

# Universitätsbibliothek Wuppertal

## Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

4. Vier Gerade in derselben Ebene. Das Viereck. Die Projektion einer Strecke. Die regelmäßigen Vielecke

---

**Nutzungsrichtlinien** Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

ist; nach VII. ist aber auch:

$$\begin{aligned} L_2 U_2 &= L_3 U_3 & \text{oder } c_0 + c_1 &= b_0 + b_1 \\ L_3 V_3 &= L_1 V_1 & a_0 + a_2 &= c_0 + c_2 \\ L_1 W_1 &= L_2 W_2 & b_0 + b_3 &= a_0 + a_3. \end{aligned}$$

Abdiert man nun je eine dieser drei letzteren Gleichungen zu je einer der drei vorhergehenden, so erhält man nach Fr. 20 VIII.:

$$\begin{aligned} c_0 &= b_1 = a_2 \\ a_0 &= c_2 = b_3 \\ b_0 &= a_3 = c_1. \end{aligned}$$

Da endlich  $b_0 = c_1$ , so liegen die Berührungspunkte  $L_1$  und  $N_1$  des eingeschriebenen und des umschriebenen Berührungskreises in gleicher Entfernung von der Mitte der Seite  $a$ . Ähnlich ist's bei  $b$  und  $c$ . — Vergl. Fr. 159 XVI. und XVII.

XII. Für den Punkt  $C$  in Fig. 102 ist nach Fr. 104 VIII.

$$\begin{aligned} CW_1 &= CW_2 = CB + BW_1 = a + b_3 = a + \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{a + b + c}{2} = s. \end{aligned}$$

Ebenso ist  $BV_1 = BV_3 = s$   
und  $AU_2 = AU_3 = s.$

#### Viertes Kapitel.

Vier Gerade in derselben Ebene. Das Viereck. Die Projektion einer Strecke. Die regelmäßigen Vielecke.

106. Wie viel Fälle lassen sich in Bezug auf die Richtung von vier Geraden in einer Ebene unterscheiden?

Bezüglich der Richtung der vier Geraden  $G_1, G_2, G_3$  und  $G_4$  in derselben Ebene sind fünf Fälle möglich:

I. Alle vier Gerade haben dieselbe Richtung (Fig. 105); dann giebt es keinen Schnittpunkt (Fr. 56 II.).

II. Drei Gerade  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  (Fig. 106) haben gleiche Richtung, die vierte  $G_4$  eine andere; dann gibt es drei Schnittpunkte A, B, C (Fr. 56 III.).

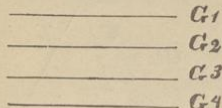


Fig. 105.

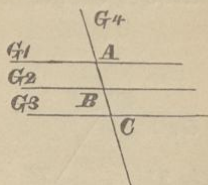


Fig. 106.

III. Zwei Gerade  $G_1$  und  $G_2$  (Fig. 107) haben gleiche Richtung, die dritte und vierte  $G_3$  und  $G_4$  haben ebenfalls gleiche, aber eine andere Richtung, als die beiden ersten.

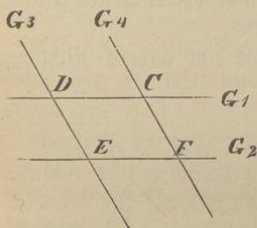


Fig. 107.

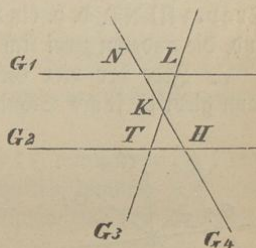


Fig. 108.

Dann gibt es vier Schnittpunkte C, D, E und F (Fr. 56 III.), und das zwischen ihnen liegende Viereck CDEF (Fr. 65 II. und I.), in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm.

IV. Zwei Gerade  $G_1$  und  $G_2$  (Fig. 108 bis 110) haben gleiche Richtung, die dritte  $G_3$  und die vierte  $G_4$  andere und zwar unter sich verschiedene Richtungen. Dann gibt es fünf Schnittpunkte H, T, K, L und N, und vier davon liegen in  $G_1$  und  $G_2$ .

Wenn der fünfte K, wie in Fig. 108, zwischen  $G_1$  und  $G_2$  liegt und wenn er mit den beiden in  $G_1$  (Fig. 109), oder in  $G_2$  zusammenfällt, so entsteht kein neues oder besonderes geometrisches Gebilde\*).

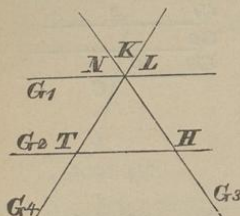


Fig. 109.

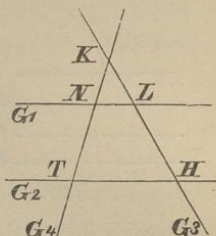


Fig. 110.

