

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

3. Der Kreis und die Gerade. Zwei Kreise

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

beide stumpf, oder beide spitz sind, oder während die Summe der letzteren beiden Gegenwinkel von 180° verschieden ist (Fr. 79 VIII. 5.);

V. in einer Seite und zwei Winkeln (Fr. 79 VII.).

81. Wenn sind zwei rechtwinkelige Dreiecke kongruent?

Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind kongruent, wenn sie (außer im rechten Winkel; Fr. 39 III.) noch übereinstimmen:

I. in zwei Seiten (Fr. 80 II., oder III.);

II. in einem Winkel und einer Seite (Fr. 80 V.).

Drittes Kapitel.

Der Kreis und die Gerade. Zwei Kreise.

82. Welche Lagen kann ein Punkt gegen einen Kreis haben?

Ein Punkt in der Ebene eines Kreises liegt entweder auf dem Kreise, oder innerhalb, oder außerhalb des Kreises, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte gleich, kleiner, oder größer ist, als der Halbmesser des Kreises (Fr. 47 bis 49).

83. Wie viel Punkte hat ein Kreis mit einer in seiner Ebene liegenden Geraden gemein?

I. Liegt der Fußpunkt N_1 (Fig. 74) der vom Mittelpunkte M eines Kreises vom Halbmesser r auf die Gerade G , gefällten Senkrechten MN_1 , außerhalb dieses Kreises, ist also $MN_1 > r$, so liegen alle anderen Punkte der Geraden G , ebenfalls außerhalb des Kreises (Fr. 74 IX.).

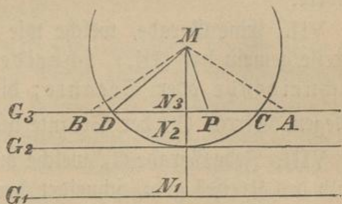


Fig. 74.

G_1 hat also keinen Punkt mit dem Kreise gemein.

II. Liegt der Fußpunkt N_2 (Fig. 74) der von M auf die Gerade G_2 gefällten Senkrechten MN_2 auf dem Kreise, ist also $MN_2 = r$, so liegen alle anderen Punkte der Geraden G_2 außerhalb des Kreises (Fr. 74 IX.).

G_2 hat dann mit dem Kreise nur einen Punkt gemein.

III. Liegt der Fußpunkt N_3 (Fig. 74) der von M auf die Gerade G_3 gefällten Senkrechten MN_3 innerhalb des Kreises, ist also $MN_3 < r$, so kann man in G_3 von N_3 aus nach beiden Seiten hin $N_3A = N_3B = r$ auftragen, und dann ist (wegen Fr. 74 VIII.) MA sowohl als MB größer als r; A und B liegen außerhalb, N_3 innerhalb des Kreises, und deshalb muß G_3 den Kreis wenigstens zweimal schneiden (Fr. 28 IV.). Da sich aber nach Fr. 74 XIII. von M aus höchstens zwei Strecken von der Länge r nach G_3 ziehen lassen, so hat auch

G_3 jezt mit dem Kreise nur zwei Punkte C und D gemein und kann überhaupt eine Gerade auch mit einem Kreise nie mehr als zwei Punkte gemein haben.

IV. Eine Gerade G_2 , welche mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat (II.), heißt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises.

V. Die Senkrechte G_2 auf einem Halbmesser MN_2 berührt in N_2 den Kreis um M (II.).

VI. Jenseits G_2 , nach G_1 hin, giebt es keinen Punkt, welcher von M um r entfernt ist (II. und Fr. 20 III.); also geht der Kreis nicht von der einen Seite von G_2 auf die andere.

VII. Eine Gerade, welche wie G_3 zwei Punkte mit dem Kreise gemein hat (III.), schneidet den Kreis, heißt eine Schneidende oder Secante; die innerhalb des Kreises gelegene Strecke CD der Secante heißt eine Sehne.

VIII. Jede Gerade G_3 , welche durch einen Punkt P innerhalb des Kreises geht, schneidet den Kreis zweimal. Fällt man nämlich von M eine Senkrechte auf G_3 , so ist entweder P selbst, oder N_3 deren Fußpunkt; da aber im letzteren Falle MN_3 noch kürzer als MP sein muß (Fr. 74 IX.), so liegt N_3

ebensowohl als P innerhalb des Kreises, und dieser wird (nach III.) von G_3 geschnitten.

IX. Jede Gerade G_3 , welche durch einen Punkt D des Kreises geht, ohne auf dem nach diesem Punkte gezogenen Halbmesser MD senkrecht zu stehen, schneidet den Kreis (nach III.), weil der Fußpunkt N_3 der von M auf G_3 gefällten Senkrechten MN_3 innerhalb des Kreises liegt, da (nach Fr. 74 IX.) MN_3 kleiner als der Halbmesser MD ist.

X. Jede Tangente G_2 steht daher (wegen II. und IX.) senkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte N_2 gezogenen Halbmesser MN_2 in dessen Endpunkte N_2 .

XI. Durch jeden Punkt N_2 eines Kreises läßt sich demnach (wegen X. und Fr. 57 III.) nur eine Tangente ziehen.

XII. Alle Punkte einer Tangente, den Berührungspunkt ausgenommen, liegen außerhalb des Kreises (X. und II.).

XIII. Liegen der Mittelpunkt M eines Kreises und ein Punkt Q zu verschiedenen Seiten einer Geraden G_3 , so schneiden sich Gerade und Kreis (VIII.). Denn steht in Fig. 74 MN_1 in N_1 auf G_3 senkrecht, so wird eine durch Q gehende Parallele zu G_3 MN_2 entweder in N_2 , oder zwischen N_2 und N_3 schneiden, und N_3 liegt demnach innerhalb des Kreises (Fr. 82).

XIV. Nach X. lassen sich nicht drei unter einander parallele Tangenten an denselben Kreis legen.

84. Ist der Kreis krumm?

I. Da nach Fr. 74 XII. sich von jedem Punkte Q in NP, Fig. 54 auf S. 65, ein Kreis durch die beiden Punkte C und D schlagen läßt, diese Kreise aber sich beim Aufeinanderlegen mit ihren Mittelpunkten nicht decken, vielmehr ungleich sind (Fr. 49 IV.), so ist der Kreis und jeder Kreisbogen krumm (Fr. 10 II. und IV.). Vergl. Fr. 88 und 102.

II. Kein Kreisbogen DEC (Fig. 75 S. 82) kann mit seiner Sehne DC zusammenfallen (I; oder Fr. 83 III. und VII.).

Ein ähnlicher Übergang der Sehne in die Tangente liegt schon in Fr. 83 III. und II. angedeutet, insofern die Secante, je mehr ihre Entfernung vom Mittelpunkt dem Halbmesser gleich wird, um so näher an die Tangente heranrückt.

Anm. Die in IV. gegebene allgemeinere Erklärung des Begriffs „Berührung“ (vergl. Fr. 83 IV.) läßt sich für alle krummen Linien beibehalten.

Die so bestimmte Tangente kann aber, wie Fig. 77 zeigt, die Krumme unter Umständen an einem anderen Punkte, oder auch an ihrem Berührungspunkte E selbst schneiden; im Berührungspunkte E nur, wenn die Krumme in diesem Berührungspunkte von der konkaven zur konvexen Krümmung gegen dieselbe Seite der Geraden übergeht, wenn der Berührungspunkt zugleich ein Wendepunkt ist. Vergl. Fr. 27 III.

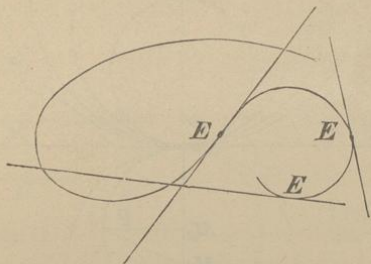


Fig. 77.

86. Wovon hängt die Krümmung des Kreises ab?

I. Durch denselben Punkt P einer Geraden G (Fig. 78 S. 84) lassen sich beliebig viel Kreise legen, welche diese Gerade berühren. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf der im Punkte P errichteten Senkrechten HY zu G (Fr. 83 X.).

II. Zieht man zwei solche Berührungskreise von verschiedenem Halbmesser, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf derselben Seite von G liegen, so liegt jeder Punkt Q des Kreises vom kleineren Halbmesser $M_2P = r_2$ innerhalb des Kreises mit größerem Halbmesser $M_1P = r_1$ (Fr. 82), weil ja

$$M_1Q < M_1M_2 + M_2Q \quad (\text{Fr. 76 I.})$$

$$M_1Q < M_1M_2 + M_2P \quad (\text{Fr. 48 III. und 20 IV.})$$

$$M_1Q < M_1P \quad (\text{Fr. 20 II.}).$$

III. Es liegt also in der Nähe des Berührungspunktes P (Fig. 78) der größere Kreis zwischen der Tangente G und dem kleineren Kreise, der kleinere Kreis entfernt sich rascher von der Tangente; deshalb ist der Kreis mit kleinerem Halbmesser stärker gekrümmt, als der Kreis mit größerem Halbmesser.

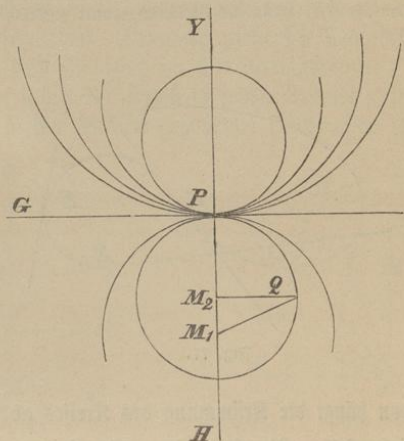


Fig. 78.

