

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

Erster Abschnitt. Die Geometrie der Ebene

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

Erster Abschnitt.

Die Geometrie der Ebene.

Erstes Kapitel.

Eine, zwei, drei und mehr Gerade in derselben Ebene.
Winkel, Kreis, Dreieck, Vieleck.

21. Welche Folgerungen lassen sich noch aus Fr. 9 und 14 ziehen?

I. Legt man zwei Punkte einer Geraden auf zwei Punkte einer anderen Geraden, so müssen die beiden Geraden nach Fr. 9 I. einander decken, d. h. jeder Punkt der einen muß mit einem Punkte der anderen zusammenfallen.

II. Durch zwei gegebene Punkte, z. B. durch D und F in Fig. 5 (S. 10), läßt sich nur eine Gerade G ziehen.

III. Werden zwei Ebenen mit den in Fr. 14 II., oder III., oder IV. genannten Stücken auf einander gelegt, so müssen sie sich ebenfalls decken.

IV. Auch irgend zwei Halbebenen (Fr. 15 IV.) lassen sich zum Decken bringen.

V. Daher ist die Gerade auf den beiden Seiten, die man in einer Ebene an ihr nach den beiden durch sie getrennten Halbebenen unterscheiden kann, von gleicher Beschaffenheit.

22. Welche ähnliche Sätze ergeben sich hieraus für Strecken?

I. Wenn zwei Strecken oder Strahlen sich decken, so decken sie auch ihre Verlängerungen. Vergl. Fr. 9 VI. bis IX.

II. Jede Strecke hat also an jedem Ende nur eine Verlängerung.

III. Zwei Strecken decken sich, wenn ihre Grenz- oder Endpunkte paarweise auf einander fallen.

IV. Zwei Strecken, welche sich zum Decken bringen lassen, sind gleichlang oder gleich.

V. Zwei Strecken können gleichlang sein, ohne sich zu decken; doch kann man sie dann stets zum Decken bringen.

Legt man nämlich das eine Paar ihrer Endpunkte auf einander und bringt dann noch einen Punkt der einen mit einem Punkte der andern zum Zusammenfallen, so muß auch das andere Paar ihrer Endpunkte zusammenfallen, und die Strecken decken sich.

Auch zwei Strahlen kann man so zum Decken bringen.

Legt man Strecken von ungleicher Länge so auf einander, so wird die längere über die kürzere hinausragen.

VI. An Strecken läßt sich außer der Lage nur die Länge unterscheiden.

VII. Sind von einer Strecke die beiden Endpunkte bekannt, so ist die Lage und die Länge oder Größe der Strecke gegeben. Man bezeichnet daher eine Strecke durch die zwei an ihre Endpunkte gesetzten großen Buchstaben; in Fig. 7 z. B. ist EF oder EF die Strecke zwischen den Punkten E und F.

Noch kürzer bezeichnet man die Strecke mit einem daran gesetzten kleinen Buchstaben, z. B. $EF = a$.

VIII. Die Strecke EF nennt man die Entfernung oder den Abstand der zwei Punkte E und F. Vergl. Fr. 77 III.

VIII a) In genau demselben ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.
Abkürzung nach Buchstaben

23. Wie vollzieht man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Strecken?

I. Will man zwei Strecken KH und HT (Fig. 8) addieren, so legt man sie mit dem einen Endpunkte H auf einander, so daß die zweite die Verlängerung der ersten bildet; dann ist $KT = KH + HT$.



Fig. 8.

II. In ähnlicher Weise ist $HT = KT - KH$.

III. Ist ferner in Fig. 9 $PO = ON = NM = ML$, so ist $PL = 4 \times PO = 4PO$. Vergl. Fr. 144.

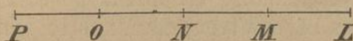


Fig. 9.

IV. Umgekehrt findet man durch wiederholte Subtraktion der Strecke PO , daß $PL : PO = 4$ ist. Solche Divisionen sind bloße Vergleichen; von ihnen wird in Fr. 145 weiter die Rede sein.

V. Die Division einer Strecke durch eine ganze Zahl n , d. h. die Teilung einer Strecke in n gleiche Teile wird später (in Fr. 127 und 128) gelehrt werden.

VI. Wie findet man die Größe zweier Strecken aus ihrer Summe s und ihrer Differenz d ?

24. Was ist über die Richtung der Geraden zu sagen?

I. Aus Fig. 10 ersieht man, daß ein Punkt P zur Bestimmung einer Geraden nicht ausreicht, daß sich vielmehr durch diesen Punkt P viele, verschiedene Gerade PQ , PR , PS , PT u. ziehen lassen. Diese verschiedenen Geraden laufen von dem Punkte P aus nach ebensoviel verschiedenen Richtungen, oder diese Geraden beschreibt ein sich geradlinig bewegender Punkt (vergl. Fr. 6 I.), wenn er von jenem Punkte P aus sich in den verschiedenen Richtungen bewegt.

II. Die beiden Strahlen PT und PU derselben Geraden TU laufen von P aus nach entgegengesetzten Richtungen.

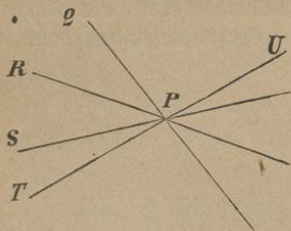


Fig. 10.

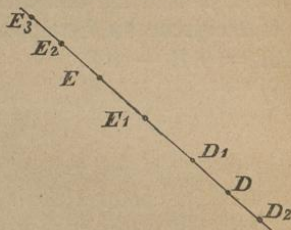


Fig. 11.

III. Zur Bestimmung der Richtung der Bewegung des sich von D (Fig. 11) aus bewegenden und bei seiner Bewegung die Gerade DE beschreibenden Punktes reicht (wegen Fr. 21 II.) der zweite Punkt E aus, welcher zugleich mit D die Gerade DE bestimmt. — Die Gerade DE giebt zugleich die Richtung an, in welcher der bewegliche Punkt sich beim Beschreiben dieser Geraden DE von D aus bewegt, oder in welcher irgend ein Punkt E der Geraden von dem Punkte D aus liegt. Vergl. Fr. 46.

IV. Der Punkt E bewegt sich in derselben Richtung, so lange er sich in derselben Geraden DE, von demselben Punkte D aus gesehen, nach derselben Seite hin bewegt.

V. Zieht man von dem Punkte D der Geraden DE nach verschiedenen, von D aus in demselben Strahle liegenden Punkten E_1 , E_2 , E_3 zc. dieser Geraden DE Strecken DE_1 , DE_2 , DE_3 zc., so fallen diese Strecken (nach Fr. 21 I.) sämtlich auf einander, wennschon sie sich zufolge ihrer verschiedenen Längen nicht decken.

Alle Punkte des Strahls DE liegen also von dem Punkte D aus in derselben Richtung. Dagegen können (wegen Fr. 10 IV.) zwar einzelne, jedoch durchaus nicht alle Punkte einer Krümmen von einem und demselben Punkte der Krümmen aus in der nämlichen Richtung liegen.

VI. Ebenso liegen die Punkte E_1, E_2, E_3 u. auch von den Punkten D_1 , oder D_2 aus in derselben Richtung wie von dem Punkte D aus (Fr. 22 II.).

VII. Die in V. und VI. ausgesprochenen beiden Eigenschaften, durch welche sich die Gerade vor der Krümmen auszeichnet, berechtigen zu der Behauptung: die Gerade hat überall (an allen ihren Punkten und Stellen) dieselbe Richtung.

25. Auf welche weitere Bestimmungsweise für die Gerade führen die in Fr. 24 angestellten Erörterungen?

I. Nach Fr. 9 I. ist die Lage der Geraden DE (Fig. 11) durch die beiden Punkte D und E bestimmt. Da nun durch den zweiten Punkt E die Richtung der Bewegung des von dem Punkte D aus die Gerade DE beschreibenden Punktes (Fr. 24 III.) oder die Richtung der von D auslaufenden Geraden DE bestimmt wird (Fr. 24 VII.) und da umgekehrt auch nach Fr. 24 V. alle Punkte der Geraden von D aus in derselben Richtung liegen, so müßte die Lage einer (unbegrenzten) Geraden DE auch bestimmt sein, wenn man den Punkt D von ihr hat und außerdem noch die Richtung angeben könnte, in welcher sich ein beweglicher Punkt von dem Punkte D aus zu bewegen hat, um die Gerade DE zu beschreiben.

II. Demnach ist die Lage der Geraden auch bestimmt durch einen Punkt und ihre Richtung und man kann (im Einklange mit Fr. 24 I.) von jedem Punkte D aus nur eine Gerade von vorgeschriebener Richtung ziehen.

26. Welche Verschiedenheit in Bezug auf die Zahl der gemeinsamen Punkte können zwei Gerade in derselben Ebene zeigen?

Zwei verschiedene in derselben Ebene liegende Gerade können (wegen Fr. 21 II.) niemals zwei Punkte gemein haben, sondern entweder bloß einen, oder gar keinen Punkt. Im letzteren Falle nennt man die beiden Geraden gleichlaufend oder parallel ($//$); im ersten Falle sagt

man, sie schneiden sich in diesem Punkte (dem Schnittpunkte).

Nach dem Schnittpunkte P (Fig. 12) hin sind die beiden Geraden SR und TQ zusammenlaufend oder konvergent, von ihm aus sind sie auseinanderlaufend oder divergent.

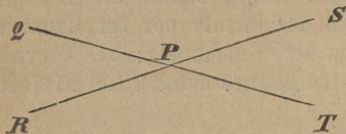


Fig. 12.

27. Können sich zwei Gerade berühren?

I. Wenn zwei Gerade NL und TS (Fig. 13) einen Punkt M gemein haben, so ist es unmöglich, daß der eine Strahl ML der einen Geraden NL mit einem Strahle MS der anderen TS zusammenfällt, während die beiden andern Strahlen MN und MT nicht auf einander liegen (Fr. 22 I.).

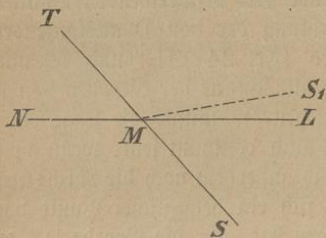


Fig. 13.

II. Ebenso wenig kann dabei die eine Gerade TS ganz auf der einen Seite der anderen Geraden NL liegen.

Wäre nämlich nicht MS , sondern MS_1 die Verlängerung von TM , so wäre die Halbebene oberhalb TMS_1 offenbar kleiner, als die Halbebene oberhalb NML . Da aber diese beiden Halbebenen sich nach Fr. 21 IV. decken müßten, so muß die gemachte „Annahme“: daß MS , die Verlängerung von TM sei, falsch sein, weil man von ihr ausgehend durch richtige Schlüsse auf etwas Falsches kommt.

Daß TMS_1 keine Gerade sein kann, lehrt auch folgende Betrachtung: Dreht man die Halbebene TMS_1 in der Ebene um den festgehaltenen Punkt M , so daß MT sich MN nähert, dann entfernt sich gleichzeitig MS_1 von ML , und wenn MT daher auf MN zu liegen kommt, so werden MS_1 und ML doch nicht auf einander fallen, in Widerspruch mit I.

III. Die beiden sich schneidenden Geraden TS und NL müssen also im Punkte M durch einander hindurchgehen. Ferner haben sie, wie überall, so auch in dem Punkte M nicht die nämliche Richtung (Fr. 24 I. und VII.).

Unter Benutzung eines erst später (vergl. Fr. 83 IV. und 85 Anm.) auftretenden Begriffs könnte man demnach sagen: Zwei Gerade können sich nicht berühren.

28. Was ist hiernach über die geradlinige oder krummlinige Verbindung zweier Punkte zu bemerken?

I. Ist in einer unbegrenzten Ebene eine unbegrenzte Gerade QT (Fig. 12) gezogen, so muß jede neue Gerade RS, welche zwei zu verschiedenen Seiten jener ersten Geraden liegende Punkte R und S jener Ebene verbindet, die erste Gerade QT einmal, aber auch nur einmal schneiden.

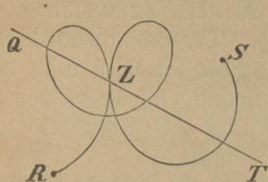


Fig. 14.

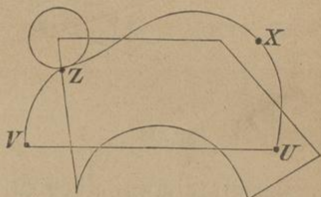


Fig. 15.

II. Werden diese beiden Punkte R und S durch eine in der Ebene liegende Krumme verbunden (Fig. 14), so kann es mehr als einen Schnittpunkt geben, stets aber eine ungerade Anzahl; doch können dabei mehrere Schnitte in einen Punkt Z zusammenfallen.

III. Jede Linie, welche einen Punkt U (Fig. 15) innerhalb und einen Punkt V außerhalb einer mit der Linie und den beiden Punkten in einerlei Ebene liegenden Figur verbindet, schneidet den Umfang der Figur wenigstens einmal.

IV. Läuft die eben erwähnte Linie von V nach U und dann weiter nach einem wieder außerhalb der Figur liegenden

Punkte X, so schneidet sie den Umfang der Figur wenigstens zweimal.

V. Jede Gerade, welche in der Ebene einer ebenen Figur liegt und in die Figur eintritt, muß bei ihrer Unbegrenztheit (Fr. 9 IX.) den Umfang der Figur wenigstens noch einmal schneiden (Fr. 11 III.).

29. Was ist ein Streifen und was ein ebener geradliniger Winkel?

I. Das zwischen zwei parallelen Geraden liegende halb-begrenzte Stück einer Ebene heißt ein Streifen.

II. Zwei von einem Punkte A (Fig. 16) auslaufende Strahlen AB und AC schließen zwischen sich ein halb-begrenztes ebenes Flächenstück ABDC ein, welches man einen ebenen geradlinigen Winkel ($\angle$) nennt.

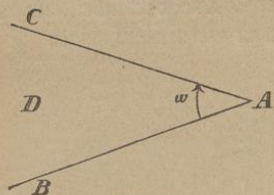


Fig. 16.

Der Schnittpunkt A der beiden Strahlen heißt der Scheitel, die Strahlen selbst die Schenkel des Winkels.

Zur Bezeichnung des Winkels benutzt man gewöhnlich drei große Buchstaben, von denen einer an jeden Schenkel und einer an den Scheitel gesetzt wird; letzteren stellt man beim Schreiben und Sprechen stets in die Mitte. Wo kein Irrtum entstehen kann, bezeichnet man den Winkel bloß mit dem am Scheitel stehenden großen Buchstaben. Sehr bequem ist es, zur Bezeichnung des Winkels einen kleinen Buchstaben in seine Öffnung zu setzen. Also:

$$\angle BAC = \angle CAB = \angle A = \angle w.$$

30. Wenn sind zwei Winkel gleich groß?

Zwei Winkel sind gleich, wenn sie sich zum Decken bringen lassen, wozu bloß nötig ist, daß ihre Scheitel und ihre Schenkel auf einander fallen, weil dann (nach Fr. 14 I.) auch die ganzen halb-begrenzten Ebenen auf einander fallen.

31. Wie lassen sich zwei gleiche Winkel zum Decken bringen?

Legt man die beiden gleichen Winkel mit ihren Scheiteln und je einem Schenkel auf einander (vergl. Fr. 22 V.), so läßt sich zunächst das den einen Winkel bildende Flächenstück noch mit einem seiner Punkte auf das den anderen bildende auflegen; dabei müßten sich (nach Fr. 14 IV.) die ganzen Ebenen decken. Zielen dann aber die beiden anderen Schenkel nicht auch auf einander, so wäre (wegen Fr. 20 III.) der eine Winkel größer als der andere, was ja nicht sein soll.

32. Wie vollzieht man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Winkeln?

I. Bei der Addition zweier Winkel legt man dieselben in derselben Ebene mit dem Scheitel und einem Schenkel so auf einander, daß der eine Winkel außer den anderen fällt. So ist in Fig. 17 $\angle GFE + \angle GFH = \angle EFH$.

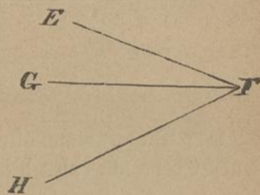


Fig. 17.

II. Bei der Subtraktion hat man den zu subtrahierenden Winkel auf den mit ihm den Scheitel und den einen Schenkel gemeinschaftlich besitzenden zweiten Winkel zu legen. In Fig. 17 ist $\angle HFE - \angle HFG = \angle GFE$.

III. Die Multiplikation eines Winkels läßt sich auf die Addition zurückführen (vergl. Fr. 23 III.).

IV. Die Division eines Winkels durch einen anderen Winkel erfolgt durch wiederholte Subtraktion des letzteren (vergl. Fr. 23 IV.).

V. Über die Division eines Winkels durch eine ganze Zahl wird später (Fr. 125 und 126) Einiges nachfolgen.

33. Was ist ein gestreckter oder flacher Winkel?

Fallen die Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus nach entgegengesetzten Seiten hin in dieselbe Gerade (Fr. 24 II.), so heißt der Winkel ein gestreckter oder flacher.

34. Welche Eigenschaften haben die flachen Winkel?

I. Alle gestreckten oder flachen Winkel sind gleich groß, weil sie sich zum Decken bringen lassen (Fr. 21 IV.).

II. Jeder gestreckte Winkel ist (nach Fr. 15 IV. und 21 IV.) die Hälfte der unbegrenzten Ebene.

III. Die Summe aller Winkel x, y, z (Fig. 18) in einer Ebene, an der einen Seite einer Geraden AB und mit gemeinschaftlichem Scheitel S beträgt einen gestreckten.

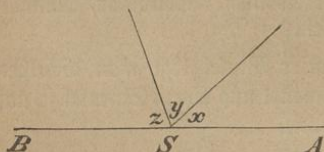


Fig. 18.

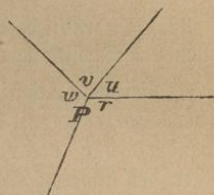


Fig. 19.

IV. Die Summe aller Winkel u, v, w, r (Fig. 19) in einer Ebene um einen Punkt P beträgt zwei gestreckte.

35. Was versteht man unter einem hohlen und einem überstumpfen Winkel?

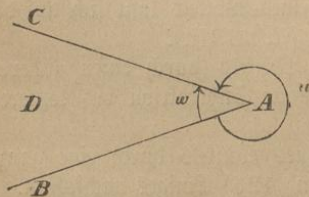


Fig. 20.

I. Jeder Winkel w (Fig. 20), welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler oder konkaver.

Jeder Winkel u , welcher größer als ein gestreckter ist, heißt ein erhabener, überstumpfer oder konvexer.

II. Mit jedem hohlen Winkel w entsteht zugleich ein erhabener u , und beide ergänzen sich (nach Fr. 34 IV.) zu zwei flachen. Vergl. Fr. 44 V.

36. Was sind anstoßende Winkel und Nebenwinkel?

I. Anstoßende Winkel nennt man zwei hohle Winkel EFG und GFH (Fig. 21), welche einen gemeinschaftlichen Scheitel F und einen gemeinschaftlichen Schenkel FG haben, und bei denen die beiden anderen Schenkel FE und FH zwar auf verschiedene Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels fallen, aber nicht in dieselbe Gerade.

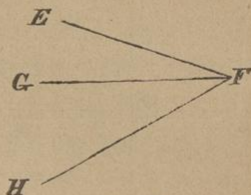


Fig. 21.

II. Haben zwei hohle Winkel EDF und CDF (Fig. 22) einen gemeinschaftlichen Scheitel D und einen gemeinschaftlichen Schenkel DF, während die beiden anderen Schenkel DE und DC vom Scheitel D aus nach entgegengesetzten Seiten hin in derselben Geraden liegen, so nennt man sie Nebenwinkel.

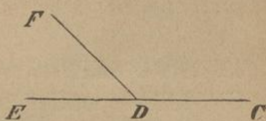


Fig. 22.

37. Wenn ist ein Winkel ein rechter, schiefer, spitzer und stumpfer? Was bedeutet winkelrecht oder normal?

I. Ist ein Winkel KNQ (Fig. 23) seinem Nebenwinkel TNQ gleich, so heißt er ein rechter (R).

Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist daher auch ein rechter.

II. Jeder hohle Winkel, welcher größer oder kleiner als ein rechter ist, heißt ein schiefer, und zwar ein spitzer, wenn er kleiner, dagegen ein stumpfer, wenn er größer ist als ein rechter. In Fig. 24 ist $\angle FDC$ stumpf, $\angle FDE$ spitz.

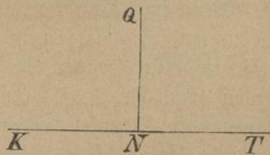


Fig. 23.

III. Jeder stumpfe Winkel ist größer als jeder spitze (Fr. 20 VII.).

IV. Die Schenkel eines rechten Winkels stehen winkelrecht oder normal ($\perp$) auf einander. Anstatt winkelrecht sagt man auch perpendikular oder senkrecht*).

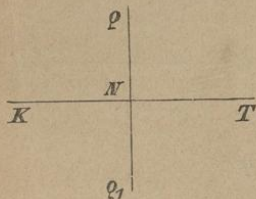


Fig. 24.

Ebenso stehen zwei Gerade KT und QQ_1 (Fig. 24) winkelrecht auf einander, wenn sie einen rechten Winkel einschließen. Dabei heißt der Punkt N, in welchem die eine QN, bezw. QQ_1 der beiden auf einander winkelrechten Geraden die andere KT trifft, der Fußpunkt der Normalen, der Senkrechten od. des Perpendikels.

38. Was ist ein Winkel von 1 Grad, 1 Minute und 1 Sekunde?

Ein Winkel, welcher genau der neunzigste Teil eines rechten ist, heißt ein Winkel von 1 Grad (1°) oder ein Winkelgrad. Daher ist $R = 90^\circ$, ferner ein flacher Winkel $= 180^\circ$.

Der sechzigste Teil und der dreitausendsechshundertste Teil eines Gradwinkels heißen ein Winkel von 1 Minute ($1'$) oder eine Winkelminute und ein Winkel von 1 Sekunde ($1''$) oder eine Winkelsekunde. Vergl. Fr. 50.

39. Welche Sätze gelten in Bezug auf die Größe der Nebenwinkel und der anstoßenden Winkel?

I. Wenn zwei Winkel gleich sind, so sind auch ihre Nebenwinkel unter sich gleich; denn wenn die beiden Winkel (nach Fr. 31) in entsprechender Weise zum Decken gebracht werden, so fallen (nach Fr. 22 I.) auch die Verlängerungen der zu verlängernden Schenkel auf einander, die beiden Nebenwinkel decken sich also und sind gleich (Fr. 30).

II. Jeder rechte Winkel ist die Hälfte eines flachen (Fr. 37 I.).

III. Alle rechten Winkel sind unter sich gleich (Fr. 34 I. und 20 VIII.).

*) Eine lotrechte oder vertikale Gerade steht auf der wagrechten oder horizontalen winkelrecht. In lotrechter Richtung wirkt die Schwerkraft.

IV. Die Summe zweier Nebenwinkel FDE und FDC (Fig. 25) beträgt einen gestreckten (Fr. 34 III.), oder zwei rechte Winkel (Fr. 39 II.), oder 180° (Fr. 38).

Der Nebenwinkel eines spitzen Winkels ist daher stumpf, der eines stumpfen spitz (Fr. 37 II.).

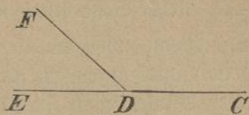


Fig. 25.

V. Nach IV. betragen zwei anstoßende Winkel entweder mehr, oder weniger als zwei rechte (Fr. 36 I. und 20 III.); auch muß

VI. jeder stumpfe Winkel FDC (Fig. 25) größer und jeder spitze Winkel FDE kleiner sein als sein Nebenwinkel.

VII. Ein Winkel FDC, welcher größer als sein Nebenwinkel ist, muß nach Fr. 37 I. größer als ein rechter, d. h. ein stumpfer (Fr. 37 II.) sein.

40. Läßt sich der Satz 39 IV. umkehren?

Ja. Giebt man nämlich den zwei Winkeln FDC und FDE (Fig. 25), deren Summe 180° beträgt, einen gemeinschaftlichen Scheitel D und einen gemeinschaftlichen Schenkel DF, und legt man die beiden anderen Schenkel DC und DE in derselben Ebene auf verschiedene Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels DF, so müssen die beiden anderen Schenkel in eine Gerade fallen, die Winkel sind also Nebenwinkel. Denn wenn die Verlängerung von ED mit DC₁ bezeichnet wird, so muß der Nebenwinkel FDC, des Winkels FDE (nach Fr. 39 IV.) die Größe $FDC_1 = 180^\circ - \angle FDE$ haben; dieselbe Größe hat aber nach unserer „Voraussetzung“*), daß $\angle FDC + \angle FDE = 180^\circ$ sei, auch der Winkel FDC. Daher müssen die Winkel FDC₁ und FDC sich decken (Fr. 31), d. h. es muß DC₁ auf DC fallen.

41. Wenn sind zwei Winkel Scheitelwinkel?

Zwei Winkel QPR und SPT (Fig. 26 S. 32) mit gemeinschaftlichem Scheitel P heißen Scheitelwinkel, wenn beide

*) Vergl. die Anm. zu 61 I.

Schenkel PQ und PR des einen Winkels in die Verlängerungen der Schenkel TP und SP des anderen Winkels fallen.

42. Welche Sätze gelten über die Größe von Scheitelwinkeln?

I. Wenn zwei Winkel gleich sind, so sind auch ihre Scheitelwinkel unter sich gleich; denn bringt man die beiden gleichen Winkel (nach Fr. 31) zum Decken, so decken sich auch die Verlängerungen ihrer Schenkel (Fr. 22 I.), die beiden Scheitelwinkel decken sich also auch und sind gleich (Fr. 30).

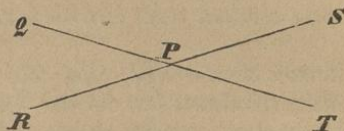


Fig. 26.

II. Jeder Winkel ist seinem Scheitelwinkel gleich. In Fig. 26 ist ja der Winkel SPT ebensowohl als der Winkel QPR der Nebenwinkel des Winkels RTP, und deshalb ist (nach Fr. 20 I. und Fr. 39 I.) $\angle SPT = \angle QPR$.

43. Läßt sich der Satz Fr. 42 II. umkehren?

Ja. Wenn nämlich von zwei Schenkeln PS und PR (Fig. 26) zweier gleichen Winkel SPT und RPQ mit gemeinschaftlichem Scheitel P jeder die Verlängerung des andern bildet und die beiden anderen Schenkel PT und PQ zu verschiedenen Seiten der von den beiden ersten gebildeten Geraden SPR liegen, so fallen auch die beiden letzteren Schenkel in eine Gerade, d. h. die beiden Winkel sind Scheitelwinkel. Denn da RPS gerade, so ist $\angle QPR + \angle QPS = 180^\circ$ (Fr. 39 IV.), folglich $\angle SPT + \angle QPS = 180^\circ$ (Fr. 20 IV.); deshalb ist QPT eine Gerade (Fr. 40), SPT und RPQ aber sind Scheitelwinkel (Fr. 41).

44. Wie kann ein Winkel durch Drehung eines Strahles entstehen?

I. Hält man einen Strahl AB (Fig. 27) an seinem Endpunkte A fest, so muß er bei jeder Bewegung in seiner

Ebene seine Richtung ändern (Fr. 25 II.); er kommt z. B. aus seiner ursprünglichen Lage AB_0 nach einander in die Lagen AB_1 , AB_2 , AB_3 2c.

Eine solche Bewegung nennt man eine (ebene) Drehung des Strahls AB um seinen Endpunkt A .

II. Bei dieser Drehung überstreicht der Strahl AB (ähnlich wie in Fr. 13) nach und nach alle Punkte der Ebene.

III. Jeden Winkel BAC (Fig. 28) kann man sich dadurch entstanden denken, daß der eine Schenkel AC von dem anderen, in seiner ursprünglichen Lage liegenbleibenden (festen) Schenkel AB aus sich in der Ebene des Winkels um den Scheitel A dreht.

IV. Drehungen von gleicher Größe entsprechen gleichgroße Richtungsänderungen und gleichgroße bei der Drehung überstrichene Winkel. Vergl. Fr. 45 II.

V. In einer Ebene ist aber eine Drehung eines Strahls nur in einem doppelten Sinne, nur nach zwei verschiedenen Richtungen hin, möglich; denn der Strahl AC kann in der Ebene von der Lage AB aus nur durch zwei verschiedene Drehungen in die Lage AC kommen, entweder bei der durch den Pfeil w angegebenen, oder in der durch den Pfeil u angegebenen Drehungsrichtung. Diese beiden Drehungen sind einander entgegengesetzt, weil die Fortsetzung der bisherigen Drehung des sich drehenden Strahles den durch sie bereits erzeugten Winkel größer macht, während eine Drehung in der andern Richtung ihn kleiner macht.

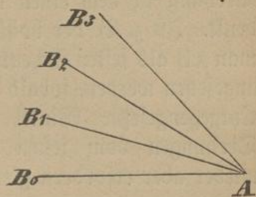


Fig. 27.

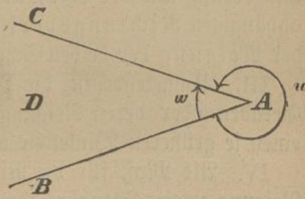


Fig. 28.

Unterscheidet man diese beiden Drehungen als positiv (+) und negativ (—), so kann man auch die Winkel als positiv und negativ bezeichnen, jenachdem man sie sich durch Drehung in dem einen oder in dem andern Sinne erzeugt denkt. Ist z. B. der hohle Winkel $CAB = w$ positiv, wenn man AB als festen Schenkel betrachtet, so kann er als negativ angesehen werden, sobald man AC als festen Schenkel wählt. Entgegengesetzte Winkel sind dann durch entgegengesetzte Drehungen vom festen Schenkel aus entstanden; immer wieder aber erfordern gleiche Winkel gleiche Drehungen.

45. Wobon hängt die Größe eines Winkels ab?

I. Das als Winkel bezeichnete, nach der einen Seite (nach D) hin unbegrenzte Flächenstück ist (wegen Fr. 22 II.) schon bestimmt, wenn man anstatt der beiden Strahlen auch nur zwei vom Scheitel A auslaufende Strecken kennt, mögen diese lang oder kurz sein; somit hängt die Größe des Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel ab.

II. Dagegen wächst die Größe des Winkels mit der Vergrößerung der zu seiner Erzeugung nötigen Drehung (Fr. 44 V.), und ebenso mit der ebenfalls von der Größe der Drehung abhängigen Richtungsverschiedenheit (Fr. 24 I.) oder der Neigung der beiden Schenkel AC und AB gegen einander.

III. Umgekehrt ist die Richtungsverschiedenheit zweier Geraden oder deren Neigung gegen einander um so größer, einen je größeren Winkel sie mit einander einschließen.

IV. Als Maß für die Richtungsverschiedenheit oder die Neigung zweier Strahlen oder Geraden kann stets ein hohler bis flacher (Fr. 35 II.), oder selbst ein spitzer bis rechter (Fr. 39 IV.) Winkel benutzt werden.

46. Wie läßt sich die Richtung einer Geraden in einer Ebene noch bestimmen?

I. Während nach Fr. 24 III. die Richtung einer von dem Punkte A auslaufenden Geraden AC (Fig. 28) durch den zweiten Bestimmungspunkt C bestimmt wird, läßt sich die

Richtung einer in einer bestimmten Ebene liegenden Geraden AC durch den Winkel w bestimmen, den diese Gerade mit einer zweiten Geraden AB in jener Ebene einschließt. Vergl. ferner Fr. 54 II.

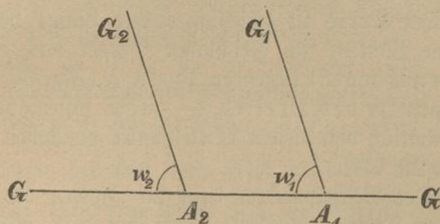


Fig. 29.

