes Kapitel.

Die Ähnlichkeit ebener Figuren.

144. Wenn sind zwei Strecken kommensurabel? wenn inkommensurabel?

I. Ist eine Strecke CD = a (Fig. 129) genau 2, 3, 4 .... x mal so groß als eine andere Strecke AB = m, so heißt a ein ganzes

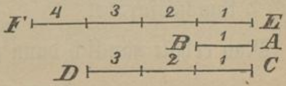

Fig. 129.