IV. Derselbe Kreis hat an allen Stellen gleich starke Krümmung; man kann ihn in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt drehen. Vergl. Fr. 47 VI.

V. Je größer der Halbmesser wird, desto enger schmiegt sich der Kreis zwar an die Gerade G an, dennoch kann er nie mit der Geraden zusammenfallen; dazu müßte der Halbmesser über alle Grenzen hinaus wachsen, er müßte unendlich groß werden. Vergl. Fr. 148 VII.

87. Was ist ein Sektor und ein Segment des Kreises?

I. Zieht man nach den Endpunkten einer Sehne DC (Fig. 79) die Halbmesser MD und MC, so entstehen außer dem gleichschenkeligen Dreieck DMC noch zwei Figuren: der Ausschnitt oder Sektor DMCED zwischen dem Bogen $\widehat{DEC}$ und den Halbmessern, und der Abschnitt oder das Segment DCED zwischen dem Bogen $\widehat{DEC}$ und der Sehne DC.

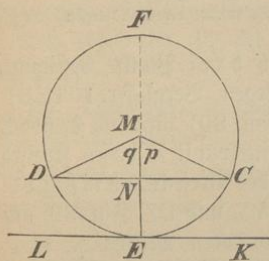


Fig. 79.

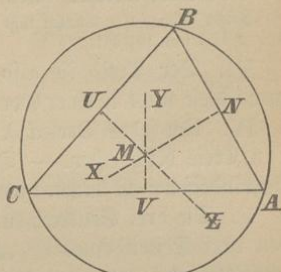


Fig. 80.

II. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei Abschnitte, von denen derjenige DCFD (Fig. 79), welcher den Mittelpunkt M enthält, einen größeren Bogen DFC und eine größere Fläche hat als der Halbkreis und als der andere DCED. Ersterer heißt ein größerer, letzterer ein kleinerer Abschnitt; beide ergänzen sich zur ganzen Kreisfläche.

III. Je zwei Halbmesser MD und MC (Fig. 79) teilen den Kreis in zwei Ausschnitte; der größere derselben DMCFD und sein Bogen $\widehat{DFC}$ ist größer als der Halbkreis.

IV. Auch die zu Bögen von 90° , 60° und 45° gehörigen Kreisabschnitte nennt man Quadrant, Sextant, Oktant. Vergl. Fr. 50 III.

88. Durch wie viel Punkte ist ein Kreis bestimmt?

I. Denkt man sich die drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte A, B, C (Fig. 80) durch zwei Strecken AB und AC

verbunden und errichtet man auf diesen in deren Mitten N und V die Senkrechten NX und VY, so schneiden sich dieselben in einem Punkte M (Fr. 71 VI.); zugleich ist $BM = AM$ und $CM = AM$ (Fr. 74 XI.), daher auch $BM = AM = CM$ (Fr. 20 V.). Durch A, B, C läßt sich also ein Kreis legen (Fr. 47 II.).

II. NX und VY schneiden sich aber nur in einem Punkte (Fr. 26); daher giebt es (wegen Fr. 74 XVI.) auch nur einen Kreis, welcher durch A, B und C geht.

Anm. Durch vier Punkte läßt sich nicht immer ein Kreis legen. Vergl. Fr. 97 III. und 161 III.

III. Der Kreis ist also durch drei Punkte bestimmt, wenn diese nicht in einer Geraden liegen. Vergl. Fr. 104 XIII.

IV. Um jedes Dreieck ABC (Fig. 80) läßt sich demnach ein Kreis beschreiben. — Der Mittelpunkt M dieses Kreises liegt indessen nicht immer innerhalb des Dreiecks, wie in Fig. 80.

V. Die drei Senkrechten NX, VY und UZ, Fig. 80, auf den drei Seiten eines $\triangle ABC$ in deren Mitten N, V, U schneiden sich in einem und dem selben Punkte M. Denn aus $MB = MC$ (I.) folgt, daß M zugleich in UZ liegt (Fr. 74 XVII.).

In I. hätte man also auch die Senkrechte UZ auf BC in deren Mitte U benutzen können und würde doch nur den einen Kreis gefunden haben.

89. Wie findet man den Mittelpunkt eines Kreises?

I. Macht man EF (Fig. 81) senkrecht auf der Sehne DC in deren Mitte N, so geht EF durch den Mittelpunkt M (Fr. 48 I. und 74 XVII.).

Der Mittelpunkt M liegt also in der Mitte des Durchmesser EF (Fr. 48 II.).

II. Ein anderes Verfahren ergibt sich aus Fr. 88 I.

III. Ein drittes Verfahren wird in Fr. 102 XVIII. angegeben werden.

IV. Eine vierte Lösung kann Fr. 123 bieten.

V. Auch schneidet sich im Mittelpunkte M die Normale EF auf der Tangente LK und die Senkrechte auf der Sehne ED in deren Mitte N.

90. Was macht die Halbierungslinie eines Centriwinkels?

I. Halbirt man den Centriwinkel DMC (Fig. 81) eines Ausschnittes, so schneidet die Halbierungslinie ME sowohl den Bogen $\widehat{DC}$ in E, als die Sehne DC in N (Fr. 22 IV. und 52 II.).

II. Jeder Sektor DMCED ist symmetrisch gegen die Halbierungslinie ME seines Centriwinkels DMC (Fr. 31, 48 I., 64 IV.).

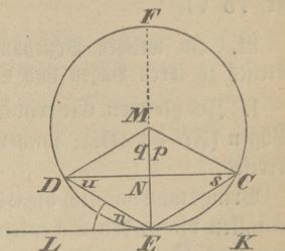


Fig. 81.

III. Die Halbierungslinie ME halbirt daher nicht bloß die Sehne $\overline{DC}$ in N und den Bogen $\widehat{CED}$ in E, sondern auch den Bogen $\widehat{DFC}$ in F. Vergl. Fr. 54 III.

IV. Zugleich ist die Halbierungslinie $ME \perp DC$.

V. Ebenso halbirt die Verbindungslinie MN des Mittelpunktes M und der Sehnenmitte N den Centriwinkel DMC und in E den Bogen $\widehat{DC}$; auch ist $MN \perp DC$. Vergl. Fr. 75 VI.

VI. Daher halbirt die Verbindungslinie ME des Mittelpunktes M und der Bogenmitte E den Centriwinkel DMC und die Sehne $\overline{DC}$ winkelrecht in N (Fr. 57 III.).

VII. Eben deshalb geht auch die Verbindungslinie NE der Sehnenmitte N und der Bogenmitte E durch den Mittelpunkt M; halbirt den Winkel DMC und steht senkrecht auf $\overline{DC}$.

VIII. Die Senkrechte MN ferner vom Mittelpunkte M auf die Sehne $\overline{DC}$ halbirt diese in N, den Bogen $\widehat{DC}$ in E und den Centriwinkel DMC. Vergl. Fr. 75 VI.

IX. Auch die Senkrechte EN von der Bogenmitte E auf die Sehne $\overline{DC}$ halbirt daher DC in N, geht durch den Mittelpunkt M und halbirt den Winkel DMC.

X. Die in der Mitte N der Sehne DC errichtete Senkrechte NF geht durch den Mittelpunkt M , halbiert den Winkel DMC und die Bögen $\widehat{DEC}$ und $\widehat{DFC}$ in E und F . Vergl. Fr. 75 VI.

91. In welchen Beziehungen stehen die Sehnen desselben Kreises zu ihren Bögen und Centriwinkeln?

I. Zu gleichen Centriwinkeln gehören nicht nur gleiche Bögen (Fr. 54 III.), sondern auch gleiche Sehnen desselben Kreises.

Bringt man nämlich die Centriwinkel zum Decken (Fr. 31), so fallen die in den Schenkeln und zugleich auf dem Kreise liegenden Sehnenendpunkte auf einander, und die Sehnen decken sich (Fr. 22 III.).

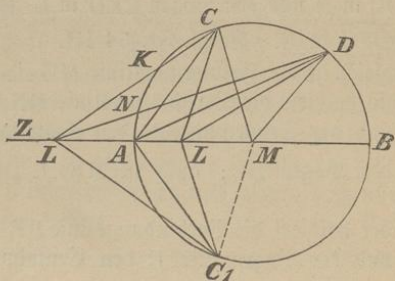


Fig. 82.

II. Zu gleichen Bögen desselben Kreises gehören daher nicht nur gleiche Centriwinkel (Fr. 54 III.), sondern auch gleiche Sehnen.

III. Legt man zwei gleiche Sehnen DC (Fig. 81) desselben Kreises so auf einander (Fr. 22 V.), daß die Mittelpunkte M von den Sehnen DC aus nach derselben Seite hin liegen, so fallen die Mittelpunkte nicht bloß beide in die auf der Sehne DC in deren Mitte N errichtete Senkrechte EF (Fr. 90 X.), sondern die Mittelpunkte müssen nach Fr. 74 X. (oder wegen Fr. 77 IX.) auch auf einander fallen.

IV. Daher sind die zu gleichen Sehnen desselben Kreises gehörigen Bögen, Segmente, Sektoren und Centriwinkel entweder gleich, oder sie ergänzen sich zum ganzen Kreis (360°), wie $\widehat{DEC}$ und $\widehat{DFC}$.

V. Die zu gleichen Sehnen desselben Kreises gehörenden hohlen Centriwinkel sind stets gleich (IV.).

VI. Zieht man von einem Punkte A (Fig. 82) des Kreises zwei Sehnen AC und AD nach zwei Punkten C und D, welche auf derselben Seite des Durchmessers AB liegen, so ist diejenige Sehne AD die größere, welche zum größern Bogen $\widehat{AD}$, zum größern Centriwinkel DMA gehört, mit der Verlängerung AZ des Durchmessers BA den größern Winkel DAZ einschließt.