II. Machen zwei von den Punkten A_1 und A_2 (Fig. 29) einer Geraden G auslaufende Gerade G_1 und G_2 nach gleicher Seite hin gleiche Winkel w_1 und w_2 mit G , so weichen ihre Richtungen in gleichem Sinne um gleich viel von der sich nach Fr. 24 VII. überall gleich bleibenden Richtung von G ab. G_1 und G_2 müßten somit gleiche Richtung haben und ebenso:

III. ist es in I. gleichgültig, wo in AB der Scheitel A des Winkels w zwischen den beiden Geraden liegt, so lange es sich bloß um die Richtung, nicht aber um die Lage der beiden Geraden handelt. Vergl. auch Fr. 55 V.

47. Was ist ein Kreis, und wie entsteht er?

I. Ändert eine Strecke AB (Fig. 30), während sie sich in einer Ebene um ihren festen Endpunkt A dreht (vergl. Fr. 44), ihre Länge nicht, so kommt der andere Endpunkt B von B_0 ausgehend nach und nach in die Lagen B_1 , B_2 , B_3 zc. und

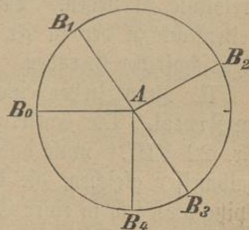


Fig. 30.

schließlich wieder auf seinen Ausgangspunkt B_0 in der ursprünglichen Lage AB_0 der Strecke zurück.

Der Punkt B beschreibt also bei dieser Drehung eine in sich zurücklaufende ebene Linie, welche Kreislinie oder kurz Kreis genannt wird.

II. Der Kreis ist diejenige ebene Linie, von deren sämtlichen Punkten sich gleichlange Gerade nach einem in derselben Ebene*) liegenden Punkte A (Fig. 30) — dem Mittelpunkte des Kreises — ziehen lassen, oder deren Punkte sämtlich von diesem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind (Fr. 22 VIII.).

III. Der Mittelpunkt A liegt im Innern des Kreises. Die andern Punkte der Ebene liegen innerhalb, oder außerhalb des Kreises, jenachdem sie von dem Mittelpunkte in kleinerer, oder in größerer Entfernung liegen, als die Punkte des Kreises. Vergl. Fr. 82.

IV. Auch das von der Kreislinie umschlossene ebene Flächenstück nennt man zuweilen Kreis und unterscheidet dann von ihm die Kreislinie als Umfang (Peripherie) des Kreises.

V. Auch von einem Kreise kann wegen Fr. 47 II. und 14 III. kein Punkt außerhalb einer Ebene liegen, sobald einmal drei Punkte, oder zwei Punkte desselben und der Mittelpunkt in dieser Ebene liegen. Vergl. Fr. 12 II.

VI. Dreht man einen Kreis in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt, so kommt dabei kein Kreispunkt außerhalb der Kreislinie zu liegen. Diese Eigenschaft des Kreises ist ein Seitenstück zu der in Fr. 9 III. und Fr. 24 besprochenen Eigenschaft der Geraden. Vergl. aber Fr. 84 bis 86.

VII. Zum Ziehen eines Kreises (Fr. 6 I.) benutzt man den Zirkel. Die Entfernung der Spitzen beider Schenkel (Fr. 22 VIII.) muß dabei unverändert bleiben und dem Halbmesser gleichen, die den Kreis beschreibende bewegliche Spitze muß sich in einer Ebene bewegen (II.). Die Schenkel des Zirkels müssen demnach hinreichend steif sein.

*) Vergl. hierzu Fr. 190 VI. und VII.

48. Was ist ein Halbmesser und Durchmesser des Kreises?

I. Jede der unter sich gleichen, vom Mittelpunkte A (Fig. 30) nach einem Kreispunkte B gezogenen Strecken AB nennt man einen Halbmesser (Radius).

II. Zwei nach entgegengesetzten Seiten hin in eine Gerade fallende Halbmesser AB_1 und AB_2 bilden einen Durchmesser (Diameter).

III. Alle Durchmesser, ebenso alle Halbmesser desselben Kreises sind unter sich gleich.

49. Wenn sind zwei Kreise gleich und wenn ungleich?

I. Legt man zwei Kreise mit ihren Mittelpunkten und einem Durchmesser auf einander (Fr. 22 V.), und bringt man noch einen Punkt des zweiten Kreises in die Ebene des ersten, so decken sich die Ebenen beider Kreise (Fr. 21 III.).

Decken sich dabei die Durchmesser, so decken sich auch die Kreise selbst, weil sonst nach Fr. 20 III. zwei ihrer Halbmesser ungleich sein müßten, was bei der gemachten Voraussetzung und Fr. 20 V. in Widerspruch mit Fr. 48 III. stünde.

II. Daher sind zwei Kreise gleich, wenn sie gleiche Halbmesser, oder gleiche Durchmesser haben.

III. Legt man zwei Kreise von ungleichem Halbmesser in derselben Ebene mit ihren Mittelpunkten auf einander, so liegen alle Punkte des Kreises mit kleinerem Halbmesser innerhalb des andern Kreises (Fr. 22 V. und Fr. 47 III.).

IV. Kreise von verschiedenem Halbmesser sind daher ungleich; weitere Erörterungen hierüber folgen später.

50. Was ist ein Kreisbogen, ein Bogen von 1 Grad, 1 Minute, 1 Sekunde?

I. Jedes Stück, z. B. B_1B_2 , Fig. 30, eines Kreises heißt ein Kreisbogen (Arcus).

II. Den dreihundertsechzigsten Teil des ganzen Kreises nennt man einen Bogen von 1 Grad (1°) oder einen Bogengrad.

Der sechzigste und dreitausendsechshundertste Teil von einem Bogengrad heißen ein Bogen von 1 Minute ($1'$) oder eine Bogenminute und ein Bogen von 1 Sekunde ($1''$) oder eine Bogensekunde. Vergl. Fr. 38.

III. Die Bögen von 90° , 60° und 45° nennt man Quadrant, Sextant, Oktant.

51. Wie bezeichnet man einen Kreisbogen?

Zur Bestimmung eines Bogens von einem gegebenen Kreise braucht man (wegen Fr. 47 I.) nur die beiden Endpunkte B_1 und B_2 (Fig. 30) des Bogens. Diese beiden Endpunkte benutzt man daher auch zur Bezeichnung des Bogens. Will man aber den Bogen zwischen B_1 und B_2 schärfer von der zwischen B_1 und B_2 möglichen Strecke B_1B_2 unterscheiden, so bezeichnet man den Bogen B_1B_2 als $\widehat{B_1B_2}$.

52. Wenn lassen sich zwei Kreisbögen zum Decken bringen?

I. Wie sich Kreise von gleichem Halbmesser zum Decken bringen lassen, ist schon in Fr. 49 I. angegeben worden.

II. Legt man die Mittelpunkte zweier Bögen desselben Kreises (oder zweier gleichen Kreise) und das eine Paar ihrer Endpunkte auf einander, und sorgt man noch dafür, daß die Bögen in derselben Ebene und von den aufeinanderliegenden Endpunkten aus nach derselben Seite hin liegen, so muß jeder Punkt des kürzeren Bogens auf einen Punkt des längeren fallen (Fr. 49 I.). Die beiden aufeinandergelegten Bögen decken sich daher und sind demgemäß gleichgroß, sobald auch ihre anderen Endpunkte aufeinanderfallen.

III. Kreisbögen von gleicher Länge lassen sich doch nicht so auf einander legen, wie es eben in I. angegeben wurde, sobald ihre Halbmesser verschiedene Größe haben. Die Bögen weichen demnach hierin von der Strecke ab; vergl. Fr. 22 V.

53. Was ist ein Halbkreis?

Jeder Durchmesser teilt den Kreis in zwei sich deckende, daher gleichgroße Halbkreise (Fr. 52 I.), die sich durch

Umkappen um ihren Durchmesser zum Decken bringen lassen (Fr. 9 III., 15 III. und 48 III.).

54. Welche Beziehung besteht zwischen den Bögen und den zu ihnen gehörigen Centriwinkeln?

I. Die Größe des zwischen zwei Halbmessern AB und AC (Fig. 31) liegenden Bogens $\widehat{BC}$ ist wie die Größe des von diesen Halbmessern gebildeten Mittelpunkts- oder Centriwinkels $CAB = w$ (Fr. 45 II.) von der Größe der Drehung abhängig, durch welche der Schenkel AC von AB aus in seine Lage kommt; denn mit der Drehung vergrößert (und verkleinert) sich gleichzeitig auch der zugehörige Winkel w und Bogen $\widehat{BC}$.

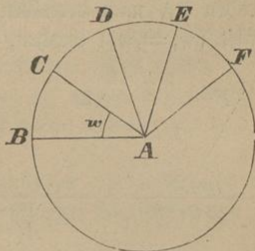


Fig. 31.

II. Daher kann man auch aus der Größe des Bogens $\widehat{BC}$ auf die Größe des Centriwinkels w und die Richtungsverschiedenheit der beiden Geraden AC und AB schließen.

III. Zu zwei gleichen Mittelpunktswinkeln desselben Kreises gehören auch gleiche Bögen, weil diese Bögen, sobald man nach Fr. 31 die Centriwinkel zum Decken bringt, sich ebenfalls decken (Fr. 52 I.).

IV. Daß zu gleichen Bögen desselben Kreises auch gleiche Mittelpunktswinkel gehören, folgt aus Fr. 52 I. wegen Fr. 30.

V. Sind in Fig. 31 die Bögen $\widehat{BD}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{BF}$ u. der Reihe nach 2, 3, 4 u. mal so groß als $\widehat{BC}$, so sind die zugehörigen Centriwinkel DAB, EAB, FAB auch 2, 3, 4 mal so groß als $\angle CAB$. Ebenso wachsen und verkleinern sich auch umgekehrt die Bögen genau in demselben Verhältnisse wie die zugehörigen Centriwinkel, oder, wie man kürzer sagt:

Die zusammengehörigen Bögen und Centriwinkel desselben Kreises sind einander proportional.

VI. Zu einem Winkel von 1° gehört auch ein Bogen von 1° ; der Halbkreis umfaßt 180° und gehört zu einem gestreckten Winkel.

34 Grad
55. Worin besteht die Parallelverschiebung eines Strahls, bzw. einer Geraden in einer Ebene?

I. Wenn von einer Geraden AB (Fig. 32) zwei Strahlen CD und EF in derselben Ebene auslaufen, welche mit der Geraden BA nach derselben Seite (nach B) hin denselben Winkel ($w_1 = w_2$) machen, so machen ihre Verlängerungen

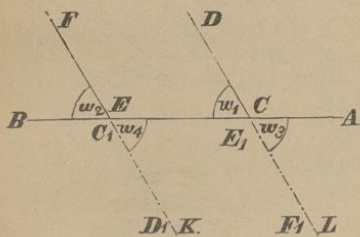


Fig. 32.

CL und EK gegen A hin ebenso große Winkel w_3 und w_4 , wie die Strahlen selbst gegen B hin; denn nach Zr. 42 II. ist $\angle w_3 = \angle w_1$ und $\angle w_4 = \angle w_2$.

Dreht man also die ganze ursprüngliche Figur um 180° in ihrer Ebene*), so kann man

sie so legen, daß die Punkte C und E ihren Ort wechseln und jeder der beiden Strahlen CD und EF als C_1D_1 und E_1F_1 auf die Verlängerung EK, bzw. CL des anderen kommt.

Schnitten sich nun die Strahlen CD und EF, so müßten sich auch ihre Verlängerungen CL und EK schneiden; da aber nach Zr. 21 II. zwei verschiedene Gerade nicht zwei Punkte gemein haben können, so können die beiden Geraden LD und KF gar keinen Punkt gemein haben, müssen vielmehr parallel sein (Zr. 26).

*) Bei $w_1 = w_2 = 90^\circ$ würde man auch durch Umlappen zum Ziel kommen; vergl. Zr. 57 V.

II. Denkt man sich nun die dritte Gerade FK ganz unbeweglich, die erste und zweite AB und DL aber fest mit einander verbunden, so daß sie ihre Lage gegen einander nicht ändern können, und bewegt man dann die beiden letzteren in ihrer Ebene so, daß die erste AB ihre Lage nicht ändert, sondern bloß auf sich selbst verschoben wird (Fr. 9 III.), so muß die andere DL auf die dritte FK fallen, sobald der Punkt C nach E kommt (Fr. 31). Überhaupt bleibt die zweite Gerade DL bei dieser Bewegung immer zu ihrer ursprünglichen Lage parallel; daher nennt man eine solche Bewegung eine Parallelbewegung oder, schärfer bezeichnend, Parallelverschiebung in der Ebene.

III. Die Gerade DL kann bei einer solchen Bewegung (ähnlich wie in Fr. 13) die ganze Ebene überstreichen.

IV. Die beiden unter $w_1 = w_2$ gegen BA geneigten Strahlen CD und EF in Fig. 32 haben gleiche Richtung (vergl. Fr. 46 II.).

V. Umgekehrt machen CD und EF, wenn sie gleiche Richtung haben, auch mit AB gleiche Winkel w_1 und w_2 nach derselben Seite hin.

VI. Haben die beiden in derselben Ebene liegenden unbegrenzten Geraden G_1 und G_2 (Fig. 33) verschiedene Richtung,

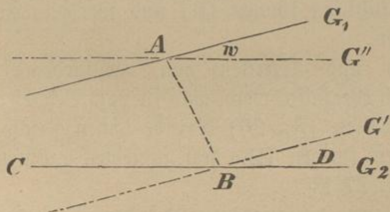


Fig. 33.

und verschiebt man G_1 parallel zu sich selbst (II.) auf der zwei Punkte A und B in G_1 und G_2 verbindenden Strecke AB nach B hin, so kommt G_1 endlich in die Lage G' und schneidet jetzt G_2 in B. Verschiebt man darauf die in die Lage G'

gekommene Gerade G_1 auf der nach Bedarf verlängerten AB immer noch parallel zu sich wieder nach A hin zurück (oder weiter), so rückt der Schnittpunkt zwischen G_1 (G') und G_2 von B aus nach C (oder D) hin fort; sind aber die beiden Geraden G_1 und G_2 unbegrenzt, so hören sie bei der Parallelbewegung von G_1 nicht auf, sich zu schneiden, selbst wenn G_1 wieder in ihre alte Lage zurückkommt.

VII. Wesentlich anders ist es, wenn die Gerade G , um den Punkt A gedreht wird. Dann kann sie (Fr. 25 II. und 44 I.) durch allmähliche Verkleinerung des Winkels w schließlich in die Lage G'' gebracht werden, in welcher sie mit G_2 gleiche Richtung hat, also zu G_2 parallel sein muß (Fr. 55 V. und I.).

56. Wieviel verschiedene Lagen gegen einander können zwei in derselben Ebene liegende Gerade haben?

I. Zwei sich schneidende Gerade haben verschiedene Richtung. Ebenso haben alle Gerade, welche von einem und demselben Punkte auslaufen, oder nach ihm hinkommen, verschiedene Richtung. Vergl. Fr. 24 I. und 25 II.

II. Zwei in derselben Ebene liegende Gerade von gleicher Richtung sind parallel (I. und Fr. 25 II., oder Fr. 55 V. und I.).

III. Zwei Gerade in derselben Ebene, aber von verschiedener Richtung können (I.) und werden (Fr. 55 VI.) sich schneiden.

Strahlen und Strecken von verschiedener Richtung schneiden sich ebenfalls, wenn man sie nach Bedarf verlängert.

IV. Parallele (Fr. 26) Gerade haben gleiche Richtung, weil sie sonst (wegen III.) sich schneiden müßten. Vergl. Anm. zu Fr. 77 IV.

V. Bei zwei verschiedenen Geraden in derselben Ebene können also überhaupt nur die in Fr. 26 aufgeführten zwei verschiedenen Lagen gegen einander vorkommen.

57. Welche Folgerungen fließen aus Fr. 56?

I. Durch jeden Punkt A (Fig. 33) einer Ebene läßt sich in der Ebene nur eine Parallele G'' zu einer in dieser Ebene

liegenden Geraden G_2 ziehen; denn jede in derselben Ebene durch A gelegte andere Gerade G_1 hat eine andere Richtung als G'' (Fr. 56 I.) und muß deshalb auch G_2 schneiden (Fr. 56 III.). Vergl. auch Fr. 25 II.

II. Alle in derselben Ebene liegende Perpendikel (z. B. in Fig. 34 PQ und TK) auf derselben Geraden MN haben gleiche Richtung (Fr. 55 IV., weil ja $\angle u = \angle v = R$, Fr. 39 III.) und sind deshalb parallel (Fr. 56 II.).

III. Daher läßt sich auch (wegen Fr. 56 I.) in einem Punkte Q (Fig. 34) einer Geraden MN auf dieser Geraden MN und in einer bestimmten Ebene nur eine Senkrechte QP errichten.

IV. Auch von einem Punkte T läßt sich nur eine Senkrechte TK auf eine Gerade MN herabfallen. Denn ließen sich mehrere Senkrechte von T auf MN fallen, z. B. TK und TS, so hätten sie nach Fr. 56 I. verschiedene Richtung, während sie doch nach II. gleiche Richtung haben müßten.

V. Beim Umlappen der Ebene um die Gerade MN (Fr. 15 III.) kommen die auf MN senkrechten PQ und TK auf P_1Q und T_1K zu liegen und dabei sind PQP_1 und TKT_1 zwei Gerade (Fr. 40).

Aus dieser Betrachtung läßt sich nicht nur ein Verfahren ableiten, wie man von T eine Senkrechte auf MN herabfallen kann, sondern auch ein anderer Nachweis für

die Richtigkeit des Satzes IV. Denn wären TS und TK zugleich auf NM senkrecht, so müßten TST_1 und TKT_1 beide Gerade sein, was nach Fr. 21 II. unmöglich ist.

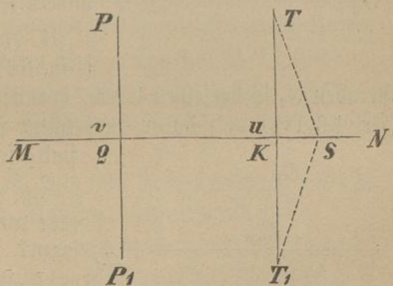


Fig. 34.

VI. Stünden in Fig. 35 PP_1 und XX_1 zugleich in Q auf MN senkrecht, so wäre $\angle v = 90^\circ = \angle w$ und $\angle v + \angle w + \angle r > 180^\circ$; dies ist aber als Zr. 34 III. widersprechend unmöglich. — Hierin liegt zugleich ein anderer Nachweis für die Richtigkeit des Satzes III.

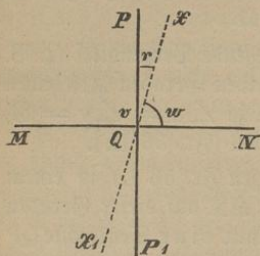


Fig. 35.

58. Wieviel Fälle lassen sich in betreff der Richtung bei drei Geraden in derselben Ebene unterscheiden?

Drei Gerade in derselben Ebene haben entweder gleiche Richtung, oder zweierlei, oder dreierlei verschiedene Richtungen.

59. Was ist über drei Gerade von einerlei Richtung zu sagen?

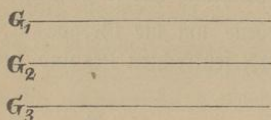


Fig. 36.

I. Haben drei in derselben Ebene liegende Gerade G_1 , G_2 und G_3 (Fig. 36) gleiche Richtung, so schneidet keine die andere (Zr. 56 II. und 26).

II. Zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 36), welche einer dritten Geraden G_3 in derselben Ebene parallel sind, haben mit G_3 (Zr. 56 IV.) und daher auch unter sich gleiche Richtung, sind also parallel (Zr. 56 II.).

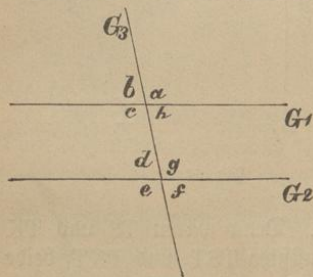


Fig. 37.

60. Was ist über drei Gerade von zweierlei Richtung zu sagen?

I. Zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 37) von gleicher Richtung werden beide von einer andersgerichteten, in derselben Ebene liegenden dritten Geraden G_3 geschnitten (Zr. 56 III.).

II. Wird die eine G_1 von zwei parallelen Geraden G_1 und G_2 von einer dritten, in derselben Ebene liegenden Geraden G_3 geschnitten, so wird auch die zweite G_2 von der dritten G_3 geschnitten (Fr. 56 III.); denn G_1 und G_2 haben verschiedene Richtung (Fr. 56 I.) und deshalb auch G_1 und G_3 .

III. Es entstehen dabei 8 Winkel, welche (abgesehen von den Nebenwinkeln und den Scheitelwinkeln) paarweise mit besonderen Namen belegt werden.

IV. Am wichtigsten ist die Unterscheidung der 8 Winkel nach ihrer Lage an der Schneidenden:

Gegenwinkel liegen auf derselben Seite der Schneidenden; Wechselwinkel liegen auf verschiedenen Seiten der Schneidenden.

Faßt man daneben zugleich die Lage der Winkel gegen die beiden Parallelen ins Auge, so nennt man:

Ergänzungswinkel die Winkel, welche entweder bei gleicher Lage an der Schneidenden verschieden an den Parallelen liegen, oder bei gleicher Lage an den Parallelen verschieden an der Schneidenden;

Gleichliegende (korrespondierende) Winkel die, welche an der Schneidenden und an den Parallelen gleich liegen.

Von etwas geringerer Bedeutung sind die

Verschiedenliegenden Winkel, welche verschiedene Lage sowohl an der Schneidenden als an den Parallelen haben.

Minder wichtig ist auch die Unterscheidung der Winkel bloß nach ihrer Lage gegen die beiden Parallelen:

Innere Winkel liegen innerhalb der Parallelen;

Außere Winkel liegen außerhalb der Parallelen;

Gemischte Winkel liegen einer außerhalb, der andere innerhalb der Parallelen.

Es sind also in Fig. 37:

c und d } innere Gegenwinkel und Ergänzungswinkel,
h und g }

b und e	}	äußere Gegenwinkel und Ergänzungswinkel,
a und f		
b und d, a und g	}	gemischte Gegenwinkel und gleichliegende Winkel,
c und e, h und f		
g und c	}	innere Wechselwinkel und verschieden liegende Winkel,
h und d		
b und f	}	äußere Wechselwinkel und verschieden liegende Winkel,
a und e		
b und g, a und d	}	gemischte Wechselwinkel und Ergänzungswinkel.
c und f, h und e		

61. Welche Beziehungen finden zwischen den Gegen-, Wechsel- und Ergänzungswinkeln statt?

I. Sind ein Paar korrespondierende Winkel unter sich gleich, so sind auch die Winkel eines jeden der drei anderen Paare unter sich gleich.

Vor.*) $\angle a = \angle g$ (Fig. 37).

Beh. 1. $\angle b = \angle d$;

2. $\angle h = \angle f$;

3. $\angle c = \angle e$.

Bew. Sind die Winkel a und g einander gleich, so sind es auch ihre Nebenwinkel: $\angle b = \angle d$ und $\angle h = \angle f$ (Zr. 39 I.), und ihre Scheitelwinkel: $\angle c = \angle e$ (Zr. 42 I.).

In dem vorstehenden Satze müßte eigentlich der Reihe nach jedes der vier Paare korrespondierender Winkel als gleich „vorausgesetzt“ und daraus die Gleichheit der drei anderen Paare „bewiesen“ werden. Diese Beweisführung

*) Jeder wissenschaftliche Satz knüpft an eine „Voraussetzung“ (vergl. Zr. 40), welche das Gegebene, als wahr Angenommene enthält, eine aus dieser Voraussetzung sich ergebende Wahrheit: die „Behauptung“. Muß die Richtigkeit eines solchen Satzes ohne weiteres notwendig allgemein anerkannt werden, so heißt der Satz ein „Grundsatz“; die Richtigkeit eines „Lehrsatzes“ dagegen muß durch einen „Beweis“ erst besonders nachgewiesen werden.

Werden in einer Figur behufs der Beweisführung gewisse Linien zc. hinzugefügt, so faßt man dieselben unter dem Namen „Konstruktion“ zusammen.

würde aber nur auf eine dreimalige Wiederholung des eben geführten Beweises hinauslaufen, weil die vier Paare einander ganz gleichgeordnet sind. Es mag daher hier und in II. bis IV., wie auch in Fr. 62 der Beweis für ein ganz beliebig herausgegriffenes Paar genügen.

II. Sind ein Paar verschieden liegende Winkel unter sich gleich, so sind es auch die drei anderen Paare (Fr. 39 I. oder 42 I.), weil diese Scheitel- oder Neben-Winkel von jenen sind.

III. Liefert ein Paar Ergänzungswinkel als Summe 180° , so thun es auch die drei gleichartigen anderen Paare.

a) Die Ergänzungswinkel sind innere oder äußere Gegenwinkel:

Vor. $\angle a + \angle f = 180^\circ$.

Beh. $\angle b + \angle e = \angle h + \angle g = \angle d + \angle c = 180^\circ$.

Bew. 1:

$$\left. \begin{array}{l} \angle a = 180^\circ - \angle b \\ \angle f = 180^\circ - \angle e \end{array} \right\} \text{ (Fr. 39 IV.).}$$

$$\begin{array}{l} 180^\circ = \angle a + \angle f \\ \quad = (180^\circ - \angle b) + (180^\circ - \angle e) \text{ (Vor. und} \\ 180^\circ = \angle b + \angle e. \text{ Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

Bew. 2:

$$\begin{array}{l} (\angle a + \angle h) + (\angle f + \angle g) = 360^\circ \text{ (Fr. 39 IV.).} \\ \quad \angle a + \angle f = 180^\circ \text{ (Vor.)} \\ \hline \angle h + \angle g = 180^\circ \text{ (Fr. 20 VIII.).} \end{array}$$

Bew. 3:

$$\begin{array}{l} \angle a + \angle f = 180^\circ \text{ (Vor.)} \\ \quad \left. \begin{array}{l} \angle a = \angle c \\ \angle f = \angle d \end{array} \right\} \text{ (Fr. 42 II.).} \\ \hline \angle c + \angle d = 180^\circ \text{ (Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

*) Ein solcher Strich (sprich: „folglich“) in einem in dieser übersichtlichen Form geschriebenen Beweise bedeutet, daß das zunächst unter dem Striche Stehende aus dem über dem Striche Stehenden gefolgert oder geschlossen worden ist.

Die hinter jeder Zeile stehenden Nummern geben die früheren Sätze an, welche als Beweisgrund für die Wahrheit des Inhalts der Zeile gelten.

b) Die Ergänzungswinkel sind gemischte Wechselwinkel:

Ist $\angle a + \angle d = 180^\circ$ Vor., so folgt aus $(\angle a + \angle b) + (\angle g + \angle d) = 360^\circ$ (Zr. 39 IV.) durch Subtraktion, daß auch $\angle b + \angle g = 180^\circ$ ist (Zr. 20 VIII.). Da aber nach Zr. 42 II. $\angle a = \angle c$, $\angle d = \angle f$, $\angle b = \angle h$ und $\angle g = \angle e$ ist, so muß auch $\angle c + \angle f = 180^\circ$ und $\angle h + \angle e = 180^\circ$ sein (Zr. 20 IV.).

IV. Ist eine der vier Voraussetzungen in I. bis III. erfüllt, so sind auch die drei anderen erfüllt.

Vor. $\angle a + \angle d = 180^\circ$.

Beh. 1. $\angle a = \angle c$.

2. $\angle a + \angle f = 180^\circ$.

3. $\angle a = \angle g$.

Bew. 1. $\angle a = 180^\circ - \angle d$ (Vor.).

$\angle e = 180^\circ - \angle d$ (Zr. 39 IV.).

$\angle a = \angle e$ (Zr. 20 V.).

Bew. 2. $\angle a + \angle d = 180^\circ$ (Vor.).

$\angle d = \angle f$ (Zr. 42 II.).

$\angle a + \angle f = 180^\circ$ (Zr. 20 IV.).

Bew. 3. $\angle a = 180^\circ - \angle d$ (Vor.).

$\angle g = 180^\circ - \angle d$ (Zr. 39 IV.).

$\angle a = \angle g$ (Zr. 20 V.).

62. Kann man aus dem Parallelismus zweier Geraden auf die Größe der Gegen- und Wechsel-Winkel schließen und umgekehrt?

I. Werden zwei parallele Gerade G_1 und G_2 (Fig. 37 auf S. 44) von einer dritten G_3 geschnitten, so sind

1. je zwei korrespondierende Winkel, z. B. a und g , unter sich gleich (Zr. 55 V.), weil G_1 und G_2 nach Zr. 56 IV. gleiche Richtung haben; daraus folgt dann nach Zr. 61 IV., daß
2. auch je zwei innere oder äußere Wechselwinkel, z. B. a und e , unter sich gleich sind und
3. je zwei Ergänzungswinkel, z. B. a und f , oder a und d , zusammen 180° ausmachen.

II. Werden zwei Gerade G_1 und G_2 von einer dritten G_3 so geschnitten, daß entweder

1. je zwei korrespondierende Winkel unter sich gleich,
2. oder je zwei innere oder äußere Wechselwinkel unter sich gleich,

3. oder je zwei Ergänzungswinkel zusammen 180° sind, so sind die beiden Geraden G_1 und G_2 parallel.

Der Beweis für 1. liegt in Fr. 55 I.; von 2. oder 3. aber kommt man durch Fr. 61 IV. auf 1. zurück.

III. Behalten wir die Benennung der acht Winkel auch für den Fall bei, wo zwei nicht parallele Gerade G_1 und G_2 (Fig. 38) von einer dritten G_3 geschnitten werden, so sind bei zwei solchen Geraden

1. je zwei korrespondierende Winkel ungleich,
2. je zwei innere oder äußere Wechselwinkel ungleich,
3. die Ergänzungswinkel paarweise entweder größer, oder kleiner als 180° .

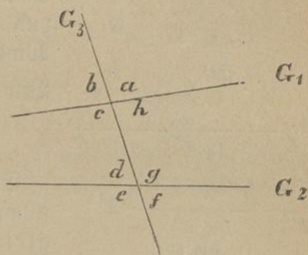


Fig. 38.

Bem. Wäre $\angle a + \angle d = 180^\circ$, oder $\angle a + \angle f = 180^\circ$, oder $\angle a = \angle e$, oder endlich $\angle a = \angle g$, dann müßte (nach II.) $G_1 \parallel G_2$ sein, und da dies der Voraussetzung (daß G_1 und G_2 sich schneiden) widerspräche, so muß die Annahme (daß z. B. $\angle a = \angle g$) falsch sein.

IV. Werden zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 38) von einer dritten G_3 so geschnitten, daß

1. zwei korrespondierende Winkel ungleich,
2. zwei innere oder äußere Wechselwinkel ungleich,
3. zwei Ergänzungswinkel zusammen entweder größer, oder kleiner als 180°

sind, so schneiden sich die beiden Geraden G_1 und G_2 , denn wären sie parallel, so wären (nach I.) die unter 1. bis 3. aufgeführten Beziehungen nicht möglich. Vergl. Zr. 69 IX.

Ann. Diese vier Sätze liefern eine Befriedigung von Zr. 57 I.

V. Steht eine Gerade auf der einen von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht (I. 3).

63. Was folgt aus dem Parallelismus der Schenkel zweier Winkel?

I. Sind die Schenkel zweier Winkel BAC und DEF paarweise nach derselben Seite hin, oder nach entgegengesetzten Seiten hin parallel ($BA \parallel DE$ und $AC \parallel EF$), so sind die beiden Winkel gleich.

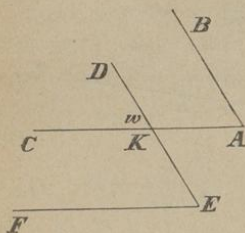


Fig. 39.

