

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

1. Eine, zwei, drei und mehr Gerade in derselben Ebene. Winkel, Kreis, Dreieck, Vieleck

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

Erster Abschnitt.

Die Geometrie der Ebene.

Erstes Kapitel.

Eine, zwei, drei und mehr Gerade in derselben Ebene.
Winkel, Kreis, Dreieck, Vieleck.

21. Welche Folgerungen lassen sich noch aus Fr. 9 und 14 ziehen?

I. Legt man zwei Punkte einer Geraden auf zwei Punkte einer anderen Geraden, so müssen die beiden Geraden nach Fr. 9 I. einander decken, d. h. jeder Punkt der einen muß mit einem Punkte der anderen zusammenfallen.

II. Durch zwei gegebene Punkte, z. B. durch D und F in Fig. 5 (S. 10), läßt sich nur eine Gerade G ziehen.

III. Werden zwei Ebenen mit den in Fr. 14 II., oder III., oder IV. genannten Stücken auf einander gelegt, so müssen sie sich ebenfalls decken.

IV. Auch irgend zwei Halbebenen (Fr. 15 IV.) lassen sich zum Decken bringen.

V. Daher ist die Gerade auf den beiden Seiten, die man in einer Ebene an ihr nach den beiden durch sie getrennten Halbebenen unterscheiden kann, von gleicher Beschaffenheit.

22. Welche ähnliche Sätze ergeben sich hieraus für Strecken?

I. Wenn zwei Strecken oder Strahlen sich decken, so decken sie auch ihre Verlängerungen. Vergl. Fr. 9 VI. bis IX.

II. Jede Strecke hat also an jedem Ende nur eine Verlängerung.

III. Zwei Strecken decken sich, wenn ihre Grenz- oder Endpunkte paarweise auf einander fallen.

IV. Zwei Strecken, welche sich zum Decken bringen lassen, sind gleichlang oder gleich.

V. Zwei Strecken können gleichlang sein, ohne sich zu decken; doch kann man sie dann stets zum Decken bringen.

Legt man nämlich das eine Paar ihrer Endpunkte auf einander und bringt dann noch einen Punkt der einen mit einem Punkte der andern zum Zusammenfallen, so muß auch das andere Paar ihrer Endpunkte zusammenfallen, und die Strecken decken sich.

Auch zwei Strahlen kann man so zum Decken bringen.

Legt man Strecken von ungleicher Länge so auf einander, so wird die längere über die kürzere hinausragen.

VI. An Strecken läßt sich außer der Lage nur die Länge unterscheiden.

VII. Sind von einer Strecke die beiden Endpunkte bekannt, so ist die Lage und die Länge oder Größe der Strecke gegeben. Man bezeichnet daher eine Strecke durch die zwei an ihre Endpunkte gesetzten großen Buchstaben; in Fig. 7 z. B. ist EF oder EF die Strecke zwischen den Punkten E und F.

Noch kürzer bezeichnet man die Strecke mit einem daran gesetzten kleinen Buchstaben, z. B. $EF = a$.

VIII. Die Strecke EF nennt man die Entfernung oder den Abstand der zwei Punkte E und F. Vergl. Fr. 77 III.

VIII a) In gerader Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.
Abkürzung nach Buchstaben

23. Wie vollzieht man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Strecken?

I. Will man zwei Strecken KH und HT (Fig. 8) addieren, so legt man sie mit dem einen Endpunkte H auf einander, so daß die zweite die Verlängerung der ersten bildet; dann ist $KT = KH + HT$.

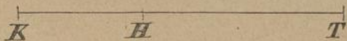


Fig. 8.

II. In ähnlicher Weise ist $HT = KT - KH$.

III. Ist ferner in Fig. 9 $PO = ON = NM = ML$, so ist $PL = 4 \times PO = 4PO$. Vergl. Fr. 144.

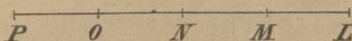


Fig. 9.

IV. Umgekehrt findet man durch wiederholte Subtraktion der Strecke PO , daß $PL : PO = 4$ ist. Solche Divisionen sind bloße Vergleichen; von ihnen wird in Fr. 145 weiter die Rede sein.

V. Die Division einer Strecke durch eine ganze Zahl n , d. h. die Teilung einer Strecke in n gleiche Teile wird später (in Fr. 127 und 128) gelehrt werden.

VI. Wie findet man die Größe zweier Strecken aus ihrer Summe s und ihrer Differenz d ?

24. Was ist über die Richtung der Geraden zu sagen?

I. Aus Fig. 10 ersieht man, daß ein Punkt P zur Bestimmung einer Geraden nicht ausreicht, daß sich vielmehr durch diesen Punkt P viele, verschiedene Gerade PQ , PR , PS , PT u. ziehen lassen. Diese verschiedenen Geraden laufen von dem Punkte P aus nach ebensoviel verschiedenen Richtungen, oder diese Geraden beschreibt ein sich geradlinig bewegender Punkt (vergl. Fr. 6 I.), wenn er von jenem Punkte P aus sich in den verschiedenen Richtungen bewegt.

II. Die beiden Strahlen PT und PU derselben Geraden TU laufen von P aus nach entgegengesetzten Richtungen.

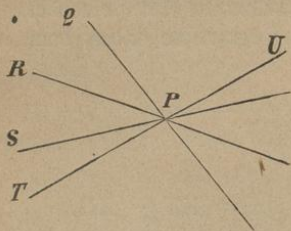


Fig. 10.

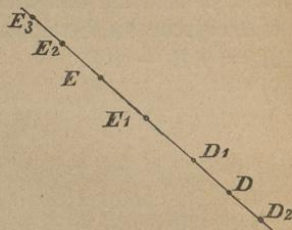


Fig. 11.

III. Zur Bestimmung der Richtung der Bewegung des sich von D (Fig. 11) aus bewegenden und bei seiner Bewegung die Gerade DE beschreibenden Punktes reicht (wegen Fr. 21 II.) der zweite Punkt E aus, welcher zugleich mit D die Gerade DE bestimmt. — Die Gerade DE giebt zugleich die Richtung an, in welcher der bewegliche Punkt sich beim Beschreiben dieser Geraden DE von D aus bewegt, oder in welcher irgend ein Punkt E der Geraden von dem Punkte D aus liegt. Vergl. Fr. 46.

IV. Der Punkt E bewegt sich in derselben Richtung, so lange er sich in derselben Geraden DE, von demselben Punkte D aus gesehen, nach derselben Seite hin bewegt.

V. Zieht man von dem Punkte D der Geraden DE nach verschiedenen, von D aus in demselben Strahle liegenden Punkten E_1 , E_2 , E_3 zc. dieser Geraden DE Strecken DE_1 , DE_2 , DE_3 zc., so fallen diese Strecken (nach Fr. 21 I.) sämtlich auf einander, wennschon sie sich zufolge ihrer verschiedenen Längen nicht decken.

Alle Punkte des Strahls DE liegen also von dem Punkte D aus in derselben Richtung. Dagegen können (wegen Fr. 10 IV.) zwar einzelne, jedoch durchaus nicht alle Punkte einer Krümmen von einem und demselben Punkte der Krümmen aus in der nämlichen Richtung liegen.

VI. Ebenso liegen die Punkte E_1, E_2, E_3 u. auch von den Punkten D_1 , oder D_2 aus in derselben Richtung wie von dem Punkte D aus (Fr. 22 II.).

VII. Die in V. und VI. ausgesprochenen beiden Eigenschaften, durch welche sich die Gerade vor der Krümmen auszeichnet, berechtigen zu der Behauptung: die Gerade hat überall (an allen ihren Punkten und Stellen) dieselbe Richtung.

25. Auf welche weitere Bestimmungsweise für die Gerade führen die in Fr. 24 angestellten Erörterungen?

I. Nach Fr. 9 I. ist die Lage der Geraden DE (Fig. 11) durch die beiden Punkte D und E bestimmt. Da nun durch den zweiten Punkt E die Richtung der Bewegung des von dem Punkte D aus die Gerade DE beschreibenden Punktes (Fr. 24 III.) oder die Richtung der von D auslaufenden Geraden DE bestimmt wird (Fr. 24 VII.) und da umgekehrt auch nach Fr. 24 V. alle Punkte der Geraden von D aus in derselben Richtung liegen, so müßte die Lage einer (unbegrenzten) Geraden DE auch bestimmt sein, wenn man den Punkt D von ihr hat und außerdem noch die Richtung angeben könnte, in welcher sich ein beweglicher Punkt von dem Punkte D aus zu bewegen hat, um die Gerade DE zu beschreiben.

II. Demnach ist die Lage der Geraden auch bestimmt durch einen Punkt und ihre Richtung und man kann (im Einklange mit Fr. 24 I.) von jedem Punkte D aus nur eine Gerade von vorgeschriebener Richtung ziehen.

26. Welche Verschiedenheit in Bezug auf die Zahl der gemeinsamen Punkte können zwei Gerade in derselben Ebene zeigen?

Zwei verschiedene in derselben Ebene liegende Gerade können (wegen Fr. 21 II.) niemals zwei Punkte gemein haben, sondern entweder bloß einen, oder gar keinen Punkt. Im letzteren Falle nennt man die beiden Geraden gleichlaufend oder parallel ($//$); im ersten Falle sagt

man, sie schneiden sich in diesem Punkte (dem Schnittpunkte).