Ist nämlich $\angle DAZ > \angle CAZ$, so liegt D zwischen C und B, es ist also $\widehat{AD} > \widehat{AC}$ und deshalb $\angle DMA > \angle CMA$.

Daher muß aber in den beiden Dreiecken DMA und CMA (nach Fr. 78 II.) $DA > CA$ sein.

VII. Macht man auf der andern Seite des Durchmessers AB den Bogen $\widehat{AC_1} = \widehat{AC}$, oder $\angle C_1MA = \angle CMA$, oder $\angle C_1AZ = \angle CAZ$, so ist $\triangle C_1MA \cong \triangle CMA$ (Fr. 80 II.) und daher auch die Sehne $\widehat{AC_1} = \widehat{AC}$ (Fr. 67 II.).

VIII. Also wachsen die von demselben Punkte A des Kreises auslaufenden Sehnen mit den Bögen und Centriwinkeln, bis diese 180° betragen; während dann die Bögen und Centriwinkel von 180° bis 360° wachsen, nehmen die Sehnen in derselben Weise wieder ab. Demnach

IX. lassen sich von einem Punkte A des Kreises aus nicht mehr als zwei unter sich gleiche Sehnen ziehen, und diese liegen auf verschiedenen Seiten des Durchmessers AB. Vergl. XII.

X. Jede Sehne ist kleiner als der Durchmesser (VIII.).

XI. Der zu einer Sehne desselben Kreises gehörige, 180° nicht übertreffende Bogen und Centriwinkel ist um so größer, je größer die Sehne ist.

XII. Ist dagegen der Bogen oder Centriwinkel größer als 180° , so ist er um so kleiner, je größer die Sehne ist.

XIII. Zieht man von einem in einem Halbmesser AM, oder in dessen Verlängerung AZ gelegenen Punkte L (Fig. 82) zwei Strecken LC und LD nach zwei auf derselben Seite des Durchmessers AB liegenden Punkten C und D, so ist wiederum (VI.) nach Fr. 78 II. diejenige Strecke LD die größere, welche zu dem größern Bogen $\widehat{AD}$, der größern Sehne $\overline{AD}$, dem größern Centriwinkel DML gehört.

LD wächst für den innerhalb liegenden Punkt L auch mit dem $\angle DLZ$, für den außerhalb liegenden Punkt L dagegen nicht schon von A aus, sondern erst von derjenigen Lage ab, in welcher DL den Kreis berührt.

XIV. Macht man auf der andern Seite des Durchmessers AB den Bogen $\widehat{AC_1} = \widehat{AC}$, oder die Sehne $\overline{AC_1} = \overline{AC}$, oder $\angle C_1MA = \angle CMA$, oder $\angle C_1LZ = \angle CLZ$, so ist $\triangle C_1ML \cong \triangle CML$ (Fr. 80 II.), und daher auch die Strecke $LC_1 = LC$ (Fr. 67 II.).

XV. Auch die von einem Punkte L (innerhalb, oder außerhalb des Kreises) nach Kreispunkten gezogenen Strecken wachsen erst und nehmen dann wieder ab, wenn der Kreispunkt von A aus den ganzen Kreis durchläuft.

XVI. Dabei ist LA die kleinste und LB die größte Strecke für jeden Punkt L; beide Strecken liegen in dem durch L gehenden Durchmesser AB.

XVII. Auch von L (Fig. 82) aus lassen sich nicht mehr als zwei gleiche Strecken an den Kreis ziehen.

XVIII. Umgekehrt ist in Fig. 82 $\widehat{AD} > \widehat{AC}$, $\overline{AD} > \overline{AC}$, $\angle DML > \angle CML$ und $\angle DLZ > \angle CLZ$, sobald $LD > LC$, wobei jedoch D und C auf derselben Seite des Durchmessers AB liegen müssen und, falls L außerhalb liegt, zwischen B und dem Berührungspunkte der von L ausgezogenen Tangente.

XIX. Von keinem Punkte in der Ebene eines Kreises, außer vom Mittelpunkte, lassen sich daher (wegen IX. und XVII.) mehr als zwei gleichlange Strecken nach dem Kreise ziehen.

92. Wie hängt die Größe der Sehnen desselben Kreises von deren Entfernung vom Mittelpunkte ab?

I. Gleichweit vom Mittelpunkte abstehende Sehnen sind gleich.

Denn wenn man die durch ihre Mitten gelegten Halbmesser aufeinanderlegt (Fr. 22 V.), so fallen die Mitten auf einander (Fr. 22 V.), und die Sehnen selbst decken sich (Fr. 57 III.).

II. Die dem Mittelpunkte nähere Sehne eines Kreises ist größer als die entferntere.

Legt man die beiden Sehnen AB und KS (Fig. 83) mit ihren Mitten N und V auf denselben Halbmesser ME, so werden die Sehnen beide auf ME senkrecht (Fr. 90 V.), demnach parallel (Fr. 57 II.). Daher liegen die Endpunkte B und A der näheren Sehne von E aus jenseit der

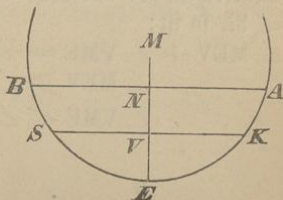


Fig. 83.

Endpunkte K und S der entfernteren Sehne (Fr. 26), so daß

$$\angle BMA > \angle SMK \text{ (Fr. 20 III.)}$$

und

$$BA > SK \text{ (Fr. 91 VI.).}$$

III. Auch hier erscheint wieder (vergl. Fr. 91 X.) der Durchmesser, dessen Entfernung vom Mittelpunkte ja $= 0$ ist, als die größte Sehne.

IV. Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Mittelpunkte entfernt; denn sonst müßten sie nach II. ungleich sein.

V. Die größere Sehne eines Kreises ist dem Mittelpunkte näher als die kleinere. Denn wegen II. kann die entferntere nicht größer und wegen IV. nicht eben so groß sein wie die nähere.

93. Wenn halbieren sich zwei Sehnen desselben Kreises?

Nie; denn zieht man durch die Mitte E (Fig. 84) einer Sehne AB den Durchmesser DC und eine Sehne LQ, so ist

$$\widehat{CA} > \widehat{CL}; \quad \widehat{CQ} > \widehat{CB} \quad (\text{Fr. 20 III.})$$

$$EA > EL; \quad EQ > EB \quad (\text{Fr. 91 XIII.})$$

$$EA = EB \text{ Konstr.}$$

$$EQ > EB > EL \quad (\text{Fr. 20 IV. und VII.}).$$

Wohl aber halbieren sich alle Durchmesser (Fr. 48 II.).

94. Wie wachsen die durch denselben Punkt gehenden Sehnen desselben Kreises?

I. Fällt man vom Mittelpunkte M (Fig. 84) auf zwei durch den Schnittpunkt E einer Sehne BA und des auf BA senkrechten Durchmessers CD gelegte Sehnen QL und KF die Senkrechten MV und MU, und ist dabei $\angle DEK < \angle DEQ < R$, so ist:

$$\angle MEV + \angle VME = \angle MEU + \angle UME \quad (\text{Fr. 71 II.})$$

$$\angle MEV > \angle MEU \quad (\text{Fr. 20 III.})$$

$$\angle VME < \angle UME \quad (\text{Fr. 20 IX.}).$$

Da somit EK von MV in einem zwischen E und U gelegenen Punkte geschnitten wird, ist das Dreieck MUV bei U stumpfwinkelig (Fr. 37 II.), daher

$$MV > MU \quad (\text{Fr. 74 VIII.})$$

$$\text{und } FK > LQ \quad (\text{Fr. 92 II.}).$$

II. Die durch E gezogenen Sehnen werden um so größer, je mehr sie sich von der zum Durchmesser senkrechten Lage AB der Lage des Durchmessers CD nähern (I.).

III. Der Durchmesser CD ist die größte, BA die kleinste Sehne, welche sich durch E ziehen läßt (II.). Vergl. Fr. 92 III.

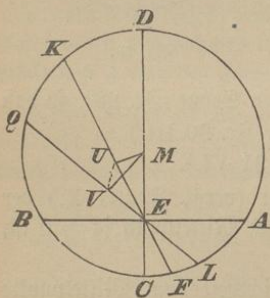


Fig. 84.

IV. Rückt E nach C, so führt II. auf Fr. 91 VI. zurück.

V. Daß der Satz II. auch noch gilt, wenn E außerhalb des Kreises rückt, läßt sich entweder auf dieselbe Weise, oder auch aus Fr. 91 XIII. beweisen, da ja in Fig. 82 $ND = LD - LN > LC - LK = KC$ ist (Fr. 20 X.).

95. Was ist ein Peripherie-, Sehnen- und Secantenwinkel?

I. Umfangswinkel oder Peripheriewinkel heißt ein Winkel CAB (Fig. 85), dessen Scheitel A im Umfange liegt und dessen Schenkel CA und BA Sehnen sind.

II. Die Schenkel AE und DE eines Sehnenwinkels AED sind Teile von Sehnen, die Schenkel AF und DF eines Secantenwinkels AFD sind Secanten, und zwar liegt der Scheitel F des letztern außerhalb, dagegen der Scheitel E des erstern innerhalb des Kreises.

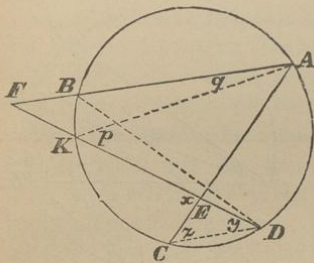


Fig. 85.

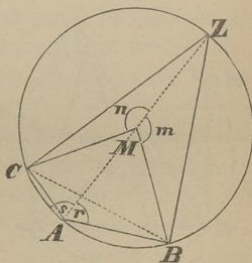


Fig. 86.