Bew. Sind A und E flache Winkel, so folgt der Satz aus Zr. 34 I.

Sind A und E hohl, oder überstumpft und liegen die Schenkel gleichsinnig (Fig. 39), so schneiden sich (nach Zr. 56 III.) je zwei

nicht parallele Schenkel, z. B. ED und AC in K , und dann gleicht nach Zr. 62 I. sowohl $\angle A$ als $\angle E$ dem $\angle w$, daher ist $\angle A = \angle E$ (Zr. 20 V.).

Sind endlich A und E hohl, oder überstumpft und liegen die Schenkel entgegengesetzt, so wird bei Verlängerung von DE nach ED' und FE nach EF' jetzt der Winkel $D'E'F'$, die nämliche Lage gegen BAC haben, wie der Winkel DEF in Fig. 39 gegen BAC ; daher gleicht zunächst $\angle D'E'F'$ und wegen Zr. 42 II. dann auch $\angle DEF$ dem $\angle BAC$.

II. Liegen die Schenkel zweier Winkel BAC und DEF so paarweise parallel, daß das eine Paar EF und AC gleichsinnig, das andere ED und AB entgegengesetzt parallel ist, so ergänzen sich die beiden Winkel zu 180° (Zr. 39 IV.).

Hier wird nämlich der durch die Verlängerung ED' von DE erzeugte Nebenwinkel $D'EF$ gegen BAC so liegen, wie in Fig. 39 der Winkel DEF .

64. Was ist über drei Gerade von dreierlei Richtung zu sagen?

I. Hat von drei Geraden G_1 , G_2 und G_3 in einer Ebene jede eine andere Richtung, so gehen sie entweder alle drei durch einen Punkt S (Fig. 40), oder es schneiden sich immer nur je zwei in einem Punkte.

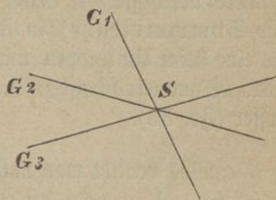


Fig. 40.

II. Im letzteren Falle begrenzen die drei Geraden eine ebene Figur ABC (Fig. 41), welche man ein ebenes geradliniges Dreieck oder kurzweg ein Dreieck ($\triangle$) nennt.

Die drei Schnittpunkte A , B und C der drei Geraden heißen die Eckpunkte oder Spizen, die zwischen ihnen liegenden Strecken $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$ heißen die Seiten des Dreiecks. Durch diese Wahl der Buchstaben a , b , c deutet man zugleich den jeder Seite gegenüberliegenden Winkel an.

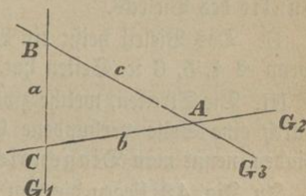


Fig. 41.

III. Sind alle drei Seiten

eines Dreiecks gleich groß, so heißt das Dreieck gleichseitig; bei dem gleichschenkeligen Dreieck sind bloß zwei Seiten gleich; bei dem ungleichseitigen Dreieck ist keine Seite der anderen gleich. Vergl. Fr. 114 und 115.

Die Senkrechte $AD = h_a$, welche in einem Dreieck ABC von der Spitze A auf die Gegenseite a herabgefällt wird, heißt die Höhe des Dreiecks, die von A nach der Mitte E von a gezogene Strecke $AE = m_a$ die Mittellinie des

Dreiecks, beides in Bezug auf die Seite a. Für h_a nennt man a die Grundseite, A die Spitze.

Im gleichschenkeligen Dreieck heißen die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite heißt Grundseite oder Basis und der Scheitel des der Grundlinie gegenüberliegenden Winkels die Spitze.

IV. Ein Dreieck und ebenso ein anderes ebenes Gebilde heißt symmetrisch gegen eine Gerade, wenn es durch diese (die Symmetrieaxe) so in zwei Teile zerlegt wird, daß der eine beim Umlappen um die Symmetrieaxe den andern deckt. Symmetrisch ist z. B. der Kreis gegen jeden Durchmesser (Fr. 53).

65. Was versteht man unter einem Vieleck?

I. Ein ebenes geradliniges Vieleck oder kurzweg ein Vieleck ist eine ebene Figur, welche von lauter Strecken begrenzt wird, wobei jedoch jede Strecke nur die beiden ihr benachbarten Strecken schneidet. Die das Vieleck begrenzenden Strecken heißen seine Seiten, ihre Schnittpunkte die Eckpunkte des Vielecks.

II. Das Vieleck heißt ein Viereck, Fünfeck, Sechseck u., wenn es 4, 5, 6 u. Seiten hat.

III. Die Strecken, welche zwei nicht benachbarte, also nicht durch eine Seite verbundene Eckpunkte eines Vielecks verbinden, nennt man Diagonalen. Vergl. Fr. 72 I. und II.

In Fig. 42 liegen die von A aus gezogenen Diagonalen AC, AD und AE des Sechsecks ABCDEF sämtlich innerhalb der Figur. Es kann jedoch eine Diagonale auch ganz, oder teilweise außerhalb der Figur liegen, ebenso eine, oder selbst mehrere Seiten schneiden, teilweise mit ihnen zusammenfallen, bezw. ihre Verlängerung bilden.

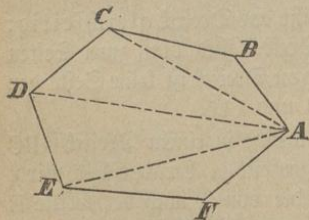


Fig. 42.

Man könnte z. B. in Fig. 42 das $\triangle ABC$ um AC nach innen klappen. Ferner ließe sich das $\triangle BCD$ so um BD klappen, daß C auf AD, oder in die Verlängerung von AD, oder selbst innerhalb AED fiele.

IV. Nach I. bilden die Seiten eines Vielecks — im Einklang mit Fr. 7 III. — nur die Grenzen der Figur, laufen aber nicht durch die Fläche der Figur hindurch.

Man kann jedoch — u. a. durch ähnliche Umklappungen wie in III., vergl. z. B. Fig. 64 bei Auffassung der Strecke AB als Diagonale — auch auf geometrische Gebilde kommen, deren Seiten durch die Fläche hindurchlaufen, oder auch

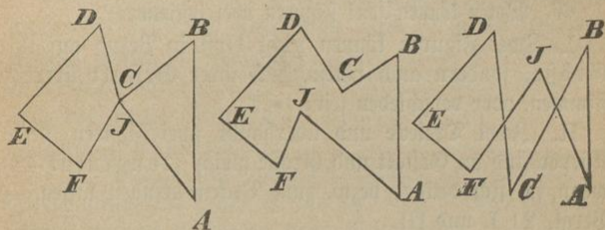


Fig. 43.

andere als die beiden benachbarten Seiten schneiden. So würde man von dem mittlern Siebeneck ABCDEJ in Fig. 43 durch fortgesetzte Verschiebung der Eckpunkte C und J zu den links und rechts stehenden Gebilden gelangen, welche als Aneinanderfügung eines Vierecks und eines Dreiecks, bezw. zweier Vierecke und eines Dreiecks aufgefaßt werden mögen. Noch verwickelter wird die Gestaltung, wenn man in der rechts stehenden Zeichnung den Punkt C über F hinaus nach links verschiebe. Vergl. auch Fig. 108 bis 110 in Fr. 106 IV.

V. Von jedem Eckpunkte A eines n -ecks ABCDEF, Fig. 42, lassen sich nur $n-3$ Diagonalen (Fr. 65 III.) ziehen, da außer A und seinen beiden Nachbarn B und F nur noch $n-3$ Eckpunkte vorhanden sind.

VI. Für die n -Eckpunkte des n -ecks würden daher n -mal $(n-3)$ Diagonalen möglich sein, wenn dabei nicht jede zweimal vorkäme. Deshalb hat das n -eck nur $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen.

Das Viereck hat somit $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$ Diagonalen,
 „ Fünfeck „ „ $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ „
 „ Sechseck „ „ $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ „ u. s. w.

Zweites Kapitel.

Das Dreieck.

66. Worin können zwei Figuren übereinstimmen?

I. Zwei Figuren können nicht bloß in Bezug auf ihre Größe, sondern auch rücksichtlich ihrer Gestalt übereinstimmen, oder verschieden sein.

II. Zwei Dreiecke und überhaupt zwei Figuren, bezw. Körper sind an Gestalt und Größe gleich (kongruent $\cong$), wenn sie sich decken, bezw. zum Decken bringen lassen. — Vergl. 21 I. und III.

III. Haben zwei Figuren oder Körper bloß gleiche Gestalt, so nennt man sie ähnlich ($\sim$);

IV. haben sie bloß gleiche Größe, so heißen sie inhalts-gleich, oder kurzweg gleich ($=$).

67. Was gilt von kongruenten Figuren?

I. In zwei kongruenten Vielecken, also namentlich auch in zwei kongruenten Dreiecken, müssen alle Stücke (d. i. Seiten und Winkel) der Reihe nach sich decken und demnach gleich sein.

II. Daher sind in kongruenten Dreiecken die Gegenseiten gleicher Winkel und die Gegenwinkel gleicher Seiten gleich, d. h. diejenigen Seiten und Winkel, welche beziehungsweise gleichen Winkeln und gleichen Seiten gegenüberliegen.

III. Kongruente Figuren, z. B. Dreiecke, in gleicher Weise aneinandergelegt, geben kongruente Figuren.

IV. Umgekehrt lassen sich kongruente Figuren in gleicher Weise in kongruente Teile zerlegen.

V. Es ist daher nicht notwendig, die Kongruenz von mehr als dreiseitigen Figuren eingehend zu untersuchen, da sich dieselbe auf die Kongruenz der Dreiecke zurückführen läßt.

VI. Um die Kongruenz zweier Figuren (oder Körper) darzuthun, braucht man nicht immer die Gleichheit aller Winkel und Seiten nachzuweisen. Etwas Ähnliches zeigte sich schon in Fr. 21 I. und III., Fr. 31 und 52.

VII. Zwei Dreiecke *) z. B. müssen schon kongruent sein, wenn sie in zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Bringt man die beiden übereinstimmenden Winkel zum Decken (Fr. 31) und sorgt man dafür, daß die paarweise gleichen Seiten auf denselben Schenkel fallen, so müssen diese zwei Seitenpaare (Fr. 22 V.) sich decken und wegen Fr. 22 III. auch das dritte Seitenpaar; demnach müssen die Dreiecke kongruent sein (Fr. 66 II.).

VIII. Ebenso sind (nach Fr. 66 II.) zwei Dreiecke kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden Winkeln übereinstimmen, welche an dieser Seite liegen.

Legt man nämlich die Dreiecke mit den beiden übereinstimmenden Seiten auf einander (Fr. 22 V.), und zwar so, daß die Scheitel der paarweise gleichen Winkel auf den nämlichen Endpunkt zu liegen kommen, so decken sich diese beiden Winkelpaare (Fr. 31), ihre anderen Schenkel müssen sich daher paarweise decken und in demselben Punkte schneiden (Fr. 26); dieser Punkt ist der dritte Eckpunkt beider Dreiecke und letztere decken sich also.

*) Zwei kongruente Dreiecke pflegt man so zu benennen, daß die Buchstaben an den gleichen Winkeln sich in gleicher Weise folgen; ist z. B. $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$, so schreibt man: $\triangle A_1 B_1 C_1 \cong \triangle A_2 B_2 C_2$ und weiß dann zugleich, daß $A_1 B_1 = A_2 B_2$ u.

Zweckmäßig bezeichnet man ferner die Seiten der Dreiecke mit kleinen Buchstaben und die Winkel mit denselben großen Buchstaben, so daß z. B. die Seite $a = BC$ dem $\angle A = \angle BAC$ gegenüberliegt. Vergl. Fr. 64 II.

68. Wie groß ist die Summe der drei Winkel eines Dreiecks?

I. Verlängert man zwei Seiten CB und AB eines Dreiecks ABC (Fig. 44) über ihren Schnittpunkt B hinaus nach E und D und zieht man durch B eine Gerade NF so, daß sie mit BE einen eben so großen Winkel einschließt, wie CA mit AB, daß also $\angle v = \angle A$ ist, dann sind NF und CA parallel (Fr. 61 I. 1.). Nun kann aber die Gerade NF

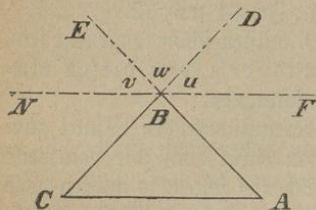


Fig. 44.

zunächst weder mit BC, noch mit BA zusammenfallen, weil sie dabei (gegen Fr. 26) die ihr parallele AC schneiden müßte. Träte ferner die unbegrenzte Gerade NF bei B in das Dreieck ABC hinein, so müßte sie auch irgendwo wieder aus demselben herauskommen (Fr. 28 IV.); nun kann aber NF weder die ihr parallele Seite AC schneiden (Fr. 26), noch zum zweiten Male die von ihr schon in B geschnittenen Seiten AB und BC (Fr. 21 II.). Demnach kann NF nicht in das Dreieck laufen, auch kann deshalb weder NB, noch deren Verlängerung BF in den $\angle w$ eintreten (Fr. 27 II.), sondern sie muß innerhalb der beiden Winkel EBC und DBA liegen, wie es Fig. 44 zeigt. Weil nun aber NF und CA parallel sind, muß $\angle u = \angle C$ sein; da ferner auch $\angle w = \angle B$ (Fr. 42 II.) ist und $\angle v = \angle A$ gemacht wurde, so ist die Summe der drei Winkel A, B und C so groß wie die Summe der drei Winkel u, w und v, d. h. $= 2 R$ (Fr. 34 III.).

II. Es beträgt also die Summe der drei Winkel eines Dreiecks stets 180° oder $2 R$.

69. Welche Folgerungen ergeben sich aus Fr. 68?

I. Ist in einem Dreiecke die Summe zweier Winkel so groß wie die Summe zweier Winkel eines zweiten Dreiecks, so sind die dritten Winkel der beiden Dreiecke gleich (Fr. 20 VIII.).

II. Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel überein, so ist die Summe der beiden anderen Winkel in beiden Dreiecken gleich groß (Fr. 20 VIII.).

III. Jeder Winkel eines Dreiecks ist hohl (Fr. 35 I.).

IV. Die Summe zweier (inneren) Winkel eines Dreiecks ist kleiner als 180° (Fr. 20 III.).

V. Verlängert man eine Seite AB (Fig. 44) eines Dreiecks ABC nach E, so entsteht zwischen der Verlängerung BE und der anderen durch denselben Endpunkt B gehenden Seite BC der Außenwinkel EBC.

Da nun dieser Außenwinkel EBC mit dem innern Winkel CBA zusammen ebenfalls 180° ausmacht (Fr. 39 IV.), so muß $\angle EBC = \angle A + \angle C$ sein (Fr. 20 V.), oder:

VI. Jeder Außenwinkel gleicht der Summe der beiden inneren Gegenwinkel.

VII. Daher ist jeder Außenwinkel größer, als jeder seiner inneren Gegenwinkel.

VIII. Sind die drei Winkel eines Dreiecks unter sich gleich, so ist jeder $= 60^\circ = \frac{1}{3} R$.

IX. Zu Fr. 62 IV. 3. läßt sich jetzt noch ergänzend bemerken: wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel von 180° abweicht, dann liegt der Schnittpunkt jener beiden Geraden auf derjenigen Seite der dritten, wo die Summe der inneren Winkel kleiner als 180° ist.

70. Wieviel Arten Dreiecke giebt es rücksichtlich der Winkel?

I. In einem Dreiecke kann nicht mehr als ein Winkel ein rechter, bezw. ein stumpfer sein, und ebensowenig kann in einem Dreiecke ein rechter und ein stumpfer zugleich vorkommen (Fr. 69 IV.), vielmehr müssen stets wenigstens zwei Winkel eines Dreiecks spitz sein.

II. Daher giebt es rücksichtlich der Winkel nur drei Arten Dreiecke:

das rechtwinkelige Dreieck mit einem rechten Winkel,
das stumpfwinkelige Dreieck mit einem stumpfen Winkel,
das spitzwinkelige Dreieck mit drei spitzen Winkeln.

III. Im rechtwinkligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse, die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten.

71. Was ist noch über die Winkel der rechtwinkligen und der stumpfwinkligen Dreiecke zu bemerken?

I. Im rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreieck ist der rechte oder stumpfe Winkel der größte (Fr. 37 III.).

II. Im rechtwinkligen Dreieck ist der rechte Winkel gleich der (nach Fr. 68 II. 90° betragenden) Summe der beiden spitzen.

III. Ein Dreieck ist rechtwinklig, wenn der eine Winkel desselben gleich der Summe der beiden anderen ist; denn dann ist jener Winkel die Hälfte von 2 R (Fr. 68 II.).

IV. Sind in einem rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel gleich, so ist jeder $= 45^\circ = \frac{1}{2}\text{ R}$.

V. Machen zwei Gerade SF und KE (Fig. 45) schiefe Winkel, so kann die von einem Punkte P der einen SF auf die andere KE herabgelassene Senkrechte PQ nur auf die Seite des spitzen Winkels SFK fallen, weil sonst das Dreieck PFQ einen stumpfen und einen rechten Winkel haben müßte, was aber Fr. 70 I. widerspräche.

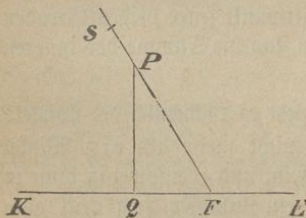


Fig. 45.

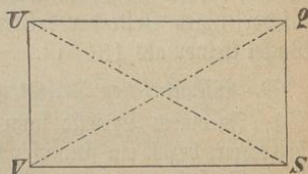


Fig. 46.

VI. Die Normalen auf den Schenkeln eines hohlen Winkels schneiden sich stets (Fr. 62 IV.), und zwar unter einem ebenso großen Winkel als die Schenkel selbst.

Ist nämlich der hohle Winkel ein rechter, wie QSV in Fig. 46, und ist $UQ \perp SQ$, $UV \perp SV$, so ist $UQ \parallel SV$

(Fr. 62 II. 3.), und deshalb schneiden sich VU und UQ (Fr. 60 II.), und zwar unter einem rechten Winkel QUV (Fr. 62 V.).

Wäre dagegen der hohle Winkel ein schiefer, so ist entweder er selbst, oder sein Nebenwinkel ein spitzer, z. B. w in Fig. 47; errichtet man nun im Punkte E des Schenkels BC eine Senkrechte EZ, so muß diese die Gerade DBN, in welcher der andere Schenkel (entweder BD, oder BN) des hohlen Winkels liegt, in einem von B aus nach D hin liegenden Punkte F schneiden (Fr. 69 IX.), und dabei ist $\angle EFB = \angle FDM$ spitz; errichtet man daher in einem von F aus nach D,

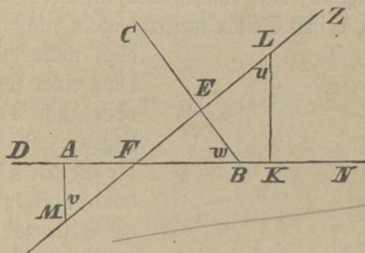


Fig. 47.

oder nach N hin liegenden Punkte A, oder K der Geraden DN eine Senkrechte AM oder KL, so muß diese die auf BC senkrechte EF in M, oder in L schneiden (Fr. 62 IV. 3.), und dabei stimmen die Dreiecke MAF und LKF mit dem $\triangle BEF$ in dem Winkel bei F und in dem rechten Winkel (bei A, K, E) überein, weshalb die spitzen Winkel v, u und w (Fr. 69 I.) und auch deren stumpfe Nebenwinkel (Fr. 39 I.) unter sich gleiche Größe haben.

Liegt der Schnittpunkt der Normalen KL mit EZ im Winkelraume von w, so ist der gegen w hin gekehrte Schnittwinkel (wie in Fig. 47 der $\angle KLZ = 180^\circ - w$ (Fr. 39 IV.).

Anm. Ein kürzerer Beweis ließe sich aus Fr. 72 III. herleiten.

72. Wie groß ist die Winkelsumme des Vielecks?

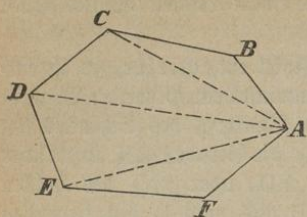


Fig. 48.

I. Das n -eck $ABCDEF$ läßt sich nach Fig. 48 aus $n-2$ von außen, oder innen aneinandergelegten Dreiecken, die paarweise eine ganze Seite gemein haben, zusammensetzen und auch wieder in $n-2$ solche Dreiecke zerlegen.

II. Fügt man an die Seite AB oder CD eines Vielecks $ABCDEF$ (Fig. 49) nach innen, oder außen ein Dreieck ASB , oder CQD an, dessen Seiten weiter keine n -ecksseite schneiden,

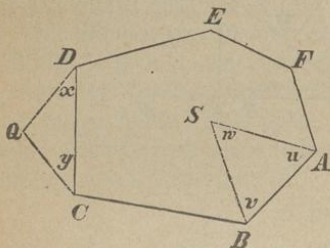


Fig. 49.

auch nicht die Verlängerung einer solchen bilden, oder zum Teil auf ihr liegen, und nimmt man die Seiten AB , bezw. CD dann hinweg, so wächst die Seitenzahl um 1.

Beim Anfügen nach außen wächst die Winkelsumme des Vielecks um $\angle x + \angle y + \angle Q = 180^\circ$ (Zr. 68 II.).

Im andern Falle vermindert sich die Winkelsumme um $\angle u + \angle v$ und vermehrt sich gleichzeitig um den überstumpfen Winkel $(360^\circ - w)$ bei S , wächst also überhaupt um $(360^\circ - w) - u - v = 360^\circ - (w + u + v) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

In jedem der beiden Fälle wächst also die Winkelsumme um $2R$, wenn die Seitenzahl um 1 wächst.

III. Daher beträgt in Fortsetzung von Zr. 68 II. die Winkelsumme:

im Viereck	$2 \cdot 2 R = 4 R,$
= Fünfeck	$3 \cdot 2 R = 6 R,$
= Sechseck	$4 \cdot 2 R = 8 R,$
.....	
= n-eck	$(n-2) 2 R = (2 n-4) R.$

IV. Das n-eck kann höchstens $n-3$ überstumpfe Winkel oder einspringende Ecken haben (Fr. 72 III.); denn $n-2$ überstumpfe Winkel würden ja schon mehr als $(n-2) 2 R$ betragen (Fr. 35 I.).

V. Stehen zwei Seiten UV und QS, Fig. 50, eines Vierecks UVSQ auf der dritten Seite VS senkrecht, so beträgt die Summe der beiden Winkel U und Q an der vierten Seite UQ $2 R$ (III.). Legt man nun das Viereck auf VS um, so fällt SQ auf VU (Fr. 39 III., 31).

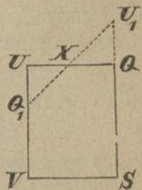


Fig. 50.

Ist dann noch $Q = R$, so ist auch $U = R$, und beim Umlegen muß Q auf U fallen; denn fiele Q nach Q_1 , so müßte $\angle U = R$ (Fr. 72 III.) und $\angle UQ_1X = R$ (Fr. 37 I.) sein, was Fr. 70 I. widerspricht. Daher:

VI. sind in einem Viereck mit drei rechten Winkeln V, S und Q je zwei einander gegenüberliegende Seiten nicht bloß parallel (Fr. 62 II. 3.), sondern auch gleich (V.).

VII. Ist umgekehrt bei $\angle V = R = \angle S$ auch $UV = QS$, so decken sich U und Q beim Umlegen auf VS, und es ist nicht nur $\angle U = \angle Q = R$ (III.), sondern es sind weiter nach VI. auch die Gegenseiten paarweise parallel und gleich.

73. Ist durch die Gleichheit, oder Ungleichheit zweier Winkel, bzw. Seiten eines Dreiecks auch die Gleichheit, oder Ungleichheit der Gegenseiten, bzw. der Gegenwinkel derselben bedingt?

I. Halbirt man in dem $\triangle ABC$ (Fig. 51 S. 62), in welchem $\angle A = \angle C$ sei, den Winkel an der Spitze B, macht man

also $\angle m = \angle n$, so ist auch $\angle p = \angle q$ (Fr. 69 I.); demnach stimmen die beiden Dreiecke ABD und CBD in der Seite BD (Fr. 20 I.) und den beiden anliegenden Winkeln überein, sind also kongruent (Fr. 67 VIII.), und deshalb ist $AB = CB$ (Fr. 67 II.).

Die Gleichheit der Winkel A und C bedingt also die Gleichheit ihrer Gegenseiten CB und AB.

II. Halbirt man in dem $\triangle ABC$ (Fig. 51), in welchem $AB = CB$ sei, den Winkel an der Spitze B, so stimmen, weil auch $BD = BD$ ist (Fr. 20 I.), die beiden Dreiecke ABD und CBD in den Winkeln m und n und deren einschließenden Seiten überein, sind also kongruent (Fr. 67 VII.), und deshalb ist auch $\angle A = \angle C$ (Fr. 67 II.).

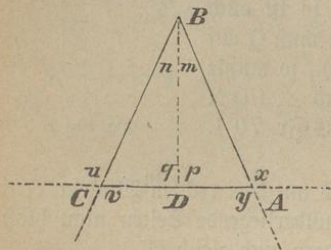


Fig. 51.

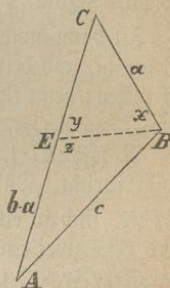


Fig. 52.

Die Gleichheit der Seiten AB und CB zieht demnach die Gleichheit ihrer Gegenwinkel C und A nach sich.

III. Ist in Fig. 52 $CA > CB$, so kann man von C aus auf CA ein Stück CE abschneiden, welches CB gleicht; zieht man dann die Strecke BE, so ist $\angle x = \angle y$ (II.). Weil ferner $\angle CBA > \angle x$ ist (Fr. 20 III.), so muß auch $\angle B > \angle y$ sein, und da wieder $\angle y > \angle A$ ist (Fr. 69 VII.), so ist um so mehr $\angle B > \angle A$ (Fr. 20 VII.).

Der größeren Seite $AC = b$ eines Dreiecks steht also auch der größere Winkel B gegenüber.

IV. Sind zwei Winkel B und C eines Dreiecks ABC ungleich, so ist die dem größeren $\angle B$ gegenüberliegende Seite $AC = b$ größer als die Gegenseite $AB = c$ des kleineren Winkels C.

Es muß offenbar entweder $b = c$, oder $b > c$, oder $b < c$ sein.

Wäre $b = c$, so müßte $\angle B = \angle C$ sein (II.); wäre $b < c$, so wäre auch $\angle B < \angle C$ (III.); da aber beides der Voraussetzung ($\angle B > \angle C$) widerspricht, so muß $b > c$ sein.

V. Halbirt man den $\angle B$ (Fig. 53) eines $\triangle ABC$, in welchem $BC > BA$ ist, durch die Gerade BX, so schneidet BX in N die Seite AC so, daß $NC > NA$ ist. Vergl. Fr. 148 IV.

Der Winkel BNC ist ein stumpfer (Fr. 39 VII.), weil

$$\angle BAN > \angle BCN \text{ (III.)}$$

$$\angle BAN + \angle m > \angle BCN + \angle n \text{ (Vor. u. Fr. 20 IX.)}$$

$$\angle BNC > \angle BNA + \text{(Fr. 69 VI.)}$$

Errichtet man nun in N auf BX eine Senkrechte FK, so schneidet dieselbe die Strahlen BC und BA in F und K so, daß F innerhalb BC, K außerhalb BA liegt. Zieht man dann noch durch F und K zwei Parallelen FY und KZ zu BX, so schneiden diese die Gerade CA in U und V; dabei liegt U innerhalb CN, V außerhalb NA, denn es sind ja $\angle NFY$ und $\angle NKZ$ rechte (nach Konstr. und Fr. 62 V.), dagegen

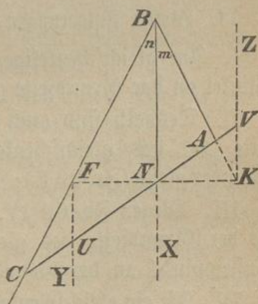


Fig. 53.

$\angle$ CFN stumpf (Fr. 69 VII.) und $\angle$ BKN spitz (Fr. 70 I.).
Deshalb ist weiter:

$$\triangle BNF \cong \triangle BNK \text{ (Fr. 67 VIII.)}$$

$$FN = NK \text{ (Fr. 67 II.)}$$

$$\angle NFY = R = \angle NKZ \text{ (Konstr. u. Fr. 62 V.)}$$

$$\angle FNU = \angle KNV \text{ (Fr. 42 II.)}$$

$$\triangle FNU \cong \triangle KNV \text{ (Fr. 67 VIII.)}$$

$$NU = NV \text{ (Fr. 67 II.)}$$

$$NC > NU \text{ (Fr. 20 III.); } NV > NA \text{ (Fr. 20 III.)}$$

$$NC > NA \text{ (Fr. 20 IV., VII.)}$$

VI. Halbirt man in dem $\triangle ABC$, Fig. 53, in welchem $BC > BA$ ist, die Seite AC, so kann nach V. die vom Halbierungspunkte H nach B gezogene Gerade HB den Winkel B nicht halbieren, und kann ferner

VII. die Mitte einer zwischen BC und BA normal zur Winkelhalbierenden BX gezogenen Strecke FK nicht in der Geraden HB liegen,

VIII. endlich aber kann die Gerade HB nach VI. und Fr. 31 die auf ihr zwischen BC und BA errichteten Normalen nicht halbieren; es würde ja dies nach Fr. 67 VIII. bedingen, daß $\angle HBC = \angle HBA$ wäre.

74. Welche Folgerungen ergeben sich aus Fr. 73?

I. Im gleichschenkeligen Dreieck (Fr. 64 III.) sind die Winkel an der Grundseite gleich (Fr. 73 II.).

II. Deshalb sind auch die Außenwinkel an der Grundseite AC des gleichschenkeligen Dreiecks ABC (Fig. 51) einander gleich (Fr. 39 I.); $\angle u = \angle v = \angle x = \angle y$.

III. Wegen Fr. 69 IV. sind die beiden gleichen Winkel an der Grundseite des gleichschenkeligen Dreiecks spitz, die Außenwinkel an der Grundseite aber stumpf (Fr. 39 IV.).

IV. Ist ein gleichschenkeliges Dreieck rechtwinkelig, so mißt jeder Winkel an der Grundseite 45° (Fr. 68). — Vergl. Fr. 71 IV.

V. Im gleichseitigen Dreieck (Fr. 64 III.) folgt aus der Gleichheit der Seiten $a = b$ und $b = c$, daß Winkel $A = B$ und $B = C$; daher ist $\angle A = \angle B = \angle C$ (Fr. 20 V.), und jeder Winkel ist $= 60^\circ = \frac{2}{3} R$ (Fr. 69 VIII.)

VI. Die Gegenseiten zweier gleichen Winkel desselben Dreiecks sind gleich (Fr. 73 I.), das Dreieck also gleichschenkelig; ist aber

VII. das Dreieck gleichwinkelig, so ist es wegen Fr. 73 I. und Fr. 20 V. auch gleichseitig.

VIII. Aus Fr. 73 IV. folgt wegen Fr. 71 I., daß im rechtwinkligen und im stumpfwinkligen Dreieck die dem rechten oder stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite des Dreiecks ist. Deshalb ist auch

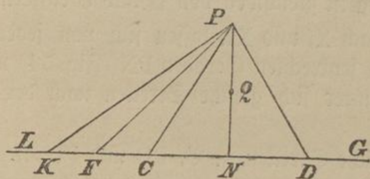


Fig. 54.