Liegt dagegen K außerhalb  $G_1$  und  $G_2$  (Fig. 110), so entsteht zwischen den Schnittpunkten H, L, N und T ein Trapez HLNT, d. h. ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel sind, die anderen zwei sich schneiden.

V. Jede der vier Geraden hat eine andere Richtung; dann giebt es sechs Schnittpunkte.

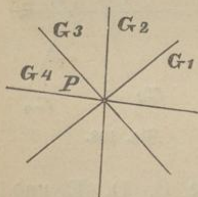


Fig. 111.

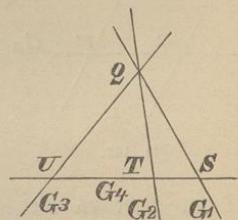


Fig. 112.

Fallen sämtliche Schnittpunkte in einen P zusammen, (Fig. 111), oder fallen deren drei in einen Punkt Q zusammen, wie in Fig. 112, so entsteht kein neues geometrisches Gebilde.

\*) Das Gebilde NLKHTKN ist ja nach Kr. 65 I. und IV. keine ebene Figur. Die Sätze über solche Figuren lassen sich entsprechend den Sätzen in Kr. 108 bis 111 leicht aufstellen.

Fällt dagegen kein Schnitt mit dem andern zusammen, so liegen zwischen den sechs Schnittpunkten zwei Trapezoide XVTY und XSTU (Fig. 113), d. h. zwei Vierecke, in denen keine Seite der andern parallel ist.

VI. Es giebt also rücksichtlich des Parallelismus der Seiten bloß drei Arten von Vierecken: Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide (III. bis V.).

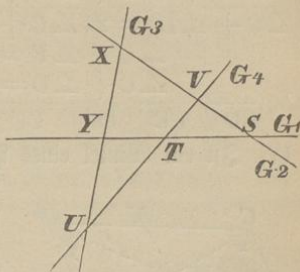


Fig. 113.

Anm. Den Namen „Trapezoid“ hat man eigentlich nur zu benutzen, wenn man ausdrücklich hervorheben will, ein Viereck sei kein Parallelogramm und kein Trapez. Sonst könnte man sagen: Unter den Vierecken giebt es zwei besondere Arten: Parallelogramme und Trapeze.

VII. In jedem Viereck beträgt die Winkelsumme vier rechte (Fr. 72 III.) und lassen sich nur zwei Diagonalen ziehen (Fr. 65 VI.).

Die in Fr. 96 VIII., 97 III. und IV. sowie die in Fr. 104 I., IX. bis XII. erwähnten Eigenschaften kommen nicht allen Vierecken zu, sondern nur den Sehnen- und den Tangentenvierecken.

107. Wie sind die Winkel der Parallelogramme beschaffen?

I. Die Summe von je zwei benachbarten Winkeln C und F (Fig. 114 S. 118) des Parallelogramms beträgt  $180^\circ$  (Fr. 62 I. 3.).

II. Je zwei Gegenwinkel des Parallelogramms sind gleich.

Da in Fig. 114  $\angle C + \angle F = 180^\circ$  und  $\angle F + \angle E = 180^\circ$  ist (I.), so muß  $\angle C + \angle F = \angle F + \angle E$ , d. h.  $\angle C = \angle E$  sein (Fr. 20 V. und VIII.).

III. Ist in einem Viereck jeder Winkel seinem Gegenwinkel gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Ist nämlich in Fig. 114

$$\begin{aligned} \angle C &= \angle E \quad \text{und} \quad \angle F = \angle D, \text{ so ist:} \\ \angle C + \angle F + \angle E + \angle D &= 4 \mathcal{R} \text{ (Zr. 106 VII.)} \\ 2(\angle C + \angle D) &= 2(\angle C + \angle F) = 4 \mathcal{R} \text{ (Zr. 20 IV.)} \\ \angle C + \angle F &= 2 \mathcal{R} \\ \angle C + \angle D &= 2 \mathcal{R} \end{aligned} \quad \text{(Zr. 20 VIII.);}$$

$$CD \parallel FE \quad \text{und} \quad CF \parallel DE \text{ (Zr. 62 II. 3.)}$$

IV. Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, so sind alle rechte; ist einer schief, so sind alle schief.

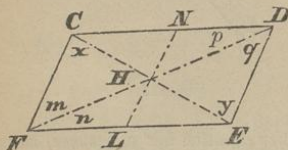


Fig. 114.

Ist in Fig. 114  $\angle F$  spitz, so ist es auch  $\angle D$  (II.), während  $\angle C$  und  $\angle E$  stumpf sind (I.).

Wäre dagegen  $\angle F$  ein rechter, so müßten auch  $\angle D$  (II.) und ebenso  $\angle C$  und  $\angle E$  (I.) rechte sein.

V. Rücksichtlich der Winkel gibt es also nur zwei Arten Parallelogramme (IV.):

Ein Parallelogramm mit lauter rechten Winkeln heißt ein rechtwinkeliges, eins mit vier schiefen Winkeln heißt ein schiefwinkeliges.