96. Nach welchen Gesetzen hängt die Größe eines Peripheriewinkels von dem zu ihm gehörigen Centrwinkel und Bogen ab?

I. Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß, als der über demselben Bogen stehende Centrwinkel.

1. Ist zunächst der Centrwinkel AMZ, Fig. 86, ein flacher, so ist:

$$\left. \begin{aligned} \angle MBA &= \angle MAB \\ \angle MBZ &= \angle MZB \end{aligned} \right\} \text{ (Fr. 48 III., 74 I.)}$$

$$\begin{aligned} \angle ABZ &= \angle MBA + \angle MBZ \\ &= \angle MAB + \angle MZB \text{ (Fr. 20 II., VIII.)} \end{aligned}$$

$$\angle ABZ = 90^\circ = \frac{1}{2} \angle AMZ \text{ (Fr. 71 III., 39 II.)}$$

2. Ist ferner der Centriwinkel $BMC = m + n$ überstumpft, so zerlegt der Durchmesser AMZ (Fig. 86) ihn und den Peripheriewinkel BAC in zwei Teile, und aus:

$$\left. \begin{aligned} \angle m &= \angle r + \angle MBA = 2 \angle r \\ \angle n &= \angle s + \angle MCA = 2 \angle s \end{aligned} \right\} \text{ (Fr. 69 VI., 74 I.)}$$

erhält man dann durch Addition nach Fr. 20 VIII.

$$\angle (m + n) = 2 \angle (r + s).$$

3. Ist endlich der Centriwinkel BMC (Fig. 87) ein hohler, so kann der Mittelpunkt M entweder auf einem Schenkel des Peripheriewinkels, oder zwischen dessen Schenkeln, oder außerhalb derselben liegen.

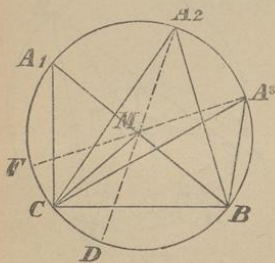


Fig. 87.

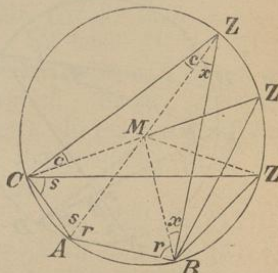


Fig. 88.

a) Im erstern Falle ist $\angle BMC = \angle MA_1C + \angle MCA_1$ (Fr. 69 VI.); nun ist $\angle MA_1C = \angle MCA_1$ (Fr. 48 III., 74 I.) und demnach $\angle BMC = 2 \angle MA_1C$.

b) Zieht man ferner im zweiten Falle den Durchmesser A_2D , so ist (wie eben bewiesen wurde) $\angle BMD = 2 \angle BA_2D$ und $\angle CMD = 2 \angle CA_2D$, woraus man durch Addition nach

Fr. 20 VIII. erhält: $\angle BMC = 2 \angle BA_2D + 2 \angle CA_2D$
 $= 2 \angle (BA_2D + CA_2D) = 2 \angle BA_2C.$

c) Im dritten Falle ziehe man den Durchmesser A_3F und findet dann aus 3 a): $\angle BMC = \angle BMF - \angle FMC$
 $= 2 \angle BA_3F - 2 \angle FA_3C = 2 \angle (BA_3F - FA_3C)$
 $= 2 \angle BA_3C.$

II. Alle Peripheriewinkel in demselben Kreisabschnitt, oder über gleichen Bögen desselben Kreises sind gleich; denn jeder gleicht ja der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

III. Jeder Peripheriewinkel über oder in dem Halbkreise ist $= 90^\circ$, da der zugehörige Centriwinkel ein flacher ist.

IV. Jeder Peripheriewinkel im größern Abschnitte ist kleiner, jeder im kleinern Abschnitte größer als 90° , weil der zugehörige Centriwinkel im erstern Falle hohl, im andern überstumpft ist.

V. Deshalb steht jeder Peripheriewinkel von 90° auf einem Halbkreise (III. und IV.) oder über einem Durchmesser; ferner

VI. muß der Mittelpunkt M eines durch den Scheitel B (Fig. 88) eines rechten Winkels ABZ gelegten, die Schenkel dieses Winkels in A und Z schneidenden Kreises in der Mitte der Strecke AZ liegen und ebenso

VII. muß ein über der Hypotenuse AZ eines rechtwinkligen Dreiecks ABZ aus der Hypotenusenmitte M geschlagener Kreis durch den Scheitel B des rechten Winkels gehen. Denn läge B nicht auf dem Kreise, so müßte (wegen Fr. 77 IV. und 96 IV., aber im Widerspruch mit Fr. 96 III.) der Winkel im Halbkreise über AZ von 90° verschieden sein.

VIII. Zwei Peripheriewinkel BAC und BZC (Fig. 88) über derselben Sehne BC in entgegengesetzten Abschnitten desselben Kreises (oder zwei Gegenwinkel in einem Kreis- oder Sehnenviereck ABZC) geben nach I. als Summe 180° , weil die Summe der zugehörigen Centriwinkel 360° beträgt. Vergl. Fr. 133 IV.

Anm. Man könnte zuerst auch den Satz VIII. mit Hilfe von Fig. 88 aus Fr. 74 I. und 72 III. beweisen und daraus dann die Sätze II., III. und I.

IX. Nach III. bis IV. läßt sich der Kreis als der geometrische Ort (vergl. Fr. 74 XVII.) des Scheitels eines über der Strecke AZ zu zeichnenden rechten Winkels auffassen. Vergl. auch Fr. 98 III.

97. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Sehnen- und Secantenwinkeln und den Peripheriewinkeln?

I. Jeder Sehnenwinkel x , Fig. 89, ist größer als der über seinem Bogen $\widehat{CK}$ stehende Peripheriewinkel y , und zwar gleich der Summe ($y + z$) der beiden Peripheriewinkel y und z , welche über den zu ihm und zu seinem Scheitelwinkel gehörigen Bögen $\widehat{CK}$ und $\widehat{DA}$ stehen (Fr. 69 VI. und 96 II.).

II. Jeder Secantenwinkel F ist kleiner als der über seinem Bogen $\widehat{DA}$ stehende Peripheriewinkel p , und zwar (nach Fr. 69 VI. und 96 II.) gleich der Differenz ($p - q$) der Peripheriewinkel p und q , welche über den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bögen $\widehat{DA}$ und $\widehat{BK}$ stehen. Nach Fr. 69 VI. ist nämlich $F + q = p$, und dies geht in $F = p - q$ über, wenn man (nach Fr. 20 VIII.) beiderseits q subtrahiert.

III. Beträgt in einem Viereck $ABZC$ (Fig. 88) die Summe zweier Gegenwinkel A und Z 180° , so läßt sich um das Viereck ein Kreis beschreiben. Ginge nämlich der nach Fr. 88 I. durch A , B und C gelegte Kreis nicht durch Z , so würde $\angle Z$ als Sehnenwinkel, oder als Secantenwinkel nach Fr. 97 I., bezw. II. entweder größer, oder kleiner als $180^\circ - A$ sein müssen.

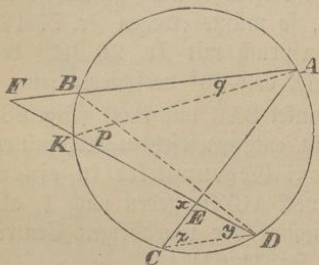


Fig. 89.

IV. Wie beweist man aus Fr. 91 II., daß in jedem Sehnentrapez die nicht parallelen Seiten gleich sein müssen?

98. Wie wachsen die Peripheriewinkel mit ihren Sehnen?

I. Ein spitzer Peripheriewinkel in demselben Kreise ist (wegen Fr. 96 I.) um so größer, ein stumpfer aber um so kleiner, je größer die zugehörige Sehne ist, weil ja nach Fr. 91 XI. und XII. der zugehörige Centriwinkel im ersten Falle mit der Sehne wächst, im zweiten abnimmt.

II. Aus Fr. 91 V. folgt, daß zwei zu gleichen Sehnen desselben Kreises gehörende spitze Peripheriewinkel unter sich gleich sind, und ebenso zwei stumpfe.

III. Die Scheitel gleicher Winkel über derselben Strecke CB (Fig. 87) und auf derselben Seite dieser Strecke liegen auf einem durch die Endpunkte der Strecke gehenden Kreise (Fr. 96 I., 97 I. und II.). Vergl. Fr. 96 VIII. und IX.

IV. Zu gleichen Peripheriewinkeln desselben Kreises gehören (wegen I.) gleiche Sehnen.

V. Sind zwei Peripheriewinkel desselben Kreises ungleich, so gehört zu dem größeren eine größere Sehne, falls die beiden Winkel spitz sind, dagegen eine kleinere Sehne, falls die beiden Winkel stumpf sind (II. und I.).

VI. Ein spitzer und ein stumpfer Peripheriewinkel desselben Kreises besitzen nach IV. gleiche Sehnen, wenn sie sich zu 180° ergänzen. Denn nach Fr. 96 VIII. ist ja der über der Sehne des spitzen Winkels w im kleineren Kreisabschnitte liegende Peripheriewinkel $w' = 180^\circ - w$.

VII. Will man über einer Strecke CB, Fig. 87 S. 94, einen Kreis beschreiben, in welchem der Peripheriewinkel über CB eine bestimmte Größe A besitzt, so kann man zunächst für Fr. 89 II. einen dritten Punkt A des Kreises bestimmen (Fr. 62 IV.), indem man an CB zwei Winkel BCA und CBA anträgt, deren Summe $= 180^\circ - A$ ist.