Nach dem Schnittpunkte P (Fig. 12) hin sind die beiden Geraden SR und TQ zusammenlaufend oder konvergent, von ihm aus sind sie auseinanderlaufend oder divergent.

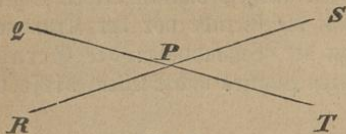


Fig. 12.

27. Können sich zwei Gerade berühren?

I. Wenn zwei Gerade NL und TS (Fig. 13) einen Punkt M gemein haben, so ist es unmöglich, daß der eine Strahl ML der einen Geraden NL mit einem Strahle MS der anderen TS zusammenfällt, während die beiden andern Strahlen MN und MT nicht auf einander liegen (Fr. 22 I.).

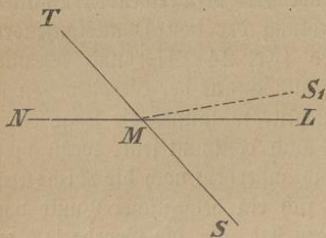


Fig. 13.

II. Ebenso wenig kann dabei die eine Gerade TS ganz auf der einen Seite der anderen Geraden NL liegen.

Wäre nämlich nicht MS , sondern MS_1 die Verlängerung von TM , so wäre die Halbebene oberhalb TMS_1 offenbar kleiner, als die Halbebene oberhalb NML . Da aber diese beiden Halbebenen sich nach Fr. 21 IV. decken müßten, so muß die gemachte „Annahme“: daß MS , die Verlängerung von TM sei, falsch sein, weil man von ihr ausgehend durch richtige Schlüsse auf etwas Falsches kommt.

Daß TMS_1 keine Gerade sein kann, lehrt auch folgende Betrachtung: Dreht man die Halbebene TMS_1 in der Ebene um den festgehaltenen Punkt M , so daß MT sich MN nähert, dann entfernt sich gleichzeitig MS_1 von ML , und wenn MT daher auf MN zu liegen kommt, so werden MS_1 und ML doch nicht auf einander fallen, in Widerspruch mit I.

III. Die beiden sich schneidenden Geraden TS und NL müssen also im Punkte M durch einander hindurchgehen. Ferner haben sie, wie überall, so auch in dem Punkte M nicht die nämliche Richtung (Fr. 24 I. und VII.).

Unter Benutzung eines erst später (vergl. Fr. 83 IV. und 85 Anm.) auftretenden Begriffs könnte man demnach sagen: Zwei Gerade können sich nicht berühren.

28. Was ist hiernach über die geradlinige oder krummlinige Verbindung zweier Punkte zu bemerken?

I. Ist in einer unbegrenzten Ebene eine unbegrenzte Gerade QT (Fig. 12) gezogen, so muß jede neue Gerade RS, welche zwei zu verschiedenen Seiten jener ersten Geraden liegende Punkte R und S jener Ebene verbindet, die erste Gerade QT einmal, aber auch nur einmal schneiden.

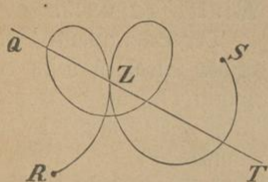


Fig. 14.

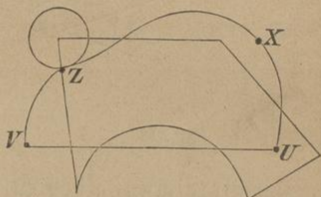


Fig. 15.

II. Werden diese beiden Punkte R und S durch eine in der Ebene liegende Krumme verbunden (Fig. 14), so kann es mehr als einen Schnittpunkt geben, stets aber eine ungerade Anzahl; doch können dabei mehrere Schnitte in einen Punkt Z zusammenfallen.

III. Jede Linie, welche einen Punkt U (Fig. 15) innerhalb und einen Punkt V außerhalb einer mit der Linie und den beiden Punkten in einerlei Ebene liegenden Figur verbindet, schneidet den Umfang der Figur wenigstens einmal.

IV. Läuft die eben erwähnte Linie von V nach U und dann weiter nach einem wieder außerhalb der Figur liegenden

Punkte X, so schneidet sie den Umfang der Figur wenigstens zweimal.

V. Jede Gerade, welche in der Ebene einer ebenen Figur liegt und in die Figur eintritt, muß bei ihrer Unbegrenztheit (Fr. 9 IX.) den Umfang der Figur wenigstens noch einmal schneiden (Fr. 11 III.).

29. Was ist ein Streifen und was ein ebener geradliniger Winkel?

I. Das zwischen zwei parallelen Geraden liegende halb-begrenzte Stück einer Ebene heißt ein Streifen.

II. Zwei von einem Punkte A (Fig. 16) auslaufende Strahlen AB und AC schließen zwischen sich ein halb-begrenztes ebenes Flächenstück ABDC ein, welches man einen ebenen geradlinigen Winkel ($\angle$) nennt.

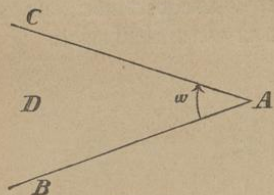


Fig. 16.

Der Schnittpunkt A der beiden Strahlen heißt der Scheitel, die Strahlen selbst die Schenkel des Winkels.

Zur Bezeichnung des Winkels benutzt man gewöhnlich drei große Buchstaben, von denen einer an jeden Schenkel und einer an den Scheitel gesetzt wird; letzteren stellt man beim Schreiben und Sprechen stets in die Mitte. Wo kein Irrtum entstehen kann, bezeichnet man den Winkel bloß mit dem am Scheitel stehenden großen Buchstaben. Sehr bequem ist es, zur Bezeichnung des Winkels einen kleinen Buchstaben in seine Öffnung zu setzen. Also:

$$\angle BAC = \angle CAB = \angle A = \angle w.$$

30. Wenn sind zwei Winkel gleich groß?

Zwei Winkel sind gleich, wenn sie sich zum Decken bringen lassen, wozu bloß nötig ist, daß ihre Scheitel und ihre Schenkel auf einander fallen, weil dann (nach Fr. 14 I.) auch die ganzen halb-begrenzten Ebenen auf einander fallen.

31. Wie lassen sich zwei gleiche Winkel zum Decken bringen?

Legt man die beiden gleichen Winkel mit ihren Scheiteln und je einem Schenkel auf einander (vergl. Fr. 22 V.), so läßt sich zunächst das den einen Winkel bildende Flächenstück noch mit einem seiner Punkte auf das den anderen bildende auflegen; dabei müßten sich (nach Fr. 14 IV.) die ganzen Ebenen decken. Zielen dann aber die beiden anderen Schenkel nicht auch auf einander, so wäre (wegen Fr. 20 III.) der eine Winkel größer als der andere, was ja nicht sein soll.

32. Wie vollzieht man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Winkeln?

I. Bei der Addition zweier Winkel legt man dieselben in derselben Ebene mit dem Scheitel und einem Schenkel so auf einander, daß der eine Winkel außer den anderen fällt. So ist in Fig. 17 $\angle GFE + \angle GFH = \angle EFH$.

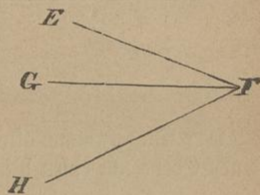


Fig. 17.

II. Bei der Subtraktion hat man den zu subtrahierenden Winkel auf den mit ihm den Scheitel und den einen Schenkel gemeinschaftlich besitzenden zweiten Winkel zu legen. In Fig. 17 ist $\angle HFE - \angle HFG = \angle GFE$.

III. Die Multiplikation eines Winkels läßt sich auf die Addition zurückführen (vergl. Fr. 23 III.).

IV. Die Division eines Winkels durch einen anderen Winkel erfolgt durch wiederholte Subtraktion des letzteren (vergl. Fr. 23 IV.).

V. Über die Division eines Winkels durch eine ganze Zahl wird später (Fr. 125 und 126) Einiges nachfolgen.

33. Was ist ein gestreckter oder flacher Winkel?

Fallen die Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus nach entgegengesetzten Seiten hin in dieselbe Gerade (Fr. 24 II.), so heißt der Winkel ein gestreckter oder flacher.

34. Welche Eigenschaften haben die flachen Winkel?

I. Alle gestreckten oder flachen Winkel sind gleich groß, weil sie sich zum Decken bringen lassen (Fr. 21 IV.).

II. Jeder gestreckte Winkel ist (nach Fr. 15 IV. und 21 IV.) die Hälfte der unbegrenzten Ebene.

III. Die Summe aller Winkel x , y , z (Fig. 18) in einer Ebene, an der einen Seite einer Geraden AB und mit gemeinschaftlichem Scheitel S beträgt einen gestreckten.

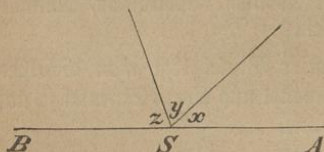


Fig. 18.

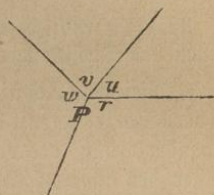


Fig. 19.

IV. Die Summe aller Winkel u , v , w , r (Fig. 19) in einer Ebene um einen Punkt P beträgt zwei gestreckte.

35. Was versteht man unter einem hohlen und einem überstumpfen Winkel?

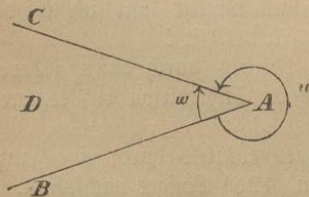


Fig. 20.