108. Welche Sätze handeln von den Seiten des Parallelogramms?

I. Jede Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Hälften.

In Fig. 114 ist nämlich

$$\begin{aligned} FE &\parallel CD \text{ (Vor. u. Zr. 106 III.)} \\ \angle n &= \angle p \text{ (Zr. 62 I. 2.)} \\ \angle E &= \angle C \text{ (Zr. 107 II.)} \\ FD &= FD \text{ (Zr. 20 I.)} \\ \triangle FDE &\cong \triangle DFC \text{ (Zr. 80 V.)} \end{aligned}$$

II. Daher läßt sich jedes Dreieck FDE (Fig. 114) als die Hälfte eines Parallelogramms FEDC betrachten, welches

man erhält, wenn man durch die Endpunkte derselben Dreiecksseite FD die Parallelen FC und DC zu den beiden anderen Seiten zieht.

III. Im Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten gleich.

Weil nämlich  $\triangle FDE \cong \triangle DFC$  (I.), ist auch  $DE = FC$  und  $FE = DC$  (Fr. 67 II.).

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: Parallele Strecken zwischen Parallelen sind gleichlang.

IV. Sind in einem ebenen Viereck CDEF (Fig. 114) je zwei Gegenseiten gleich ( $FC = ED$  und  $FE = CD$ ), so ist es ein Parallelogramm. Vergl. VIII.

Da nämlich die beiden  $\triangle FDE$  und  $DFC$  nach Fr. 80 I. kongruent sind, so ist nach Fr. 67 II.:

$$\frac{\angle m = \angle q \quad \text{und} \quad \angle n = \angle p,}{FC \parallel ED \quad \text{und} \quad FE \parallel CD \text{ (Fr. 62 II. 2.)}.}$$

V. Ein ebenes Viereck CDEF (Fig. 114), in dem ein Paar Gegenseiten CF und DE parallel und gleich ( $\parallel$ ) sind, ist ein Parallelogramm (vergl. Fr. 65 und Anmerkung zu Fr. 106 IV.).

Bew.

$$\begin{array}{l} CF \parallel DE \text{ (Vor.)} \\ \angle m = \angle q \text{ (Fr. 62 I. 2.)} \\ CF = ED \text{ (Vor.)} \\ FD = DF \text{ (Fr. 20 I.)} \\ \hline \triangle CFD \cong \triangle EDF \text{ (Fr. 80 II.)} \\ \angle p = \angle n \text{ (Fr. 67 II.)} \\ \hline FE \parallel CD \text{ (Fr. 62 II. 2.)}. \end{array}$$

VI. Wegen III. kann es auch rücksichtlich der Größe der Seiten nur zwei Arten Parallelogramme geben, nämlich gleichseitige, in denen alle vier Seiten gleichgroß sind, und ungleichseitige, in denen bloß die Gegenseiten paarweise gleich sind.

VII. Daher giebt es (wegen VI. und Fr. 107 V.) überhaupt nur vier Arten von Parallelogrammen; nämlich:

das Quadrat KMZT (Fig. 115) ist rechtwinkelig und gleichseitig;

das Rechteck SQUV (Fig. 116) ist rechtwinkelig und ungleichseitig;

die Raute oder der Rhombus ABXY (Fig. 117) ist schiefwinkelig und gleichseitig;

das Rhomboid FCDE (Fig. 118) ist schiefwinkelig und ungleichseitig.

Anm. Der Name „Rhomboid“ wird entbehrlich, wenn man sich nicht die Möglichkeit erhalten will, ein Parallelogramm kurz zu nennen, das weder Quadrat, noch Rechteck, noch Rhombus ist.

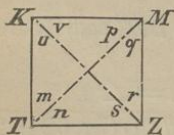


Fig. 115.

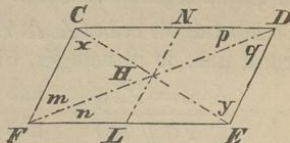


Fig. 118.

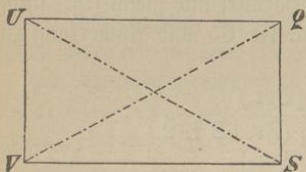


Fig. 116.

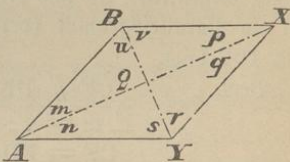


Fig. 117.

VIII. Ein Viereck mit vier gleichen Seiten ist (nach IV.) ein Parallelogramm und zwar entweder ein Quadrat, oder ein Rhombus (VII.).

IX. Schneidet man in einem Parallelogramm CDEF (Fig. 119), von derselben Seite FE her, auf zwei Gegenseiten gleiche Strecken FT und EK ab, so ist die Verbindungsgerade TK den Seiten FE und CD parallel (V.), weil  $FT \parallel EK$ .