Auch würde die auf CB in deren Mitte errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises gehen

(Fr. 90 X.) und in M geschnitten werden von einer Geraden BA_1 , welche mit CB einen $\angle CBA_1 = 90^\circ - \angle A$ macht; denn dann ist ja $\angle A_1 = \frac{1}{2} \angle CMB = 90^\circ - \angle CBA_1 = \angle A$.

99. Welche Sätze gelten über parallele Sehnen?

I. Verbindet man die Endpunkte der beiden parallelen Sehnen DC und LK (Fig. 90) durch die vier Sehnen LC, LD, DK und CK, so folgt aus der Gleichheit der Winkel u und v (Fr. 62 I. 2.), daß zunächst $\widehat{CK} = \widehat{DL}$ (Fr. 98 IV.), und deshalb auch $\widehat{CK} = \widehat{DL}$ ist (Fr. 91 IV.), weil die Summe dieser Bögen $< 360^\circ$ ist.

Dann ist aber weiter auch $\widehat{CKL} = \widehat{DLK}$ (Fr. 20 VIII.) und $\widehat{CL} = \widehat{DK}$ (Fr. 91 II.).

II. Die zwischen zwei parallelen Sehnen DC und LK liegenden Bögen sind also gleichgroß; ebenso paarweise die vier ihre vier Endpunkte verbindenden Sehnen.

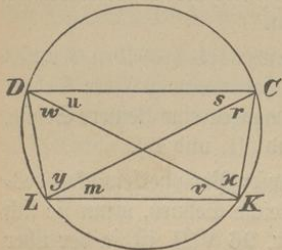


Fig. 90.

III. In Fig. 90 ist aber nicht bloß $\angle u = \angle m$ und $\angle s = \angle v$ (Fr. 96 II.), sondern auch $\angle u = \angle v$ und $\angle s = \angle m$ (Fr. 62 I. 2.), und demnach wegen Fr. 20 V.:

$$\angle u = \angle m = \angle s$$

und

$$\angle m = \angle s = \angle v.$$

Da aber weiter $\angle r = \angle w$ und $\angle x = \angle y$ (Fr. 96 II.), so ist nach Fr. 20 VIII. auch:

$$\begin{aligned} \angle (r + s) &= \angle (w + u) \quad \text{und} \\ \angle (x + v) &= \angle (y + m). \end{aligned}$$

IV. Jede der parallelen Sehnen DC und LK macht also mit den von ihren beiden Endpunkten auslaufenden Sehnen CL und DK, CK und DL paarweise gleiche Winkel (III.).

V. Sind umgekehrt die beiden sich innerhalb des Kreises nicht schneidenden Sehnen $\overline{CK}$ und $\overline{DL}$ (Fig. 90) und deshalb (nach Fr. 91 IV.) auch die zu denselben gehörigen, 180° nicht erreichenden Bögen $\widehat{CK}$ und $\widehat{DL}$ gleichgroß, so ist $\angle s = \angle u$ (Fr. 98 II.); da aber auch $\angle s = \angle v$ (Fr. 96 II.), so ist nach Fr. 20 V. auch $\angle u = \angle v$, und daraus folgt, daß $DC \parallel LK$ ist (Fr. 62 II.).

Anm. Sind die innerhalb des Kreises sich schneidenden Sehnen DK und LC gleich, so ist nicht immer $DC \parallel LK$, sondern nur, wenn DK und LC sich im Mittelpunkte schneiden, oder wenn $\overline{DC} > \overline{LK}$. Nach Fr. 91 VII. lassen sich ja, sofern DK nicht ein Durchmesser ist, von L aus zwei Sehnen LC_1 und LC_2 ziehen, welche $= DK$ sind.

VI. Der Satz II. hört nicht auf zu gelten, wenn die eine Sehne LK zur Tangente wird (Fig. 91).

Dann steht der Halbmesser ME nach dem Berührungspunkte E sowohl auf der Tangente LK (Fr. 83 X.), als auf der Sehne DC (Fr. 62 V.) senkrecht; deshalb ist $\angle p = \angle q$ (Fr. 90 VII.) und wegen Fr. 54 III. und 91 I. auch:

$$\widehat{CE} = \widehat{DE} \quad \text{und} \quad \overline{CE} = \overline{DE}.$$

VII. Wäre in Fig. 90 auch noch $DL \parallel CK$, so wäre auch $\angle w = \angle x = \angle y = \angle r$ (III.). Das Viereck $DCKL$ besäße dann vier rechte Winkel (Fr. 71 III.), es wäre auch $\overline{DC} = \overline{LK}$ und die beiden Diagonalen DK und CL schnitten sich im Mittelpunkte des Kreises.

100. Welche Neigung hat eine Tangente LK gegen eine durch den Berührungspunkt E gehende Sehne ED ?

I. Zieht man in Fig. 91 durch den Endpunkt D der Sehne ED die Sehne $DC \parallel LK$, so wird $\angle u = \angle n$ (Fr. 62 I.); weil aber nach Fr. 99 VI. $CE = ED$, so ist auch $\angle u = \angle s$ (Fr. 74 I.), und nun weiter $\angle n = \angle s$, d. h.

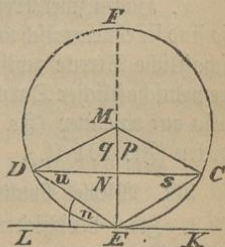


Fig. 91.

der spitze Winkel n zwischen Tangente KEL und Sehne ED gleicht dem über der Sehne stehenden spitzen Peripheriewinkel s .

II. Dasselbe gilt auch von den beiden stumpfen Winkeln, weil $\angle KED = 180^\circ - n$ (Fr. 39 IV.), der stumpfe Peripheriewinkel im kleineren Abschnitte über ED aber $180^\circ - s$ ist (Fr. 96 VIII.).

101. Wenn sind Kreise concentrisch und wenn excentrisch?

I. Haben zwei Kreise K_1 und K_2 (Fig. 92) in derselben Ebene einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt M , so heißen sie concentrische Kreise.

II. Zwei concentrische Kreise haben entweder alle, oder keinen Punkt gemein, jenachdem sie gleiche, oder ungleiche Halbmesser haben (Fr. 49 I. und III.). Vergl. auch Fr. 82.

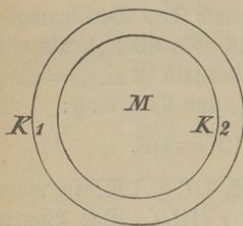


Fig. 92.

III. Zwei Kreise in derselben Ebene, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 nicht zusammenfallen, heißen excentrische Kreise; die durch die Mittelpunkte gehende Gerade heißt die Centrale, die Verbindungsstrecke $M_1M_2 = c$ der Mittelpunkte die Centralstrecke.

IV. Die Centrale schneidet jeden Kreis in einem Durchmesser.

V. Haben zwei Kreise zwei Punkte ihrer Centralen gemein, so sind sie concentrisch und auch gleich. Denn die ihnen gemeinschaftliche Strecke zwischen diesen beiden Punkten wäre ein gemeinschaftlicher Durchmesser (IV.), ihre Mittelpunkte fielen also auf einander (Fr. 48 II.) und die Kreise müßten sich decken (Fr. 101 II.).

102. Wieviel Punkte haben zwei excentrische Kreise gemein?

I. Zwei verschiedene Kreise können nicht mehr als zwei Punkte gemein haben, da sich nach Fr. 88 III. durch drei Punkte nur ein Kreis legen läßt. Vergl. auch Fr. 91 XIX.

II. Zwei excentrische Kreise können nicht zwei Punkte ihrer Centralen gemein haben (Fr. 101 V.).

III. Haben zwei excentrische Kreise einen Punkt P (Fig. 93) außerhalb der Centralen gemein, so haben sie auch noch einen Punkt Q gemein, welcher auf der anderen Seite der Centralen M_1M_2 so liegt, daß die Strecke PQ durch die Centrale in E senkrecht halbiert wird. Ist nämlich $PQ \perp M_1M_2$ und $EQ = EP$, so ist nach Fr. 74 XI. auch $M_1Q = M_1P$ und $M_2Q = M_2P$, d. h. Q liegt auf beiden Kreisen (Fr. 82).

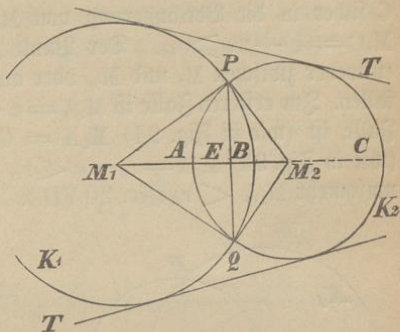


Fig. 93.

IV. Haben zwei excentrische Kreise zwei Punkte gemein, so liegen diese Punkte außerhalb der Centralen (II.) und zu beiden Seiten derselben (III.).

V. Haben zwei excentrische Kreise einen Punkt der Centralen gemein, so haben sie überhaupt bloß einen Punkt gemein (I. bis IV.).

VI. Haben zwei Kreise in derselben Ebene bloß einen Punkt gemein, so muß dieser (wegen III.) in der Centralen liegen.

Dann ist die in jenem Punkte auf der Centralen errichtete Normale eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise (Fr. 83 V.); die Kreise haben in jenem Punkte gleiche Richtung (Fr. 85 I.), und man sagt: sie berühren sich.

VII. Ist die Centralstrecke $M_1M_2 = c$ größer als die Differenz $r_1 - r_2$, aber kleiner als die Summe $r_1 + r_2$ der beiden Halbmesser $M_1P = r_1$ und $M_2P = r_2$, so schneiden sich die Kreise in zwei Punkten.