I. Jeder Winkel w (Fig. 20), welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler oder konkaver.

Jeder Winkel u , welcher größer als ein gestreckter ist, heißt ein erhabener, überstumpfer oder konvexer.

II. Mit jedem hohlen Winkel w entsteht zugleich ein erhabener u , und beide ergänzen sich (nach Fr. 34 IV.) zu zwei flachen. Vergl. Fr. 44 V.

36. Was sind anstoßende Winkel und Nebenwinkel?

I. Anstoßende Winkel nennt man zwei hohle Winkel EFG und GFH (Fig. 21), welche einen gemeinschaftlichen Scheitel F und einen gemeinschaftlichen Schenkel FG haben, und bei denen die beiden anderen Schenkel FE und FH zwar auf verschiedene Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels fallen, aber nicht in dieselbe Gerade.

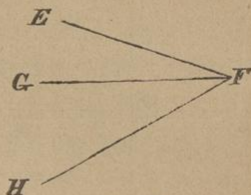


Fig. 21.

II. Haben zwei hohle Winkel EDF und CDF (Fig. 22) einen gemeinschaftlichen Scheitel D und einen gemeinschaftlichen Schenkel DF, während die beiden anderen Schenkel DE und DC vom Scheitel D aus nach entgegengesetzten Seiten hin in derselben Geraden liegen, so nennt man sie Nebenwinkel.

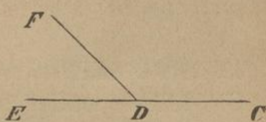


Fig. 22.

37. Wenn ist ein Winkel ein rechter, schiefer, spitzer und stumpfer? Was bedeutet winkelrecht oder normal?

I. Ist ein Winkel KNQ (Fig. 23) seinem Nebenwinkel TNQ gleich, so heißt er ein rechter (R).

Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist daher auch ein rechter.

II. Jeder hohle Winkel, welcher größer oder kleiner als ein rechter ist, heißt ein schiefer, und zwar ein spitzer, wenn er kleiner, dagegen ein stumpfer, wenn er größer ist als ein rechter. In Fig. 22 ist $\angle FDC$ stumpf, $\angle FDE$ spitz.

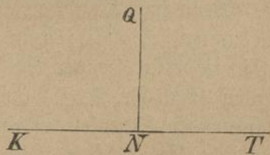


Fig. 23.

III. Jeder stumpfe Winkel ist größer als jeder spitze (Fr. 20 VII.).

IV. Die Schenkel eines rechten Winkels stehen winkelrecht oder normal ($\perp$) auf einander. Anstatt winkelrecht sagt man auch perpendikular oder senkrecht*).

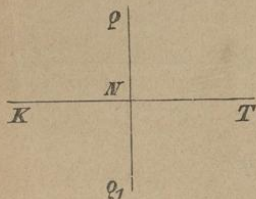


Fig. 24.

Ebenso stehen zwei Gerade KT und QQ_1 (Fig. 24) winkelrecht auf einander, wenn sie einen rechten Winkel einschließen. Dabei heißt der Punkt N, in welchem die eine QN, bezw. QQ_1 der beiden auf einander winkelrechten Geraden die andere KT trifft, der Fußpunkt der Normalen, der Senkrechten od. des Perpendikels.

38. Was ist ein Winkel von 1 Grad, 1 Minute und 1 Sekunde?

Ein Winkel, welcher genau der neunzigste Teil eines rechten ist, heißt ein Winkel von 1 Grad (1°) oder ein Winkelgrad. Daher ist $R = 90^\circ$, ferner ein flacher Winkel $= 180^\circ$.

Der sechzigste Teil und der dreitausendsechshundertste Teil eines Gradwinkels heißen ein Winkel von 1 Minute ($1'$) oder eine Winkelminute und ein Winkel von 1 Sekunde ($1''$) oder eine Winkelsekunde. Vergl. Fr. 50.

39. Welche Sätze gelten in Bezug auf die Größe der Nebenwinkel und der anstoßenden Winkel?

I. Wenn zwei Winkel gleich sind, so sind auch ihre Nebenwinkel unter sich gleich; denn wenn die beiden Winkel (nach Fr. 31) in entsprechender Weise zum Decken gebracht werden, so fallen (nach Fr. 22 I.) auch die Verlängerungen der zu verlängernden Schenkel auf einander, die beiden Nebenwinkel decken sich also und sind gleich (Fr. 30).

II. Jeder rechte Winkel ist die Hälfte eines flachen (Fr. 37 I.).

III. Alle rechten Winkel sind unter sich gleich (Fr. 34 I. und 20 VIII.).

*) Eine lotrechte oder vertikale Gerade steht auf der wagrechten oder horizontalen winkelrecht. In lotrechter Richtung wirkt die Schwerkraft.

IV. Die Summe zweier Nebenwinkel FDE und FDC (Fig. 25) beträgt einen gestreckten (Fr. 34 III.), oder zwei rechte Winkel (Fr. 39 II.), oder 180° (Fr. 38).

Der Nebenwinkel eines spitzen Winkels ist daher stumpf, der eines stumpfen spitz (Fr. 37 II.).

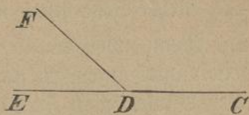


Fig. 25.

V. Nach IV. betragen zwei anstoßende Winkel entweder mehr, oder weniger als zwei rechte (Fr. 36 I. und 20 III.); auch muß

VI. jeder stumpfe Winkel FDC (Fig. 25) größer und jeder spitze Winkel FDE kleiner sein als sein Nebenwinkel.

VII. Ein Winkel FDC, welcher größer als sein Nebenwinkel ist, muß nach Fr. 37 I. größer als ein rechter, d. h. ein stumpfer (Fr. 37 II.) sein.

40. Läßt sich der Satz 39 IV. umkehren?

Ja. Giebt man nämlich den zwei Winkeln FDC und FDE (Fig. 25), deren Summe 180° beträgt, einen gemeinschaftlichen Scheitel D und einen gemeinschaftlichen Schenkel DF, und legt man die beiden anderen Schenkel DC und DE in derselben Ebene auf verschiedene Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels DF, so müssen die beiden anderen Schenkel in eine Gerade fallen, die Winkel sind also Nebenwinkel. Denn wenn die Verlängerung von ED mit DC₁ bezeichnet wird, so muß der Nebenwinkel FDC, des Winkels FDE (nach Fr. 39 IV.) die Größe $FDC_1 = 180^\circ - \angle FDE$ haben; dieselbe Größe hat aber nach unserer „Voraussetzung“*), daß $\angle FDC + \angle FDE = 180^\circ$ sei, auch der Winkel FDC. Daher müssen die Winkel FDC₁ und FDC sich decken (Fr. 31), d. h. es muß DC₁ auf DC fallen.

41. Wenn sind zwei Winkel Scheitelwinkel?

Zwei Winkel QPR und SPT (Fig. 26 S. 32) mit gemeinschaftlichem Scheitel P heißen Scheitelwinkel, wenn beide

*) Vergl. die Ann. zu 61 I.

Schenkel PQ und PR des einen Winkels in die Verlängerungen der Schenkel TP und SP des anderen Winkels fallen.

42. Welche Sätze gelten über die Größe von Scheitelwinkeln?

I. Wenn zwei Winkel gleich sind, so sind auch ihre Scheitelwinkel unter sich gleich; denn bringt man die beiden gleichen Winkel (nach Fr. 31) zum Decken, so decken sich auch die Verlängerungen ihrer Schenkel (Fr. 22 I.), die beiden Scheitelwinkel decken sich also auch und sind gleich (Fr. 30).

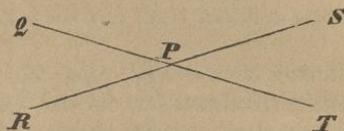


Fig. 26.

II. Jeder Winkel ist seinem Scheitelwinkel gleich. In Fig. 26 ist ja der Winkel SPT ebensowohl als der Winkel QPR der Nebenwinkel des Winkels RTP, und deshalb ist (nach Fr. 20 I. und Fr. 39 I.) $\angle SPT = \angle QPR$.

43. Läßt sich der Satz Fr. 42 II. umkehren?

Ja. Wenn nämlich von zwei Schenkeln PS und PR (Fig. 26) zweier gleichen Winkel SPT und RPQ mit gemeinschaftlichem Scheitel P jeder die Verlängerung des andern bildet und die beiden anderen Schenkel PT und PQ zu verschiedenen Seiten der von den beiden ersten gebildeten Geraden SPR liegen, so fallen auch die beiden letzteren Schenkel in eine Gerade, d. h. die beiden Winkel sind Scheitelwinkel. Denn da RPS gerade, so ist $\angle QPR + \angle QPS = 180^\circ$ (Fr. 39 IV.), folglich $\angle SPT + \angle QPS = 180^\circ$ (Fr. 20 IV.); deshalb ist QPT eine Gerade (Fr. 40), SPT und RPQ aber sind Scheitelwinkel (Fr. 41).