X. Verbindet man die Mitten N und L (Fig. 118) zweier Gegenseiten, so ist die Verbindungsgerade LN den anderen Seiten FC und DE parallel (III. und V.).

XI. Zieht man in einem Parallelogramm FCDE (Fig. 119) eine Parallele TK zu einer Seite FE, so ist  $TK = FE$  (III.).

XII. Fällt man von zwei Punkten U und Q (Fig. 120) einer Geraden UQ Senkrechte UV und QS auf eine zu UQ parallele Gerade VS, so ist auch  $UV \parallel QS$  (Fr. 57 II.).

Macht man dagegen von Q und V aus  $QS \perp VS$  und  $VU \perp UQ$ , so ist wiederum  $UV \parallel QS$  (Fr. 62 V. und II. 3.).

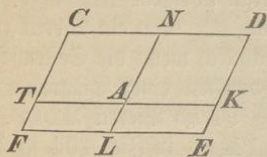


Fig. 119.

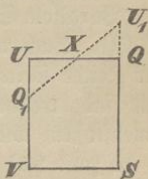


Fig. 120.

XIII. Da demnach (in beiden Fällen in XII.) alle Senkrechten zwischen zwei Parallelen parallel sind, so sind alle Senkrechten zwischen zwei Parallelen auch gleichlang (III.; vergl. auch Fr. 72 VI.).

Wegen Fr. 74 IX. sind also alle Punkte der einen Parallelen von der anderen gleichweit entfernt, oder noch kürzer: zwei Parallele haben überall gleichen Abstand von einander.

Den Abstand zweier Parallelen darf man daher im Parallelogramm und im Trapez als Höhe in Bezug auf diese Parallelen bezeichnen. Vergl. Fr. 64 III.

Die Parallele  $G_2$  zu  $G_1$  ist der geometrische Ort (vergl. Fr. 74 XVII.) eines in einem vorgeschriebenen Abstände von  $G_1$  liegenden Punktes.

XIV. Zwei Punkte  $Q_1$  und  $U_1$  einer Geraden  $Q_1U_1$ , Fig. 120, liegen in ungleicher Entfernung von einer zu  $Q_1U_1$  nicht parallelen und  $Q_1U_1$  nicht in der Mitte von  $Q_1U_1$ .

schneidenden Geraden VS. Zieht man nämlich durch einen Punkt X in Q.U, die Gerade UQ // VS, so ist nach XII. und Fr. 20 III.:

$$U,S > QS = US > Q,V.$$

XV. Zwei Gerade UQ und VS sind parallel, wenn sich zwischen ihnen zwei gleiche Senkrechte ziehen lassen (XIII. und XIV.).

XVI. Mit Fr. 81 läßt sich leicht beweisen, daß in XIII. bis XV. anstatt „Senkrechte“ und „Entfernung“ gesetzt werden darf „Parallele Strecken“. Vergl. übrigens III. bis V.

XVII. Auch abweichend von III. kann ein Viereck zwei Paar gleiche Seiten besitzen, nämlich wenn die Seitenpaare gleich sind, welche in den Endpunkten einer Diagonale zusammenstoßen, wie z. B. in Fig. 91 im Viereck MDEC, in Fig. 93 (und 95) im Viereck M<sub>1</sub>PM<sub>2</sub>Q, in Fig. 104 in den Vierecken UPVQ und UEM<sub>2</sub>Z.

Die Eigenschaften solcher Vierecke, welche man gleichschenkelige Vierecke nennt, sind in Fr. 102 und 105 schon mit erörtert worden.

Ein solches Viereck würde nach Fr. 106 VI. zu den Trapezoiden zu rechnen sein, sofern die Seiten des einen Paares größer sind, als die des andern; sind dagegen alle vier Seiten unter sich gleich, so ist das Viereck ein Quadrat, oder ein Rhombus (vergl. VI. und VII.).

Anm. Hätte man den Namen „Rhomboid“ noch frei (vergl. VII. Anm.), so könnte man ein Viereck, in welchem die an den Enden der einen Diagonale an einander stoßenden Seiten gleich, die an denen der andern Diagonale sich treffenden ungleich sind, ein Rhomboid nennen.

### 109. Welche Stücke bestimmen ein Parallelogramm?

I. Aus Fr. 106 III. in Verbindung mit Fr. 57 I. und Fr. 26 folgt, daß ein Parallelogramm durch einen Winkel und die zwei denselben einschließenden Seiten bestimmt ist.

II. Zur Bestimmung des Rechtecks und der Raute reichen zwei Stücke aus (I. und Fr. 108 VII.); bei ersterem die beiden Seiten, bei letzterem eine Seite und ein Winkel.