Da $r_1 + r_2 > c > r_1 - r_2$ sein soll, wobei $r_1 \geq r_2$ vorausgesetzt werde, so erhält man durch Addition und durch Subtraktion von r_2 nach Fr. 20 IX. $c + r_2 > r_1$ und $r_1 > c - r_2$. Trägt man nun in der Centralen von M_2 (Fig. 93 S. 101) aus nach beiden Seiten hin $M_2A = M_2C = r_2$ auf, so fällt C sicher in die Verlängerung von M_1M_2 , und es ist auch $M_1C = c + r_2 > r_1$. Der Punkt A dagegen kann dabei entweder zwischen M_1 und M_2 , oder auf M_1 , oder jenseits M_1 fallen. Im ersten Falle ist $M_1A = c - r_2 < r_1$; im zweiten Falle ist (wie in Fig. 94) $M_1A = 0$; im dritten Falle ist (wie in Fig. 95) $M_1A = r_2 - c < r_2$, und da $r_2 < r_1$, so ist umsomehr $M_1A < r_1$ (Fr. 20 VII.).

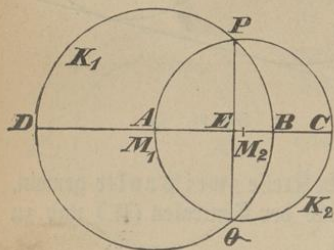


Fig. 94.

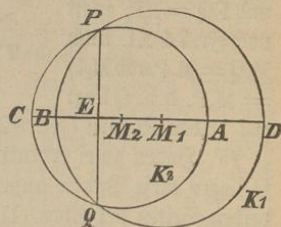


Fig. 95.

Somit liegt von den beiden Punkten A und C, welche K_2 mit der Centralen gemein hat, stets der eine A innerhalb, der andere C außerhalb K_1 (Fr. 82).

Daher muß K_2 den Kreis K_1 in zwei Punkten P und Q schneiden (Fr. 28 IV., 102 I.).

VIII. In VII. wird (wie in III.) die gemeinschaftliche Sehne PQ, Fig. 93 bis 95, der beiden sich schneidenden Kreise von der Centralstrecke M_1M_2 in E senkrecht halbiert (Fr. 74 XVII.).

IX. Die Centrale halbiert daher auch die beiden Winkel PM_1Q und PM_2Q (Fr. 90 V.).

X. Die Sätze VIII. und IX. ließen sich auch aus der Kongruenz der Dreiecke $M_1P M_2$ und $M_1Q M_2$, M_1PE und M_1QE , M_2PE und M_2QE herleiten.

XI. Sind (wie in Fig. 96) in VII. die beiden Halbmesser gleich, $r_1 = r_2$, so lassen sich auch aus P und Q Kreise durch M_1 und M_2 legen (Fr. 82), und deshalb wird dann auch M_1M_2 in E von der gemeinschaftlichen Sehne PQ halbiert.

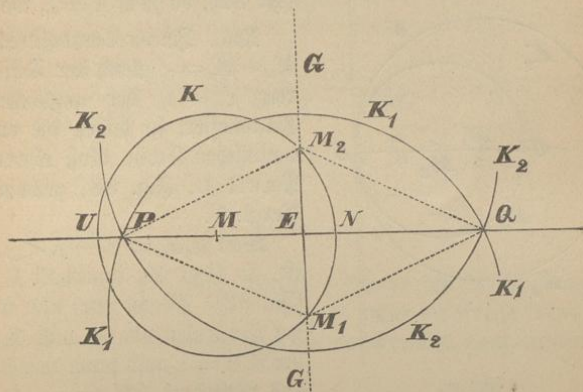


Fig. 96.

XII. Läßt man in Fig. 93 bis 95 den Mittelpunkt M_2 des Kreises K_2 auf den Punkt B des Kreises K_1 rücken, so werden M_2P und M_2Q Sehnen des Kreises K_1 . Die Figur zeigt dann die Lösung der Aufgabe: eine Sehne von bestimmter Länge in einen Kreis einzutragen. Vergl. IX.

XIII. Ist die Centralstrecke $M_1M_2 = c$ gleich der Summe $r_1 + r_2$ der Halbmesser, so haben die excentrischen Kreise bloß einen Punkt A, Fig. 97, gemein. Vergl. V.

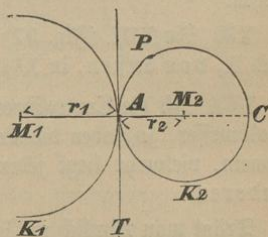


Fig. 97.

Macht man auf der Centralen von M_1 nach M_2 hin $M_1A = r_1$, so wird $AM_2 = M_1M_2 - M_1A = (r_1 + r_2) - r_1 = r_2$. A liegt also auf beiden Kreisen. Da nun aber $c = r_1 + r_2$ ist (Vor.) und deshalb M_1 außerhalb K_2 liegt (Fr. 82), so ist nach Fr. 91 XV. und XVI. jeder Punkt P des Kreises K_2 weiter, als A , von M_1 entfernt und liegt demnach außerhalb K_1 (Fr. 82), da ja $M_1A = r_1$ war.

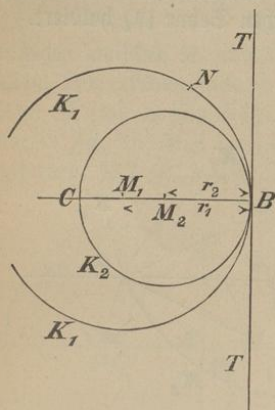


Fig. 98.

XIV. Ist die Centralstrecke $M_1M_2 = c$ gleich der Differenz $r_1 - r_2$ der ungleichen Halbmesser, so haben die excentrischen Kreise bloß einen Punkt B , Fig. 98, gemein. Vergl. V.

Weil $M_1M_2 = r_1 - r_2 < r_1$ ist, so liegt M_2 innerhalb K_1 (Fr. 82). Macht man nun in der Centralen von M_1 nach M_2 hin $M_1B = r_1$ und dann von B aus rückwärts $BM_2 = r_2$, so liegt B auf den beiden, aus

M_1 und M_2 mit den Halbmessern r_1 und r_2 geschlagenen Kreisen. Unter allen Punkten in K_1 liegt aber B am nächsten an M_2 (Fr. 91 XV. und XVI.); weil nun B auf K_2 liegt, so müssen alle anderen Punkte (z. B. N) des Kreises K_1 außerhalb K_2 liegen.

XV. In XIII. (Fig. 97) berühren sich die Kreise K_1 und K_2 von außen, in XIV. (Fig. 98) von innen.

XVI. Ist die Centralstrecke c größer als die Summe der Halbmesser, so haben die Kreise K_1 und K_2 keinen Punkt gemein, vielmehr liegt jeder Kreis ganz außerhalb des anderen.

Trägt man nämlich in Fig. 99 auf M_1M_2 die Strecke $M_2A = r_2$ von M_2 aus und die Strecke $M_1B = r_1$ von M_1 aus auf,

so liegt der Punkt B von A aus nach M_1 hin um das Stück AB entfernt, um welches $M_1 M_2 = c$ die Summe $r_1 + r_2$ übertrifft. A liegt also außerhalb K_1 ; jeder andere Punkt P von K_2 ist aber noch weiter von M_1 entfernt, wie A (Fr. 91 XV. und XVI.), liegt also ebenfalls außer K_1 .

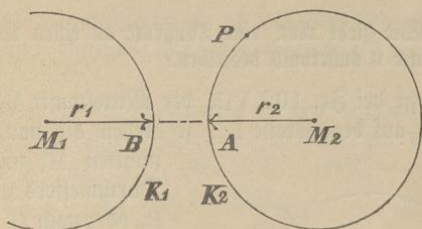


Fig. 99.

XVII. Ist die Centralstrecke c kleiner als die Differenz der ungleichen Halbmesser $r_1 > r_2$, so haben die Kreise keinen Punkt gemein, vielmehr liegt der eine Kreis K_2 ganz innerhalb des anderen K_1 .

Da $c = M_1 M_2 < r_1 - r_2$ und deshalb $M_1 M_2 + r_2 < r_1$ (Fr. 20 IX.) ist, so liegt M_2 innerhalb K_1 (Fr. 82). Verlängert man nun in Fig. 100 $M_1 M_2$ um $M_2 C = r_2$, so liegt C auf K_1 ; da $M_1 C = M_1 M_2 + r_2 < r_1$, liegt auch C innerhalb K_1 ; alle anderen Punkte (z. B. N) des Kreises K_2 liegen aber wegen Fr. 91 XV. und XVI. noch näher an M_1 , als C, und liegen deshalb ebenfalls innerhalb K_1 . Ob K_2 die Centrale zum zweiten Male zwischen M_2 und M_1 , oder jenseits M_1 schneidet, ist dabei gleichgültig.

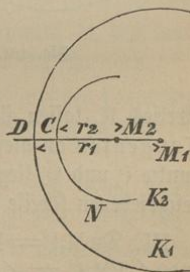


Fig. 100.

XVIII. Aus XI. gelangt man zu noch einer Lösung der in Fr. 89 gestellten Aufgabe. Schlägt man nämlich aus zwei

beliebigen Punkten M_1 und M_2 des Kreises K , Fig. 96, mit demselben Halbmesser $r_1 = M_1Q = M_2Q = r_2$ zwei Kreise K_1 und K_2 , welche sich in zwei Punkten P und Q schneiden (VII.), dann halbiert PQ die Sehne M_1M_2 von K senkrecht in E (XI.); deshalb geht PQ durch den Mittelpunkt M von K (Zr. 90 X.) und M liegt in der Mitte des Durchmessers UN (Zr. 48 II.).