44. Wie kann ein Winkel durch Drehung eines Strahles entstehen?

I. Hält man einen Strahl AB (Fig. 27) an seinem Endpunkte A fest, so muß er bei jeder Bewegung in seiner

Ebene seine Richtung ändern (Fr. 25 II.); er kommt z. B. aus seiner ursprünglichen Lage AB_0 nach einander in die Lagen AB_1 , AB_2 , AB_3 2c.

Eine solche Bewegung nennt man eine (ebene) Drehung des Strahls AB um seinen Endpunkt A .

II. Bei dieser Drehung überstreicht der Strahl AB (ähnlich wie in Fr. 13) nach und nach alle Punkte der Ebene.

III. Jeden Winkel BAC (Fig. 28) kann man sich dadurch entstanden denken, daß der eine Schenkel AC von dem anderen, in seiner ursprünglichen Lage liegenbleibenden (festen) Schenkel AB aus sich in der Ebene des Winkels um den Scheitel A dreht.

IV. Drehungen von gleicher Größe entsprechen gleichgroße Richtungsänderungen und gleichgroße bei der Drehung überstrichene Winkel. Vergl. Fr. 45 II.

V. In einer Ebene ist aber eine Drehung eines Strahls nur in einem doppelten Sinne, nur nach zwei verschiedenen Richtungen hin, möglich; denn der Strahl AC kann in der Ebene von der Lage AB aus nur durch zwei verschiedene Drehungen in die Lage AC kommen, entweder bei der durch den Pfeil w angegebenen, oder in der durch den Pfeil u angegebenen Drehungsrichtung. Diese beiden Drehungen sind einander entgegengesetzt, weil die Fortsetzung der bisherigen Drehung des sich drehenden Strahles den durch sie bereits erzeugten Winkel größer macht, während eine Drehung in der andern Richtung ihn kleiner macht.

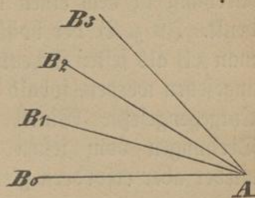


Fig. 27.

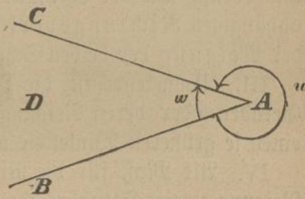


Fig. 28.

Unterscheidet man diese beiden Drehungen als positiv (+) und negativ (—), so kann man auch die Winkel als positiv und negativ bezeichnen, jenachdem man sie sich durch Drehung in dem einen oder in dem andern Sinne erzeugt denkt. Ist z. B. der hohle Winkel $CAB = w$ positiv, wenn man AB als festen Schenkel betrachtet, so kann er als negativ angesehen werden, sobald man AC als festen Schenkel wählt. Entgegengesetzte Winkel sind dann durch entgegengesetzte Drehungen vom festen Schenkel aus entstanden; immer wieder aber erfordern gleiche Winkel gleiche Drehungen.

45. Wobon hängt die Größe eines Winkels ab?

I. Das als Winkel bezeichnete, nach der einen Seite (nach D) hin unbegrenzte Flächenstück ist (wegen Fr. 22 II.) schon bestimmt, wenn man anstatt der beiden Strahlen auch nur zwei vom Scheitel A auslaufende Strecken kennt, mögen diese lang oder kurz sein; somit hängt die Größe des Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel ab.

II. Dagegen wächst die Größe des Winkels mit der Vergrößerung der zu seiner Erzeugung nötigen Drehung (Fr. 44 V.), und ebenso mit der ebenfalls von der Größe der Drehung abhängigen Richtungsverschiedenheit (Fr. 24 I.) oder der Neigung der beiden Schenkel AC und AB gegen einander.

III. Umgekehrt ist die Richtungsverschiedenheit zweier Geraden oder deren Neigung gegen einander um so größer, einen je größeren Winkel sie mit einander einschließen.

IV. Als Maß für die Richtungsverschiedenheit oder die Neigung zweier Strahlen oder Geraden kann stets ein hohler bis flacher (Fr. 35 II.), oder selbst ein spitzer bis rechter (Fr. 39 IV.) Winkel benutzt werden.

46. Wie läßt sich die Richtung einer Geraden in einer Ebene noch bestimmen?

I. Während nach Fr. 24 III. die Richtung einer von dem Punkte A auslaufenden Geraden AC (Fig. 28) durch den zweiten Bestimmungspunkt C bestimmt wird, läßt sich die

Richtung einer in einer bestimmten Ebene liegenden Geraden AC durch den Winkel w bestimmen, den diese Gerade mit einer zweiten Geraden AB in jener Ebene einschließt. Vergl. ferner Fr. 54 II.

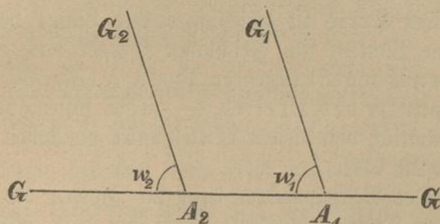


Fig. 29.

II. Machen zwei von den Punkten A_1 und A_2 (Fig. 29) einer Geraden G auslaufende Gerade G_1 und G_2 nach gleicher Seite hin gleiche Winkel w_1 und w_2 mit G , so weichen ihre Richtungen in gleichem Sinne um gleich viel von der sich nach Fr. 24 VII. überall gleich bleibenden Richtung von G ab. G_1 und G_2 müßten somit gleiche Richtung haben und ebenso:

III. ist es in I. gleichgültig, wo in AB der Scheitel A des Winkels w zwischen den beiden Geraden liegt, so lange es sich bloß um die Richtung, nicht aber um die Lage der beiden Geraden handelt. Vergl. auch Fr. 55 V.

47. Was ist ein Kreis, und wie entsteht er?

I. Ändert eine Strecke AB (Fig. 30), während sie sich in einer Ebene um ihren festen Endpunkt A dreht (vergl. Fr. 44), ihre Länge nicht, so kommt der andere Endpunkt B von B_0 ausgehend nach und nach in die Lagen B_1 , B_2 , B_3 zc. und

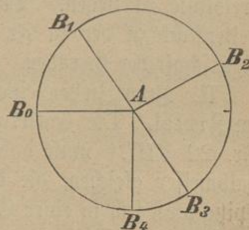


Fig. 30.

schließlich wieder auf seinen Ausgangspunkt B_0 in der ursprünglichen Lage AB_0 der Strecke zurück.

Der Punkt B beschreibt also bei dieser Drehung eine in sich zurücklaufende ebene Linie, welche Kreislinie oder kurz Kreis genannt wird.

II. Der Kreis ist diejenige ebene Linie, von deren sämtlichen Punkten sich gleichlange Gerade nach einem in derselben Ebene*) liegenden Punkte A (Fig. 30) — dem Mittelpunkte des Kreises — ziehen lassen, oder deren Punkte sämtlich von diesem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind (Fr. 22 VIII.).

III. Der Mittelpunkt A liegt im Innern des Kreises. Die andern Punkte der Ebene liegen innerhalb, oder außerhalb des Kreises, jenachdem sie von dem Mittelpunkte in kleinerer, oder in größerer Entfernung liegen, als die Punkte des Kreises. Vergl. Fr. 82.

IV. Auch das von der Kreislinie umschlossene ebene Flächenstück nennt man zuweilen Kreis und unterscheidet dann von ihm die Kreislinie als Umfang (Peripherie) des Kreises.

V. Auch von einem Kreise kann wegen Fr. 47 II. und 14 III. kein Punkt außerhalb einer Ebene liegen, sobald einmal drei Punkte, oder zwei Punkte desselben und der Mittelpunkt in dieser Ebene liegen. Vergl. Fr. 12 II.

VI. Dreht man einen Kreis in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt, so kommt dabei kein Kreispunkt außerhalb der Kreislinie zu liegen. Diese Eigenschaft des Kreises ist ein Seitenstück zu der in Fr. 9 III. und Fr. 24 besprochenen Eigenschaft der Geraden. Vergl. aber Fr. 84 bis 86.

VII. Zum Ziehen eines Kreises (Fr. 6 I.) benutzt man den Zirkel. Die Entfernung der Spitzen beider Schenkel (Fr. 22 VIII.) muß dabei unverändert bleiben und dem Halbmesser gleichen, die den Kreis beschreibende bewegliche Spitze muß sich in einer Ebene bewegen (II.). Die Schenkel des Zirkels müssen demnach hinreichend steif sein.

*) Vergl. hierzu Fr. 190 VI. und VII.

48. Was ist ein Halbmesser und Durchmesser des Kreises?

I. Jede der unter sich gleichen, vom Mittelpunkte A (Fig. 30) nach einem Kreispunkte B gezogenen Strecken AB nennt man einen Halbmesser (Radius).

II. Zwei nach entgegengesetzten Seiten hin in eine Gerade fallende Halbmesser AB_1 und AB_2 bilden einen Durchmesser (Diameter).

III. Alle Durchmesser, ebenso alle Halbmesser desselben Kreises sind unter sich gleich.

49. Wenn sind zwei Kreise gleich und wenn ungleich?

I. Legt man zwei Kreise mit ihren Mittelpunkten und einem Durchmesser auf einander (Fr. 22 V.), und bringt man noch einen Punkt des zweiten Kreises in die Ebene des ersten, so decken sich die Ebenen beider Kreise (Fr. 21 III.).