III. Das Quadrat ist bereits durch eine Seite bestimmt.

## 110. Was gilt von den Diagonalen des Parallelogramms?

I. Wird ein Winkel B eines Parallelogramms ABXY (Fig. 117) durch die Diagonale BY halbiert, so werden auch die drei anderen Winkel durch die Diagonalen BY und AX halbiert, und zugleich ist das Parallelogramm gleichseitig.

Ist  $\angle u = \angle v$ , so muß zunächst auch  $\angle s = \angle r$  sein (Fr. 20 IV.), weil ja  $\angle s = \angle v$  und  $\angle r = \angle u$  ist (Fr. 62 I.). Dann ist aber sofort auch  $\angle v = \angle r$  und  $\angle u = \angle s$  (Fr. 20 V.), und deswegen weiter:

$$BX = XY = AB = AY \quad (\text{Fr. 74 VI., 108 III.})$$

$$\angle m = \angle p = \angle n = \angle q \quad (\text{Fr. 74 I., 62 I.}).$$

II. In jedem gleichseitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) halbieren die Diagonalen die Winkel (Fr. 74 I. und 62 I.).

III. Die Diagonalen eines Parallelogramms FCDE (Fig. 118) halbieren sich gegenseitig in H (Fr. 67 II.), weil  $\triangle CHF \cong \triangle EHD$  (Fr. 80 V.).

IV. Jede durch den Diagonalschnittpunkt H, Fig. 118, gelegte Strecke NL ist in H halbiert und schneidet von den Seiten CD und FE nach C und E hin gleiche Stücke NC und LE ab (Fr. 67 II.), da  $\triangle CHN \cong \triangle EHL$  (Fr. 80 V.). Natürlich ist auch  $ND = LE$ .

Ist dabei  $LN \parallel FC$ , so wird  $FL = LE = \frac{1}{2} FE$  (Fr. 108 III. und Fr. 20 V.).

V. Ein Viereck, dessen Diagonalen CE und FD, Fig. 118, sich gegenseitig halbieren, ist ein Parallelogramm. Aus  $\triangle CHF \cong \triangle EHD$  (Fr. 80 II., Fr. 42 II.) folgt ja  $\angle x = \angle y$  (Fr. 67 II.) und endlich  $CF \parallel DE$  (Fr. 62 II.), sowie aus der Kongruenz der  $\triangle\triangle CHD$  und  $EHF$  in gleicher Weise  $CD \parallel FE$ .

VI. In jedem rechtwinkligen Parallelogramm (im Quadrat TKMZ und im Rechteck SQUV, Fig. 115 und 116) sind die Diagonalen gleichgroß, weil (nach Fr. 81 I.):

$$\triangle KTZ \cong \triangle MZT \quad \text{und} \quad \triangle QSV \cong \triangle UVS.$$

VII. Ein Parallelogramm mit gleichen Diagonalen  $QV = US$ , Fig. 116, ist rechtwinkelig; denn dann ist noch  $VS = SV$ ,  $QS = UV$  (Zr. 108 III.), deshalb  $\triangle QVS \cong \triangle USV$  (Zr. 80 I.), dann  $\angle QSV = \angle UVS$  (Zr. 67 II.), oder wegen Zr. 107 I.  $\angle QSV = 90^\circ = \angle UVS$  (Zr. 20 VIII.).

VIII. In jedem gleichseitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) stehen die Diagonalen auf einander senkrecht (Zr. 75 V. und VI.); denn jede Diagonale, z. B.  $BY$  in Fig. 117, halbiert in dem von der anderen Diagonale  $AX$  abgeschnittenen gleichschenkeligen  $\triangle ABX$  den Winkel an der Spitze  $B$  (II.).

IX. Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen, ist gleichseitig. In Fig. 117 ist ja dann  $AQ = XQ$  (III.) und  $BQ = BQ$  (Zr. 20 I.), deshalb  $\triangle AQB \cong \triangle XQB$  (Zr. 81 I.) und  $AB = BX$  (Zr. 67 II.).

#### 111. Welche Sätze über das Trapez sind zu erwähnen?

I. Die Verbindungsgerade  $SV$  (Fig. 121) der Mitten  $S$  und  $V$  der nicht-parallelen Seiten  $KL$  und  $NM$  eines Trapezes  $NKLM$  ist parallel zu den Parallelseiten  $KL$  und  $NM$  und heißt daher die mittlere Parallele.

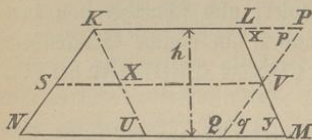


Fig. 121.

Zieht man durch  $V$  eine Gerade  $PQ \parallel KN$ , bis sie die beiden Parallelseiten in  $P$  und  $Q$  schneidet, so ist nach

Zr. 62 I.  $\angle x = \angle y$  und  $\angle p = q$ , ferner  $LV = VM$  (Vor.), folglich  $\triangle LVP \cong \triangle MVQ$  (Zr. 80 V.) und  $PV = VQ$  (Zr. 67 II.). Nun ist aber nach der Voraussetzung auch  $NS = SK$ , folglich:

$SV \parallel NQ$  (Zr. 108 X.).