103. Wie zieht man eine Tangente an einen Kreis K_1 von einem Punkte C außerhalb desselben?

I. Liegt bei Zr. 102 VII. der Mittelpunkt M_1 (Fig. 94 und 101) auf dem Kreise K_2 , so stehen die von den Endpunkten M_1 und C des

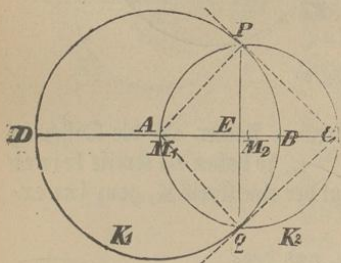


Fig. 101.

Durchmessers M_1M_2C nach P , oder nach Q gezogenen Sehnen aufeinander senkrecht (Zr. 96 III.); daher sind CP und CQ Tangenten (Zr. 83 V.) an den Kreis K_1 in den Endpunkten P und Q der den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Sehne PQ .

II. Von jedem Punkte C außerhalb eines

Kreises K_1 lassen sich daher stets zwei, aber nur zwei Tangenten an diesen Kreis ziehen (I.). Die Berührungspunkte P und Q liegen auf dem über CM_1 als Durchmesser beschriebenen Kreise K_2 .

III. Da $M_1P = M_1Q$ (Zr. 48 III.), $M_1C = M_1C$ (Zr. 20 I.) und $\angle PM_1C = \angle QM_1C$ (Zr. 102 IX.), so ist $\triangle PM_1C \cong \triangle QM_1C$ (Zr. 80 II.), und nach Zr. 54 III. und 67 II. sind daher nicht nur:

IV. die Bögen PB und QB , sowie

V. die Strecken CP und CQ der beiden Tangenten gleichgroß, sondern letztere machen

VI. auch gleiche Winkel PCM_1 und QCM_1 mit der Centralen CM_2M_1 . Daher

VII. liegt der Mittelpunkt M_1 eines Kreises K_1 , welcher zwei sich unter dem hohlen $\angle \text{PCQ}$ schneidende Gerade PC und QC berührt, in der den $\angle \text{PCQ}$ halbierenden Geraden CD , und

VIII. aus jedem Punkte M_1 in CD läßt sich ein Kreis ziehen, welcher CP und CQ berührt (Fr. 74 XVIII. und 83 V.).

IX. Wegen Fr. 71 VI. machen die beiden Tangenten CP und CQ denselben spitzen Winkel mit einander, wie die beiden Halbmesser M_1P und M_1Q ; oder es ist $\angle \text{PCQ} + \angle \text{PM}_1\text{Q} = 180^\circ$ (Fr. 72 III., oder 96 VIII.).

104. Welche Sätze gelten von dem Tangendendreieck und dem Tangentenviereck?

I. Tangendendreieck und Tangentenviereck (Dreieck und Viereck um den Kreis) heißt ein Dreieck, bezw. ein Viereck, dessen Seiten Tangenten desselben Kreises sind.

II. Wegen Fr. 103 VI. und VIII. müssen sich die drei Halbierungslinien AM_0 , BM_0 , CM_0 (Fig. 102 S. 108) der Winkel eines Dreiecks ABC in dem Mittelpunkte M_0 des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises K_0 schneiden.

III. Es giebt daher zu jedem $\triangle \text{ABC}$ einen inneren Berührungskreis K_0 , welchem das Dreieck umschrieben ist. Vergl. XIII.

IV. Es giebt aber zu jedem Dreieck auch noch drei äußere Berührungskreise, welche je eine Seite desselben und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berühren. Die Mittelpunkte M_1 , M_2 und M_3 dieser drei äußeren Berührungskreise K_1 , K_2 und K_3 (Fig. 102 S. 108) des Dreiecks ABC findet man durch Halbieren der Außenwinkel desselben (Fr. 103 VII.).

V. Die Centrale von je zwei äußeren Berührungskreisen läuft deshalb durch einen Eckpunkt des Dreiecks (Fr. 43).

VI. Jeder Eckpunkt des Dreiecks ABC liegt in der Verlängerung einer durch den Mittelpunkt M_0 des eingeschriebenen

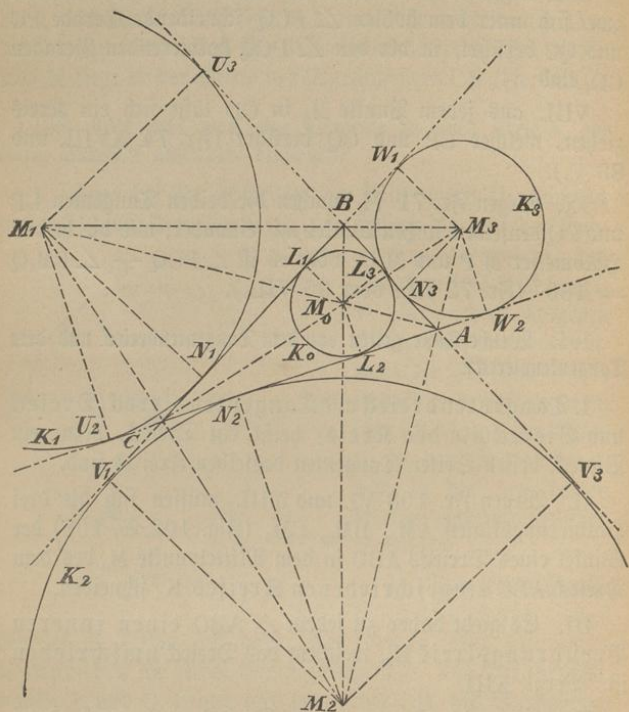


Fig. 102.

und den Mittelpunkt eines äußeren Berührungskreises gelegten Geraden (Fr. 103 VII.); denn es liegt z. B. sowohl M_0 als M_2 auf der den $\angle ABC$ halbierenden Geraden.

VII. Die Seiten des Mittelpunktsdreiecks $M_1M_2M_3$ (V.) stehen auf den Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks ABC senkrecht; denn es ist z. B. in Fig. 102:

$$\begin{aligned}
 \angle M_0AB &= \angle M_0AC \text{ (II.)} \\
 \angle M_3AB &= \frac{1}{2} \angle W_2AB = \frac{1}{2} \angle V_3AC \\
 &= \angle M_2AC \text{ (IV. und Fr. 42 II.)} \\
 \hline
 \angle M_0AM_3 &= \angle M_0AB + \angle M_3AB = \angle M_0AC + \angle M_2AC \\
 &= \angle M_0AM_2 \text{ (Fr. 20 VIII.)}
 \end{aligned}$$

$M_0A \perp M_3M_2$ (Fr. 37 I. und IV.)

VIII. Mit Hilfe von Fr. 103 V. läßt sich leicht herausbringen, daß der Eckpunkt B des $\triangle ABC$ mit den drei Seiten a, b, c von den Berührungspunkten L_1, N_1, V_1, W_1 und L_3, U_3, V_3, N_3 der Seiten a und c mit den vier Berührungskreisen absteht um:

$$\begin{aligned}
 BL_1 &= b_0 = \frac{1}{2} (a - b + c) = BL_3; \\
 BN_1 &= b_1 = \frac{1}{2} (a + b - c) = BU_3; \\
 BV_1 &= b_2 = \frac{1}{2} (a + b + c) = BV_3; \\
 BW_1 &= b_3 = \frac{1}{2} (-a + b + c) = BN_3.
 \end{aligned}$$

IX. Im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) schneiden sich wegen Fr. 103 VIII. die vier Halbierungslinien der Winkel in dem Mittelpunkt M des Kreises, um den es beschrieben ist.

X. Im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen. Vergl. Fr. 133 V.

Sind nämlich U, V, X, J die vier Berührungspunkte, so ist:

$$\left. \begin{aligned}
 AU &= AJ \\
 UB &= BV \\
 XC &= VC \\
 XD &= JD
 \end{aligned} \right\} \text{ (Fr. 103 V.)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 AU + UB + XC + XD &= AB + CD \\
 AJ + JD + BV + VC &= AD + BC
 \end{aligned} \right\} \text{ (Fr. 20 II.)}$$

$$AB + CD = AD + BC \text{ (Fr. 20 VIII. und IV.)}$$

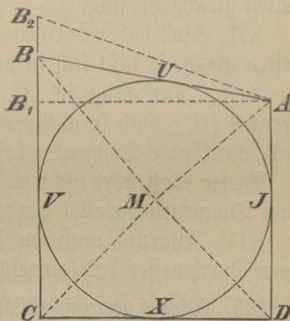


Fig. 103.

XI. Zieht man im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) von einem Eckpunkte A die Strecken AB_1 und AB_2 nach einem Punkte B_1 und B_2 in einer Gegenseite BC und in deren Verlängerung, so ist:

$$\begin{aligned} AB_1 &> AB - BB_1 \text{ (Fr. 76 II.)} \\ AB_1 + DC &> AB + DC - BB_1 \text{ (Fr. 20 IX.)} \\ &> AD + CB - BB_1 \text{ (X.)} \\ &> AD + CB_1 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} AB_2 &< AB + BB_2 \\ AB_2 + DC &< AB + DC + BB_2 \\ &< AD + CB + BB_2 \\ &< AD + CB_2. \end{aligned}$$

Die Tangente AB des AD, DC und CB berührenden Kreises ist also die einzige Gerade, welche sich von A nach einem Punkte in CB ziehen läßt und welche zugleich mit AD, DC, CB ein Viereck liefert, worin die Summen der Gegenseiten gleichgroß sind.

XII. Sind daher in einem Viereck die Summen der Gegenseiten gleich, so läßt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

XIII. Der Satz in III. läßt sich (als Seitenstück zu Fr. 88 III.) auch so aussprechen: Der Kreis ist durch drei sich schneidende Tangenten bestimmt.

Dieser Satz hört nicht auf zu gelten, wenn zwei von den drei Tangenten parallel werden.