IX. die von einem Punkte P (Fig. 54) auf eine nicht durch P gehende Gerade G herabgefallte Senkrechte PN kürzer als jede von diesem Punkte P nach einem beliebigen Punkte C in dieser Geraden G gezogene Strecke PC.

Diese Senkrechte PN heißt der Abstand oder die Entfernung des Punktes P von der Geraden G.

X. Die von einem Punkte P (Fig. 54) nach verschiedenen, in einer nicht durch P gehenden Geraden G liegenden Punkten C, F, K zc. gezogenen Strecken PC, PF, PK zc. werden (wegen VIII.) um so länger, je weiter diese Punkte C, F, K zc. vom Fußpunkte N der von P auf G herabgefallten Senkrechten PN abstehen. Die Winkel PCF, PFK zc. sind nämlich stumpf (Fr. 69 VII.), da ja

$$\angle PNL = 90^\circ.$$

Lägen die Punkte, wie F und D, auf verschiedenen Seiten von N, so klappe man die Ebene um NP um.

Umgekehrt rückt F um so weiter von N hinweg, je größer PF wird.

XI. Sind die beiden Punkte C und D (Fig. 54) einer Geraden G gleich weit entfernt von dem Fußpunkte N der von einem Punkte P auf G gefällten Senkrechten PN, so stehen D und C auch von P gleich weit ab. Die beiden Dreiecke PNC und PND stimmen ja in den rechten Winkeln (Fr. 39 III.) bei N und deren einschließenden Seiten überein, sind also kongruent (Fr. 67 VII.), und deshalb ist $CP = DP$ (Fr. 67 II.).

XII. Auch jeder andere Punkt, z. B. Q, in NP und seiner Verlängerung ist gleichweit von D und C entfernt.

XIII. Nach X. und XI. lassen sich von jedem Punkte P in der auf G senkrechten Geraden PN (Fig. 54) nicht mehr als zwei unter sich gleiche Strecken nach der Geraden G ziehen.

Zwei gleiche Strecken, z. B. PD und PC, liegen auf verschiedenen Seiten von PN; D und C haben gleichen Abstand von N.

XIV. Im gleichschenkligen Dreiecke DPC, Fig. 54, ist nach X. jede Strecke, welche von der Spitze P nach einem Punkte der Grundseite CD gezogen wird, kleiner als die Schenkel DP und CP,

XV. und jede Strecke PF nach einem Punkte F in der Verlängerung der Grundseite CD größer als DP und CP.

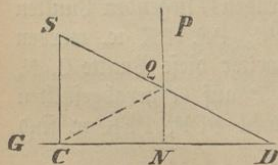


Fig. 55.

XVI. Jeder Punkt S (Fig. 55) außerhalb der von dem Punkte P auf die Gerade G herabgefallenen Senkrechten PN hat ungleiche Entfernung von zwei in G liegenden und von N gleichweit abstehenden Punkten D und C.

SD (oder SC) muß nämlich nach Fr. 28 I. die Senkrechte NP in Q schneiden; zieht man nun noch die Strecke QC, so ist:

$$\begin{aligned} DQ &= CQ \text{ (XI.)} \\ \angle QCD &= \angle QDC \text{ (Fr. 73 II.)} \\ \angle SCD &> \angle QCD \text{ (Fr. 20 III.)} \\ \angle SCD &> \angle QDC \text{ (Fr. 20 VI.)} \\ SD &> SC \text{ (Fr. 73 IV.).} \end{aligned}$$

XVII. Daher muß jeder Punkt Q (Fig. 55), welcher von den beiden Punkten D und C der Geraden G gleichweit entfernt ist, in der Geraden NP liegen, welche in der Mitte N zwischen D und C auf G senkrecht steht; wenn nämlich Q außer PN läge, so könnte nach XVI. nicht $QC = QD$ sein.

Kürzer spricht man diesen Satz so aus: Die Senkrechte PN ist der geometrische Ort eines von den Punkten D und C gleichweit entfernten Punktes *).

XVIII. Fällt man von einem Punkte T (Fig. 56) der Halbierungslinie BX eines (hohlen) Winkels ABC Senkrechte TU und TV auf die Winkelschenkel AB und BC und klappt man den $\angle y$ um BT auf den $\angle x$, so müssen sich beide decken (Fr. 31). Da nun T auf sich selbst liegen geblieben ist, so müssen auch TV und TU sich decken (Fr. 57 IV.); deshalb ist also auch

$$\begin{aligned} BU &= BV \text{ und ebenso} \\ TV &= TU \text{ (Fr. 22 IV.),} \end{aligned}$$

d. h. jeder Punkt T der Halbierungslinie BX ist von den Schenkeln AB und CB gleichweit entfernt (vergl. IX.).

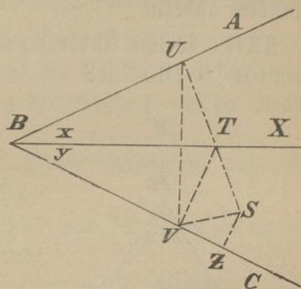


Fig. 56.

*) Vergl. Fr. 134 IV. — über andere geometrische Örter vergleiche XX., Fr. 96 IX., Fr. 98 III., Fr. 108 XIII., Fr. 133 VIII., Fr. 148 VII., Fr. 166 X und XI., Fr. 170 XI., Fr. 206 III., Fr. 240 IV.

XIX. Fällt man von dem nicht in der Halbierungslinie BX (Fig. 56) gelegenen Punkte S des hohlen Winkels ABC die Senkrechten SU und SZ auf die Schenkel AB und CB, so wird die eine Senkrechte SU die Halbierungslinie BX in T schneiden (Fr. 28 I.). Zieht man nun $TV \perp BC$, dann UV und SV, so ist $UT = VT$ (XVIII.), $\angle TUV = \angle TVU$ (Fr. 73 II.), $\angle TVU < \angle SVU$ (Fr. 20 III.), daher $\angle TUV < \angle SVU$ (Fr. 20 IV.) und $SU > SV$ (Fr. 73 IV.); da aber $\angle SZV = 90^\circ$ gemacht wurde, muß $SV > SZ$ sein (VIII.) und deshalb $SU > SZ$ (Fr. 20 VII.),

d. h. jeder Punkt S außerhalb der Halbierungslinie BX ist von den Schenkeln AB und BC ungleichweit entfernt.

XX. Daher ist die Halbierungslinie BX (Fig. 56) des hohlen Winkels B der geometrische Ort eines innerhalb B liegenden und von den Schenkeln AB und CB gleichweit entfernten Punktes T,

XXI. dagegen liegt jeder innerhalb B gelegene Punkt S außerhalb der Halbierungslinie BX des hohlen Winkels B, sobald er von dem einen Schenkel weiter entfernt liegt, als von dem andern.

XXII. Welche Änderung in XVIII. bis XXI. wird nötig, wenn $B > 180^\circ$ ist?

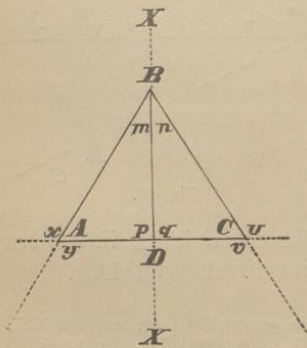


Fig. 57.

75. Was ist vom symmetrischen Dreieck zu bemerken?

I. Die Symmetrieaxe XX (Fr. 64 IV.) eines symmetrischen Dreiecks ABC, Fig. 57, kann nur durch einen Eckpunkt B laufen.

II. Im symmetrischen Dreieck ABC, Fig. 57, werde die von der Symmetrieaxe geschnittene Seite AC die Grundseite oder Basis, ihr Gegenwinkel die Spitze,

die anderen beiden Seiten AB und CB die Schenkel genannt; die zwischen Spitze und Basis gelegene Strecke CD der Symmetrieaxe heiße Symmetriestrecke. Vergl. Fr. 64 III.

III. Da $\triangle BDC$ beim Umklappen das $\triangle BDA$ deckt (Fr. 64 IV.), so ist $BA = BC$, d. h. das symmetrische Dreieck ist entweder gleichschenkelig, oder gleichseitig (Fr. 64 III.).

Von ihm gelten daher die Se in Fr. 74 I. bis VII., XIV. und XV.

IV. Zugleich ist $\angle m = \angle n$,
 $\angle p = \angle q$,
 und $AD = CD$;

d. h. die Symmetrieaxe XX halbiert den Winkel B an der Spitze, halbiert die Grundseite AC und steht auf der Grundseite senkrecht.

Daher gelten vom symmetrischen Dreiecke auch die Se in Fr. 74 X. bis XIII., XVI. bis XXI. Vergl. Fr. 73 V.

V. Das gleichschenkelige Dreieck ist symmetrisch gegen die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze (Fr. 73 II.), das gleichseitige gegen die Halbierungslinie jedes Winkels.

VI. In dem symmetrischen Dreiecke fallen zusammen:

1. die Halbierungslinie des Winkels B an der Spitze;
2. die Senkrechte von der Spitze B auf die Grundseite AC;
3. die in der Mitte D der Grundseite auf dieser errichtete Senkrechte;
4. die durch die Spitze B und die Mitte der Grundseite gezogene Gerade.

VII. Ein Dreieck ABC, Fig. 57, ist symmetrisch gegen XX:

1. wenn $\angle m = \angle n$ und $\angle p = \angle q = R$;
2. wenn $AD = CD$ und $BD \perp AC$;
3. wenn $\angle m = \angle n$ und $AD = CD$.

Der Beweis zu 1. und 2. stt sich auf Fr. 67 VII. und VIII., der zu 3. auf V. in Verbindung mit Fr. 73 VI.

76. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Seiten des Dreiecks?

I. In jedem Dreieck ist die Summe $a + b$ zweier Seiten größer als die dritte Seite c .

Verlängert man die Seite $AC = b$ (Fig. 58) um ein Stück $CD = CB = a$ und zieht DB , so ist $\angle CBD = \angle CDB$ (Fr. 74 I.); da nun $\angle ABD > \angle CBD$ (Fr. 20 III.), so ist auch $\angle ABD > \angle CDB$ (Fr. 20 IV.), deshalb $AD > AB$ (Fr. 73 IV.) oder $a + b > c$ (Fr. 20 II.).

II. In jedem Dreieck ist die Differenz $b - a$ zweier Seiten kleiner als die dritte Seite c .

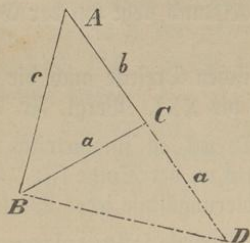


Fig. 58.

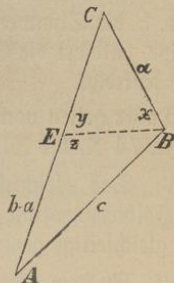


Fig. 59.

Trägt man auf der (größern) Seite $CA = b$ (Fig. 59) von C aus ein Stück $CE = CB = a$ ab und zieht man die Strecke BE , so ist $\angle z > 90^\circ$ (Fr. 74 III.) und deswegen $EA < AB$ (Fr. 74 VIII.) oder $b - a < c$ (Fr. 20 II.).

77. Welche Folgerungen lassen sich aus Fr. 76 ziehen?

I. In Fig. 60 muß nach Fr. 76 I. der Reihe nach

$$CD + DA > CA$$

$$DE + EA > DA \text{ zc. sein.}$$

Daher ist auch

$$AB < BC + CA$$

$$AB < BC + CD + DA$$

$$AB < BC + CD + DE + EA \text{ zc.,}$$

d. h. die Strecke AB ist kürzer als jede zwischen den Punkten A und B gezogene gebrochene Linie.

Auch wenn die gebrochene Linie, z. B. BEMA in Fig. 61, die Strecke AB schneidet, hört der Satz I. nicht auf zu gelten, da

$$BE + EF > BF$$

$$FM + MA > FA.$$

Selbst wenn die gebrochene Linie nicht in einer und derselben Ebene liegt, gilt der Satz I. noch, da dann in Fig. 60 nur jedes der auf einander folgenden Dreiecke ABC, ACD u. in einer andern Ebene liegt.

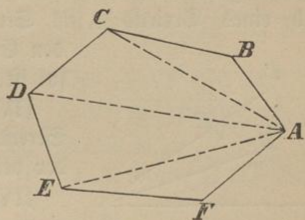


Fig. 60.

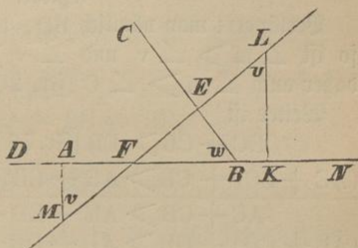


Fig. 61.

II. In Fig. 62 schmiegt sich die gebrochene Linie ADCEB weit mehr an die zwischen A und B gezogene krumme Linie AFDKLENB an, als die gebrochene ACB. Setzt man daher das

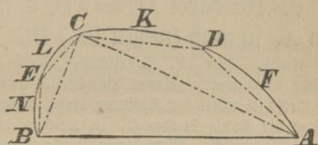


Fig. 62.

in Fig. 62 angedeutete Verfahren weiter fort, so wird man eine sich um so genauer an die krumme Linie anschmiegende gebrochene erhalten, je mehr Zwischenpunkte man in der krummen wählt; um so weniger werden sich auch die einzelnen Teile der krummen in ihrer Länge von den einzelnen Strecken der gebrochenen unterscheiden, und wie die gebrochene, so wird auch die krumme größer sein als die Strecke AB.

III. Die Strecke $\overline{AB}$ ist also die kürzeste Linie zwischen den zwei Punkten A und B. Vergl. Fr. 22 VIII.

IV. Zieht man von einem Punkte D (Fig. 63) innerhalb eines Dreiecks ABC Strecken DA und DB nach den Endpunkten einer Seite AB, so ist

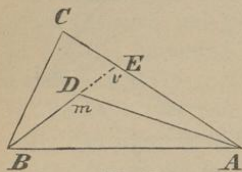


Fig. 63.

(IV a) die Summe dieser Strecken kleiner als die Summe der beiden anderen Dreiecksseiten,

(IV b) erstere schließen aber einen größeren Winkel ein als letztere.

Verlängert man nämlich BD, bis sie AC in E schneidet, so ist $\angle m > \angle v$ und $\angle v > \angle C$ (Fr. 69 VII.), daher auch $\angle m > \angle C$ (Fr. 20 VII.).

Weiter ist

$$EC + CB > EB \text{ (Fr. 76 I.)}$$

$$(AE + EC) + CB > AE + EB \text{ (Fr. 20 IX.)}$$

$$AC + CB > AE + ED + DB \text{ (Fr. 20 II.)}$$

$$(AE + ED) + DB > AD + DB \text{ (Fr. 76 I. und Fr. 20 IX.)}$$

$$AC + CB > AD + DB \text{ (Fr. 20 VII.).}$$

V. Ist dabei $AC = AD$, d. h. liegen C und D im Kreise um A, so muß (wegen IV.) $BC > BD$ sein.

Anm. Aus IV. ist ersichtlich, daß der Winkel zwischen zwei Geraden, welche von zwei gegebenen Punkten A und B (Fig. 63) auslaufen, also auch die Verschiedenheit der Richtung dieser beiden Geraden um so kleiner wird, je weiter der Punkt D oder C, in welchem die beiden Geraden zusammenlaufen, von AB wegrückt. Rückt dieser Punkt in unendliche Entfernung von AB, d. h. schneiden sich die beiden Geraden gar nicht mehr, sondern sind sie parallel, so wird die Richtungsverschiedenheit = 0. Vergl. Fr. 56 IV.

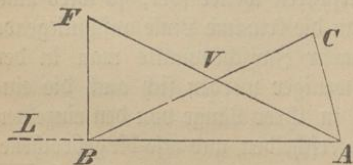


Fig. 64.

VI. Zieht man von einem im Außenwinkel CBL (Fig. 64) des Winkels B eines Dreiecks ABC (aber nicht im Scheitelwinkel von C) gelegenen Punkte F

Strecken FA und FB nach den Endpunkten der Seite AB, so muß die eine Strecke FA die eine Seite CB in V schneiden (Fr. 28 I.). Dabei ist die Summe dieser sich schneidenden Strecke und Seite größer als die Summe der sich nicht schneidenden; denn es ist:

$$AC < AV + VC; BF < BV + VF \text{ (Fr. 76 I.)}$$

$$AC + BF < AV + VF + VC + BV \text{ (Fr. 20 X.)}$$

$$AC + BF < AF + BC \text{ (Fr. 20 II.).}$$

VII. Ist dabei $AC = AF$, d. h. liegen C und F im Kreise um A, so muß wegen VI.

$$BF < BC$$

sein.

VIII. Ist dabei $AC = BC$, so ist $BF < AF$ (VI.).
Vergl. Fr. 74 XVI.

IX. Daher kann in V. nicht

$$AC = AD = BC = BD,$$

und in VII. nicht

$$AC = AF = BF = BC$$

sein.

X. In verwandter Weise wie in IV. läßt sich auch der allgemeinere Satz beweisen, daß der Umfang eines Vielecks mit lauter hohlen Winkeln kleiner ist, als der Umfang eines dasselbe umschließenden Vielecks.

XI. Daß die Sätze IV., VI. und IX. nicht zu gelten aufhören, wenn der Punkt D, bzw. F in die Seite BC rückt und beide sich in V begegnen, ist aus Fr. 76 I. leicht nachzuweisen.

78. In welcher Weise ändert sich ein Winkel, bzw. eine Seite eines Dreiecks zugleich mit seiner Gegenseite und ihrem Gegenwinkel?

I. Legt man die zwei Dreiecke AB_1C und AB_2C (Fig. 65), in denen $AC = AC$ und $AB_1 = AB_2$, aber $\angle B_1AC > \angle B_2AC$ ist, mit den gleichen

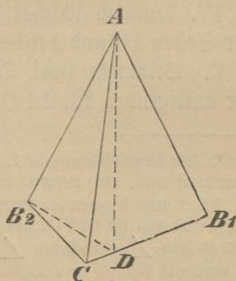


Fig. 65.

Seiten AC an einander, so fällt die Halbierungslinie AD des Winkels $B_1AB_2^*)$ zwischen AB_1 und AC und schneidet die Seite B_1C etwa in D (Zr. 28 III. und Zr. 26). Zieht man nun noch DB_2 , so ist

$$\triangle B_1AD \cong \triangle B_2AD \text{ (Zr. 67 VII.)}$$

$$B_1D = B_2D \text{ (Zr. 67 II.)}$$

$$B_1C = B_1D + DC = B_2D + DC \text{ (Zr. 20 II. und IV.)}$$

$$B_2D + DC > B_2C \text{ (Zr. 76 I.)}$$

$$B_1C > B_2C \text{ (Zr. 20 IV.).}$$

II. Läßt man also in einem Dreiecke ABC (Fig. 66) zwei Seiten AC und AB ungeändert, so wächst die dritte

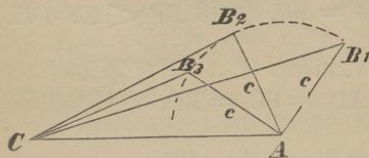


Fig. 66.

Seite CB mit dem von jenen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel A. Vergl. Zr. 77 V. und VII.

III. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten ($a_1 = a_2$ und

$b_1 = b_2$) überein, während die dritten Seiten ungleich sind ($c_1 > c_2$), so können die von jenen Seitenpaaren eingeschlossenen Winkel C_1 und C_2 nicht gleich sein, weil sonst die Dreiecke kongruent wären (Zr. 67 VII.) und $c_1 = c_2$ sein müßte. Ebensovienig kann $C_1 < C_2$ sein, weil ja dann auch $c_1 < c_2$ sein müßte (II.). Daher kann nur $C_1 > C_2$ sein, und

IV. demnach wächst in Fig. 66 bei ungeänderter Länge der Seiten AC und AB der Winkel A mit der dritten Seite BC.

V. Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite a und einem ihr anliegenden Winkel C überein, so wächst auch der zweite

*) Die Beweisführung in I. ändert sich weder, wenn $\angle B_1AB_2$ flach, oder überstumpft wird, noch wenn C in B_1B_2 , oder im Dreieck B_1AB_2 liegt.

Führt man dagegen den Beweis zu III. ebenfalls unmittelbar mit Fig. 65 (auf Grund von Zr. 73 III. und Zr. 67 VII., indem man B_1B_2 zieht und von dem größeren $\angle B_1B_2D$ den $\angle B_1B_2D = \angle B_2B_1C$ abschneidet), so macht die erwähnte Größen- und Lagenverschiedenheit eine kleine Abänderung in der Beweisführung nötig, sofern man nicht (in Fig. 65) $AC > AB$ voraussetzt.

dieser Seite a anliegende Winkel B , wenn seine Gegenseite b wächst, und umgekehrt. Fig. 59 vermag dies unmittelbar anschaulich zu machen.

79. Durch welche Stücke ist ein Dreieck bestimmt? *1. und Frage 67*

I. Ein Dreieck ist bestimmt, wenn man von ihm so viel Stücke (d. h. Winkel und Seiten) kennt, daß sich aus ihnen bloß ein Dreieck zeichnen läßt.

II. Durch ein Stück ist ein Dreieck noch nicht bestimmt, weder durch einen Winkel, noch durch eine Seite.

In Fig. 67 stimmen die Dreiecke AVB , ACB , AFB in der Seite AB , in Fig. 68 die Dreiecke AB_1C_1 , AB_2C_2 , AB_3C_3 in dem Winkel A überein, sind aber trotzdem an Größe und Gestalt verschieden.

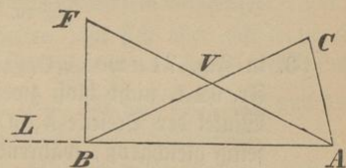


Fig. 67.

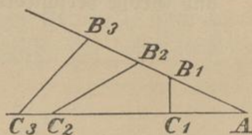


Fig. 68.

III. Auch zwei Stücke reichen zur Bestimmung eines Dreiecks nicht aus. Denn:

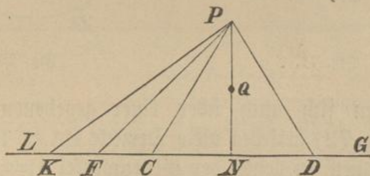


Fig. 69.

1. in Fig. 69 stimmen die Dreiecke DPN , DPC , DPF in der Seite DP und dem anliegenden Winkel D überein;

2. in Fig. 70 enthalten die Dreiecke ACB_1 , ACB_2 , ACB_3 zwei gleiche Seiten AC und $AB_1 = AB_2 = AB_3$;

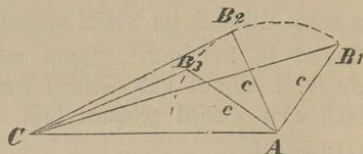


Fig. 70.

3. in Fig. 71, wo $A_1C_1 \parallel A_2C_2 \parallel A_3C_3$, sind nach Fr. 62 I. nicht bloß zwei, sondern sogar alle drei Winkel der Dreiecke A_1BC_1 , A_2BC_2 , A_3BC_3 gegenseitig gleichgroß, während in jedem dieser Fälle die Dreiecke an Gestalt, oder an Größe, oder an Gestalt und Größe verschieden sind. Endlich

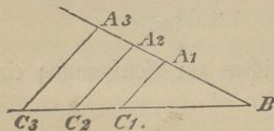


Fig. 71.

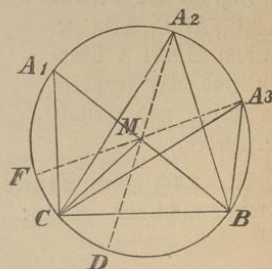


Fig. 72.

4. lassen sich auch über einer gegebenen Seite BC (Fig. 72) beliebig viele Dreiecke BA_1C , BA_2C , BA_3C zeichnen, in denen der Gegenwinkel $A_1 = A_2 = A_3$ der Seite BC die nämliche Größe A hat; denn man braucht (wegen Fr. 68 II.) dazu nur $\angle CA_1B + \angle BA_1C = \angle CA_2B + \angle BA_2C = \angle CA_3B + \angle BA_3C = 180^\circ - A$ zu machen. Vergl. Fr. 98 III.

IV. Auch die für ein Dreieck gegebenen drei Winkel bestimmen, wie Fig. 71 zeigt (vergl. III. 3.), das Dreieck noch nicht, selbst wenn sie der in Fr. 68 II. enthaltenen Bedingung genügen; eben dieser Bedingung wegen sind ja die drei Winkel nicht unabhängig von einander.

V. Durch die drei Seiten ist das Dreieck bestimmt; denn in zwei Dreiecken, welche in den drei Seiten übereinstimmen, müssen auch die Winkel der Reihe nach gleich groß sein, weil sonst die Seiten verschieden sein müßten (Fr. 78 II.).

Aus drei gegebenen Seiten läßt sich aber nur dann ein Dreieck zeichnen, wenn die Bedingungen in Fr. 76 erfüllt sind.

VI. Aus Fr. 67 VII. folgt, daß zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel das Dreieck bestimmen.

VII. Auch zwei Winkel und eine Seite bestimmen das Dreieck. Denn sind in zwei Dreiecken zwei Winkel paarweise gleich, so sind es wegen Fr. 69 I. auch die dritten Winkel; aus Fr. 67 VIII. ergibt sich daher stets die Kongruenz der Dreiecke.

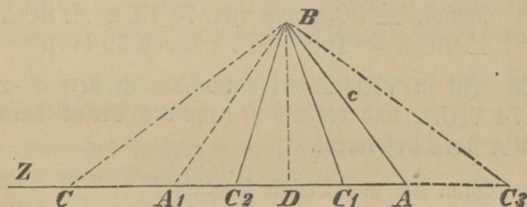


Fig. 73.

VIII. Sind zu einem Dreieck ein Winkel $\angle ZAB = A$ (Fig. 73), eine diesem Winkel anliegende Seite $AB = c$ und dessen Gegenseite a gegeben, so ist zunächst zu unterscheiden, ob a größer, gleich, oder kleiner ist als die von B auf AZ gefällte Senkrechte $BD = h$.

1. Ist $a < h$, so ist aus a , c und A kein Dreieck möglich (Fr. 74 IX.).

2. Ist $a = h$, so läßt sich aus a , c und A nur ein Dreieck ABD zeichnen (Fr. 74 IX.), und dieses ist bei D rechtwinkelig.

Ist endlich $a > h$, so kann a wieder entweder größer, oder gleich, oder kleiner als c sein.

Macht man nun $DA_1 = DA$, also $BA_1 = BA$ (Fr. 74 XI.), so fällt

3. bei $c = a > h^*)$ der dritte Eckpunkt des einzigen möglichen (gleichschenkeligen) Dreiecks ABA_1 auf A_1 (Fr. 74 XIII.).

4. Bei $c < a > h$ dagegen giebt es zwar zwei von B um die Strecke a entfernte Punkte C und C_3 in AZ (Fr. 74 XIII.), aber nur das eine $\triangle ABC$ enthält c , A und a zugleich, während das $\triangle ABC_3$ zwar a und c , aber nicht A , sondern $\angle BAC_3 = 180^\circ - A$ enthält.

5. Bei $c > a > h$ endlich giebt es zwei Dreiecke ABC_1 und ABC_2 , in denen c , a und A vorkommen; dabei ist $DC_1 = DC_2$ (Fr. 74 XIII.); $\angle BC_1A$ ist stumpf, $\angle BC_2A$ spitz (Fr. 74 III.), $\angle BC_1A + \angle BC_2A = 180^\circ$ (Fr. 74 I. und 39 IV.).

IX. Ist in VIII. $\angle A \geq 90^\circ$, so ist stets $c < a$ (Fr. 74 VIII.), und deshalb ist dann das Dreieck durch c , a und A stets bestimmt.

80. Wenn sind zwei Dreiecke kongruent?

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen:

I. in den drei Seiten (Fr. 79 V.);

II. in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel (Fr. 79 VI.);

III. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren dieser beiden Seiten (Fr. 79 VIII. 4. und IX.);

IV. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen dieser Seiten, während die Gegenwinkel der zweiten dieser Seiten

*) Eigentlich sind hier zwei Seiten ($c = a$) und zwei Winkel ($C = A$; Fr. 73 II.) gegeben.

beide stumpf, oder beide spitz sind, oder während die Summe der letzteren beiden Gegenwinkel von 180° verschieden ist (Fr. 79 VIII. 5.);

V. in einer Seite und zwei Winkeln (Fr. 79 VII.).

81. Wenn sind zwei rechtwinkelige Dreiecke kongruent?

Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind kongruent, wenn sie (außer im rechten Winkel; Fr. 39 III.) noch übereinstimmen:

I. in zwei Seiten (Fr. 80 II., oder III.);

II. in einem Winkel und einer Seite (Fr. 80 V.).

Drittes Kapitel.

Der Kreis und die Gerade. Zwei Kreise.

82. Welche Lagen kann ein Punkt gegen einen Kreis haben?

Ein Punkt in der Ebene eines Kreises liegt entweder auf dem Kreise, oder innerhalb, oder außerhalb des Kreises, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte gleich, kleiner, oder größer ist, als der Halbmesser des Kreises (Fr. 47 bis 49).

83. Wie viel Punkte hat ein Kreis mit einer in seiner Ebene liegenden Geraden gemein?

I. Liegt der Fußpunkt N_1 (Fig. 74) der vom Mittelpunkte M eines Kreises vom Halbmesser r auf die Gerade G_1 gefällten Senkrechten MN_1 außerhalb dieses Kreises, ist also $MN_1 > r$, so liegen alle anderen Punkte der Geraden G_1 ebenfalls außerhalb des Kreises (Fr. 74 IX.).

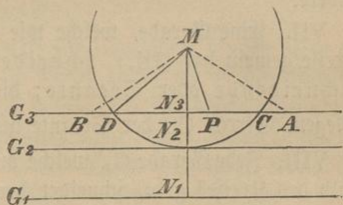


Fig. 74.

G_1 hat also keinen Punkt mit dem Kreise gemein.

II. Liegt der Fußpunkt N_2 (Fig. 74) der von M auf die Gerade G_2 gefällten Senkrechten MN_2 auf dem Kreise, ist also $MN_2 = r$, so liegen alle anderen Punkte der Geraden G_2 außerhalb des Kreises (Fr. 74 IX.).

G_2 hat dann mit dem Kreise nur einen Punkt gemein.

III. Liegt der Fußpunkt N_3 (Fig. 74) der von M auf die Gerade G_3 gefällten Senkrechten MN_3 innerhalb des Kreises, ist also $MN_3 < r$, so kann man in G_3 von N_3 aus nach beiden Seiten hin $N_3A = N_3B = r$ auftragen, und dann ist (wegen Fr. 74 VIII.) MA sowohl als MB größer als r; A und B liegen außerhalb, N_3 innerhalb des Kreises, und deshalb muß G_3 den Kreis wenigstens zweimal schneiden (Fr. 28 IV.). Da sich aber nach Fr. 74 XIII. von M aus höchstens zwei Strecken von der Länge r nach G_3 ziehen lassen, so hat auch

G_3 jezt mit dem Kreise nur zwei Punkte C und D gemein und kann überhaupt eine Gerade auch mit einem Kreise nie mehr als zwei Punkte gemein haben.

IV. Eine Gerade G_2 , welche mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat (II.), heißt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises.

V. Die Senkrechte G_2 auf einem Halbmesser MN_2 berührt in N_2 den Kreis um M (II.).

VI. Jenseits G_2 , nach G_1 hin, giebt es keinen Punkt, welcher von M um r entfernt ist (II. und Fr. 20 III.); also geht der Kreis nicht von der einen Seite von G_2 auf die andere.

VII. Eine Gerade, welche wie G_3 zwei Punkte mit dem Kreise gemein hat (III.), schneidet den Kreis, heißt eine Schneidende oder Secante; die innerhalb des Kreises gelegene Strecke CD der Secante heißt eine Sehne.

VIII. Jede Gerade G_3 , welche durch einen Punkt P innerhalb des Kreises geht, schneidet den Kreis zweimal. Fällt man nämlich von M eine Senkrechte auf G_3 , so ist entweder P selbst, oder N_3 deren Fußpunkt; da aber im letzteren Falle MN_3 noch kürzer als MP sein muß (Fr. 74 IX.), so liegt N_3

ebensowohl als P innerhalb des Kreises, und dieser wird (nach III.) von G_3 geschnitten.