II. Zieht man durch die Mitte  $S$  (Fig. 121) der einen nicht-parallelen Seite  $NK$  eine Parallele  $SV$  zu den Parallelseiten  $NM$  und  $KL$ , so halbiert dieselbe die andere nicht-parallele Seite  $LM$ .

Denn ginge SV nicht durch die Mitte von LM, so müßte sich (wegen I.) durch S noch eine zweite Parallele zu NM ziehen lassen, was nach Fr. 57 I. unmöglich ist.

III. Die mittlere Parallele SV (Fig. 121) ist das arithmetische Mittel (vergl. Fr. 19 III.) aus den beiden Parallelsseiten KL und NM.

Aus der in I. nachgewiesenen Kongruenz der Dreiecke LVP und MVQ folgt auch, daß  $LP = QM$  (Fr. 67 II.); nach Fr. 108 III. ist ferner  $KP = SV = NQ$ , folglich:

$$\begin{aligned} 2SV &= KP + NQ = (KL + LP) + (NM - QM) \\ &= KL + NM; \quad SV = \frac{KL + NM}{2}. \end{aligned}$$

IV. Die mittlere Parallele SV (Fig. 121) halbiert auch jede durch den Endpunkt K der einen nicht-parallelen Seite KN zu der anderen LM parallel gezogene Strecke KU, weil nach Fr. 108 III.  $KX = LV$  und  $XU = VM$ , und nach I.  $LV = VM$  ist, daher auch  $KX = XU$  (Fr. 20 IV.).

V. Wäre in Fig. 121  $\angle N = \angle y$ , machen also die zwischen den Parallelen KL und NM gezogenen Strecken KN und LM nach entgegengesetzten Seiten gleiche Winkel mit NM, so muß  $KL = NM$  sein.

Denn dann ist auch  $\angle K = \angle L$  (Fr. 62 I.)

und die aus K und L auf NM gefällten Senkrechten schneiden von NKLM kongruente Dreiecke ab (Fr. 108 XIII. und 80 V.).

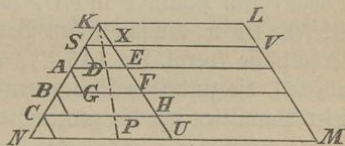


Fig. 122.

Anm. Dieser Satz läßt sich als ein Seitenstück neben Fr. 108 IV. stellen und bildet auch eine Ergänzung zu Fr. 108 III. Andererseits könnten in einem Viereck auch ein Paar benachbarte Seiten gleich sein (vergl. Fr. 108 XVII.).

VI. Teilt man eine Seite KN (Fig. 122) eines Dreiecks NKU, oder die eine nicht-parallele Seite KN eines Trapezes NKLM in n gleiche Teile und zieht durch die Teilspunkte

Parallelen zu der Dreiecksseite NU, bezw. zu den Parallelseiten KL und NM, so teilen diese Parallelen auch die dritte Dreiecksseite KU und die andere nicht-parallele Seite LM in n gleiche Teile.

Da  $KS=SA$  und  $SV \parallel KL$ , so ist zunächst  $KX=XE$  (IV.). In den Trapezen BSXF, CAEH zc. mit den mittleren Parallelen AE, BF zc. ist dann nach II. weiter  $XE=EF$ ,  $EF=FH$  zc., daher nach Fr. 20 V.  $KX=XE=EF=FH$  zc. Die durch die Parallelen in LM erzeugten Teile LV zc. sind aber je einem Teil in KU gleich (Fr. 108 III.), daher auch unter sich selbst (Fr. 20 V.).

VII. Die zwischen KN und KU liegenden Abschnitte SX, AE, BF, CH zc. der Parallelen wachsen wie die ganzen Zahlen; denn jede derselben besteht aus einem Stück, welches nach Fr. 108 III. dem vorhergehenden Abschnitte gleich ist ( $DE=SX$ ,  $GF=AE$  zc.), und einem zweiten Stück von unveränderlicher Größe (AD, BG). Aus der durch Fr. 80 V. bedingten Kongruenz der Dreiecke KXS, SDA, AGB zc. folgt nämlich nach Fr. 67 II., daß  $SX=AD=BG$  zc. Daher ist  $AE=2SX$ ,  $BF=3SX$  zc.

VIII. Zieht man im Dreieck NKU eine Strecke KP von K nach einem Punkte P in NU, so teilt KP die Abschnitte SX, AE, BF zc. der sämtlichen Parallelen in dem nämlichen Verhältnisse (vergl. Fr. 145 I.), wie die Seite NU, weil nach VII. die zu beiden Seiten von KP liegenden Abschnitte dieser Parallelen wie die ganzen Zahlen wachsen.