Decken sich dabei die Durchmesser, so decken sich auch die Kreise selbst, weil sonst nach Fr. 20 III. zwei ihrer Halbmesser ungleich sein müßten, was bei der gemachten Voraussetzung und Fr. 20 V. in Widerspruch mit Fr. 48 III. stünde.

II. Daher sind zwei Kreise gleich, wenn sie gleiche Halbmesser, oder gleiche Durchmesser haben.

III. Legt man zwei Kreise von ungleichem Halbmesser in derselben Ebene mit ihren Mittelpunkten auf einander, so liegen alle Punkte des Kreises mit kleinerem Halbmesser innerhalb des andern Kreises (Fr. 22 V. und Fr. 47 III.).

IV. Kreise von verschiedenem Halbmesser sind daher ungleich; weitere Erörterungen hierüber folgen später.

50. Was ist ein Kreisbogen, ein Bogen von 1 Grad, 1 Minute, 1 Sekunde?

I. Jedes Stück, z. B. B_1B_2 , Fig. 30, eines Kreises heißt ein Kreisbogen (Arcus).

II. Den dreihundertsechzigsten Teil des ganzen Kreises nennt man einen Bogen von 1 Grad (1°) oder einen Bogengrad.

Der sechzigste und dreitausendsechshundertste Teil von einem Bogengrad heißen ein Bogen von 1 Minute ($1'$) oder eine Bogenminute und ein Bogen von 1 Sekunde ($1''$) oder eine Bogensekunde. Vergl. Fr. 38.

III. Die Bögen von 90° , 60° und 45° nennt man Quadrant, Sextant, Oktant.

51. Wie bezeichnet man einen Kreisbogen?

Zur Bestimmung eines Bogens von einem gegebenen Kreise braucht man (wegen Fr. 47 I.) nur die beiden Endpunkte B_1 und B_2 (Fig. 30) des Bogens. Diese beiden Endpunkte benutzt man daher auch zur Bezeichnung des Bogens. Will man aber den Bogen zwischen B_1 und B_2 schärfer von der zwischen B_1 und B_2 möglichen Strecke B_1B_2 unterscheiden, so bezeichnet man den Bogen B_1B_2 als $\widehat{B_1B_2}$.

52. Wenn lassen sich zwei Kreisbögen zum Decken bringen?

I. Wie sich Kreise von gleichem Halbmesser zum Decken bringen lassen, ist schon in Fr. 49 I. angegeben worden.

II. Legt man die Mittelpunkte zweier Bögen desselben Kreises (oder zweier gleichen Kreise) und das eine Paar ihrer Endpunkte auf einander, und sorgt man noch dafür, daß die Bögen in derselben Ebene und von den aufeinanderliegenden Endpunkten aus nach derselben Seite hin liegen, so muß jeder Punkt des kürzeren Bogens auf einen Punkt des längeren fallen (Fr. 49 I.). Die beiden aufeinandergelegten Bögen decken sich daher und sind demgemäß gleichgroß, sobald auch ihre anderen Endpunkte aufeinanderfallen.

III. Kreisbögen von gleicher Länge lassen sich doch nicht so auf einander legen, wie es eben in I. angegeben wurde, sobald ihre Halbmesser verschiedene Größe haben. Die Bögen weichen demnach hierin von der Strecke ab; vergl. Fr. 22 V.

53. Was ist ein Halbkreis?

Jeder Durchmesser teilt den Kreis in zwei sich deckende, daher gleichgroße Halbkreise (Fr. 52 I.), die sich durch

Umkappen um ihren Durchmesser zum Decken bringen lassen (Fr. 9 III., 15 III. und 48 III.).

54. Welche Beziehung besteht zwischen den Bögen und den zu ihnen gehörigen Centriwinkeln?

I. Die Größe des zwischen zwei Halbmessern AB und AC (Fig. 31) liegenden Bogens $\widehat{BC}$ ist wie die Größe des von diesen Halbmessern gebildeten Mittelpunkts- oder Centriwinkels $CAB = w$ (Fr. 45 II.) von der Größe der Drehung abhängig, durch welche der Schenkel AC von AB aus in seine Lage kommt; denn mit der Drehung vergrößert (und verkleinert) sich gleichzeitig auch der zugehörige Winkel w und Bogen $\widehat{BC}$.

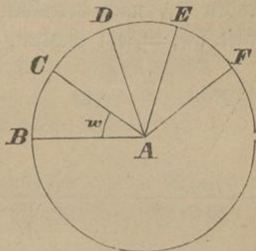


Fig. 31.

II. Daher kann man auch aus der Größe des Bogens $\widehat{BC}$ auf die Größe des Centriwinkels w und die Richtungsverschiedenheit der beiden Geraden AC und AB schließen.

III. Zu zwei gleichen Mittelpunktswinkeln desselben Kreises gehören auch gleiche Bögen, weil diese Bögen, sobald man nach Fr. 31 die Centriwinkel zum Decken bringt, sich ebenfalls decken (Fr. 52 I.).

IV. Daß zu gleichen Bögen desselben Kreises auch gleiche Mittelpunktswinkel gehören, folgt aus Fr. 52 I. wegen Fr. 30.

V. Sind in Fig. 31 die Bögen $\widehat{BD}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{BF}$ u. der Reihe nach 2, 3, 4 u. mal so groß als $\widehat{BC}$, so sind die zugehörigen Centriwinkel DAB, EAB, FAB auch 2, 3, 4 mal so groß als $\angle CAB$. Ebenso wachsen und verkleinern sich auch umgekehrt die Bögen genau in demselben Verhältnisse wie die zugehörigen Centriwinkel, oder, wie man kürzer sagt:

Die zusammengehörigen Bögen und Centriwinkel desselben Kreises sind einander proportional.

VI. Zu einem Winkel von 1° gehört auch ein Bogen von 1° ; der Halbkreis umfaßt 180° und gehört zu einem gestreckten Winkel.

34 Grad
55. Worin besteht die Parallelverschiebung eines Strahls, bzw. einer Geraden in einer Ebene?

I. Wenn von einer Geraden AB (Fig. 32) zwei Strahlen CD und EF in derselben Ebene auslaufen, welche mit der Geraden BA nach derselben Seite (nach B) hin denselben Winkel ($w_1 = w_2$) machen, so machen ihre Verlängerungen

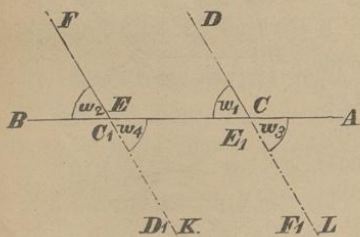


Fig. 32.

CL und EK gegen A hin ebenso große Winkel w_3 und w_4 , wie die Strahlen selbst gegen B hin; denn nach Zr. 42 II. ist $\angle w_3 = \angle w_1$ und $\angle w_4 = \angle w_2$.

Dreht man also die ganze ursprüngliche Figur um 180° in ihrer Ebene*), so kann man

sie so legen, daß die Punkte C und E ihren Ort wechseln und jeder der beiden Strahlen CD und EF als C_1D_1 und E_1F_1 auf die Verlängerung EK, bzw. CL des anderen kommt.

Schnitten sich nun die Strahlen CD und EF, so müßten sich auch ihre Verlängerungen CL und EK schneiden; da aber nach Zr. 21 II. zwei verschiedene Gerade nicht zwei Punkte gemein haben können, so können die beiden Geraden LD und KF gar keinen Punkt gemein haben, müssen vielmehr parallel sein (Zr. 26).

*) Bei $w_1 = w_2 = 90^\circ$ würde man auch durch Umlappen zum Ziel kommen; vergl. Zr. 57 V.

II. Denkt man sich nun die dritte Gerade FK ganz unbeweglich, die erste und zweite AB und DL aber fest mit einander verbunden, so daß sie ihre Lage gegen einander nicht ändern können, und bewegt man dann die beiden letzteren in ihrer Ebene so, daß die erste AB ihre Lage nicht ändert, sondern bloß auf sich selbst verschoben wird (Fr. 9 III.), so muß die andere DL auf die dritte FK fallen, sobald der Punkt C nach E kommt (Fr. 31). Überhaupt bleibt die zweite Gerade DL bei dieser Bewegung immer zu ihrer ursprünglichen Lage parallel; daher nennt man eine solche Bewegung eine Parallelbewegung oder, schärfer bezeichnend, Parallelverschiebung in der Ebene.

III. Die Gerade DL kann bei einer solchen Bewegung (ähnlich wie in Fr. 13) die ganze Ebene überstreichen.

IV. Die beiden unter $w_1 = w_2$ gegen BA geneigten Strahlen CD und EF in Fig. 32 haben gleiche Richtung (vergl. Fr. 46 II.).

V. Umgekehrt machen CD und EF, wenn sie gleiche Richtung haben, auch mit AB gleiche Winkel w_1 und w_2 nach derselben Seite hin.