IX. Jede Gerade G_3 , welche durch einen Punkt D des Kreises geht, ohne auf dem nach diesem Punkte gezogenen Halbmesser MD senkrecht zu stehen, schneidet den Kreis (nach III.), weil der Fußpunkt N_3 der von M auf G_3 gefällten Senkrechten MN_3 innerhalb des Kreises liegt, da (nach Fr. 74 IX.) MN_3 kleiner als der Halbmesser MD ist.

X. Jede Tangente G_2 steht daher (wegen II. und IX.) senkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte N_2 gezogenen Halbmesser MN_2 in dessen Endpunkte N_2 .

XI. Durch jeden Punkt N_2 eines Kreises läßt sich demnach (wegen X. und Fr. 57 III.) nur eine Tangente ziehen.

XII. Alle Punkte einer Tangente, den Berührungspunkt ausgenommen, liegen außerhalb des Kreises (X. und II.).

XIII. Liegen der Mittelpunkt M eines Kreises und ein Punkt Q zu verschiedenen Seiten einer Geraden G_3 , so schneiden sich Gerade und Kreis (VIII.). Denn steht in Fig. 74 MN_1 in N_1 auf G_3 senkrecht, so wird eine durch Q gehende Parallele zu G_3 MN_2 entweder in N_2 , oder zwischen N_2 und N_3 schneiden, und N_3 liegt demnach innerhalb des Kreises (Fr. 82).

XIV. Nach X. lassen sich nicht drei unter einander parallele Tangenten an denselben Kreis legen.

84. Ist der Kreis krumm?

I. Da nach Fr. 74 XII. sich von jedem Punkte Q in NP, Fig. 54 auf S. 65, ein Kreis durch die beiden Punkte C und D schlagen läßt, diese Kreise aber sich beim Aufeinanderlegen mit ihren Mittelpunkten nicht decken, vielmehr ungleich sind (Fr. 49 IV.), so ist der Kreis und jeder Kreisbogen krumm (Fr. 10 II. und IV.). Vergl. Fr. 88 und 102.

II. Kein Kreisbogen DEC (Fig. 75 S. 82) kann mit seiner Sehne DC zusammenfallen (I; oder Fr. 83 III. und VII.).

Ein ähnlicher Übergang der Sehne in die Tangente liegt schon in Fr. 83 III. und II. angedeutet, insofern die Secante, je mehr ihre Entfernung vom Mittelpunkt dem Halbmesser gleich wird, um so näher an die Tangente heranrückt.

Anm. Die in IV. gegebene allgemeinere Erklärung des Begriffs „Berührung“ (vergl. Fr. 83 IV.) läßt sich für alle krummen Linien beibehalten.

Die so bestimmte Tangente kann aber, wie Fig. 77 zeigt, die Krumme unter Umständen an einem anderen Punkte, oder auch an ihrem Berührungspunkte E selbst schneiden; im Berührungspunkte E nur, wenn die Krumme in diesem Berührungspunkte von der konkaven zur konvexen Krümmung gegen dieselbe Seite der Geraden übergeht, wenn der Berührungspunkt zugleich ein Wendepunkt ist. Vergl. Fr. 27 III.

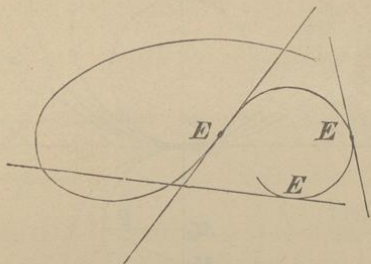


Fig. 77.

86. Wovon hängt die Krümmung des Kreises ab?

I. Durch denselben Punkt P einer Geraden G (Fig. 78 S. 84) lassen sich beliebig viel Kreise legen, welche diese Gerade berühren. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf der im Punkte P errichteten Senkrechten HY zu G (Fr. 83 X.).

II. Zieht man zwei solche Berührungskreise von verschiedenem Halbmesser, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf derselben Seite von G liegen, so liegt jeder Punkt Q des Kreises vom kleineren Halbmesser $M_2P = r_2$ innerhalb des Kreises mit größerem Halbmesser $M_1P = r_1$ (Fr. 82), weil ja

$$M_1Q < M_1M_2 + M_2Q \quad (\text{Fr. 76 I.})$$

$$M_1Q < M_1M_2 + M_2P \quad (\text{Fr. 48 III. und 20 IV.})$$

$$M_1Q < M_1P \quad (\text{Fr. 20 II.}).$$

III. Es liegt also in der Nähe des Berührungspunktes P (Fig. 78) der größere Kreis zwischen der Tangente G und dem kleineren Kreise, der kleinere Kreis entfernt sich rascher von der Tangente; deshalb ist der Kreis mit kleinerem Halbmesser stärker gekrümmt, als der Kreis mit größerem Halbmesser.

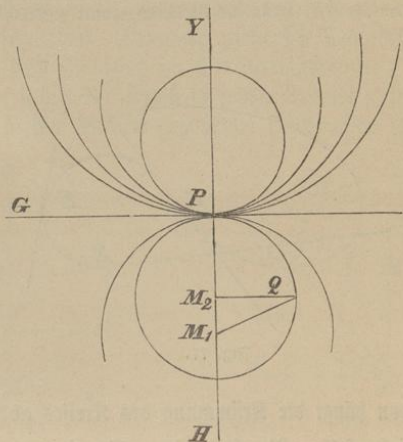


Fig. 78.

IV. Derselbe Kreis hat an allen Stellen gleich starke Krümmung; man kann ihn in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt drehen. Vergl. Fr. 47 VI.

V. Je größer der Halbmesser wird, desto enger schmiegt sich der Kreis zwar an die Gerade G an, dennoch kann er nie mit der Geraden zusammenfallen; dazu müßte der Halbmesser über alle Grenzen hinaus wachsen, er müßte unendlich groß werden. Vergl. Fr. 148 VII.

87. Was ist ein Sektor und ein Segment des Kreises?

I. Zieht man nach den Endpunkten einer Sehne DC (Fig. 79) die Halbmesser MD und MC, so entstehen außer dem gleichschenkeligen Dreieck DMC noch zwei Figuren: der Ausschnitt oder Sektor DMCED zwischen dem Bogen $\widehat{DEC}$ und den Halbmessern, und der Abschnitt oder das Segment DCED zwischen dem Bogen $\widehat{DEC}$ und der Sehne DC.

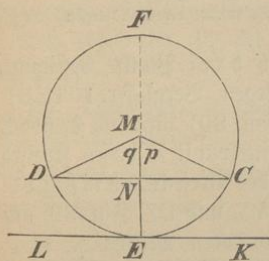


Fig. 79.

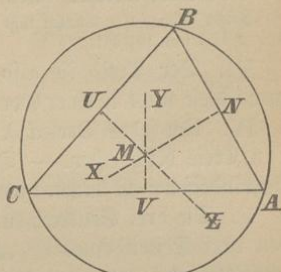


Fig. 80.

II. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei Abschnitte, von denen derjenige DCFD (Fig. 79), welcher den Mittelpunkt M enthält, einen größeren Bogen DFC und eine größere Fläche hat als der Halbkreis und als der andere DCED. Ersterer heißt ein größerer, letzterer ein kleinerer Abschnitt; beide ergänzen sich zur ganzen Kreisfläche.

III. Je zwei Halbmesser MD und MC (Fig. 79) teilen den Kreis in zwei Ausschnitte; der größere derselben DMCFD und sein Bogen $\widehat{DFC}$ ist größer als der Halbkreis.

IV. Auch die zu Bögen von 90° , 60° und 45° gehörigen Kreisabschnitte nennt man Quadrant, Sextant, Oktant. Vergl. Fr. 50 III.

88. Durch wie viel Punkte ist ein Kreis bestimmt?

I. Denkt man sich die drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte A, B, C (Fig. 80) durch zwei Strecken AB und AC

verbunden und errichtet man auf diesen in deren Mitten N und V die Senkrechten NX und VY, so schneiden sich dieselben in einem Punkte M (Fr. 71 VI.); zugleich ist $BM = AM$ und $CM = AM$ (Fr. 74 XI.), daher auch $BM = AM = CM$ (Fr. 20 V.). Durch A, B, C läßt sich also ein Kreis legen (Fr. 47 II.).

II. NX und VY schneiden sich aber nur in einem Punkte (Fr. 26); daher giebt es (wegen Fr. 74 XVI.) auch nur einen Kreis, welcher durch A, B und C geht.

Anm. Durch vier Punkte läßt sich nicht immer ein Kreis legen. Vergl. Fr. 97 III. und 161 III.

III. Der Kreis ist also durch drei Punkte bestimmt, wenn diese nicht in einer Geraden liegen. Vergl. Fr. 104 XIII.

IV. Um jedes Dreieck ABC (Fig. 80) läßt sich demnach ein Kreis beschreiben. — Der Mittelpunkt M dieses Kreises liegt indessen nicht immer innerhalb des Dreiecks, wie in Fig. 80.

V. Die drei Senkrechten NX, VY und UZ, Fig. 80, auf den drei Seiten eines $\triangle ABC$ in deren Mitten N, V, U schneiden sich in einem und dem selben Punkte M. Denn aus $MB = MC$ (I.) folgt, daß M zugleich in UZ liegt (Fr. 74 XVII.).

In I. hätte man also auch die Senkrechte UZ auf BC in deren Mitte U benutzen können und würde doch nur den einen Kreis gefunden haben.

89. Wie findet man den Mittelpunkt eines Kreises?

I. Macht man EF (Fig. 81) senkrecht auf der Sehne DC in deren Mitte N, so geht EF durch den Mittelpunkt M (Fr. 48 I. und 74 XVII.).

Der Mittelpunkt M liegt also in der Mitte des Durchmesser EF (Fr. 48 II.).

II. Ein anderes Verfahren ergiebt sich aus Fr. 88 I.

III. Ein drittes Verfahren wird in Fr. 102 XVIII. angegeben werden.

IV. Eine vierte Lösung kann Fr. 123 bieten.

V. Auch schneidet sich im Mittelpunkte M die Normale EF auf der Tangente LK und die Senkrechte auf der Sehne ED in deren Mitte N.

90. Was macht die Halbierungslinie eines Centriwinkels?

I. Halbirt man den Centriwinkel DMC (Fig. 81) eines Ausschnittes, so schneidet die Halbierungslinie ME sowohl den Bogen $\widehat{DC}$ in E, als die Sehne DC in N (Fr. 22 IV. und 52 II.).

II. Jeder Sektor DMCED ist symmetrisch gegen die Halbierungslinie ME seines Centriwinkels DMC (Fr. 31, 48 I., 64 IV.).

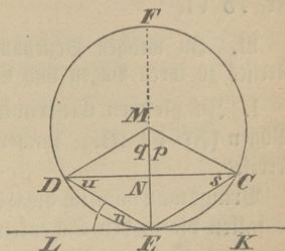


Fig. 81.

III. Die Halbierungslinie ME halbirt daher nicht bloß die Sehne $\overline{DC}$ in N und den Bogen $\widehat{CED}$ in E, sondern auch den Bogen $\widehat{DFC}$ in F. Vergl. Fr. 54 III.

IV. Zugleich ist die Halbierungslinie $ME \perp DC$.

V. Ebenso halbirt die Verbindungslinie MN des Mittelpunktes M und der Sehnenmitte N den Centriwinkel DMC und in E den Bogen $\widehat{DC}$; auch ist $MN \perp DC$. Vergl. Fr. 75 VI.

VI. Daher halbirt die Verbindungslinie ME des Mittelpunktes M und der Bogenmitte E den Centriwinkel DMC und die Sehne $\overline{DC}$ winkelrecht in N (Fr. 57 III.).

VII. Eben deshalb geht auch die Verbindungslinie NE der Sehnenmitte N und der Bogenmitte E durch den Mittelpunkt M; halbirt den Winkel DMC und steht senkrecht auf $\overline{DC}$.

VIII. Die Senkrechte MN ferner vom Mittelpunkte M auf die Sehne $\overline{DC}$ halbirt diese in N, den Bogen $\widehat{DC}$ in E und den Centriwinkel DMC. Vergl. Fr. 75 VI.

IX. Auch die Senkrechte EN von der Bogenmitte E auf die Sehne $\overline{DC}$ halbirt daher DC in N, geht durch den Mittelpunkt M und halbirt den Winkel DMC.

X. Die in der Mitte N der Sehne DC errichtete Senkrechte NF geht durch den Mittelpunkt M , halbiert den Winkel DMC und die Bögen $\widehat{DEC}$ und $\widehat{DFC}$ in E und F . Vergl. Fr. 75 VI.

91. In welchen Beziehungen stehen die Sehnen desselben Kreises zu ihren Bögen und Centriwinkeln?

I. Zu gleichen Centriwinkeln gehören nicht nur gleiche Bögen (Fr. 54 III.), sondern auch gleiche Sehnen desselben Kreises.

Bringt man nämlich die Centriwinkel zum Decken (Fr. 31), so fallen die in den Schenkeln und zugleich auf dem Kreise liegenden Sehnenendpunkte auf einander, und die Sehnen decken sich (Fr. 22 III.).

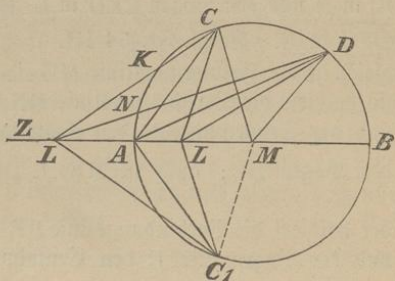


Fig. 82.

II. Zu gleichen Bögen desselben Kreises gehören daher nicht nur gleiche Centriwinkel (Fr. 54 III.), sondern auch gleiche Sehnen.

III. Legt man zwei gleiche Sehnen DC (Fig. 81) desselben Kreises so auf einander (Fr. 22 V.), daß die Mittelpunkte M von den Sehnen DC aus nach derselben Seite hin liegen, so fallen die Mittelpunkte nicht bloß beide in die auf der Sehne DC in deren Mitte N errichtete Senkrechte EF (Fr. 90 X.), sondern die Mittelpunkte müssen nach Fr. 74 X. (oder wegen Fr. 77 IX.) auch auf einander fallen.

IV. Daher sind die zu gleichen Sehnen desselben Kreises gehörigen Bögen, Segmente, Sektoren und Centriwinkel entweder gleich, oder sie ergänzen sich zum ganzen Kreis (360°), wie $\widehat{DEC}$ und $\widehat{DFC}$.

V. Die zu gleichen Sehnen desselben Kreises gehörenden hohlen Centriwinkel sind stets gleich (IV.).

VI. Zieht man von einem Punkte A (Fig. 82) des Kreises zwei Sehnen AC und AD nach zwei Punkten C und D, welche auf derselben Seite des Durchmessers AB liegen, so ist diejenige Sehne AD die größere, welche zum größern Bogen $\widehat{AD}$, zum größern Centriwinkel DMA gehört, mit der Verlängerung AZ des Durchmessers BA den größern Winkel DAZ einschließt.

Ist nämlich $\angle DAZ > \angle CAZ$, so liegt D zwischen C und B, es ist also $\widehat{AD} > \widehat{AC}$ und deshalb $\angle DMA > \angle CMA$.

Daher muß aber in den beiden Dreiecken DMA und CMA (nach Fr. 78 II.) $DA > CA$ sein.

VII. Macht man auf der andern Seite des Durchmessers AB den Bogen $\widehat{AC_1} = \widehat{AC}$, oder $\angle C_1MA = \angle CMA$, oder $\angle C_1AZ = \angle CAZ$, so ist $\triangle C_1MA \cong \triangle CMA$ (Fr. 80 II.) und daher auch die Sehne $AC_1 = AC$ (Fr. 67 II.).

VIII. Also wachsen die von demselben Punkte A des Kreises auslaufenden Sehnen mit den Bögen und Centriwinkeln, bis diese 180° betragen; während dann die Bögen und Centriwinkel von 180° bis 360° wachsen, nehmen die Sehnen in derselben Weise wieder ab. Demnach

IX. lassen sich von einem Punkte A des Kreises aus nicht mehr als zwei unter sich gleiche Sehnen ziehen, und diese liegen auf verschiedenen Seiten des Durchmessers AB. Vergl. XII.

X. Jede Sehne ist kleiner als der Durchmesser (VIII.).

XI. Der zu einer Sehne desselben Kreises gehörige, 180° nicht übertreffende Bogen und Centriwinkel ist um so größer, je größer die Sehne ist.

XII. Ist dagegen der Bogen oder Centriwinkel größer als 180° , so ist er um so kleiner, je größer die Sehne ist.

XIII. Zieht man von einem in einem Halbmesser AM, oder in dessen Verlängerung AZ gelegenen Punkte L (Fig. 82) zwei Strecken LC und LD nach zwei auf derselben Seite des Durchmessers AB liegenden Punkten C und D, so ist wiederum (VI.) nach Fr. 78 II. diejenige Strecke LD die größere, welche zu dem größern Bogen $\widehat{AD}$, der größern Sehne $\overline{AD}$, dem größern Centriwinkel DML gehört.

LD wächst für den innerhalb liegenden Punkt L auch mit dem $\angle DLZ$, für den außerhalb liegenden Punkt L dagegen nicht schon von A aus, sondern erst von derjenigen Lage ab, in welcher DL den Kreis berührt.

XIV. Macht man auf der andern Seite des Durchmessers AB den Bogen $\widehat{AC_1} = \widehat{AC}$, oder die Sehne $\overline{AC_1} = \overline{AC}$, oder $\angle C_1MA = \angle CMA$, oder $\angle C_1LZ = \angle CLZ$, so ist $\triangle C_1ML \cong \triangle CML$ (Fr. 80 II.), und daher auch die Strecke $LC_1 = LC$ (Fr. 67 II.).

XV. Auch die von einem Punkte L (innerhalb, oder außerhalb des Kreises) nach Kreispunkten gezogenen Strecken wachsen erst und nehmen dann wieder ab, wenn der Kreispunkt von A aus den ganzen Kreis durchläuft.

XVI. Dabei ist LA die kleinste und LB die größte Strecke für jeden Punkt L; beide Strecken liegen in dem durch L gehenden Durchmesser AB.

XVII. Auch von L (Fig. 82) aus lassen sich nicht mehr als zwei gleiche Strecken an den Kreis ziehen.

XVIII. Umgekehrt ist in Fig. 82 $\widehat{AD} > \widehat{AC}$, $\overline{AD} > \overline{AC}$, $\angle DML > \angle CML$ und $\angle DLZ > \angle CLZ$, sobald $LD > LC$, wobei jedoch D und C auf derselben Seite des Durchmessers AB liegen müssen und, falls L außerhalb liegt, zwischen B und dem Berührungspunkte der von L ausgezogenen Tangente.

XIX. Von keinem Punkte in der Ebene eines Kreises, außer vom Mittelpunkte, lassen sich daher (wegen IX. und XVII.) mehr als zwei gleichlange Strecken nach dem Kreise ziehen.

92. Wie hängt die Größe der Sehnen desselben Kreises von deren Entfernung vom Mittelpunkte ab?

I. Gleichweit vom Mittelpunkte abstehende Sehnen sind gleich.

Denn wenn man die durch ihre Mitten gelegten Halbmesser aufeinanderlegt (Fr. 22 V.), so fallen die Mitten auf einander (Fr. 22 V.), und die Sehnen selbst decken sich (Fr. 57 III.).

II. Die dem Mittelpunkte nähere Sehne eines Kreises ist größer als die entferntere.

Legt man die beiden Sehnen AB und KS (Fig. 83) mit ihren Mitten N und V auf denselben Halbmesser ME, so werden die Sehnen beide auf ME senkrecht (Fr. 90 V.), demnach parallel (Fr. 57 II.). Daher liegen die Endpunkte B und A der näheren Sehne von E aus jenseit der

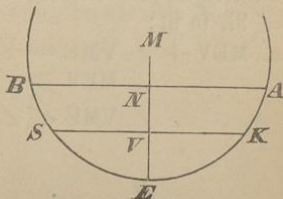


Fig. 83.

Endpunkte K und S der entfernteren Sehne (Fr. 26), so daß

$$\angle BMA > \angle SMK \text{ (Fr. 20 III.)}$$

und

$$BA > SK \text{ (Fr. 91 VI.).}$$

III. Auch hier erscheint wieder (vergl. Fr. 91 X.) der Durchmesser, dessen Entfernung vom Mittelpunkte ja = 0 ist, als die größte Sehne.

IV. Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Mittelpunkte entfernt; denn sonst müßten sie nach II. ungleich sein.

V. Die größere Sehne eines Kreises ist dem Mittelpunkte näher als die kleinere. Denn wegen II. kann die entferntere nicht größer und wegen IV. nicht eben so groß sein wie die nähere.

93. Wenn halbieren sich zwei Sehnen desselben Kreises?

Nie; denn zieht man durch die Mitte E (Fig. 84) einer Sehne AB den Durchmesser DC und eine Sehne LQ, so ist

$$\widehat{CA} > \widehat{CL}; \quad \widehat{CQ} > \widehat{CB} \quad (\text{Fr. 20 III.})$$

$$EA > EL; \quad EQ > EB \quad (\text{Fr. 91 XIII.})$$

$$EA = EB \text{ Konstr.}$$

$$EQ > EB > EL \quad (\text{Fr. 20 IV. und VII.}).$$

Wohl aber halbieren sich alle Durchmesser (Fr. 48 II.).

94. Wie wachsen die durch denselben Punkt gehenden Sehnen desselben Kreises?

I. Fällt man vom Mittelpunkte M (Fig. 84) auf zwei durch den Schnittpunkt E einer Sehne BA und des auf BA senkrechten Durchmessers CD gelegte Sehnen QL und KF die Senkrechten MV und MU, und ist dabei $\angle DEK < \angle DEQ < R$, so ist:

$$\angle MEV + \angle VME = \angle MEU + \angle UME \quad (\text{Fr. 71 II.})$$

$$\angle MEV > \angle MEU \quad (\text{Fr. 20 III.})$$

$$\angle VME < \angle UME \quad (\text{Fr. 20 IX.}).$$

Da somit EK von MV in einem zwischen E und U gelegenen Punkte geschnitten wird, ist das Dreieck MUV bei U stumpfwinkelig (Fr. 37 II.), daher

$$MV > MU \quad (\text{Fr. 74 VIII.})$$

$$\text{und } FK > LQ \quad (\text{Fr. 92 II.}).$$

II. Die durch E gezogenen Sehnen werden um so größer, je mehr sie sich von der zum Durchmesser senkrechten Lage AB der Lage des Durchmessers CD nähern (I.).

III. Der Durchmesser CD ist die größte, BA die kleinste Sehne, welche sich durch E ziehen läßt (II.). Vergl. Fr. 92 III.

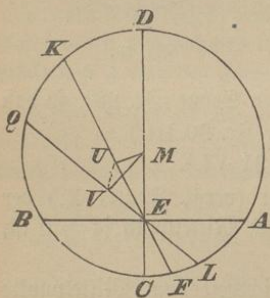


Fig. 84.

IV. Rückt E nach C, so führt II. auf Fr. 91 VI. zurück.

V. Daß der Satz II. auch noch gilt, wenn E außerhalb des Kreises rückt, läßt sich entweder auf dieselbe Weise, oder auch aus Fr. 91 XIII. beweisen, da ja in Fig. 82 $ND = LD - LN > LC - LK = KC$ ist (Fr. 20 X.).

95. Was ist ein Peripherie-, Sehnen- und Secantenwinkel?

I. Umfangswinkel oder Peripheriewinkel heißt ein Winkel CAB (Fig. 85), dessen Scheitel A im Umfange liegt und dessen Schenkel CA und BA Sehnen sind.

II. Die Schenkel AE und DE eines Sehnenwinkels AED sind Teile von Sehnen, die Schenkel AF und DF eines Secantenwinkels AFD sind Secanten, und zwar liegt der Scheitel F des letztern außerhalb, dagegen der Scheitel E des erstern innerhalb des Kreises.

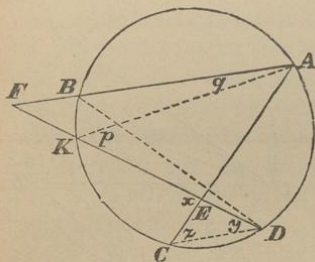


Fig. 85.

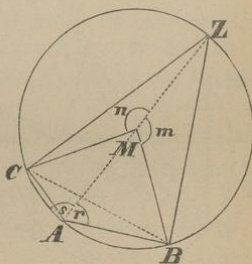


Fig. 86.

96. Nach welchen Gesetzen hängt die Größe eines Peripheriewinkels von dem zu ihm gehörigen Centrwinkel und Bogen ab?

I. Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß, als der über demselben Bogen stehende Centrwinkel.

1. Ist zunächst der Centrwinkel AMZ, Fig. 86, ein flacher, so ist:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} \angle MBA &= \angle MAB \\ \angle MBZ &= \angle MZB \end{aligned} \right\} (\text{Fr. 48 III., 74 I.}) \\
 & \angle ABZ = \angle MBA + \angle MBZ \\
 & \quad = \angle MAB + \angle MZB (\text{Fr. 20 II., VIII.}) \\
 & \angle ABZ = 90^\circ = \frac{1}{2} \angle AMZ (\text{Fr. 71 III., 39 II.}).
 \end{aligned}$$

2. Ist ferner der Centriwinkel $BMC = m + n$ überstumpft, so zerlegt der Durchmesser AMZ (Fig. 86) ihn und den Peripheriewinkel BAC in zwei Teile, und aus:

$$\begin{aligned}
 \angle m &= \angle r + \angle MBA = 2 \angle r \\
 \angle n &= \angle s + \angle MCA = 2 \angle s
 \end{aligned}
 \quad (\text{Fr. 69 VI., 74 I.})$$

erhält man dann durch Addition nach Fr. 20 VIII.

$$\angle (m + n) = 2 \angle (r + s).$$

3. Ist endlich der Centriwinkel BMC (Fig. 87) ein hohler, so kann der Mittelpunkt M entweder auf einem Schenkel des Peripheriewinkels, oder zwischen dessen Schenkeln, oder außerhalb derselben liegen.

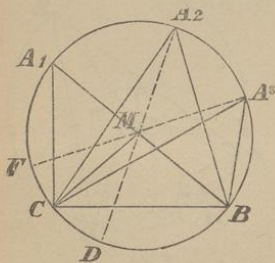


Fig. 87.

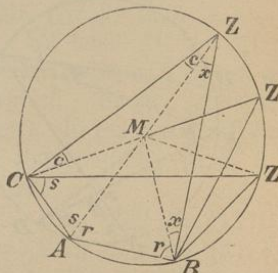


Fig. 88.

a) Im erstern Falle ist $\angle BMC = \angle MA_1C + \angle MCA_1$ (Fr. 69 VI.); nun ist $\angle MA_1C = \angle MCA_1$ (Fr. 48 III., 74 I.) und demnach $\angle BMC = 2 \angle MA_1C$.

b) Zieht man ferner im zweiten Falle den Durchmesser A_2D , so ist (wie eben bewiesen wurde) $\angle BMD = 2 \angle BA_2D$ und $\angle CMD = 2 \angle CA_2D$, woraus man durch Addition nach

Fr. 20 VIII. erhält: $\angle BMC = 2 \angle BA_2D + 2 \angle CA_2D$
 $= 2 \angle (BA_2D + CA_2D) = 2 \angle BA_2C.$

c) Im dritten Falle ziehe man den Durchmesser A_3F und findet dann aus 3 a): $\angle BMC = \angle BMF - \angle FMC$
 $= 2 \angle BA_3F - 2 \angle FA_3C = 2 \angle (BA_3F - FA_3C)$
 $= 2 \angle BA_3C.$

II. Alle Peripheriewinkel in demselben Kreisabschnitt, oder über gleichen Bögen desselben Kreises sind gleich; denn jeder gleicht ja der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

III. Jeder Peripheriewinkel über oder in dem Halbkreise ist $= 90^\circ$, da der zugehörige Centriwinkel ein flacher ist.

IV. Jeder Peripheriewinkel im größern Abschnitte ist kleiner, jeder im kleinern Abschnitte größer als 90° , weil der zugehörige Centriwinkel im erstern Falle hohl, im andern überstumpft ist.

V. Deshalb steht jeder Peripheriewinkel von 90° auf einem Halbkreise (III. und IV.) oder über einem Durchmesser; ferner

VI. muß der Mittelpunkt M eines durch den Scheitel B (Fig. 88) eines rechten Winkels ABZ gelegten, die Schenkel dieses Winkels in A und Z schneidenden Kreises in der Mitte der Strecke AZ liegen und ebenso

VII. muß ein über der Hypotenuse AZ eines rechtwinkligen Dreiecks ABZ aus der Hypotenusenmitte M geschlagener Kreis durch den Scheitel B des rechten Winkels gehen. Denn läge B nicht auf dem Kreise, so müßte (wegen Fr. 77 IV. und 96 IV., aber im Widerspruch mit Fr. 96 III.) der Winkel im Halbkreise über AZ von 90° verschieden sein.

VIII. Zwei Peripheriewinkel BAC und BZC (Fig. 88) über derselben Sehne BC in entgegengesetzten Abschnitten desselben Kreises (oder zwei Gegenwinkel in einem Kreis- oder Sehnenviereck ABZC) geben nach I. als Summe 180° , weil die Summe der zugehörigen Centriwinkel 360° beträgt. Vergl. Fr. 133 IV.

Anm. Man könnte zuerst auch den Satz VIII. mit Hilfe von Fig. 88 aus Fr. 74 I. und 72 III. beweisen und daraus dann die Sätze II., III. und I.

IX. Nach III. bis IV. läßt sich der Kreis als der geometrische Ort (vergl. Fr. 74 XVII.) des Scheitels eines über der Strecke AZ zu zeichnenden rechten Winkels auffassen. Vergl. auch Fr. 98 III.

97. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Sehnen- und Secantenwinkeln und den Peripheriewinkeln?

I. Jeder Sehnenwinkel x , Fig. 89, ist größer als der über seinem Bogen $\widehat{CK}$ stehende Peripheriewinkel y , und zwar gleich der Summe ($y + z$) der beiden Peripheriewinkel y und z , welche über den zu ihm und zu seinem Scheitelwinkel gehörigen Bögen $\widehat{CK}$ und $\widehat{DA}$ stehen (Fr. 69 VI. und 96 II.).

II. Jeder Secantenwinkel F ist kleiner als der über seinem Bogen $\widehat{DA}$ stehende Peripheriewinkel p , und zwar (nach Fr. 69 VI. und 96 II.) gleich der Differenz ($p - q$) der Peripheriewinkel p und q , welche über den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bögen $\widehat{DA}$ und $\widehat{BK}$ stehen. Nach Fr. 69 VI. ist nämlich $F + q = p$, und dies geht in $F = p - q$ über, wenn man (nach Fr. 20 VIII.) beiderseits q subtrahiert.

III. Beträgt in einem Viereck $ABZC$ (Fig. 88) die Summe zweier Gegenwinkel A und Z 180° , so läßt sich um das Viereck ein Kreis beschreiben. Ginge nämlich der nach Fr. 88 I. durch A , B und C gelegte Kreis nicht durch Z , so würde $\angle Z$ als Sehnenwinkel, oder als Secantenwinkel nach Fr. 97 I., bezw. II. entweder größer, oder kleiner als $180^\circ - A$ sein müssen.

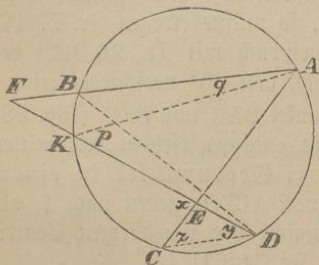


Fig. 89.