IX. Ist daher in VIII.  $NP=PU$ , so halbiert KP auch die sämtlichen zu NU parallelen Strecken zwischen KN und KU.

X. Wie weist man aus IX. nach, daß der Schnittpunkt der nicht-parallelen Seiten eines Trapezes in der die beiden Parallelseiten halbierenden Geraden liegt? Vergl. auch Fr. 159 XII.

## 112. Wie projiziert man eine Strecke auf eine Gerade?

I. Projektion einer Strecke AB (Fig. 123) auf eine Gerade G heißt die Strecke A,B, welche zwischen den Fuß-



(wie bei der Projektion unter dem spitzen Winkel  $w$ ) auf einen Schenkel  $DL$  des Projektionswinkels, sondern auf dessen Verlängerung  $DF$ . Faßt man in diesem Falle (ähnlich wie in Fr. 44 V.) die Projektion wegen ihrer entgegengesetzten Lage gegen den Schenkel  $DL$  (Fr. 24 II.) als negativ auf, die Projektion unter einem spitzen Winkel aber als positiv, dann gilt das Gesetz in III. auch noch für stumpfe Winkel, und bei  $w = 180^\circ$  würde die Projektion  $A_1B_1 = -AB$  werden. Wie aber bei Projektionen unter Winkeln über  $180^\circ$  bis  $360^\circ$ ?

VIII. Projiziert man eine Strecke  $AB$  unter zwei Winkeln  $w$  und  $w_1$ , die sich zu  $180^\circ$  ergänzen, so erhält man gleichgroße Projektionen, von denen aber die eine als positiv und die andere als negativ zu gelten hat (VII.).

IX. Projiziert man eine bereits unter dem spitzen Winkel  $BAC = w$  projizierte Strecke  $AB$  noch unter dem spitzen Winkel  $CAC_1 = u$ , so ist letztere Projektion  $AE$  größer als die Projektion  $AC_1$  derselben Strecke  $AB$  unter der Winkelsumme  $BAC_1 = w + u$ ; denn es ist ja  $BC_1 \parallel CE$  (Fr. 57 II.),  $BC_1$  aber fällt von  $BC$  aus nach  $A$  hin (Fr. 71 II.).

Bei Berücksichtigung von VII. gilt der vorstehende, bis jetzt nur für  $w + u < 90^\circ$  bewiesene Satz auch noch, wenn  $w + u = 90^\circ$  oder  $w + u > 90^\circ$  ist.

X. Über das Wachsen der Projektionen der von einem Punkte  $P$  nach einer Geraden  $G$  gezogenen und auf eben diese Gerade  $G$  projizierten Strecken giebt Fr. 74 X. Aufschluß. Vergl. Fr. 78 V.

### 113. Welche Eigenschaften haben die regelmäßigen Vielecke?

I. Ein ebenes geradliniges Vieleck (vergl. Fr. 65 I.) heißt regelmäßig, wenn alle seine Winkel und alle seine Seiten unter einander gleich sind, wie beim gleichseitigen Dreieck (vergl. Fr. 64 III. und 74 V.) und beim Quadrat (Fr. 108 VII.).

II. Die Winkel jeder regelmäßigen Figur sind hohl (Fr. 35); denn beim regelmäßigen  $n$ -eck beträgt die Summe der

$n$  Winkel  $(n-2) 2 R$  (Fr. 72 III.), weshalb jeder einzelne Winkel  $= \left(\frac{n-2}{n}\right) 2 R = \left(1 - \frac{2}{n}\right) 2 R < 2 R$  ist.

III. Jeder Winkel einer regelmäßigen Figur wird um so größer, je größer die Seitenzahl  $n$  ist (II.), weil  $\frac{2}{n}$  abnimmt, wenn  $n$  wächst.

IV. Halbirt man in einem regelmäßigen Vieleck ABCDEF (Fig. 124) zwei benachbarte Winkel A und B, so ist  $\angle z + \angle y < 2 R$  (II.); deshalb schneiden sich (Fr. 62 IV. 3.) die Halbierungslinien in einem Punkte M, welcher nach dem Innern der Figur hin liegen muß (Fr. 69 IX.). Aus der Gleichheit der beiden Winkelhälften  $z$  und  $y$  folgt sofort, daß  $AM = BM$  (Fr. 74 VI.). Zieht man ferner von M eine Strecke MC nach dem nächsten Eckpunkte C, so ist  $\triangle AMB \cong \triangle CMB$  (Fr. 80 II.), weil ja nach I. auch  $AB = BC$  und  $\angle y = \frac{1}{2} B = \angle x$  ist. Deshalb muß aber weiter  $MA = MC$  (Fr. 67 II.), also  $MA = MB = MC$  sein und MC den  $\angle C$  halbieren.

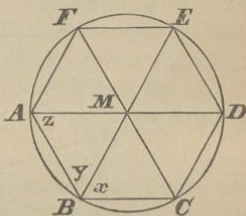


Fig. 124.