VI. Haben die beiden in derselben Ebene liegenden unbegrenzten Geraden G_1 und G_2 (Fig. 33) verschiedene Richtung,

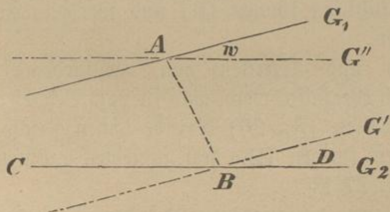


Fig. 33.

und verschiebt man G_1 parallel zu sich selbst (II.) auf der zwei Punkte A und B in G_1 und G_2 verbindenden Strecke AB nach B hin, so kommt G_1 endlich in die Lage G' und schneidet jetzt G_2 in B. Verschiebt man darauf die in die Lage G'

gekommene Gerade G_1 auf der nach Bedarf verlängerten AB immer noch parallel zu sich wieder nach A hin zurück (oder weiter), so rückt der Schnittpunkt zwischen G_1 (G') und G_2 von B aus nach C (oder D) hin fort; sind aber die beiden Geraden G_1 und G_2 unbegrenzt, so hören sie bei der Parallelbewegung von G_1 nicht auf, sich zu schneiden, selbst wenn G_1 wieder in ihre alte Lage zurückkommt.

VII. Wesentlich anders ist es, wenn die Gerade G , um den Punkt A gedreht wird. Dann kann sie (Fr. 25 II. und 44 I.) durch allmähliche Verkleinerung des Winkels w schließlich in die Lage G'' gebracht werden, in welcher sie mit G_2 gleiche Richtung hat, also zu G_2 parallel sein muß (Fr. 55 V. und I.).

56. Wieviel verschiedene Lagen gegen einander können zwei in derselben Ebene liegende Gerade haben?

I. Zwei sich schneidende Gerade haben verschiedene Richtung. Ebenso haben alle Gerade, welche von einem und demselben Punkte auslaufen, oder nach ihm hinkommen, verschiedene Richtung. Vergl. Fr. 24 I. und 25 II.

II. Zwei in derselben Ebene liegende Gerade von gleicher Richtung sind parallel (I. und Fr. 25 II., oder Fr. 55 V. und I.).

III. Zwei Gerade in derselben Ebene, aber von verschiedener Richtung können (I.) und werden (Fr. 55 VI.) sich schneiden.

Strahlen und Strecken von verschiedener Richtung schneiden sich ebenfalls, wenn man sie nach Bedarf verlängert.

IV. Parallele (Fr. 26) Gerade haben gleiche Richtung, weil sie sonst (wegen III.) sich schneiden müßten. Vergl. Anm. zu Fr. 77 IV.

V. Bei zwei verschiedenen Geraden in derselben Ebene können also überhaupt nur die in Fr. 26 aufgeführten zwei verschiedenen Lagen gegen einander vorkommen.

57. Welche Folgerungen fließen aus Fr. 56?

I. Durch jeden Punkt A (Fig. 33) einer Ebene läßt sich in der Ebene nur eine Parallele G'' zu einer in dieser Ebene

liegenden Geraden G_2 ziehen; denn jede in derselben Ebene durch A gelegte andere Gerade G_1 hat eine andere Richtung als G'' (Fr. 56 I.) und muß deshalb auch G_2 schneiden (Fr. 56 III.). Vergl. auch Fr. 25 II.

II. Alle in derselben Ebene liegende Perpendikel (z. B. in Fig. 34 PQ und TK) auf derselben Geraden MN haben gleiche Richtung (Fr. 55 IV., weil ja $\angle u = \angle v = R$, Fr. 39 III.) und sind deshalb parallel (Fr. 56 II.).

III. Daher läßt sich auch (wegen Fr. 56 I.) in einem Punkte Q (Fig. 34) einer Geraden MN auf dieser Geraden MN und in einer bestimmten Ebene nur eine Senkrechte QP errichten.

IV. Auch von einem Punkte T läßt sich nur eine Senkrechte TK auf eine Gerade MN herabfallen. Denn ließen sich mehrere Senkrechte von T auf MN fallen, z. B. TK und TS, so hätten sie nach Fr. 56 I. verschiedene Richtung, während sie doch nach II. gleiche Richtung haben müßten.

V. Beim Umlappen der Ebene um die Gerade MN (Fr. 15 III.) kommen die auf MN senkrechten PQ und TK auf P_1Q und T_1K zu liegen und dabei sind PQP_1 und TKT_1 zwei Gerade (Fr. 40).

Aus dieser Betrachtung läßt sich nicht nur ein Verfahren ableiten, wie man von T eine Senkrechte auf MN herabfallen kann, sondern auch ein anderer Nachweis für

die Richtigkeit des Satzes IV. Denn wären TS und TK zugleich auf NM senkrecht, so müßten TST_1 und TKT_1 beide Gerade sein, was nach Fr. 21 II. unmöglich ist.

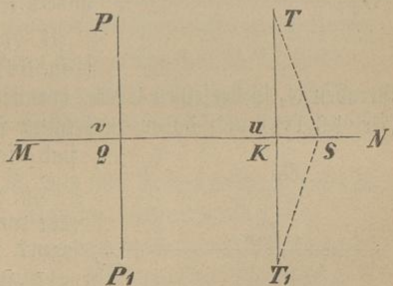


Fig. 34.

VI. Stünden in Fig. 35 PP_1 und XX_1 zugleich in Q auf MN senkrecht, so wäre $\angle v = 90^\circ = \angle w$ und $\angle v + \angle w + \angle r > 180^\circ$; dies ist aber als Zr. 34 III. widersprechend unmöglich. — Hierin liegt zugleich ein anderer Nachweis für die Richtigkeit des Satzes III.

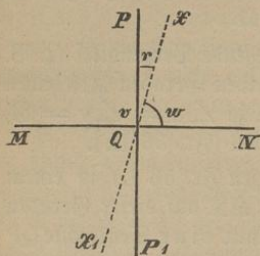


Fig. 35.

58. Wieviel Fälle lassen sich in betreff der Richtung bei drei Geraden in derselben Ebene unterscheiden?

Drei Gerade in derselben Ebene haben entweder gleiche Richtung, oder zweierlei, oder dreierlei verschiedene Richtungen.

59. Was ist über drei Gerade von einerlei Richtung zu sagen?

I. Haben drei in derselben Ebene liegende Gerade G_1 , G_2 und G_3 (Fig. 36) gleiche Richtung, so schneidet keine die andere (Zr. 56 II. und 26).

Fig. 36.

II. Zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 36), welche einer dritten Geraden G_3 in derselben Ebene parallel sind, haben mit G_3 (Zr. 56 IV.) und daher auch unter sich gleiche Richtung, sind also parallel (Zr. 56 II.).

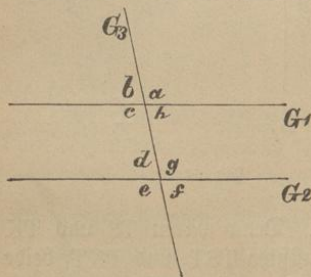


Fig. 37.

60. Was ist über drei Gerade von zweierlei Richtung zu sagen?

I. Zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 37) von gleicher Richtung werden beide von einer andersgerichteten, in derselben Ebene liegenden dritten Geraden G_3 geschnitten (Zr. 56 III.).

II. Wird die eine G_1 von zwei parallelen Geraden G_1 und G_2 von einer dritten, in derselben Ebene liegenden Geraden G_3 geschnitten, so wird auch die zweite G_2 von der dritten G_3 geschnitten (Fr. 56 III.); denn G_1 und G_2 haben verschiedene Richtung (Fr. 56 I.) und deshalb auch G_1 und G_3 .

III. Es entstehen dabei 8 Winkel, welche (abgesehen von den Nebenwinkeln und den Scheitelswinkeln) paarweise mit besonderen Namen belegt werden.

IV. Am wichtigsten ist die Unterscheidung der 8 Winkel nach ihrer Lage an der Schneidenden:

Gegenwinkel liegen auf derselben Seite der Schneidenden; Wechselwinkel liegen auf verschiedenen Seiten der Schneidenden.

Faßt man daneben zugleich die Lage der Winkel gegen die beiden Parallelen ins Auge, so nennt man:

Ergänzungswinkel die Winkel, welche entweder bei gleicher Lage an der Schneidenden verschieden an den Parallelen liegen, oder bei gleicher Lage an den Parallelen verschieden an der Schneidenden;

Gleichliegende (korrespondierende) Winkel die, welche an der Schneidenden und an den Parallelen gleich liegen.

Von etwas geringerer Bedeutung sind die

Verschiedenliegenden Winkel, welche verschiedene Lage sowohl an der Schneidenden als an den Parallelen haben.

Minder wichtig ist auch die Unterscheidung der Winkel bloß nach ihrer Lage gegen die beiden Parallelen:

Innere Winkel liegen innerhalb der Parallelen;

Außere Winkel liegen außerhalb der Parallelen;

Gemischte Winkel liegen einer außerhalb, der andere innerhalb der Parallelen.

Es sind also in Fig. 37:

c und d } innere Gegenwinkel und Ergänzungswinkel,
h und g }

b und e	}	äußere Gegenwinkel und Ergänzungswinkel,
a und f		
b und d, a und g	}	gemischte Gegenwinkel und gleichliegende Winkel,
c und e, h und f		
g und c	}	innere Wechselwinkel und verschieden liegende Winkel,
h und d		
b und f	}	äußere Wechselwinkel und verschieden liegende Winkel,
a und e		
b und g, a und d	}	gemischte Wechselwinkel und Ergänzungswinkel.
c und f, h und e		

61. Welche Beziehungen finden zwischen den Gegen-, Wechsel- und Ergänzungswinkeln statt?

I. Sind ein Paar korrespondierende Winkel unter sich gleich, so sind auch die Winkel eines jeden der drei anderen Paare unter sich gleich.