IV. Wie beweist man aus Fr. 91 II., daß in jedem Sehnentrapez die nicht parallelen Seiten gleich sein müssen?

98. Wie wachsen die Peripheriewinkel mit ihren Sehnen?

I. Ein spitzer Peripheriewinkel in demselben Kreise ist (wegen Fr. 96 I.) um so größer, ein stumpfer aber um so kleiner, je größer die zugehörige Sehne ist, weil ja nach Fr. 91 XI. und XII. der zugehörige Centriwinkel im ersten Falle mit der Sehne wächst, im zweiten abnimmt.

II. Aus Fr. 91 V. folgt, daß zwei zu gleichen Sehnen desselben Kreises gehörende spitze Peripheriewinkel unter sich gleich sind, und ebenso zwei stumpfe.

III. Die Scheitel gleicher Winkel über derselben Strecke CB (Fig. 87) und auf derselben Seite dieser Strecke liegen auf einem durch die Endpunkte der Strecke gehenden Kreise (Fr. 96 I., 97 I. und II.). Vergl. Fr. 96 VIII. und IX.

IV. Zu gleichen Peripheriewinkeln desselben Kreises gehören (wegen I.) gleiche Sehnen.

V. Sind zwei Peripheriewinkel desselben Kreises ungleich, so gehört zu dem größeren eine größere Sehne, falls die beiden Winkel spitz sind, dagegen eine kleinere Sehne, falls die beiden Winkel stumpf sind (II. und I.).

VI. Ein spitzer und ein stumpfer Peripheriewinkel desselben Kreises besitzen nach IV. gleiche Sehnen, wenn sie sich zu 180° ergänzen. Denn nach Fr. 96 VIII. ist ja der über der Sehne des spitzen Winkels w im kleineren Kreisabschnitte liegende Peripheriewinkel $w' = 180^\circ - w$.

VII. Will man über einer Strecke CB, Fig. 87 S. 94, einen Kreis beschreiben, in welchem der Peripheriewinkel über CB eine bestimmte Größe A besitzt, so kann man zunächst für Fr. 89 II. einen dritten Punkt A des Kreises bestimmen (Fr. 62 IV.), indem man an CB zwei Winkel BCA und CBA anträgt, deren Summe $= 180^\circ - A$ ist.

Auch würde die auf CB in deren Mitte errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises gehen

(Fr. 90 X.) und in M geschnitten werden von einer Geraden BA_1 , welche mit CB einen $\angle CBA_1 = 90^\circ - \angle A$ macht; denn dann ist ja $\angle A_1 = \frac{1}{2} \angle CMB = 90^\circ - \angle CBA_1 = \angle A$.

99. Welche Sätze gelten über parallele Sehnen?

I. Verbindet man die Endpunkte der beiden parallelen Sehnen DC und LK (Fig. 90) durch die vier Sehnen LC, LD, DK und CK, so folgt aus der Gleichheit der Winkel u und v (Fr. 62 I. 2.), daß zunächst $\widehat{CK} = \widehat{DL}$ (Fr. 98 IV.), und deshalb auch $\widehat{CK} = \widehat{DL}$ ist (Fr. 91 IV.), weil die Summe dieser Bögen $< 360^\circ$ ist.

Dann ist aber weiter auch $\widehat{CKL} = \widehat{DLK}$ (Fr. 20 VIII.) und $\widehat{CL} = \widehat{DK}$ (Fr. 91 II.).

II. Die zwischen zwei parallelen Sehnen DC und LK liegenden Bögen sind also gleichgroß; ebenso paarweise die vier ihre vier Endpunkte verbindenden Sehnen.

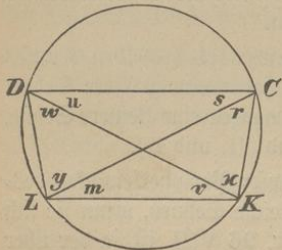


Fig. 90.

III. In Fig. 90 ist aber nicht bloß $\angle u = \angle m$ und $\angle s = \angle v$ (Fr. 96 II.), sondern auch $\angle u = \angle v$ und $\angle s = \angle m$ (Fr. 62 I. 2.), und demnach wegen Fr. 20 V.:

$$\angle u = \angle m = \angle s$$

und

$$\angle m = \angle s = \angle v.$$

Da aber weiter $\angle r = \angle w$ und $\angle x = \angle y$ (Fr. 96 II.), so ist nach Fr. 20 VIII. auch:

$$\begin{aligned} \angle (r + s) &= \angle (w + u) \quad \text{und} \\ \angle (x + v) &= \angle (y + m). \end{aligned}$$

IV. Jede der parallelen Sehnen DC und LK macht also mit den von ihren beiden Endpunkten auslaufenden Sehnen CL und DK, CK und DL paarweise gleiche Winkel (III.).

V. Sind umgekehrt die beiden sich innerhalb des Kreises nicht schneidenden Sehnen $\overline{CK}$ und $\overline{DL}$ (Fig. 90) und deshalb (nach Fr. 91 IV.) auch die zu denselben gehörigen, 180° nicht erreichenden Bögen $\widehat{CK}$ und $\widehat{DL}$ gleichgroß, so ist $\angle s = \angle u$ (Fr. 98 II.); da aber auch $\angle s = \angle v$ (Fr. 96 II.), so ist nach Fr. 20 V. auch $\angle u = \angle v$, und daraus folgt, daß $DC \parallel LK$ ist (Fr. 62 II.).

Anm. Sind die innerhalb des Kreises sich schneidenden Sehnen DK und LC gleich, so ist nicht immer $DC \parallel LK$, sondern nur, wenn DK und LC sich im Mittelpunkte schneiden, oder wenn $\overline{DC} > \overline{LK}$. Nach Fr. 91 VII. lassen sich ja, sofern DK nicht ein Durchmesser ist, von L aus zwei Sehnen LC_1 und LC_2 ziehen, welche $= DK$ sind.

VI. Der Satz II. hört nicht auf zu gelten, wenn die eine Sehne LK zur Tangente wird (Fig. 91).

Dann steht der Halbmesser ME nach dem Berührungspunkte E sowohl auf der Tangente LK (Fr. 83 X.), als auf der Sehne DC (Fr. 62 V.) senkrecht; deshalb ist $\angle p = \angle q$ (Fr. 90 VII.) und wegen Fr. 54 III. und 91 I. auch:

$$\widehat{CE} = \widehat{DE} \quad \text{und} \quad \overline{CE} = \overline{DE}.$$

VII. Wäre in Fig. 90 auch noch $DL \parallel CK$, so wäre auch $\angle w = \angle x = \angle y = \angle r$ (III.). Das Viereck $DCKL$ besäße dann vier rechte Winkel (Fr. 71 III.), es wäre auch $\overline{DC} = \overline{LK}$ und die beiden Diagonalen DK und CL schnitten sich im Mittelpunkte des Kreises.

100. Welche Neigung hat eine Tangente LK gegen eine durch den Berührungspunkt E gehende Sehne ED ?

I. Zieht man in Fig. 91 durch den Endpunkt D der Sehne ED die Sehne $DC \parallel LK$, so wird $\angle u = \angle n$ (Fr. 62 I.); weil aber nach Fr. 99 VI. $CE = ED$, so ist auch $\angle u = \angle s$ (Fr. 74 I.), und nun weiter $\angle n = \angle s$, d. h.

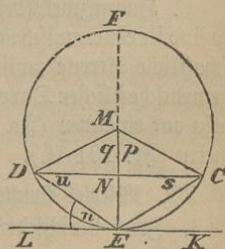


Fig. 91.

der spitze Winkel n zwischen Tangente KEL und Sehne ED gleicht dem über der Sehne stehenden spitzen Peripheriewinkel s .

II. Dasselbe gilt auch von den beiden stumpfen Winkeln, weil $\angle KED = 180^\circ - n$ (Fr. 39 IV.), der stumpfe Peripheriewinkel im kleineren Abschnitte über ED aber $180^\circ - s$ ist (Fr. 96 VIII.).

101. Wenn sind Kreise concentrisch und wenn excentrisch?

I. Haben zwei Kreise K_1 und K_2 (Fig. 92) in derselben Ebene einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt M , so heißen sie concentrische Kreise.

II. Zwei concentrische Kreise haben entweder alle, oder keinen Punkt gemein, jenachdem sie gleiche, oder ungleiche Halbmesser haben (Fr. 49 I. und III.). Vergl. auch Fr. 82.

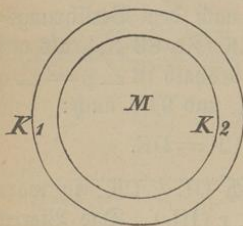


Fig. 92.

III. Zwei Kreise in derselben Ebene, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 nicht zusammenfallen, heißen excentrische Kreise; die durch die Mittelpunkte gehende Gerade heißt die Centrale, die Verbindungsstrecke $M_1M_2 = c$ der Mittelpunkte die Centralstrecke.

IV. Die Centrale schneidet jeden Kreis in einem Durchmesser.

V. Haben zwei Kreise zwei Punkte ihrer Centralen gemein, so sind sie concentrisch und auch gleich. Denn die ihnen gemeinschaftliche Strecke zwischen diesen beiden Punkten wäre ein gemeinschaftlicher Durchmesser (IV.), ihre Mittelpunkte fielen also auf einander (Fr. 48 II.) und die Kreise müßten sich decken (Fr. 101 II.).

102. Wieviel Punkte haben zwei excentrische Kreise gemein?

I. Zwei verschiedene Kreise können nicht mehr als zwei Punkte gemein haben, da sich nach Fr. 88 III. durch drei Punkte nur ein Kreis legen läßt. Vergl. auch Fr. 91 XIX.

II. Zwei excentrische Kreise können nicht zwei Punkte ihrer Centralen gemein haben (Fr. 101 V.).

III. Haben zwei excentrische Kreise einen Punkt P (Fig. 93) außerhalb der Centralen gemein, so haben sie auch noch einen Punkt Q gemein, welcher auf der anderen Seite der Centralen M_1M_2 so liegt, daß die Strecke PQ durch die Centrale in E senkrecht halbiert wird. Ist nämlich $PQ \perp M_1M_2$ und $EQ = EP$, so ist nach Fr. 74 XI. auch $M_1Q = M_1P$ und $M_2Q = M_2P$, d. h. Q liegt auf beiden Kreisen (Fr. 82).

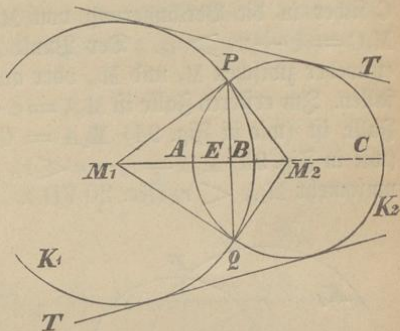


Fig. 93.

IV. Haben zwei excentrische Kreise zwei Punkte gemein, so liegen diese Punkte außerhalb der Centralen (II.) und zu beiden Seiten derselben (III.).

V. Haben zwei excentrische Kreise einen Punkt der Centralen gemein, so haben sie überhaupt bloß einen Punkt gemein (I. bis IV.).

VI. Haben zwei Kreise in derselben Ebene bloß einen Punkt gemein, so muß dieser (wegen III.) in der Centralen liegen.

Dann ist die in jenem Punkte auf der Centralen errichtete Normale eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise (Fr. 83 V.); die Kreise haben in jenem Punkte gleiche Richtung (Fr. 85 I.), und man sagt: sie berühren sich.

VII. Ist die Centralstrecke $M_1M_2 = c$ größer als die Differenz $r_1 - r_2$, aber kleiner als die Summe $r_1 + r_2$ der beiden Halbmesser $M_1P = r_1$ und $M_2P = r_2$, so schneiden sich die Kreise in zwei Punkten.

Da $r_1 + r_2 > c > r_1 - r_2$ sein soll, wobei $r_1 \geq r_2$ vorausgesetzt werde, so erhält man durch Addition und durch Subtraktion von r_2 nach Fr. 20 IX. $c + r_2 > r_1$ und $r_1 > c - r_2$. Trägt man nun in der Centralen von M_2 (Fig. 93 S. 101) aus nach beiden Seiten hin $M_2A = M_2C = r_2$ auf, so fällt C sicher in die Verlängerung von M_1M_2 , und es ist auch $M_1C = c + r_2 > r_1$. Der Punkt A dagegen kann dabei entweder zwischen M_1 und M_2 , oder auf M_1 , oder jenseits M_1 fallen. Im ersten Falle ist $M_1A = c - r_2 < r_1$; im zweiten Falle ist (wie in Fig. 94) $M_1A = 0$; im dritten Falle ist (wie in Fig. 95) $M_1A = r_2 - c < r_2$, und da $r_2 < r_1$, so ist umsomehr $M_1A < r_1$ (Fr. 20 VII.).

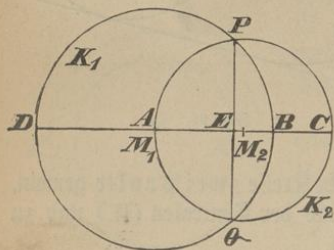


Fig. 94.

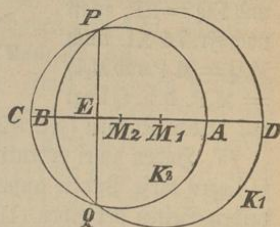


Fig. 95.

Somit liegt von den beiden Punkten A und C, welche K_2 mit der Centralen gemein hat, stets der eine A innerhalb, der andere C außerhalb K_1 (Fr. 82).

Daher muß K_2 den Kreis K_1 in zwei Punkten P und Q schneiden (Fr. 28 IV., 102 I.).

VIII. In VII. wird (wie in III.) die gemeinschaftliche Sehne PQ, Fig. 93 bis 95, der beiden sich schneidenden Kreise von der Centralstrecke M_1M_2 in E senkrecht halbiert (Fr. 74 XVII.).

IX. Die Centrale halbiert daher auch die beiden Winkel PM_1Q und PM_2Q (Fr. 90 V.).

X. Die Sätze VIII. und IX. ließen sich auch aus der Kongruenz der Dreiecke $M_1P M_2$ und $M_1Q M_2$, M_1PE und M_1QE , M_2PE und M_2QE herleiten.

XI. Sind (wie in Fig. 96) in VII. die beiden Halbmesser gleich, $r_1 = r_2$, so lassen sich auch aus P und Q Kreise durch M_1 und M_2 legen (Fr. 82), und deshalb wird dann auch M_1M_2 in E von der gemeinschaftlichen Sehne PQ halbiert.

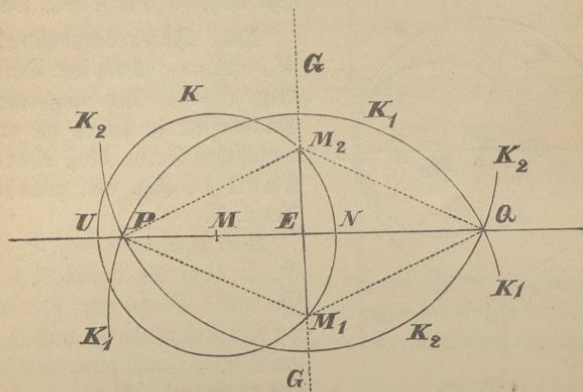


Fig. 96.

XII. Läßt man in Fig. 93 bis 95 den Mittelpunkt M_2 des Kreises K_2 auf den Punkt B des Kreises K_1 rücken, so werden M_2P und M_2Q Sehnen des Kreises K_1 . Die Figur zeigt dann die Lösung der Aufgabe: eine Sehne von bestimmter Länge in einen Kreis einzutragen. Vergl. IX.

XIII. Ist die Centralstrecke $M_1M_2 = c$ gleich der Summe $r_1 + r_2$ der Halbmesser, so haben die excentrischen Kreise bloß einen Punkt A, Fig. 97, gemein. Vergl. V.

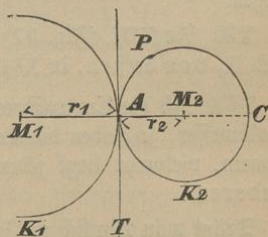


Fig. 97.

Macht man auf der Centralen von M_1 nach M_2 hin $M_1A = r_1$, so wird $AM_2 = M_1M_2 - M_1A = (r_1 + r_2) - r_1 = r_2$. A liegt also auf beiden Kreisen. Da nun aber $c = r_1 + r_2$ ist (Vor.) und deshalb M_1 außerhalb K_2 liegt (Fr. 82), so ist nach Fr. 91 XV. und XVI. jeder Punkt P des Kreises K_2 weiter, als A , von M_1 entfernt und liegt demnach außerhalb K_1 (Fr. 82), da ja $M_1A = r_1$ war.

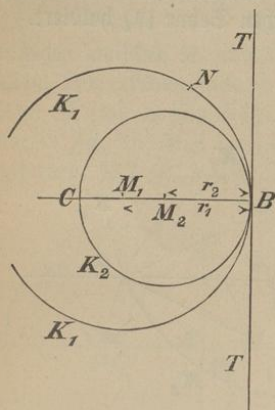


Fig. 98.

XIV. Ist die Centralstrecke $M_1M_2 = c$ gleich der Differenz $r_1 - r_2$ der ungleichen Halbmesser, so haben die excentrischen Kreise bloß einen Punkt B , Fig. 98, gemein. Vergl. V.

Weil $M_1M_2 = r_1 - r_2 < r_1$ ist, so liegt M_2 innerhalb K_1 (Fr. 82). Macht man nun in der Centralen von M_1 nach M_2 hin $M_1B = r_1$ und dann von B aus rückwärts $BM_2 = r_2$, so liegt B auf den beiden, aus

M_1 und M_2 mit den Halbmessern r_1 und r_2 geschlagenen Kreisen. Unter allen Punkten in K_1 liegt aber B am nächsten an M_2 (Fr. 91 XV. und XVI.); weil nun B auf K_2 liegt, so müssen alle anderen Punkte (z. B. N) des Kreises K_1 außerhalb K_2 liegen.

XV. In XIII. (Fig. 97) berühren sich die Kreise K_1 und K_2 von außen, in XIV. (Fig. 98) von innen.

XVI. Ist die Centralstrecke c größer als die Summe der Halbmesser, so haben die Kreise K_1 und K_2 keinen Punkt gemein, vielmehr liegt jeder Kreis ganz außerhalb des anderen.

Trägt man nämlich in Fig. 99 auf M_1M_2 die Strecke $M_2A = r_2$ von M_2 aus und die Strecke $M_1B = r_1$ von M_1 aus auf,

so liegt der Punkt B von A aus nach M_1 hin um das Stück AB entfernt, um welches $M_1 M_2 = c$ die Summe $r_1 + r_2$ übertrifft. A liegt also außerhalb K_1 ; jeder andere Punkt P von K_2 ist aber noch weiter von M_1 entfernt, wie A (Fr. 91 XV. und XVI.), liegt also ebenfalls außer K_1 .

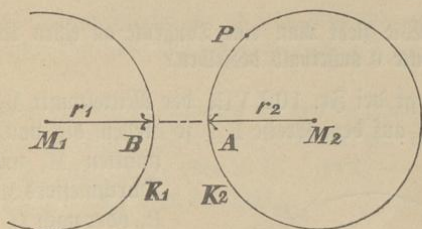


Fig. 99.

XVII. Ist die Centralstrecke c kleiner als die Differenz der ungleichen Halbmesser $r_1 > r_2$, so haben die Kreise keinen Punkt gemein, vielmehr liegt der eine Kreis K_2 ganz innerhalb des anderen K_1 .

Da $c = M_1 M_2 < r_1 - r_2$ und deshalb $M_1 M_2 + r_2 < r_1$ (Fr. 20 IX.) ist, so liegt M_2 innerhalb K_1 (Fr. 82). Verlängert man nun in Fig. 100 $M_1 M_2$ um $M_2 C = r_2$, so liegt C auf K_1 ; da $M_1 C = M_1 M_2 + r_2 < r_1$, liegt auch C innerhalb K_1 ; alle anderen Punkte (z. B. N) des Kreises K_2 liegen aber wegen Fr. 91 XV. und XVI. noch näher an M_1 , als C, und liegen deshalb ebenfalls innerhalb K_1 . Ob K_2 die Centrale zum zweiten Male zwischen M_2 und M_1 , oder jenseits M_1 schneidet, ist dabei gleichgültig.

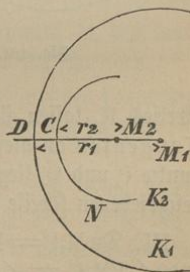


Fig. 100.

XVIII. Aus XI. gelangt man zu noch einer Lösung der in Fr. 89 gestellten Aufgabe. Schlägt man nämlich aus zwei

beliebigen Punkten M_1 und M_2 des Kreises K , Fig. 96, mit demselben Halbmesser $r_1 = M_1Q = M_2Q = r_2$ zwei Kreise K_1 und K_2 , welche sich in zwei Punkten P und Q schneiden (VII.), dann halbiert PQ die Sehne M_1M_2 von K senkrecht in E (XI.); deshalb geht PQ durch den Mittelpunkt M von K (Zr. 90 X.) und M liegt in der Mitte des Durchmessers UN (Zr. 48 II.).

103. Wie zieht man eine Tangente an einen Kreis K_1 von einem Punkte C außerhalb desselben?

I. Liegt bei Zr. 102 VII. der Mittelpunkt M_1 (Fig. 94 und 101) auf dem Kreise K_2 , so stehen die von den Endpunkten M_1 und C des

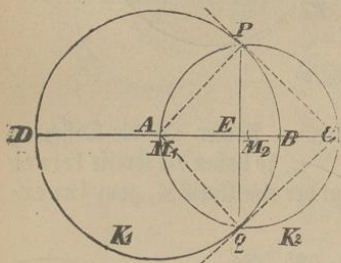


Fig. 101.

Durchmessers M_1M_2C nach P , oder nach Q gezogenen Sehnen aufeinander senkrecht (Zr. 96 III.); daher sind CP und CQ Tangenten (Zr. 83 V.) an den Kreis K_1 in den Endpunkten P und Q der den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Sehne PQ .

II. Von jedem Punkte C außerhalb eines

Kreises K_1 lassen sich daher stets zwei, aber nur zwei Tangenten an diesen Kreis ziehen (I.). Die Berührungspunkte P und Q liegen auf dem über CM_1 als Durchmesser beschriebenen Kreise K_2 .

III. Da $M_1P = M_1Q$ (Zr. 48 III.), $M_1C = M_1C$ (Zr. 20 I.) und $\angle PM_1C = \angle QM_1C$ (Zr. 102 IX.), so ist $\triangle PM_1C \cong \triangle QM_1C$ (Zr. 80 II.), und nach Zr. 54 III. und 67 II. sind daher nicht nur:

IV. die Bögen PB und QB , sowie

V. die Strecken CP und CQ der beiden Tangenten gleichgroß, sondern letztere machen

VI. auch gleiche Winkel PCM_1 und QCM_1 mit der Centralen CM_2M_1 . Daher

VII. liegt der Mittelpunkt M_1 eines Kreises K_1 , welcher zwei sich unter dem hohlen $\angle \text{PCQ}$ schneidende Gerade PC und QC berührt, in der den $\angle \text{PCQ}$ halbierenden Geraden CD , und

VIII. aus jedem Punkte M_1 in CD läßt sich ein Kreis ziehen, welcher CP und CQ berührt (Fr. 74 XVIII. und 83 V.).

IX. Wegen Fr. 71 VI. machen die beiden Tangenten CP und CQ denselben spitzen Winkel mit einander, wie die beiden Halbmesser M_1P und M_1Q ; oder es ist $\angle \text{PCQ} + \angle \text{PM}_1\text{Q} = 180^\circ$ (Fr. 72 III., oder 96 VIII.).

104. Welche Sätze gelten von dem Tangendendreieck und dem Tangentenviereck?

I. Tangendendreieck und Tangentenviereck (Dreieck und Viereck um den Kreis) heißt ein Dreieck, bezw. ein Viereck, dessen Seiten Tangenten desselben Kreises sind.

II. Wegen Fr. 103 VI. und VIII. müssen sich die drei Halbierungslinien AM_0 , BM_0 , CM_0 (Fig. 102 S. 108) der Winkel eines Dreiecks ABC in dem Mittelpunkte M_0 des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises K_0 schneiden.

III. Es giebt daher zu jedem $\triangle \text{ABC}$ einen inneren Berührungskreis K_0 , welchem das Dreieck umschrieben ist. Vergl. XIII.

IV. Es giebt aber zu jedem Dreieck auch noch drei äußere Berührungskreise, welche je eine Seite desselben und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berühren. Die Mittelpunkte M_1 , M_2 und M_3 dieser drei äußeren Berührungskreise K_1 , K_2 und K_3 (Fig. 102 S. 108) des Dreiecks ABC findet man durch Halbieren der Außenwinkel desselben (Fr. 103 VII.).

V. Die Centrale von je zwei äußeren Berührungskreisen läuft deshalb durch einen Eckpunkt des Dreiecks (Fr. 43).

VI. Jeder Eckpunkt des Dreiecks ABC liegt in der Verlängerung einer durch den Mittelpunkt M_0 des eingeschriebenen

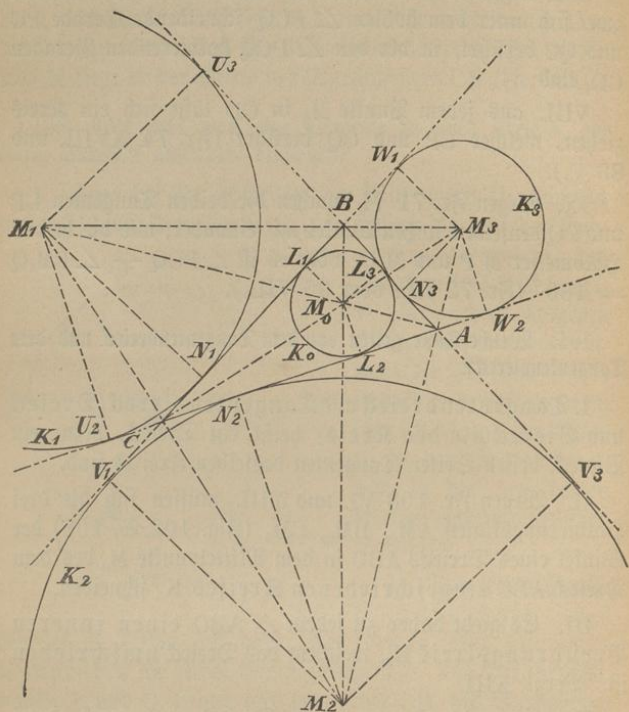


Fig. 102.

und den Mittelpunkt eines äußeren Berührungskreises gelegten Geraden (Fr. 103 VII.); denn es liegt z. B. sowohl M_0 als M_2 auf der den $\angle ABC$ halbierenden Geraden.

VII. Die Seiten des Mittelpunktsdreiecks $M_1M_2M_3$ (V.) stehen auf den Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks ABC senkrecht; denn es ist z. B. in Fig. 102:

$$\begin{aligned}
 \angle M_0AB &= \angle M_0AC \text{ (II.)} \\
 \angle M_3AB &= \frac{1}{2} \angle W_2AB = \frac{1}{2} \angle V_3AC \\
 &= \angle M_2AC \text{ (IV. und Fr. 42 II.)} \\
 \hline
 \angle M_0AM_3 &= \angle M_0AB + \angle M_3AB = \angle M_0AC + \angle M_2AC \\
 &= \angle M_0AM_2 \text{ (Fr. 20 VIII.)}
 \end{aligned}$$

$M_0A \perp M_3M_2$ (Fr. 37 I. und IV.)

VIII. Mit Hilfe von Fr. 103 V. läßt sich leicht herausbringen, daß der Eckpunkt B des $\triangle ABC$ mit den drei Seiten a, b, c von den Berührungspunkten L_1, N_1, V_1, W_1 und L_3, U_3, V_3, N_3 der Seiten a und c mit den vier Berührungskreisen absteht um:

$$\begin{aligned}
 BL_1 &= b_0 = \frac{1}{2} (a - b + c) = BL_3; \\
 BN_1 &= b_1 = \frac{1}{2} (a + b - c) = BU_3; \\
 BV_1 &= b_2 = \frac{1}{2} (a + b + c) = BV_3; \\
 BW_1 &= b_3 = \frac{1}{2} (-a + b + c) = BN_3.
 \end{aligned}$$

IX. Im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) schneiden sich wegen Fr. 103 VIII. die vier Halbierungslinien der Winkel in dem Mittelpunkt M des Kreises, um den es beschrieben ist.

X. Im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen. Vergl. Fr. 133 V.

Sind nämlich U, V, X, J die vier Berührungspunkte, so ist:

$$\left. \begin{aligned}
 AU &= AJ \\
 UB &= BV \\
 XC &= VC \\
 XD &= JD
 \end{aligned} \right\} \text{ (Fr. 103 V.)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 AU + UB + XC + XD &= AB + CD \\
 AJ + JD + BV + VC &= AD + BC
 \end{aligned} \right\} \text{ (Fr. 20 II.)}$$

$$AB + CD = AD + BC \text{ (Fr. 20 VIII. und IV.)}$$

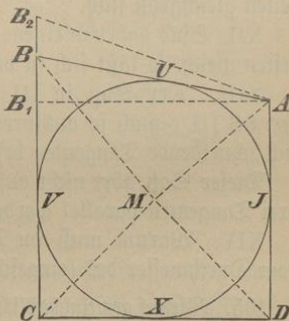


Fig. 103.

XI. Zieht man im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) von einem Eckpunkte A die Strecken AB_1 und AB_2 nach einem Punkte B_1 und B_2 in einer Gegenseite BC und in deren Verlängerung, so ist:

$$\begin{aligned} AB_1 &> AB - BB_1 \text{ (Fr. 76 II.)} \\ AB_1 + DC &> AB + DC - BB_1 \text{ (Fr. 20 IX.)} \\ &> AD + CB - BB_1 \text{ (X.)} \\ &> AD + CB_1 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} AB_2 &< AB + BB_2 \\ AB_2 + DC &< AB + DC + BB_2 \\ &< AD + CB + BB_2 \\ &< AD + CB_2. \end{aligned}$$

Die Tangente AB des AD, DC und CB berührenden Kreises ist also die einzige Gerade, welche sich von A nach einem Punkte in CB ziehen läßt und welche zugleich mit AD, DC, CB ein Viereck liefert, worin die Summen der Gegenseiten gleichgroß sind.

XII. Sind daher in einem Viereck die Summen der Gegenseiten gleich, so läßt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

XIII. Der Satz in III. läßt sich (als Seitenstück zu Fr. 88 III.) auch so aussprechen: Der Kreis ist durch drei sich schneidende Tangenten bestimmt.

Dieser Satz hört nicht auf zu gelten, wenn zwei von den drei Tangenten parallel werden.

XIV. Warum muß im Tangententrapez die Höhe stets dem Durchmesser des (eingeschriebenen) Kreises gleichen?

105. Wieviel gemeinschaftliche Tangenten besitzen zwei Kreise?

I. Liegen zwei gleiche Kreise außer einander (Fr. 102 XVI.), so berühren die zu beiden Seiten der Centralen durch einen im Abstände eines Halbmessers r von der Centralen liegenden Punkt gezogenen Parallelen der Centralen beide Kreise (Fr. 74 IX., 72 VII., 83 V.).

II. Liegen zwei ungleiche Kreise außer einander (Fr. 102 XVI.), so berühren bei $r_1 > r_2$ die beiden Parallelen zu den im Abstände $r_1 - r_2$ von M_1 durch M_2 gezogenen Geraden beide Kreise.

Ist nämlich in Fig. 104 $M_1F = r_1 - r_2$ und $\angle M_1LU = \angle M_1FM_2 = 90^\circ$ (Fr. 96 III., Fr. 83 X.), so wird die in M_2 errichtete Senkrechte auf M_2F auch LU in Z senkrecht schneiden (Fr. 72 III.) und $M_2Z = FL = r_2$ sein (Fr. 72 VI.), LU also in Z auch den Kreis um M_2 berühren (Fr. 83 V.).