XIV. Warum muß im Tangententrapez die Höhe stets dem Durchmesser des (eingeschriebenen) Kreises gleichen?

105. Wieviel gemeinschaftliche Tangenten besitzen zwei Kreise?

I. Liegen zwei gleiche Kreise außer einander (Fr. 102 XVI.), so berühren die zu beiden Seiten der Centralen durch einen im Abstände eines Halbmessers r von der Centralen liegenden Punkt gezogenen Parallelen der Centralen beide Kreise (Fr. 74 IX., 72 VII., 83 V.).

II. Liegen zwei ungleiche Kreise außer einander (Fr. 102 XVI.), so berühren bei $r_1 > r_2$ die beiden Parallelen zu den im Abstände $r_1 - r_2$ von M_1 durch M_2 gezogenen Geraden beide Kreise.

Ist nämlich in Fig. 104 $M_1F = r_1 - r_2$ und $\angle M_1LU = \angle M_1FM_2 = 90^\circ$ (Fr. 96 III., Fr. 83 X.), so wird die in M_2 errichtete Senkrechte auf M_2F auch LU in Z senkrecht schneiden (Fr. 72 III.) und $M_2Z = FL = r_2$ sein (Fr. 72 VI.), LU also in Z auch den Kreis um M_2 berühren (Fr. 83 V.).

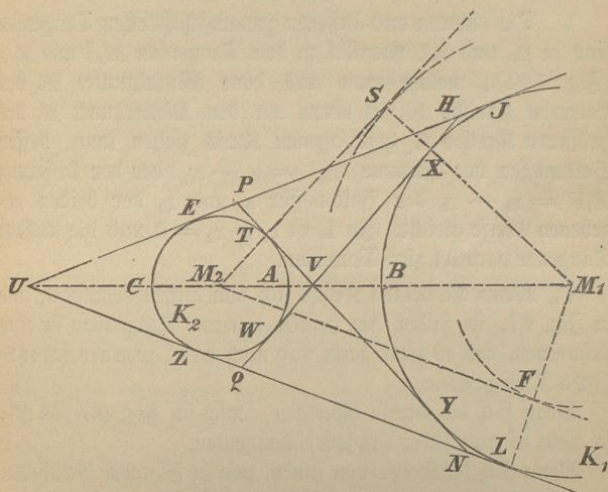


Fig. 104.

III. Liegen zwei gleiche oder ungleiche Kreise außer einander (Fr. 102 XVI.), so berühren die beiden Parallelen zu den im Abstände $r_1 + r_2$ von M_1 durch M_2 gezogenen Geraden beide Kreise.

Ist in Fig. 104 $M_1S = r_1 + r_2$ und $\angle M_2SM_1 = 90^\circ = \angle QXM_1$, so wird ganz wie in II. XQ auch in W den Kreis um M_2 berühren (Fr. 83 V.).

IV. Bei zwei Kreisen K_1 und K_2 (Fig. 104), welche außer einander liegen, giebt es zwei Paar gemeinschaftliche Tangenten.

Bei ungleichen Halbmessern schneidet sich jedes Paar in einem Punkte der Centralen; der eine Schnittpunkt V heißt der innere, der andere U der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise (vergl. Fr. 151); der kleine Kreis liegt zwischen U und dem großen. Bei gleichen Halbmessern rückt U in unendliche Entfernung.

V. Die inneren und äußeren gemeinschaftlichen Tangenten sind in II. und III. parallel zu den Tangenten M_2S und M_2F (Fig. 104), welche man aus dem Mittelpunkt M_2 des kleineren Kreises K_2 an einen um den Mittelpunkt M_1 des größeren Kreises K_1 geschlagenen Kreis ziehen kann, dessen Halbmesser der Summe $M_1S = r_1 + r_2$, oder der Differenz $M_1F = r_1 - r_2$ der Halbmesser r_1 und r_2 der beiden gegebenen Kreise gleicht. In I. ist $r_1 - r_2 = 0$ und die äußere Tangente parallel zur Centralen.

VI. Wenn die beiden Kreise sich von außen berühren, wie in Fig. 97, so fallen die beiden inneren Tangenten in eine zusammen, und es giebt dann nur noch drei gemeinschaftliche Tangenten.

Wenn sich die Kreise schneiden, wie in Fig. 93 bis 95, so giebt es nur zwei (äußere) Tangenten.

Wenn sich die Kreise von innen, wie in Fig. 98, berühren, so giebt es nur eine gemeinschaftliche Tangente.

Liegt endlich der eine Kreis innerhalb des andern, wie in Fig. 92 und 100, so giebt es gar keine gemeinschaftliche Tangente.

VII. Zieht man die vier gemeinschaftlichen Tangenten, so sind die zwischen den Berührungspunkten gelegenen Abschnitte EK und ZL der äußeren, und ebenso TY und WX der inneren Tangenten einander gleich. Denn wegen Fr. 103 V. und 20 VIII. ist:

$$\begin{aligned} &UJ - UE = UL - UZ, \quad \text{d. h. } EJ = ZL \\ \text{und} \quad &VT + VY = VW + VX, \quad \text{d. h. } TY = WX. \end{aligned}$$

VIII. Ebenso sind die zwischen den äußeren Tangenten gelegenen Stücke PN und QH der inneren Tangenten gleich.

Es ist ja

$$\begin{aligned} & \triangle UVP \cong \triangle UVQ \\ \text{und} & \triangle UVN \cong \triangle UVH \end{aligned} \quad (\text{Fr. 80 V., Fr. 103 VI.}),$$

und daraus ergibt sich:

$$PV + VN = QV + VH \quad (\text{Fr. 67 II. und 20 VIII.}).$$

$$PN = QH \quad (\text{Fr. 20 II.}).$$

IX. Weiter ist nach Fr. 103 V.:

$$NP = NT + TP = NZ + EP$$

$$NP = NY + YP = NL + PJ$$

$$2NP = ZL + EJ = 2ZL \quad (\text{Fr. 20 VIII.})$$

$$QH = PN = ZL = EJ.$$

X. Endlich ist nach Fr. 103 V. noch $NT = NZ$ oder:

$$PN - PT = ZL - LN \quad (\text{Fr. 20 II.})$$

$$PN = ZL \quad (\text{VI.})$$

$$\begin{aligned} & PE = PT = LN = NY \\ & WX = TY = PH = QN \end{aligned} \quad (\text{Fr. 20 VIII.}).$$

XI. Eine wiederholte Anwendung der vorstehenden Sätze gestatten die vier Berührungskreise des Dreiecks ABC in Fig. 102. Berühren der eingeschriebene Kreis um M_0 und die drei äußeren Berührungskreise um M_1 , M_2 und M_3 die nach Bedarf verlängerten Seiten $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ des $\triangle ABC$ in L_1 , L_2 und L_3 , in N_1 , U_2 und U_3 , in V_1 , N_2 und V_3 , in W_1 , W_2 und N_3 , ist ferner die Länge der Strecken:

$$AL_3 = AL_2 = a_0$$

$$BL_1 = BL_3 = b_0$$

$$CL_2 = CL_1 = c_0,$$

$$AN_2 = AV_3 = a_2$$

$$AN_3 = AW_2 = a_3$$

$$BN_3 = BW_1 = b_3$$

$$BN_1 = BU_3 = b_1$$

$$CN_1 = CU_2 = c_1,$$

$$CN_2 = CV_1 = c_2,$$

und setzt man $s = a_0 + b_0 + c_0 = \frac{1}{2}(a + b + c)$, so findet man leicht, daß:

$$a = b_0 + c_0 = b_1 + c_1;$$

$$s - a = a_0$$

$$b = c_0 + a_0 = c_2 + a_2;$$

$$s - b = b_0$$

$$c = a_0 + b_0 = a_3 + b_3;$$

$$s - c = c_0$$

ist; nach VII. ist aber auch:

$$\begin{aligned} L_2 U_2 &= L_3 U_3 & \text{oder } c_0 + c_1 &= b_0 + b_1 \\ L_3 V_3 &= L_1 V_1 & a_0 + a_2 &= c_0 + c_2 \\ L_1 W_1 &= L_2 W_2 & b_0 + b_3 &= a_0 + a_3. \end{aligned}$$

Abdiert man nun je eine dieser drei letzteren Gleichungen zu je einer der drei vorhergehenden, so erhält man nach Fr. 20 VIII.:

$$\begin{aligned} c_0 &= b_1 = a_2 \\ a_0 &= c_2 = b_3 \\ b_0 &= a_3 = c_1. \end{aligned}$$

Da endlich $b_0 = c_1$, so liegen die Berührungspunkte L_1 und N_1 des eingeschriebenen und des umschriebenen Berührungskreises in gleicher Entfernung von der Mitte der Seite a . Ähnlich ist's bei b und c . — Vergl. Fr. 159 XVI. und XVII.

XII. Für den Punkt C in Fig. 102 ist nach Fr. 104 VIII.

$$\begin{aligned} CW_1 &= CW_2 = CB + BW_1 = a + b_3 = a + \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{a + b + c}{2} = s. \end{aligned}$$

Ebenso ist $BV_1 = BV_3 = s$
und $AU_2 = AU_3 = s.$

Viertes Kapitel.

Vier Gerade in derselben Ebene. Das Viereck. Die Projektion einer Strecke. Die regelmäßigen Vielecke.

106. Wie viel Fälle lassen sich in Bezug auf die Richtung von vier Geraden in einer Ebene unterscheiden?

Bezüglich der Richtung der vier Geraden G_1, G_2, G_3 und G_4 in derselben Ebene sind fünf Fälle möglich:

I. Alle vier Gerade haben dieselbe Richtung (Fig. 105); dann giebt es keinen Schnittpunkt (Fr. 56 II.).