Vor.*) $\angle a = \angle g$ (Fig. 37).

Beh. 1. $\angle b = \angle d$;

2. $\angle h = \angle f$;

3. $\angle c = \angle e$.

Bew. Sind die Winkel a und g einander gleich, so sind es auch ihre Nebenwinkel: $\angle b = \angle d$ und $\angle h = \angle f$ (Zr. 39 I.), und ihre Scheitelwinkel: $\angle c = \angle e$ (Zr. 42 I.).

In dem vorstehenden Satze müßte eigentlich der Reihe nach jedes der vier Paare korrespondierender Winkel als gleich „vorausgesetzt“ und daraus die Gleichheit der drei anderen Paare „bewiesen“ werden. Diese Beweisführung

*) Jeder wissenschaftliche Satz knüpft an eine „Voraussetzung“ (vergl. Zr. 40), welche das Gegebene, als wahr Angenommene enthält, eine aus dieser Voraussetzung sich ergebende Wahrheit: die „Behauptung“. Muß die Richtigkeit eines solchen Satzes ohne weiteres notwendig allgemein anerkannt werden, so heißt der Satz ein „Grundsatz“; die Richtigkeit eines „Lehrsatzes“ dagegen muß durch einen „Beweis“ erst besonders nachgewiesen werden.

Werden in einer Figur behufs der Beweisführung gewisse Linien zc. hinzugefügt, so faßt man dieselben unter dem Namen „Konstruktion“ zusammen.

würde aber nur auf eine dreimalige Wiederholung des eben geführten Beweises hinauslaufen, weil die vier Paare einander ganz gleichgeordnet sind. Es mag daher hier und in II. bis IV., wie auch in Fr. 62 der Beweis für ein ganz beliebig herausgegriffenes Paar genügen.

II. Sind ein Paar verschieden liegende Winkel unter sich gleich, so sind es auch die drei anderen Paare (Fr. 39 I. oder 42 I.), weil diese Scheitel- oder Neben-Winkel von jenen sind.

III. Liefert ein Paar Ergänzungswinkel als Summe 180° , so thun es auch die drei gleichartigen anderen Paare.

a) Die Ergänzungswinkel sind innere oder äußere Gegenwinkel:

Vor. $\angle a + \angle f = 180^\circ$.

Beh. $\angle b + \angle e = \angle h + \angle g = \angle d + \angle c = 180^\circ$.

Bew. 1:

$$\left. \begin{array}{l} \angle a = 180^\circ - \angle b \\ \angle f = 180^\circ - \angle e \end{array} \right\} \text{ (Fr. 39 IV.).}$$

$$\begin{array}{l} 180^\circ = \angle a + \angle f \\ \quad = (180^\circ - \angle b) + (180^\circ - \angle e) \text{ (Vor. und} \\ 180^\circ = \angle b + \angle e. \text{ Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

Bew. 2:

$$\begin{array}{l} (\angle a + \angle h) + (\angle f + \angle g) = 360^\circ \text{ (Fr. 39 IV.).} \\ \quad \angle a + \angle f = 180^\circ \text{ (Vor.)} \\ \hline \angle h + \angle g = 180^\circ \text{ (Fr. 20 VIII.).} \end{array}$$

Bew. 3:

$$\begin{array}{l} \angle a + \angle f = 180^\circ \text{ (Vor.)} \\ \quad \left. \begin{array}{l} \angle a = \angle c \\ \angle f = \angle d \end{array} \right\} \text{ (Fr. 42 II.).} \\ \hline \angle c + \angle d = 180^\circ \text{ (Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

*) Ein solcher Strich (sprich: „folglich“) in einem in dieser übersichtlichen Form geschriebenen Beweise bedeutet, daß das zunächst unter dem Striche Stehende aus dem über dem Striche Stehenden gefolgert oder geschlossen worden ist.

Die hinter jeder Zeile stehenden Nummern geben die früheren Sätze an, welche als Beweisgrund für die Wahrheit des Inhalts der Zeile gelten.

b) Die Ergänzungswinkel sind gemischte Wechselwinkel:

Ist $\angle a + \angle d = 180^\circ$ Vor., so folgt aus $(\angle a + \angle b) + (\angle g + \angle d) = 360^\circ$ (Zr. 39 IV.) durch Subtraktion, daß auch $\angle b + \angle g = 180^\circ$ ist (Zr. 20 VIII.). Da aber nach Zr. 42 II. $\angle a = \angle c$, $\angle d = \angle f$, $\angle b = \angle h$ und $\angle g = \angle e$ ist, so muß auch $\angle c + \angle f = 180^\circ$ und $\angle h + \angle e = 180^\circ$ sein (Zr. 20 IV.).

IV. Ist eine der vier Voraussetzungen in I. bis III. erfüllt, so sind auch die drei anderen erfüllt.

Vor. $\angle a + \angle d = 180^\circ$.

Beh. 1. $\angle a = \angle c$.

2. $\angle a + \angle f = 180^\circ$.

3. $\angle a = \angle g$.

Bew. 1. $\angle a = 180^\circ - \angle d$ (Vor.).

$\angle e = 180^\circ - \angle d$ (Zr. 39 IV.).

$\angle a = \angle e$ (Zr. 20 V.).

Bew. 2. $\angle a + \angle d = 180^\circ$ (Vor.).

$\angle d = \angle f$ (Zr. 42 II.).

$\angle a + \angle f = 180^\circ$ (Zr. 20 IV.).

Bew. 3. $\angle a = 180^\circ - \angle d$ (Vor.).

$\angle g = 180^\circ - \angle d$ (Zr. 39 IV.).

$\angle a = \angle g$ (Zr. 20 V.).

62. Kann man aus dem Parallelismus zweier Geraden auf die Größe der Gegen- und Wechsel-Winkel schließen und umgekehrt?

I. Werden zwei parallele Gerade G_1 und G_2 (Fig. 37 auf S. 44) von einer dritten G_3 geschnitten, so sind

1. je zwei korrespondierende Winkel, z. B. a und g , unter sich gleich (Zr. 55 V.), weil G_1 und G_2 nach Zr. 56 IV. gleiche Richtung haben; daraus folgt dann nach Zr. 61 IV., daß
2. auch je zwei innere oder äußere Wechselwinkel, z. B. a und e , unter sich gleich sind und
3. je zwei Ergänzungswinkel, z. B. a und f , oder a und d , zusammen 180° ausmachen.

II. Werden zwei Gerade G_1 und G_2 von einer dritten G_3 so geschnitten, daß entweder

1. je zwei korrespondierende Winkel unter sich gleich,
2. oder je zwei innere oder äußere Wechselwinkel unter sich gleich,

3. oder je zwei Ergänzungswinkel zusammen 180° sind, so sind die beiden Geraden G_1 und G_2 parallel.

Der Beweis für 1. liegt in Fr. 55 I.; von 2. oder 3. aber kommt man durch Fr. 61 IV. auf 1. zurück.

III. Behalten wir die Benennung der acht Winkel auch für den Fall bei, wo zwei nicht parallele Gerade G_1 und G_2 (Fig. 38) von einer dritten G_3 geschnitten werden, so sind bei zwei solchen Geraden

1. je zwei korrespondierende Winkel ungleich,
2. je zwei innere oder äußere Wechselwinkel ungleich,
3. die Ergänzungswinkel paarweise entweder größer, oder kleiner als 180° .

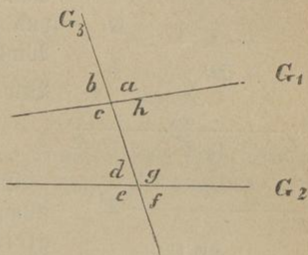


Fig. 38.

Bem. Wäre $\angle a + \angle d = 180^\circ$, oder $\angle a + \angle f = 180^\circ$, oder $\angle a = \angle e$, oder endlich $\angle a = \angle g$, dann müßte (nach II.) $G_1 \parallel G_2$ sein, und da dies der Voraussetzung (daß G_1 und G_2 sich schneiden) widerspräche, so muß die Annahme (daß z. B. $\angle a = \angle g$) falsch sein.

IV. Werden zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 38) von einer dritten G_3 so geschnitten, daß

1. zwei korrespondierende Winkel ungleich,
2. zwei innere oder äußere Wechselwinkel ungleich,
3. zwei Ergänzungswinkel zusammen entweder größer, oder kleiner als 180°

sind, so schneiden sich die beiden Geraden G_1 und G_2 , denn wären sie parallel, so wären (nach I.) die unter 1. bis 3. aufgeführten Beziehungen nicht möglich. Vergl. Zr. 69 IX.

Ann. Diese vier Sätze liefern eine Befriedigung von Zr. 57 I.

V. Steht eine Gerade auf der einen von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht (I. 3).

63. Was folgt aus dem Parallelismus der Schenkel zweier Winkel?

I. Sind die Schenkel zweier Winkel BAC und DEF paarweise nach derselben Seite hin, oder nach entgegengesetzten Seiten hin parallel ($BA \parallel DE$ und $AC \parallel EF$), so sind die beiden Winkel gleich.

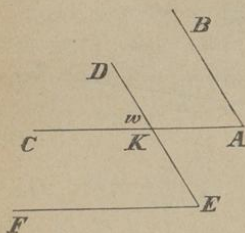


Fig. 39.

Bew. Sind A und E flache Winkel, so folgt der Satz aus Zr. 34 I.