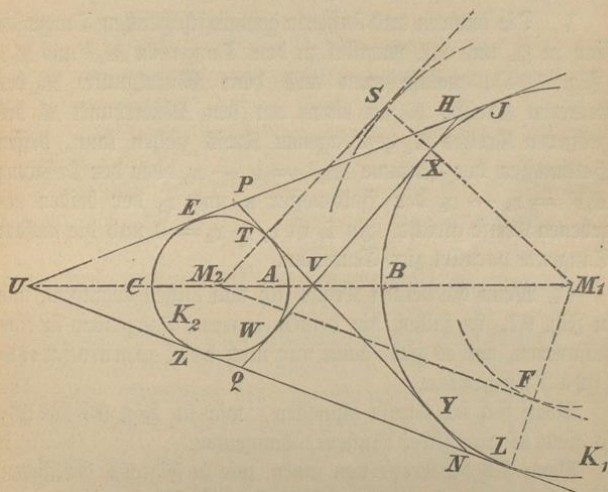


Fig. 104.

III. Liegen zwei gleiche oder ungleiche Kreise außer einander (Fr. 102 XVI.), so berühren die beiden Parallelen zu den im Abstände $r_1 + r_2$ von M_1 durch M_2 gezogenen Geraden beide Kreise.

Ist in Fig. 104 $M_1S = r_1 + r_2$ und $\angle M_2SM_1 = 90^\circ = \angle QXM_1$, so wird ganz wie in II. XQ auch in W den Kreis um M_2 berühren (Fr. 83 V.).

IV. Bei zwei Kreisen K_1 und K_2 (Fig. 104), welche außer einander liegen, giebt es zwei Paar gemeinschaftliche Tangenten.

Bei ungleichen Halbmessern schneidet sich jedes Paar in einem Punkte der Centralen; der eine Schnittpunkt V heißt der innere, der andere U der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise (vergl. Fr. 151); der kleine Kreis liegt zwischen U und dem großen. Bei gleichen Halbmessern rückt U in unendliche Entfernung.

V. Die inneren und äußeren gemeinschaftlichen Tangenten sind in II. und III. parallel zu den Tangenten M_2S und M_2F (Fig. 104), welche man aus dem Mittelpunkt M_2 des kleineren Kreises K_2 an einen um den Mittelpunkt M_1 des größeren Kreises K_1 geschlagenen Kreis ziehen kann, dessen Halbmesser der Summe $M_1S = r_1 + r_2$, oder der Differenz $M_1F = r_1 - r_2$ der Halbmesser r_1 und r_2 der beiden gegebenen Kreise gleicht. In I. ist $r_1 - r_2 = 0$ und die äußere Tangente parallel zur Centralen.

VI. Wenn die beiden Kreise sich von außen berühren, wie in Fig. 97, so fallen die beiden inneren Tangenten in eine zusammen, und es giebt dann nur noch drei gemeinschaftliche Tangenten.

Wenn sich die Kreise schneiden, wie in Fig. 93 bis 95, so giebt es nur zwei (äußere) Tangenten.

Wenn sich die Kreise von innen, wie in Fig. 98, berühren, so giebt es nur eine gemeinschaftliche Tangente.

Liegt endlich der eine Kreis innerhalb des andern, wie in Fig. 92 und 100, so giebt es gar keine gemeinschaftliche Tangente.

VII. Zieht man die vier gemeinschaftlichen Tangenten, so sind die zwischen den Berührungspunkten gelegenen Abschnitte EK und ZL der äußeren, und ebenso TY und WX der inneren Tangenten einander gleich. Denn wegen Fr. 103 V. und 20 VIII. ist:

$$\begin{aligned} &UJ - UE = UL - UZ, \quad \text{d. h. } EJ = ZL \\ \text{und} \quad &VT + VY = VW + VX, \quad \text{d. h. } TY = WX. \end{aligned}$$

VIII. Ebenso sind die zwischen den äußeren Tangenten gelegenen Stücke PN und QH der inneren Tangenten gleich.

Es ist ja

$$\begin{aligned} & \triangle UVP \cong \triangle UVQ \\ \text{und} & \triangle UVN \cong \triangle UVH \end{aligned} \quad (\text{Fr. 80 V., Fr. 103 VI.}),$$

und daraus ergibt sich:

$$PV + VN = QV + VH \quad (\text{Fr. 67 II. und 20 VIII.}).$$

$$PN = QH \quad (\text{Fr. 20 II.}).$$

IX. Weiter ist nach Fr. 103 V.:

$$NP = NT + TP = NZ + EP$$

$$NP = NY + YP = NL + PJ$$

$$2NP = ZL + EJ = 2ZL \quad (\text{Fr. 20 VIII.})$$

$$QH = PN = ZL = EJ.$$

X. Endlich ist nach Fr. 103 V. noch $NT = NZ$ oder:

$$PN - PT = ZL - LN \quad (\text{Fr. 20 II.})$$

$$PN = ZL \quad (\text{VI.})$$

$$\begin{aligned} & PE = PT = LN = NY \\ & WX = TY = PH = QN \end{aligned} \quad (\text{Fr. 20 VIII.}).$$

XI. Eine wiederholte Anwendung der vorstehenden Sätze gestatten die vier Berührungskreise des Dreiecks ABC in Fig. 102. Berühren der eingeschriebene Kreis um M_0 und die drei äußeren Berührungskreise um M_1 , M_2 und M_3 die nach Bedarf verlängerten Seiten $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ des $\triangle ABC$ in L_1 , L_2 und L_3 , in N_1 , U_2 und U_3 , in V_1 , N_2 und V_3 , in W_1 , W_2 und N_3 , ist ferner die Länge der Strecken:

$$AL_3 = AL_2 = a_0$$

$$BL_1 = BL_3 = b_0$$

$$CL_2 = CL_1 = c_0,$$

$$AN_2 = AV_3 = a_2$$

$$AN_3 = AW_2 = a_3$$

$$BN_3 = BW_1 = b_3$$

$$BN_1 = BU_3 = b_1$$

$$CN_1 = CU_2 = c_1,$$

$$CN_2 = CV_1 = c_2,$$

und setzt man $s = a_0 + b_0 + c_0 = \frac{1}{2}(a + b + c)$, so

findet man leicht, daß:

$$a = b_0 + c_0 = b_1 + c_1;$$

$$s - a = a_0$$

$$b = c_0 + a_0 = c_2 + a_2;$$

$$s - b = b_0$$

$$c = a_0 + b_0 = a_3 + b_3;$$

$$s - c = c_0$$

ist; nach VII. ist aber auch:

$$\begin{aligned} L_2 U_2 &= L_3 U_3 & \text{oder } c_0 + c_1 &= b_0 + b_1 \\ L_3 V_3 &= L_1 V_1 & a_0 + a_2 &= c_0 + c_2 \\ L_1 W_1 &= L_2 W_2 & b_0 + b_3 &= a_0 + a_3. \end{aligned}$$

Abdiert man nun je eine dieser drei letzteren Gleichungen zu je einer der drei vorhergehenden, so erhält man nach Fr. 20 VIII.:

$$\begin{aligned} c_0 &= b_1 = a_2 \\ a_0 &= c_2 = b_3 \\ b_0 &= a_3 = c_1. \end{aligned}$$

Da endlich $b_0 = c_1$, so liegen die Berührungspunkte L_1 und N_1 des eingeschriebenen und des umschriebenen Berührungskreises in gleicher Entfernung von der Mitte der Seite a . Ähnlich ist's bei b und c . — Vergl. Fr. 159 XVI. und XVII.

XII. Für den Punkt C in Fig. 102 ist nach Fr. 104 VIII.

$$\begin{aligned} CW_1 &= CW_2 = CB + BW_1 = a + b_3 = a + \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{a + b + c}{2} = s. \end{aligned}$$

Ebenso ist $BV_1 = BV_3 = s$
und $AU_2 = AU_3 = s.$

Viertes Kapitel.

Vier Gerade in derselben Ebene. Das Viereck. Die Projektion einer Strecke. Die regelmäßigen Vielecke.

106. Wie viel Fälle lassen sich in Bezug auf die Richtung von vier Geraden in einer Ebene unterscheiden?

Bezüglich der Richtung der vier Geraden G_1, G_2, G_3 und G_4 in derselben Ebene sind fünf Fälle möglich:

I. Alle vier Gerade haben dieselbe Richtung (Fig. 105); dann giebt es keinen Schnittpunkt (Fr. 56 II.).

II. Drei Gerade G_1 , G_2 und G_3 (Fig. 106) haben gleiche Richtung, die vierte G_4 eine andere; dann gibt es drei Schnittpunkte A, B, C (Fr. 56 III.).

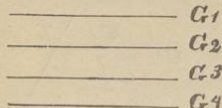


Fig. 105.

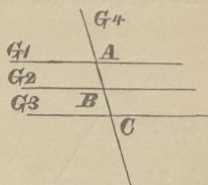


Fig. 106.

III. Zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 107) haben gleiche Richtung, die dritte und vierte G_3 und G_4 haben ebenfalls gleiche, aber eine andere Richtung, als die beiden ersten.

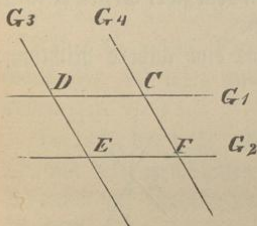


Fig. 107.

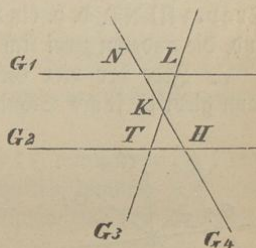


Fig. 108.

Dann gibt es vier Schnittpunkte C, D, E und F (Fr. 56 III.), und das zwischen ihnen liegende Viereck CDEF (Fr. 65 II. und I.), in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm.

IV. Zwei Gerade G_1 und G_2 (Fig. 108 bis 110) haben gleiche Richtung, die dritte G_3 und die vierte G_4 andere und zwar unter sich verschiedene Richtungen. Dann gibt es fünf Schnittpunkte H, T, K, L und N, und vier davon liegen in G_1 und G_2 .

Wenn der fünfte K, wie in Fig. 108, zwischen G_1 und G_2 liegt und wenn er mit den beiden in G_1 (Fig. 109), oder in G_2 zusammenfällt, so entsteht kein neues oder besonderes geometrisches Gebilde*).

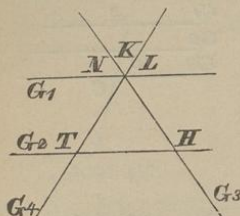


Fig. 109.

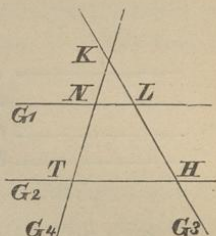


Fig. 110.

Liegt dagegen K außerhalb G_1 und G_2 (Fig. 110), so entsteht zwischen den Schnittpunkten H, L, N und T ein Trapez HLNT, d. h. ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel sind, die anderen zwei sich schneiden.

V. Jede der vier Geraden hat eine andere Richtung; dann giebt es sechs Schnittpunkte.

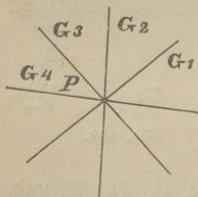


Fig. 111.

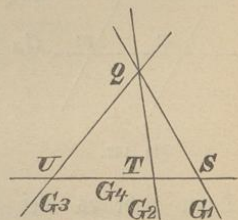


Fig. 112.

Fallen sämtliche Schnittpunkte in einen P zusammen, (Fig. 111), oder fallen deren drei in einen Punkt Q zusammen, wie in Fig. 112, so entsteht kein neues geometrisches Gebilde.

*) Das Gebilde NLKHTKN ist ja nach Kr. 65 I. und IV. keine ebene Figur. Die Sätze über solche Figuren lassen sich entsprechend den Sätzen in Kr. 108 bis 111 leicht aufstellen.

Fällt dagegen kein Schnitt mit dem andern zusammen, so liegen zwischen den sechs Schnittpunkten zwei Trapezoide XVTY und XSTU (Fig. 113), d. h. zwei Vierecke, in denen keine Seite der andern parallel ist.

VI. Es giebt also rücksichtlich des Parallelismus der Seiten bloß drei Arten von Vierecken: Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide (III. bis V.).

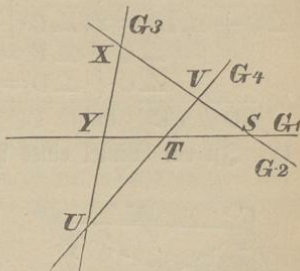


Fig. 113.

Anm. Den Namen „Trapezoid“ hat man eigentlich nur zu benutzen, wenn man ausdrücklich hervorheben will, ein Viereck sei kein Parallelogramm und kein Trapez. Sonst könnte man sagen: Unter den Vierecken giebt es zwei besondere Arten: Parallelogramme und Trapeze.

VII. In jedem Viereck beträgt die Winkelsumme vier rechte (Fr. 72 III.) und lassen sich nur zwei Diagonalen ziehen (Fr. 65 VI.).

Die in Fr. 96 VIII., 97 III. und IV. sowie die in Fr. 104 I., IX. bis XII. erwähnten Eigenschaften kommen nicht allen Vierecken zu, sondern nur den Sehnen- und den Tangentenvierecken.

107. Wie sind die Winkel der Parallelogramme beschaffen?

I. Die Summe von je zwei benachbarten Winkeln C und F (Fig. 114 S. 118) des Parallelogramms beträgt 180° (Fr. 62 I. 3.).

II. Je zwei Gegenwinkel des Parallelogramms sind gleich.

Da in Fig. 114 $\angle C + \angle F = 180^\circ$ und $\angle F + \angle E = 180^\circ$ ist (I.), so muß $\angle C + \angle F = \angle F + \angle E$, d. h. $\angle C = \angle E$ sein (Fr. 20 V. und VIII.).

III. Ist in einem Viereck jeder Winkel seinem Gegenwinkel gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Ist nämlich in Fig. 114

$$\begin{aligned} \angle C &= \angle E \quad \text{und} \quad \angle F = \angle D, \text{ so ist:} \\ \angle C + \angle F + \angle E + \angle D &= 4 \mathcal{R} \text{ (Zr. 106 VII.)} \\ 2(\angle C + \angle D) &= 2(\angle C + \angle F) = 4 \mathcal{R} \text{ (Zr. 20 IV.)} \\ \angle C + \angle F &= 2 \mathcal{R} \\ \angle C + \angle D &= 2 \mathcal{R} \end{aligned} \quad \text{(Zr. 20 VIII.);}$$

$$CD \parallel FE \quad \text{und} \quad CF \parallel DE \text{ (Zr. 62 II. 3.).}$$

IV. Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, so sind alle rechte; ist einer schief, so sind alle schief.

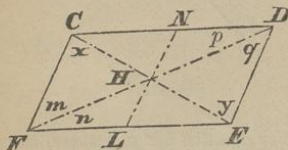


Fig. 114.

Ist in Fig. 114 $\angle F$ spitz, so ist es auch $\angle D$ (II.), während $\angle C$ und $\angle E$ stumpf sind (I.).

Wäre dagegen $\angle F$ ein rechter, so müßten auch $\angle D$ (II.) und ebenso $\angle C$ und $\angle E$ (I.) rechte sein.

V. Rückfichtlich der Winkel giebt es also nur zwei Arten Parallelogramme (IV.):

Ein Parallelogramm mit lauter rechten Winkeln heißt ein rechtwinkeliges, eins mit vier schiefen Winkeln heißt ein schiefwinkeliges.

108. Welche Sätze handeln von den Seiten des Parallelogramms?

I. Jede Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Hälften.

In Fig. 114 ist nämlich

$$\begin{aligned} FE &\parallel CD \text{ (Vor. u. Zr. 106 III.)} \\ \angle n &= \angle p \text{ (Zr. 62 I. 2.)} \\ \angle E &= \angle C \text{ (Zr. 107 II.)} \\ FD &= FD \text{ (Zr. 20 I.)} \\ \triangle FDE &\cong \triangle DFC \text{ (Zr. 80 V.).} \end{aligned}$$

II. Daher läßt sich jedes Dreieck FDE (Fig. 114) als die Hälfte eines Parallelogramms FEDC betrachten, welches

man erhält, wenn man durch die Endpunkte derselben Dreiecksseite FD die Parallelen FC und DC zu den beiden anderen Seiten zieht.

III. Im Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten gleich.

Weil nämlich $\triangle FDE \cong \triangle DFC$ (I.), ist auch $DE = FC$ und $FE = DC$ (Fr. 67 II.).

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: Parallele Strecken zwischen Parallelen sind gleichlang.

IV. Sind in einem ebenen Viereck CDEF (Fig. 114) je zwei Gegenseiten gleich ($FC = ED$ und $FE = CD$), so ist es ein Parallelogramm. Vergl. VIII.

Da nämlich die beiden $\triangle FDE$ und DFC nach Fr. 80 I. kongruent sind, so ist nach Fr. 67 II.:

$$\frac{\angle m = \angle q \quad \text{und} \quad \angle n = \angle p,}{FC \parallel ED \quad \text{und} \quad FE \parallel CD \text{ (Fr. 62 II. 2.)}.}$$

V. Ein ebenes Viereck CDEF (Fig. 114), in dem ein Paar Gegenseiten CF und DE parallel und gleich ($\parallel$) sind, ist ein Parallelogramm (vergl. Fr. 65 und Anmerkung zu Fr. 106 IV.).

Bew.

$$\begin{array}{l} CF \parallel DE \text{ (Vor.)} \\ \angle m = \angle q \text{ (Fr. 62 I. 2.)} \\ CF = ED \text{ (Vor.)} \\ FD = DF \text{ (Fr. 20 I.)} \\ \hline \triangle CFD \cong \triangle EDF \text{ (Fr. 80 II.)} \\ \angle p = \angle n \text{ (Fr. 67 II.)} \\ \hline FE \parallel CD \text{ (Fr. 62 II. 2.)}. \end{array}$$

VI. Wegen III. kann es auch rücksichtlich der Größe der Seiten nur zwei Arten Parallelogramme geben, nämlich gleichseitige, in denen alle vier Seiten gleichgroß sind, und ungleichseitige, in denen bloß die Gegenseiten paarweise gleich sind.

VII. Daher giebt es (wegen VI. und Fr. 107 V.) überhaupt nur vier Arten von Parallelogrammen; nämlich:

das Quadrat KMZT (Fig. 115) ist rechtwinkelig und gleichseitig;

das Rechteck SQUV (Fig. 116) ist rechtwinkelig und ungleichseitig;

die Raute oder der Rhombus ABXY (Fig. 117) ist schiefwinkelig und gleichseitig;

das Rhomboid FCDE (Fig. 118) ist schiefwinkelig und ungleichseitig.

Anm. Der Name „Rhomboid“ wird entbehrlich, wenn man sich nicht die Möglichkeit erhalten will, ein Parallelogramm kurz zu nennen, das weder Quadrat, noch Rechteck, noch Rhombus ist.

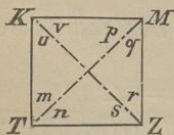


Fig. 115.

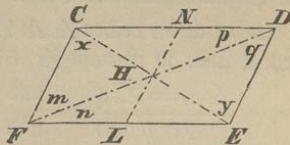


Fig. 118.

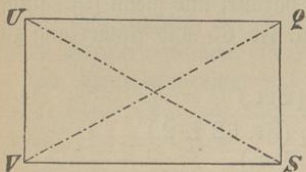


Fig. 116.

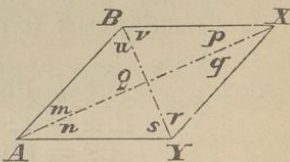


Fig. 117.

VIII. Ein Viereck mit vier gleichen Seiten ist (nach IV.) ein Parallelogramm und zwar entweder ein Quadrat, oder ein Rhombus (VII.).

IX. Schneidet man in einem Parallelogramm CDEF (Fig. 119), von derselben Seite FE her, auf zwei Gegenseiten gleiche Strecken FT und EK ab, so ist die Verbindungsgerade TK den Seiten FE und CD parallel (V.), weil $FT \parallel EK$.

X. Verbindet man die Mitten N und L (Fig. 118) zweier Gegenseiten, so ist die Verbindungsgerade LN den anderen Seiten FC und DE parallel (III. und V.).

XI. Zieht man in einem Parallelogramm FCDE (Fig. 119) eine Parallele TK zu einer Seite FE, so ist $TK = FE$ (III.).

XII. Fällt man von zwei Punkten U und Q (Fig. 120) einer Geraden UQ Senkrechte UV und QS auf eine zu UQ parallele Gerade VS, so ist auch $UV \parallel QS$ (Fr. 57 II.).

Macht man dagegen von Q und V aus $QS \perp VS$ und $VU \perp UQ$, so ist wiederum $UV \parallel QS$ (Fr. 62 V. und II. 3.).

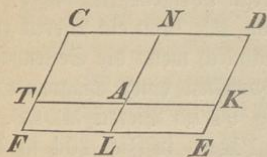


Fig. 119.

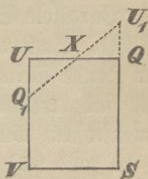


Fig. 120.

XIII. Da demnach (in beiden Fällen in XII.) alle Senkrechten zwischen zwei Parallelen parallel sind, so sind alle Senkrechten zwischen zwei Parallelen auch gleichlang (III.; vergl. auch Fr. 72 VI.).

Wegen Fr. 74 IX. sind also alle Punkte der einen Parallelen von der anderen gleichweit entfernt, oder noch kürzer: zwei Parallele haben überall gleichen Abstand von einander.

Den Abstand zweier Parallelen darf man daher im Parallelogramm und im Trapez als Höhe in Bezug auf diese Parallelen bezeichnen. Vergl. Fr. 64 III.

Die Parallele G_2 zu G_1 ist der geometrische Ort (vergl. Fr. 74 XVII.) eines in einem vorgeschriebenen Abstände von G_1 liegenden Punktes.

XIV. Zwei Punkte Q_1 und U_1 einer Geraden Q_1U_1 , Fig. 120, liegen in ungleicher Entfernung von einer zu Q_1U_1 nicht parallelen und Q_1U_1 nicht in der Mitte von Q_1U_1 .

schneidenden Geraden VS. Zieht man nämlich durch einen Punkt X in Q.U, die Gerade UQ // VS, so ist nach XII. und Fr. 20 III.:

$$U,S > QS = US > Q,V.$$

XV. Zwei Gerade UQ und VS sind parallel, wenn sich zwischen ihnen zwei gleiche Senkrechte ziehen lassen (XIII. und XIV.).

XVI. Mit Fr. 81 läßt sich leicht beweisen, daß in XIII. bis XV. anstatt „Senkrechte“ und „Entfernung“ gesetzt werden darf „Parallele Strecken“. Vergl. übrigens III. bis V.

XVII. Auch abweichend von III. kann ein Viereck zwei Paar gleiche Seiten besitzen, nämlich wenn die Seitenpaare gleich sind, welche in den Endpunkten einer Diagonale zusammenstoßen, wie z. B. in Fig. 91 im Viereck MDEC, in Fig. 93 (und 95) im Viereck M₁PM₂Q, in Fig. 104 in den Vierecken UPVQ und UEM₂Z.

Die Eigenschaften solcher Vierecke, welche man gleichschenkelige Vierecke nennt, sind in Fr. 102 und 105 schon mit erörtert worden.

Ein solches Viereck würde nach Fr. 106 VI. zu den Trapezoiden zu rechnen sein, sofern die Seiten des einen Paares größer sind, als die des andern; sind dagegen alle vier Seiten unter sich gleich, so ist das Viereck ein Quadrat, oder ein Rhombus (vergl. VI. und VII.).

Anm. Hätte man den Namen „Rhomboid“ noch frei (vergl. VII. Anm.), so könnte man ein Viereck, in welchem die an den Enden der einen Diagonale an einander stoßenden Seiten gleich, die an denen der andern Diagonale sich treffenden ungleich sind, ein Rhomboid nennen.

109. Welche Stücke bestimmen ein Parallelogramm?

I. Aus Fr. 106 III. in Verbindung mit Fr. 57 I. und Fr. 26 folgt, daß ein Parallelogramm durch einen Winkel und die zwei denselben einschließenden Seiten bestimmt ist.

II. Zur Bestimmung des Rechtecks und der Raute reichen zwei Stücke aus (I. und Fr. 108 VII.); bei ersterem die beiden Seiten, bei letzterem eine Seite und ein Winkel.

III. Das Quadrat ist bereits durch eine Seite bestimmt.

110. Was gilt von den Diagonalen des Parallelogramms?

I. Wird ein Winkel B eines Parallelogramms ABXY (Fig. 117) durch die Diagonale BY halbiert, so werden auch die drei anderen Winkel durch die Diagonalen BY und AX halbiert, und zugleich ist das Parallelogramm gleichseitig.

Ist $\angle u = \angle v$, so muß zunächst auch $\angle s = \angle r$ sein (Fr. 20 IV.), weil ja $\angle s = \angle v$ und $\angle r = \angle u$ ist (Fr. 62 I.). Dann ist aber sofort auch $\angle v = \angle r$ und $\angle u = \angle s$ (Fr. 20 V.), und deswegen weiter:

$$BX = XY = AB = AY \quad (\text{Fr. 74 VI., 108 III.})$$

$$\angle m = \angle p = \angle n = \angle q \quad (\text{Fr. 74 I., 62 I.}).$$

II. In jedem gleichseitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) halbieren die Diagonalen die Winkel (Fr. 74 I. und 62 I.).

III. Die Diagonalen eines Parallelogramms FCDE (Fig. 118) halbieren sich gegenseitig in H (Fr. 67 II.), weil $\triangle CHF \cong \triangle EHD$ (Fr. 80 V.).

IV. Jede durch den Diagonalschnittpunkt H, Fig. 118, gelegte Strecke NL ist in H halbiert und schneidet von den Seiten CD und FE nach C und E hin gleiche Stücke NC und LE ab (Fr. 67 II.), da $\triangle CHN \cong \triangle EHL$ (Fr. 80 V.). Natürlich ist auch $ND = LE$.

Ist dabei $LN \parallel FC$, so wird $FL = LE = \frac{1}{2} FE$ (Fr. 108 III. und Fr. 20 V.).

V. Ein Viereck, dessen Diagonalen CE und FD, Fig. 118, sich gegenseitig halbieren, ist ein Parallelogramm. Aus $\triangle CHF \cong \triangle EHD$ (Fr. 80 II., Fr. 42 II.) folgt ja $\angle x = \angle y$ (Fr. 67 II.) und endlich $CF \parallel DE$ (Fr. 62 II.), sowie aus der Kongruenz der $\triangle\triangle CHD$ und EHF in gleicher Weise $CD \parallel FE$.

VI. In jedem rechtwinkligen Parallelogramm (im Quadrat TKMZ und im Rechteck SQUV, Fig. 115 und 116) sind die Diagonalen gleichgroß, weil (nach Fr. 81 I.):

$$\triangle KTZ \cong \triangle MZT \quad \text{und} \quad \triangle QSV \cong \triangle UVS.$$

VII. Ein Parallelogramm mit gleichen Diagonalen $QV = US$, Fig. 116, ist rechtwinkelig; denn dann ist noch $VS = SV$, $QS = UV$ (Zr. 108 III.), deshalb $\triangle QVS \cong \triangle USV$ (Zr. 80 I.), dann $\angle QSV = \angle UVS$ (Zr. 67 II.), oder wegen Zr. 107 I. $\angle QSV = 90^\circ = \angle UVS$ (Zr. 20 VIII.).

VIII. In jedem gleichseitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) stehen die Diagonalen auf einander senkrecht (Zr. 75 V. und VI.); denn jede Diagonale, z. B. BY in Fig. 117, halbiert in dem von der anderen Diagonale AX abgeschnittenen gleichschenkeligen $\triangle ABX$ den Winkel an der Spitze B (II.).

IX. Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen, ist gleichseitig. In Fig. 117 ist ja dann $AQ = XQ$ (III.) und $BQ = BQ$ (Zr. 20 I.), deshalb $\triangle AQB \cong \triangle XQB$ (Zr. 81 I.) und $AB = BX$ (Zr. 67 II.).

111. Welche Sätze über das Trapez sind zu erwähnen?

I. Die Verbindungsgerade SV (Fig. 121) der Mitten S und V der nicht-parallelen Seiten KL und NM eines Trapezes $NKLM$ ist parallel zu den Parallelseiten KL und NM und heißt daher die mittlere Parallele.

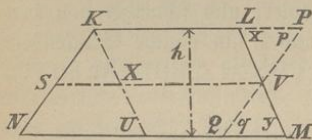


Fig. 121.

Zieht man durch V eine Gerade $PQ \parallel KN$, bis sie die beiden Parallelseiten in P und Q schneidet, so ist nach

Zr. 62 I. $\angle x = \angle y$ und $\angle p = q$, ferner $LV = VM$ (Vor.), folglich $\triangle LVP \cong \triangle MVQ$ (Zr. 80 V.) und $PV = VQ$ (Zr. 67 II.). Nun ist aber nach der Voraussetzung auch $NS = SK$, folglich:

$SV \parallel NQ$ (Zr. 108 X.).

II. Zieht man durch die Mitte S (Fig. 121) der einen nicht-parallelen Seite NK eine Parallele SV zu den Parallelseiten NM und KL , so halbiert dieselbe die andere nicht-parallele Seite LM .

Denn ginge SV nicht durch die Mitte von LM, so müßte sich (wegen I.) durch S noch eine zweite Parallele zu NM ziehen lassen, was nach Fr. 57 I. unmöglich ist.

III. Die mittlere Parallele SV (Fig. 121) ist das arithmetische Mittel (vergl. Fr. 19 III.) aus den beiden Parallelsseiten KL und NM.

Aus der in I. nachgewiesenen Kongruenz der Dreiecke LVP und MVQ folgt auch, daß $LP = QM$ (Fr. 67 II.); nach Fr. 108 III. ist ferner $KP = SV = NQ$, folglich:

$$\begin{aligned} 2SV &= KP + NQ = (KL + LP) + (NM - QM) \\ &= KL + NM; \quad SV = \frac{KL + NM}{2}. \end{aligned}$$

IV. Die mittlere Parallele SV (Fig. 121) halbiert auch jede durch den Endpunkt K der einen nicht-parallelen Seite KN zu der anderen LM parallel gezogene Strecke KU, weil nach Fr. 108 III. $KX = LV$ und $XU = VM$, und nach I. $LV = VM$ ist, daher auch $KX = XU$ (Fr. 20 IV.).

V. Wäre in Fig. 121 $\angle N = \angle y$, machen also die zwischen den Parallelen KL und NM gezogenen Strecken KN und LM nach entgegengesetzten Seiten gleiche Winkel mit NM, so muß $KL = NM$ sein.

Denn dann ist auch $\angle K = \angle L$ (Fr. 62 I.)

und die aus K und L auf NM gefällten Senkrechten schneiden von NKLM kongruente Dreiecke ab (Fr. 108 XIII. und 80 V.).

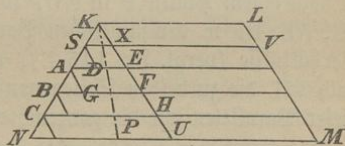


Fig. 122.

Anm. Dieser Satz läßt sich als ein Seitenstück neben Fr. 108 IV. stellen und bildet auch eine Ergänzung zu Fr. 108 III. Andererseits könnten in einem Viereck auch ein Paar benachbarte Seiten gleich sein (vergl. Fr. 108 XVII.).

VI. Teilt man eine Seite KN (Fig. 122) eines Dreiecks NKU, oder die eine nicht-parallele Seite KN eines Trapezes NKLM in n gleiche Teile und zieht durch die Teilspunkte

Parallelen zu der Dreiecksseite NU, bezw. zu den Parallelseiten KL und NM, so teilen diese Parallelen auch die dritte Dreiecksseite KU und die andere nicht-parallele Seite LM in n gleiche Teile.