Geht man nun zu den folgenden Eckpunkten D, E u. fort, so findet sich, daß die Halbierungslinien der Winkel eines regelmäßigen Vielecks sich in einem Punkte M schneiden und das Vieleck in so viel kongruente gleichschenkelige Dreiecke teilen, als das Vieleck Seiten hat.

In diesen Dreiecken ist jeder Winkel an der Spitze M gleichgroß, nämlich:

$$\angle AMB = BMC = \dots = 4 R : n \text{ (Fr. 34 IV.)}$$

Daher ist  $\angle AMB + \angle ABC = 2 R$  (II.).

V. Die aus dem Punkte M auf die Seiten AB, BC u. gefällten Senkrechten halbieren die Seiten und sind unter sich gleich (Fr. 75 V. und VI., Fr. 81).

VI. Aus dem Punkte M läßt sich also nach IV. ein Kreis durch die Eckpunkte und nach V. ein Kreis durch die Seitenmitten (vergl. Fig. 125) schlagen; ersterer ist dem Vieleck umgeschrieben, letzterer eingeschrieben.

VII. Teilt man einen Kreis in  $n$  gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte A, B, C zc. (Fig. 125) Sehnen oder Tangenten, so erhält man ein (eingeschriebenes oder umgeschriebenes) regelmäßiges  $n$ -eck.

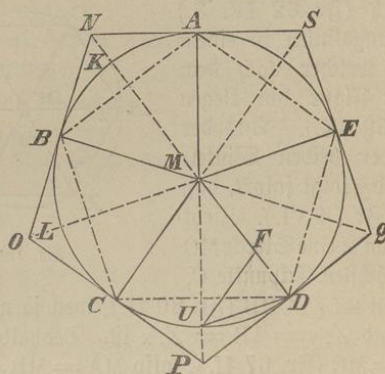


Fig. 125.

Bei dem eingeschriebenen zunächst sind die Seiten nach Fr. 91 II. unter sich gleich, weil die zwischen je zwei Teilpunkten liegenden Bögen gleich sind; die Winkel aber sind gleich (Fr. 96 II.), weil jeder als Peripheriewinkel über  $(n-2)$  solchen gleichen Kreisteilen, z. B.  $\angle ABC$  über dem Bogen AEDC, angesehen werden kann.

Zieht man ferner beim umgeschriebenen Vieleck NOPQS vom Mittelpunkte M aus Halbmesser MA, MB, MC zc. nach allen Teilpunkten, so zerfällt das  $n$ -eck in  $n$  Vierecke, und zieht man dann noch von M Strecken nach allen den Punkten

N, O, P  $\alpha$ ., in denen sich je zwei benachbarte Tangenten schneiden, so zerfällt jedes Viereck in zwei kongruente (Fr. 81 I.) rechtwinkelige Dreiecke. Die  $2n$  Winkel um M sind daher sämtlich gleich, weil die Strecken MN, MO  $\alpha$  die nach Fr. 54 IV. gleichen Centriwinkel AMB, BMC  $\alpha$  halbieren. Da deshalb die  $2n$  rechtwinkelligen Dreiecke unter sich kongruent sind (Fr. 81 II.), so folgert man daraus nach Fr. 67 II. leicht die Gleichheit sämtlicher (halben und ganzen) Seiten und Winkel des umgeschriebenen Vielecks.

VIII. Werden durch dieselben  $n$  Teilpunkte A, B, C  $\alpha$  (Fig. 125) eines Kreises ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck von  $n$  Seiten gezeichnet, so halbieren die Strecken MN, MO  $\alpha$  die Bögen AB, BC  $\alpha$ .

Der Kreis ist daher nunmehr in  $2n$  gleiche Bögen  $AK = KB = BL$   $\alpha$  geteilt.

Zeichnet man jetzt die beiden  $2n$ -ecke, so zeigt sich das eingeschriebene größer, das umgeschriebene kleiner als das eingeschriebene, beziehentlich das umgeschriebene  $n$ -eck. Durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahlen erhält man dann Vielecke von  $4n$ ,  $8n$   $\alpha$  Seiten, und da sich diese Vielecke immer inniger an den Kreis anschmiegen, je größer ihre Seitenzahl wird, so pflegt man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten zu betrachten.

#### Fünftes Kapitel.

### Einige Aufgaben und Übungssätze.

114. Wie zeichnet man ein gleichseitiges Dreieck?

Schlägt man aus den Endpunkten A und B der (gegebenen oder willkürlich gewählten) Strecke AB zwei Kreise mit AB als Halbmesser, so schneiden sich die Kreise, da die in Fr. 102 VII. gestellten Bedingungen erfüllt sind, in zwei Punkten  $C_1$  und  $C_2$ . Die beiden (kongruenten, Fr. 80 I.) Dreiecke  $ABC_1$  und  $ABC_2$