Sind A und E hohl, oder überstumpft und liegen die Schenkel gleichsinnig (Fig. 39), so schneiden sich (nach Zr. 56 III.) je zwei

nicht parallele Schenkel, z. B. ED und AC in K , und dann gleicht nach Zr. 62 I. sowohl $\angle A$ als $\angle E$ dem $\angle w$, daher ist $\angle A = \angle E$ (Zr. 20 V.).

Sind endlich A und E hohl, oder überstumpft und liegen die Schenkel entgegengesetzt, so wird bei Verlängerung von DE nach ED' und FE nach EF' jetzt der Winkel $D'E'F'$, die nämliche Lage gegen BAC haben, wie der Winkel DEF in Fig. 39 gegen BAC ; daher gleicht zunächst $\angle D'E'F'$ und wegen Zr. 42 II. dann auch $\angle DEF$ dem $\angle BAC$.

II. Liegen die Schenkel zweier Winkel BAC und DEF so paarweise parallel, daß das eine Paar EF und AC gleichsinnig, das andere ED und AB entgegengesetzt parallel ist, so ergänzen sich die beiden Winkel zu 180° (Zr. 39 IV.).

Hier wird nämlich der durch die Verlängerung ED' von DE erzeugte Nebenwinkel $D'EF$ gegen BAC so liegen, wie in Fig. 39 der Winkel DEF .

64. Was ist über drei Gerade von dreierlei Richtung zu sagen?

I. Hat von drei Geraden G_1 , G_2 und G_3 in einer Ebene jede eine andere Richtung, so gehen sie entweder alle drei durch einen Punkt S (Fig. 40), oder es schneiden sich immer nur je zwei in einem Punkte.

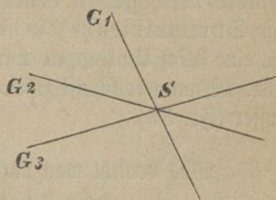


Fig. 40.

II. Im letzteren Falle begrenzen die drei Geraden eine ebene Figur ABC (Fig. 41), welche man ein ebenes geradliniges Dreieck oder kurzweg ein Dreieck ($\triangle$) nennt.

Die drei Schnittpunkte A , B und C der drei Geraden heißen die Eckpunkte oder Spizen, die zwischen ihnen liegenden Strecken $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$ heißen die Seiten des Dreiecks. Durch diese Wahl der Buchstaben a , b , c deutet man zugleich den jeder Seite gegenüberliegenden Winkel an.

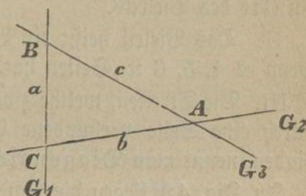


Fig. 41.

III. Sind alle drei Seiten

eines Dreiecks gleich groß, so heißt das Dreieck gleichseitig; bei dem gleichschenkeligen Dreieck sind bloß zwei Seiten gleich; bei dem ungleichseitigen Dreieck ist keine Seite der anderen gleich. Vergl. Fr. 114 und 115.

Die Senkrechte $AD = h_a$, welche in einem Dreieck ABC von der Spitze A auf die Gegenseite a herabgefallen wird, heißt die Höhe des Dreiecks, die von A nach der Mitte E von a gezogene Strecke $AE = m_a$ die Mittellinie des

Dreiecks, beides in Bezug auf die Seite a. Für h_a nennt man a die Grundseite, A die Spitze.

Im gleichschenkeligen Dreieck heißen die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite heißt Grundseite oder Basis und der Scheitel des der Grundlinie gegenüberliegenden Winkels die Spitze.

IV. Ein Dreieck und ebenso ein anderes ebenes Gebilde heißt symmetrisch gegen eine Gerade, wenn es durch diese (die Symmetrieaxe) so in zwei Teile zerlegt wird, daß der eine beim Umlappen um die Symmetrieaxe den andern deckt. Symmetrisch ist z. B. der Kreis gegen jeden Durchmesser (Fr. 53).

65. Was versteht man unter einem Vieleck?

I. Ein ebenes geradliniges Vieleck oder kurzweg ein Vieleck ist eine ebene Figur, welche von lauter Strecken begrenzt wird, wobei jedoch jede Strecke nur die beiden ihr benachbarten Strecken schneidet. Die das Vieleck begrenzenden Strecken heißen seine Seiten, ihre Schnittpunkte die Eckpunkte des Vielecks.

II. Das Vieleck heißt ein Viereck, Fünfeck, Sechseck u., wenn es 4, 5, 6 u. Seiten hat.

III. Die Strecken, welche zwei nicht benachbarte, also nicht durch eine Seite verbundene Eckpunkte eines Vielecks verbinden, nennt man Diagonalen. Vergl. Fr. 72 I. und II.

In Fig. 42 liegen die von A aus gezogenen Diagonalen AC, AD und AE des Sechsecks ABCDEF sämtlich innerhalb der Figur. Es kann jedoch eine Diagonale auch ganz, oder teilweise außerhalb der Figur liegen, ebenso eine, oder selbst mehrere Seiten schneiden, teilweise mit ihnen zusammenfallen, bezw. ihre Verlängerung bilden.

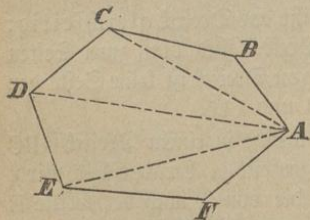


Fig. 42.

Man könnte z. B. in Fig. 42 das $\triangle ABC$ um AC nach innen klappen. Ferner ließe sich das $\triangle BCD$ so um BD klappen, daß C auf AD, oder in die Verlängerung von AD, oder selbst innerhalb AED fiele.

IV. Nach I. bilden die Seiten eines Vielecks — im Einklang mit Fr. 7 III. — nur die Grenzen der Figur, laufen aber nicht durch die Fläche der Figur hindurch.

Man kann jedoch — u. a. durch ähnliche Umklappungen wie in III., vergl. z. B. Fig. 64 bei Auffassung der Strecke AB als Diagonale — auch auf geometrische Gebilde kommen, deren Seiten durch die Fläche hindurchlaufen, oder auch

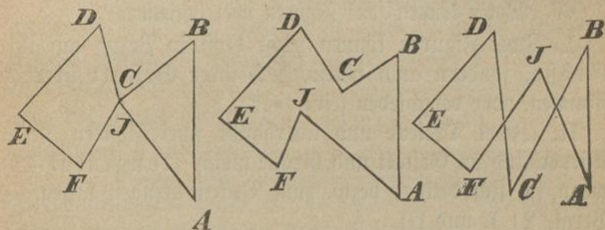


Fig. 43.

andere als die beiden benachbarten Seiten schneiden. So würde man von dem mittlern Siebeneck ABCDEJ in Fig. 43 durch fortgesetzte Verschiebung der Eckpunkte C und J zu den links und rechts stehenden Gebilden gelangen, welche als Aneinanderfügung eines Vierecks und eines Dreiecks, bezw. zweier Vierecke und eines Dreiecks aufgefaßt werden mögen. Noch verwickelter wird die Gestaltung, wenn man in der rechts stehenden Zeichnung den Punkt C über F hinaus nach links verschöbe. Vergl. auch Fig. 108 bis 110 in Fr. 106 IV.

V. Von jedem Eckpunkte A eines n -ecks ABCDEF, Fig. 42, lassen sich nur $n-3$ Diagonalen (Fr. 65 III.) ziehen, da außer A und seinen beiden Nachbarn B und F nur noch $n-3$ Eckpunkte vorhanden sind.

VI. Für die n -Eckpunkte des n -ecks würden daher n -mal $(n-3)$ Diagonalen möglich sein, wenn dabei nicht jede zweimal vorkäme. Deshalb hat das n -eck nur $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen.

Das Viereck hat somit $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$ Diagonalen,
 „ Fünfeck „ „ $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ „
 „ Sechseck „ „ $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ „ u. s. w.

Zweites Kapitel.

Das Dreieck.

66. Worin können zwei Figuren übereinstimmen?

I. Zwei Figuren können nicht bloß in Bezug auf ihre Größe, sondern auch rücksichtlich ihrer Gestalt übereinstimmen, oder verschieden sein.

II. Zwei Dreiecke und überhaupt zwei Figuren, bezw. Körper sind an Gestalt und Größe gleich (kongruent $\cong$), wenn sie sich decken, bezw. zum Decken bringen lassen. — Vergl. 21 I. und III.

III. Haben zwei Figuren oder Körper bloß gleiche Gestalt, so nennt man sie ähnlich ($\sim$);

IV. haben sie bloß gleiche Größe, so heißen sie inhalts-gleich, oder kurzweg gleich ($=$).

67. Was gilt von kongruenten Figuren?

I. In zwei kongruenten Vielecken, also namentlich auch in zwei kongruenten Dreiecken, müssen alle Stücke (d. i. Seiten und Winkel) der Reihe nach sich decken und demnach gleich sein.

II. Daher sind in kongruenten Dreiecken die Gegenseiten gleicher Winkel und die Gegenwinkel gleicher Seiten gleich, d. h. diejenigen Seiten und Winkel, welche beziehungsweise gleichen Winkeln und gleichen Seiten gegenüberliegen.

III. Kongruente Figuren, z. B. Dreiecke, in gleicher Weise aneinandergelegt, geben kongruente Figuren.