Da $KS=SA$ und $SV \parallel KL$, so ist zunächst $KX=XE$ (IV.). In den Trapezen BSXF, CAEH zc. mit den mittleren Parallelen AE, BF zc. ist dann nach II. weiter $XE=EF$, $EF=FH$ zc., daher nach Fr. 20 V. $KX=XE=EF=FH$ zc. Die durch die Parallelen in LM erzeugten Teile LV zc. sind aber je einem Teil in KU gleich (Fr. 108 III.), daher auch unter sich selbst (Fr. 20 V.).

VII. Die zwischen KN und KU liegenden Abschnitte SX, AE, BF, CH zc. der Parallelen wachsen wie die ganzen Zahlen; denn jede derselben besteht aus einem Stück, welches nach Fr. 108 III. dem vorhergehenden Abschnitte gleich ist ($DE=SX$, $GF=AE$ zc.), und einem zweiten Stück von unveränderlicher Größe (AD, BG). Aus der durch Fr. 80 V. bedingten Kongruenz der Dreiecke KXS, SDA, AGB zc. folgt nämlich nach Fr. 67 II., daß $SX=AD=BG$ zc. Daher ist $AE=2SX$, $BF=3SX$ zc.

VIII. Zieht man im Dreieck NKU eine Strecke KP von K nach einem Punkte P in NU, so teilt KP die Abschnitte SX, AE, BF zc. der sämtlichen Parallelen in dem nämlichen Verhältnisse (vergl. Fr. 145 I.), wie die Seite NU, weil nach VII. die zu beiden Seiten von KP liegenden Abschnitte dieser Parallelen wie die ganzen Zahlen wachsen.

IX. Ist daher in VIII. $NP=PU$, so halbiert KP auch die sämtlichen zu NU parallelen Strecken zwischen KN und KU.

X. Wie weist man aus IX. nach, daß der Schnittpunkt der nicht-parallelen Seiten eines Trapezes in der die beiden Parallelseiten halbierenden Geraden liegt? Vergl. auch Fr. 159 XII.

112. Wie projiziert man eine Strecke auf eine Gerade?

I. Projektion einer Strecke AB (Fig. 123) auf eine Gerade G heißt die Strecke A,B, welche zwischen den Fuß-

(wie bei der Projektion unter dem spitzen Winkel w) auf einen Schenkel DL des Projektionswinkels, sondern auf dessen Verlängerung DF . Faßt man in diesem Falle (ähnlich wie in Fr. 44 V.) die Projektion wegen ihrer entgegengesetzten Lage gegen den Schenkel DL (Fr. 24 II.) als negativ auf, die Projektion unter einem spitzen Winkel aber als positiv, dann gilt das Gesetz in III. auch noch für stumpfe Winkel, und bei $w = 180^\circ$ würde die Projektion $A_1B_1 = -AB$ werden. Wie aber bei Projektionen unter Winkeln über 180° bis 360° ?

VIII. Projiziert man eine Strecke AB unter zwei Winkeln w und w_1 , die sich zu 180° ergänzen, so erhält man gleichgroße Projektionen, von denen aber die eine als positiv und die andere als negativ zu gelten hat (VII.).

IX. Projiziert man eine bereits unter dem spitzen Winkel $BAC = w$ projizierte Strecke AB noch unter dem spitzen Winkel $CAC_1 = u$, so ist letztere Projektion AE größer als die Projektion AC_1 derselben Strecke AB unter der Winkelsumme $BAC_1 = w + u$; denn es ist ja $BC_1 \parallel CE$ (Fr. 57 II.), BC_1 aber fällt von BC aus nach A hin (Fr. 71 II.).

Bei Berücksichtigung von VII. gilt der vorstehende, bis jetzt nur für $w + u < 90^\circ$ bewiesene Satz auch noch, wenn $w + u = 90^\circ$ oder $w + u > 90^\circ$ ist.

X. Über das Wachsen der Projektionen der von einem Punkte P nach einer Geraden G gezogenen und auf eben diese Gerade G projizierten Strecken giebt Fr. 74 X. Aufschluß. Vergl. Fr. 78 V.

113. Welche Eigenschaften haben die regelmäßigen Vielecke?

I. Ein ebenes geradliniges Vieleck (vergl. Fr. 65 I.) heißt regelmäßig, wenn alle seine Winkel und alle seine Seiten unter einander gleich sind, wie beim gleichseitigen Dreieck (vergl. Fr. 64 III. und 74 V.) und beim Quadrat (Fr. 108 VII.).

II. Die Winkel jeder regelmäßigen Figur sind hohl (Fr. 35); denn beim regelmäßigen n -eck beträgt die Summe der

n Winkel $(n-2) 2 R$ (Fr. 72 III.), weshalb jeder einzelne Winkel $= \left(\frac{n-2}{n}\right) 2 R = \left(1 - \frac{2}{n}\right) 2 R < 2 R$ ist.

III. Jeder Winkel einer regelmäßigen Figur wird um so größer, je größer die Seitenzahl n ist (II.), weil $\frac{2}{n}$ abnimmt, wenn n wächst.

IV. Halbirt man in einem regelmäßigen Vieleck ABCDEF (Fig. 124) zwei benachbarte Winkel A und B, so ist $\angle z + \angle y < 2 R$ (II.); deshalb schneiden sich (Fr. 62 IV. 3.) die Halbierungslinien in einem Punkte M, welcher nach dem Innern der Figur hin liegen muß (Fr. 69 IX.). Aus der Gleichheit der beiden Winkelhälften z und y folgt sofort, daß $AM = BM$ (Fr. 74 VI.). Zieht man ferner von M eine Strecke MC nach dem nächsten Eckpunkte C, so ist $\triangle AMB \cong \triangle CMB$ (Fr. 80 II.), weil ja nach I. auch $AB = BC$ und $\angle y = \frac{1}{2} B = \angle x$ ist. Deshalb muß aber weiter $MA = MC$ (Fr. 67 II.), also $MA = MB = MC$ sein und MC den $\angle C$ halbieren.

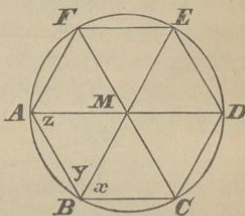


Fig. 124.

Geht man nun zu den folgenden Eckpunkten D, E u. fort, so findet sich, daß die Halbierungslinien der Winkel eines regelmäßigen Vielecks sich in einem Punkte M schneiden und das Vieleck in so viel kongruente gleichschenkelige Dreiecke teilen, als das Vieleck Seiten hat.

In diesen Dreiecken ist jeder Winkel an der Spitze M gleichgroß, nämlich:

$$\angle AMB = BMC = \dots = 4 R : n \text{ (Fr. 34 IV.)}$$

Daher ist $\angle AMB + \angle ABC = 2 R$ (II.).

V. Die aus dem Punkte M auf die Seiten AB, BC u. gefällten Senkrechten halbieren die Seiten und sind unter sich gleich (Fr. 75 V. und VI., Fr. 81).

VI. Aus dem Punkte M läßt sich also nach IV. ein Kreis durch die Eckpunkte und nach V. ein Kreis durch die Seitenmitten (vergl. Fig. 125) schlagen; ersterer ist dem Vieleck umgeschrieben, letzterer eingeschrieben.

VII. Teilt man einen Kreis in n gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte A, B, C zc. (Fig. 125) Sehnen oder Tangenten, so erhält man ein (eingeschriebenes oder umgeschriebenes) regelmäßiges n -eck.

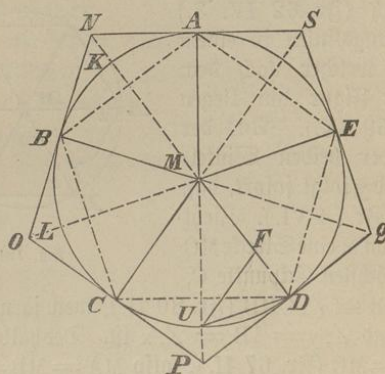


Fig. 125.

Bei dem eingeschriebenen zunächst sind die Seiten nach Fr. 91 II. unter sich gleich, weil die zwischen je zwei Teilpunkten liegenden Bögen gleich sind; die Winkel aber sind gleich (Fr. 96 II.), weil jeder als Peripheriewinkel über $(n-2)$ solchen gleichen Kreisteilen, z. B. $\angle ABC$ über dem Bogen AEDC, angesehen werden kann.

Zieht man ferner beim umgeschriebenen Vieleck NOPQS vom Mittelpunkte M aus Halbmesser MA, MB, MC zc. nach allen Teilpunkten, so zerfällt das n -eck in n Vierecke, und zieht man dann noch von M Strecken nach allen den Punkten

N, O, P α ., in denen sich je zwei benachbarte Tangenten schneiden, so zerfällt jedes Viereck in zwei kongruente (Fr. 81 I.) rechtwinkelige Dreiecke. Die $2n$ Winkel um M sind daher sämtlich gleich, weil die Strecken MN, MO α die nach Fr. 54 IV. gleichen Centriwinkel AMB, BMC α halbieren. Da deshalb die $2n$ rechtwinkelligen Dreiecke unter sich kongruent sind (Fr. 81 II.), so folgert man daraus nach Fr. 67 II. leicht die Gleichheit sämtlicher (halben und ganzen) Seiten und Winkel des umgeschriebenen Vielecks.

VIII. Werden durch dieselben n Teilpunkte A, B, C α (Fig. 125) eines Kreises ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck von n Seiten gezeichnet, so halbieren die Strecken MN, MO α die Bögen AB, BC α .

Der Kreis ist daher nunmehr in $2n$ gleiche Bögen $AK = KB = BL$ α geteilt.

Zeichnet man jetzt die beiden $2n$ -ecke, so zeigt sich das eingeschriebene größer, das umgeschriebene kleiner als das eingeschriebene, beziehentlich das umgeschriebene n -eck. Durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahlen erhält man dann Vielecke von $4n$, $8n$ α Seiten, und da sich diese Vielecke immer inniger an den Kreis anschmiegen, je größer ihre Seitenzahl wird, so pflegt man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten zu betrachten.

Fünftes Kapitel.

Einige Aufgaben und Übungssätze.

114. Wie zeichnet man ein gleichseitiges Dreieck?

Schlägt man aus den Endpunkten A und B der (gegebenen oder willkürlich gewählten) Strecke AB zwei Kreise mit AB als Halbmesser, so schneiden sich die Kreise, da die in Fr. 102 VII. gestellten Bedingungen erfüllt sind, in zwei Punkten C_1 und C_2 . Die beiden (kongruenten, Fr. 80 I.) Dreiecke ABC_1 und ABC_2

sind gleichseitig (Fr. 20 V.), da $AC = AB$ und $BC = AB$ (Fr. 48 III.).

X 115. Wie zeichnet man ein gleichschenkeliges Dreieck?

Man verfahre wie in Fr. 114, schlage aber die zwei gleichen Kreise mit einem der Strecke AB nicht gleichenden Halbmesser, der größer als die Hälfte von AB ist.

116. Wie zeichnet man ein Dreieck aus den drei Seiten?

Genügen die drei Seiten a, b und c den in Fr. 76 gestellten Bedingungen, so schneiden sich die aus den Endpunkten von $AB = c$ mit den Halbmessern b und a geschlagenen Kreise in zwei Punkten C_1 und C_2 (Fr. 102 VII.) und Seiten der (kongruenten, Fr. 80 I.) Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind a, b und c.

117. Wie zieht man von einem Punkte P zwei gleiche Strecken nach einer Geraden G?

Schlägt man aus P, wie in Fig. 96, durch einen jenseits G gelegenen Punkt N einen Kreis K, so schneidet dieser G in 2 Punkten M_1 und M_2 (Fr. 83 XIII.) und es ist $M_1P = M_2P$ (Fr. 48 III.).

118. Wie trägt man an einen Strahl AB in A einen gegebenen Winkel DEF an?

Man verbinde zwei auf den Schenkeln ED und EF willkürlich gewählte Punkte H und K durch eine Strecke HK und zeichne nach Fr. 116 an AB ein dem Dreieck HEK kongruentes Dreieck H_1AK_1 , so daß $AK_1 = EK$ von A aus in AB liegt, und $AH_1 = EH$ wird. Dann ist:

$$\angle H_1AK_1 = \angle HEK = \angle DEF \text{ (Fr. 67 II.)}.$$

119. Wie zieht man in einer gegebenen Ebene durch einen gegebenen Punkt C eine Parallele DL zu einer gegebenen Geraden FK?

Man verbinde C mit einem Punkte E in FK und mache $\angle ECD = \angle CEK$ (Fr. 118), so daß D und K auf verschiedenen Seiten von CE liegen (wie in Fig. 32 auf S. 40); dann ist $DCL \parallel FK$ (Fr. 62 II. 2.). Vergl. Fr. 57 I.

120. Wie fällt man von einem Punkte P auf eine nicht durch P gehende Gerade G eine Senkrechte?

Zieht man von P nach zwei beliebigen Punkten M₁ und M₂ in G (wie in Fig. 93 bis 96) Strecken, so schneiden sich zwei aus M₁ und M₂ mit M₁P und M₂P als Halbmessern geschlagene Kreise noch in einem Punkte Q und es ist $PQ \perp G$ (Fr. 102 III.). Nach Fr. 117 könnte man dabei zwei gleiche Kreise erhalten.

121. Wie errichtet man in einem Punkte N einer Geraden G eine Senkrechte?

In G mache man $ND = NC$ (Fig. 55) und über CD $\triangle DQC$ gleichschenkelig (Fr. 115), so ist $QN \perp G$ (Fr. 74 XVII.).

122. Wie errichtet man im Endpunkte B einer Strecke AB eine Senkrechte?

Man zeichne über AB (Fig. 67) ein gleichschenkeliges $\triangle AVB$ (Fr. 115), verlängere AV nach F, bis $VF = VB = VA$ wird; dann ist $FB \perp AB$ (Fr. 71 III.), da $\angle VAB + \angle VFB = \angle ABV + \angle FBV$ (Fr. 74 I.).

123. Wie schlägt man um ein rechtwinkeliges Dreieck einen Kreis? Vergl. Fr. 88 IV. und 89.

I. Teilt man den rechten Winkel B so, daß (wie in Fig. 86) $\angle ABM = \angle BAZ$ wird, dann schneidet die Theillinie BM die Hypotenuse AZ im Mittelpunkte M des gesuchten Kreises (Fr. 71 II. und 73 I.).

II. Eine andere Lösung bietet Fr. 96 VII. mit Hilfe von Fr. 127.

124. Wie legt man einen rechten Winkel so, daß seine Schenkel durch zwei gegebene Punkte A und Z gehen und sein Scheitel auf einer gegebenen Geraden G liegt?

Hat der über AZ (Fig. 86) als Durchmesser geschlagene Kreis mit der Geraden G einen, oder zwei Punkte, z. B. B und C, gemein (Fr. 83), so sind ABZ und ACZ eine, bezw. zwei der gestellten Bedingung genügende Lagen des rechten Winkels (Fr. 96 III.).

125. Wie halbiert man einen gegebenen Winkel?

Macht man vom Scheitel M_1 des zu halbierenden $\angle PM_1Q$ aus (wie in Fig. 93 und 94) $M_1P = M_1Q$ und beschreibt man über PQ ein gleichschenkeliges $\triangle PM_2Q$ (Fr. 115), so halbiert M_1M_2 den $\angle PM_1Q$ (Fr. 102 IX.); denn aus M_1 und M_2 lassen sich Kreise durch P und Q ziehen (Fr. 47 II.).

Am zweckmäßigsten legt man das $\triangle PM_2Q$ nicht auf dieselbe Seite von PQ , auf welcher $\triangle PM_1Q$ liegt (vergl. Fig. 95).

Ist der Scheitel C des zu halbierenden $\angle W_1CW_2$, Fig. 102, nicht zugänglich, so ziehe man beliebig AB und halbiere durch AM_0 , AM_3 , BM_0 , BM_3 die Winkel bei A und B ; dann liegen M_0 und M_3 in der Halbierungslinie M_3M_0C (Fr. 104 II.).

126. Wie teilt man einen rechten Winkel in drei Teile?

Man beschreibe in dem gegebenen rechten Winkel XBY über der in dem einen Schenkel BX liegenden Strecke BA ein gleichseitiges $\triangle ABC$ (Fr. 114), dann ist $\angle CBX = \frac{2}{3} R$ (Fr. 74 V.), folglich $\angle CBY = \frac{1}{3} R$.

127. Wie halbiert man eine Strecke $\overline{PQ}$ oder einen Bogen $\widehat{PQ}$?

Zeichnet man über $\overline{PQ}$ (wie in Fig. 93 S. 101 am besten auf verschiedenen Seiten von PQ) zwei gleichschenkelige Dreiecke PQM_1 und PQM_2 (Fr. 115), so halbiert M_1M_2 sowohl $\overline{PQ}$ (Fr. 102 VIII.), als $\widehat{PQ}$ (Fr. 90 V.).

128. Wie teilt man eine Strecke KU in n gleiche Teile?

Man trage in K an KU unter beliebig großem Winkel UKN einen Strahl an, trage (wie in Fig. 122 S. 125) auf diesem von K aus n gleiche Teile ($KS = SA = AB = \dots = CN$) auf, verbinde den letzten Teilpunkt N mit U und ziehe durch die anderen Teilpunkte S, A, B etc. Parallele zu NU ; dann teilen diese Parallelen die Strecke KU in n gleiche Teile (Fr. 111 VI.).

129. Wie zeichnet man ein Dreieck mit einer gegebenen Seite a und einem gegebenen Gegenwinkel A dieser Seite?

I. Man verfare, wie in Fr. 79 III. 4. angedeutet wurde; man mache über $CB = a$, z. B. $\angle CBX = \angle BCY = 180^\circ - A$
 $\frac{2}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} A$ und lege durch B , C und den

Schnittpunkt A zwischen CY und BX einen Kreis (Fr. 88 I.).

II. Wären für ein Dreieck a , A und $CA_2 = b$ (Fig. 72) gegeben, so brauchte man in den nach I. geschlagenen Kreis nur noch die Sehne $CA_2 = b$ einzutragen (Fr. 102 XII.). Bei $b > a$ lassen sich wegen Fr. 91 VIII. aus a , A und b zwei verschiedene Dreiecke zeichnen. Vergl. Fr. 79 VIII.

130. Wie zeichnet man ein Dreieck, von dem ein Winkel A eine anliegende Seite c und I. die Summe $a + b$, oder II. die Differenz $a - b$ der beiden andern Seiten gegeben ist?

Auf dem einen Schenkel AX des Winkels A trage man die Seite $AB = c$, auf dem andern Schenkel AY die Strecke:

I. $AD = a + b$, oder II. $AE = b - a$
 auf; dann:

I. schneide man von dem $\angle DBA$ den $\angle DBC = \angle BDA$ (Fr. 118) ab; schneiden sich nun BC und AD in C , so ist ABC das gesuchte Dreieck (Fr. 74 VI.). Vergl. Fig. 58 S. 70.

II. trage man in B an BE auf der BA entgegengesetzten Seite den (spitzen) $\angle EBC = \angle BEY$ an (Fr. 118); schneiden sich nun BC und AY in C , so ist das Dreieck ABC das gesuchte (Fr. 74 VI.). Vergl. Fig. 59 S. 70.

131. Wie zeichnet man ein Dreieck aus zwei Winkeln u und v und der Summe der drei Seiten? Vergl. Fr. 79 VII.

An den Endpunkten N und M der Strecke $NM = a + b + c$ trage man $\angle MNX = \frac{1}{2} \angle u$ und $\angle NMY = \frac{1}{2} \angle v$ an; ist nun $u + v < 2R$ (Fr. 69 IV.), so ist $\angle MNX + \angle NMY < R$ und NX und MY schneiden sich in C (Fr. 62 IV. 3.); schneidet man jetzt vom (stumpfen) Winkel

NCM die $\angle NCU = \frac{1}{2}u$ und $\angle MCV = \frac{1}{2}v$ ab und verbindet C mit den Punkten A und B, in denen NM von CU und CV geschnitten wird (Fr. 62 IV. 3.), so hat das $\triangle ABC$ die drei Seiten $AB = c$, $AC = AN = b$ und $BC = BM = a$ (Fr. 74 VI.), während $\angle CAB = u$ und $\angle CBA = v$ ist (Fr. 69 VI.).

132. Wie teilt man einen Kreis in 4, 8, 16 u. und in 3, 6, 12, 24 u. gleiche Teile? und wie zeichnet man ein regelmäßiges Vieleck von dieser Seitenzahl?

I. Zeichnet man in einem Kreise zwei auf einander senkrechte Durchmesser AB und CD (Fr. 121), so ist:

$$\widehat{AC} = \widehat{CB} = \widehat{BD} = \widehat{DA} \text{ (Fr. 39 III., 54 III.)}.$$

II. Zeichnet man über einem Halbmesser MA ein gleichseitiges $\triangle AMB$, so ist der Centriwinkel $AMB = 60^\circ$ (Fr. 74 V.), also $\widehat{AB}$ der sechste Teil vom ganzen Kreise (Fr. 54 V. und 50 II.).

Ein aus A mit AM als Halbmesser geschlagener Kreis geht durch B (Fr. 48 III., 64 III.) und schneidet auf der anderen Seite von AM einen Bogen $\widehat{AC}$ ab, der $\widehat{AB}$ gleicht u.

III. Zwei benachbarte Bögen von 60° (II.) geben als Summe einen Bogen von 120° , d. h. den dritten Teil des ganzen Kreises.

IV. Durch fortgesetzte Halbierung der Bögen (Fr. 127) erhält man aus I. bezw. II. die Teilung in 8, 16, 32 u., bezw. 12, 24, 48 u. gleiche Teile. Vergl. Fr. 113 VIII.

V. Ein regelmäßiges Vieleck mit 3, 6, 12 u. f. f. und mit 4, 8, 16 u. f. f. Seiten erhält man nach I. bis IV. und Fr. 113 VII.

Anm. über das Zeichnen des regelmäßigen Vielecks von 5, 10, 20 . . . Seiten vergl. Fr. 164 VI. in Verbindung mit Fr. 113 VIII.

133. Wie beweist man die Richtigkeit folgender Sätze?

I. Ein Viereck, dessen Winkel sämtlich rechte sind, ist ein Rechteck, oder ein Quadrat (Fr. 62 II. 3., oder 107 III.).

II. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Rechtecks begrenzen ein Quadrat (Fr. 74 VI., 68 II.).

III. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Rhomboids begrenzen ein Rechteck (Fr. 107 I., 68 II.).

IV. In jedem Sehnenvieleck von gerader Seitenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. (Fr. 48 III. und 74 I.). Vergl. Fr. 96 VIII.

V. In jedem Tangentenvieleck von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften u. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. Seite (Fr. 103 V.). Vergl. Fr. 104 X.

VI. Jeder Punkt V innerhalb der Centralstrecke M_1M_2 (Fig. 93) zweier sich schneidenden Kreise ist von der gemeinschaftlichen Tangente T dieser Kreise weiter entfernt als von jedem der Schnittpunkte P und Q der beiden Kreise (Fr. 91 VI., oder XIII., 20 III.).

Jeder Punkt U in der Verlängerung der Centralstrecke liegt dem nächsten Berührungspunkte und deshalb (Fr. 74 VIII.) auch der gemeinschaftlichen Tangente näher als dem Schnittpunkte der beiden Kreise (Fr. 91 VI., oder XIII., 74 IX.).

Es giebt demnach in der Centralstrecke und ihren Verlängerungen keinen dritten Punkt, aus dem sich ein die gemeinschaftliche Tangente T berührender Kreis durch einen der Schnittpunkte P oder Q der beiden ersten Kreise schlagen läßt.

VII. Der Umfang eines Vielecks mit lauter hohlen Winkeln ist kleiner als der Umfang eines dasselbe umschließenden Vielecks.

VIII. Der geometrische Ort für die Endpunkte aller gleich langen Tangenten desselben Kreises ist ein dem gegebenen concentrischer Kreis.

134. Wie lassen sich die geometrischen Aufgaben einteilen und welche Teile umfaßt ihre Auflösung?

I. Die in Fr. 114 bis 132 vorgeführten einfachen Aufgaben (vergl. Fr. 136 IV.) aus dem Gebiete der ebenen

Geometrie lassen erkennen, daß den Gegenstand derselben die Auffindung und Zeichnung von Punkten, Geraden, Dreiecken, Vielecken und Kreisen bildet. Im Grunde genommen kommt es immer auf die Bestimmung von Punkten hinaus, welche ihrerseits (vergl. z. B. Fr. 9 I., 88 III. 2c.) für die Bestimmung der andern Gebilde bestimmend sind.

Die geometrischen Aufgaben lassen sich in örtliche und nichtörtliche einteilen. Bei ersteren ist der Ort, wo die Lösung der Aufgabe vorgenommen werden soll, im voraus bestimmt, wie z. B. in Fr. 123 und 132 I. bis IV.; bei den letzteren, z. B. in Fr. 129, 130, 132 V., ist dieser Ort nicht bestimmt.

In der Aufgabe lassen sich ferner die gegebenen Stücke von den gesuchten, aus jenen zu findenden Stücken unterscheiden.

II. Zur Auffindung der Lösung ist es meist sehr förderlich und deshalb zu empfehlen, daß man eine der Aufgabe entsprechende Figur zeichne, welche man als die zu findende und bereits gefundene ansieht, und daß man aus dieser Figur, besonders aus den in ihr enthaltenen Dreiecken, maßgebende Beziehungen zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken herzuleiten trachtet. Dies ist der Zweck der Analysis der Aufgabe.

So gelangt man zur Konstruktion, welche angiebt, wie die Aufgabe gelöst wird. Dann folgt der Beweis, welcher aus der Konstruktion und aus bekannten Sätzen nachweist, daß die Lösung richtig ist und wirklich die gesuchten Stücke aus den gegebenen liefert.

Dann hat endlich noch die Determination zu folgen, welche darthut: 1. ob die Lösung immer und allgemein, oder nur unter gewissen Bedingungen möglich ist, und 2. ob die Aufgabe eindeutig, zweideutig, oder mehrdeutig ist, d. h. eine, zwei, oder mehrere Figuren den Forderungen der Aufgabe genügen. Hierbei ist namentlich die Größe der gegebenen Stücke und ihre gegenseitige Lage ins Auge zu fassen und als veränderlich zu behandeln.

III. Eine Aufgabe ist bestimmt, wenn die gegebenen Stücke nur eine endliche Anzahl, unbestimmt, wenn sie unendlich viele Lösungen zulassen, überstimmt, wenn mehr Stücke gegeben sind, als zur Bestimmtheit erforderlich sind.

IV. Fehlt zur Bestimmtheit einer Aufgabe nur ein Stück, oder nur eine Bedingung, so kann man doch häufig aus bekannten Sätzen sagen, daß der einzige, nicht völlig bestimmte Punkt auf einer bestimmten Geraden, oder auf einem bestimmten Kreise liegen muß (vergl. z. B. Fr. 74 XVII.). Man nennt dann die Gerade und den Kreis den geometrischen Ort dieses Punktes.

Unter dem geometrischen Orte eines nicht völlig bestimmten Punktes (oder eines andern Raumgebildes; vergl. Fr. 166 X. und XI.) versteht man im allgemeinen eine Linie, oder eine Fläche, welche so beschaffen ist, daß alle ihre Punkte und nur ihre Punkte allein eine bestimmte Bedingung für die Lage jenes Punktes (oder jenes Raumgebildes) erfüllen.

Bei völlig bestimmten Aufgaben können sich für einen noch unbekannten Punkt mehrere geometrische Orte angeben lassen, welche jedoch dann nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben werden.

V. Ist die Lösung einer Aufgabe so einfach und von selbst einleuchtend, daß eine besondere Konstruktion gar nicht erst angegeben zu werden pflegt, Analysis, Beweis und Determination daher auch wegfallen, so nennt man sie eine Forderung (ein Postulat). Vergl. z. B. Fr. 15 V. und Fr. 47 VII.

135. Wie zeichnet man ein Dreieck aus einer Seite a , der Projektion p derselben auf die Seite c und der Mittellinie m_a ?

I. An dieser Aufgabe möge der Inhalt von Fr. 134 erläutert werden.

Analysis. Man zeichne irgend ein Dreieck $A_0B_0C_0$ hin, mache $C_0D_0 \perp A_0B_0$ und ziehe A_0E_0 nach der Mitte N_0 von B_0C_0 . Man sieht dann, daß das $\triangle B_0C_0D_0$ aus a_0 , p_0 und $\angle D_0$ bestimmt ist (Fr. 81 I.), und erkennt, daß der Punkt A_0

in B_0D_0 , oder in seiner Verlängerung liegt, und zwar in der Entfernung N_0A_0 von N liegt.

Konstruktion. Man ziehe die Gerade BY und nehme $BD = p$, mache $\angle BDZ = 90^\circ$ und schneide in C die Senkrechte DZ mit einem Kreise aus B vom Halbmesser a ; dann halbiere man CB in N und schlage um N einen Kreis vom Halbmesser m_a , welcher BY in A schneidet. ABC (vergl. Fig. 126) ist das gesuchte Dreieck.

Beweis. $BC = a$ (Konstr.); $CD \perp BY$ und $BD = p$, also p Projektion von a auf c (Fr. 112 I.); $CN = NB$, also NA Mittellinie und $= m_a$ (Konstr.).

Determination. Die Aufgabe ist unlösbar, wenn $a \leq p$ (Fr. 74 VIII.); ebenso wenn m_a kleiner ist als die von N auf BA gefällte Normale (Fr. 83 I.). Die Aufgabe ist eindeutig, wenn m_a der von N auf AB gefällten Senkrechten gleicht (Fr. 83 II.). Es giebt ferner zwei Lösungen

(Fr. 83 III.), wenn diese Senkrechte $< m_a$ und $m_a > \frac{a}{2}$ ist; dabei sind die beiden gefundenen Dreiecke beide spitzwinklig bei B , wenn $m_a < \frac{a}{2}$, bei $m_a > \frac{a}{2}$ dagegen eins spitzwinklig und eins stumpfwinklig. Bei $m_a = \frac{a}{2}$

endlich ist die Aufgabe wieder eindeutig und das Dreieck rechtwinklig (Fr. 83 IX.). Vergl. auch Fr. 79 VIII.

II. Aus I. erkennt man zugleich, daß das Dreieck, wenn eine Höhe h_c gegeben ist, sowohl als Summe, wie als Differenz der beiden durch diese Höhe und die Seiten a und b erzeugten Dreiecke erscheinen kann.

136. Was versteht man unter einem Datum?

I. Von den Fr. 80 I. bis III. und V. entsprechenden vier Grundaufgaben über das Dreieck ist unter den vorhergehenden Aufgaben nur die eine in Fr. 116 gestellt worden, eine zweite in Fr. 129 II.; die Lösung der beiden andern folgt unmittelbar aus Fr. 118.

II. In den vorausgegangenen Aufgaben konnten die gegebenen Stücke selbst und ohne weiteres zur Lösung benutzt werden. Es kann aber auch sein, daß einige der gegebenen Stücke zwar sich nicht unmittelbar zur Lösung verwenden lassen, daß man aber wohl durch sie ein nicht unmittelbar gegebenes Stück zu finden vermag, welches dann an Stelle eines unmittelbar gegebenen treten und so die ursprüngliche Aufgabe in eine andere, womöglich leichter zu lösende umwandeln kann.

Stehen eine Anzahl von Bestimmungsstücken in einem solchen Zusammenhange mit einander, daß man jedes einzelne derselben finden kann, wenn die übrigen bekannt sind, so nennt man die Gesamtheit ein Datum.

III. Der Inhalt von II. mag an einem Beispiele erläutert werden.

Ist in einem Dreiecke ABC die Winkelhalbierende $CJ = w_c$ gegeben und schneidet dieselbe die Seite c in J , so ist bei $A > B$ nach Fr. 69 VI. und 68 II. der spitze Winkel $AJC = B + \frac{1}{2}C = B + \frac{1}{2}(180^\circ - A - B) = 90^\circ - \frac{1}{2}(A - B)$. Die zugehörige Höhe $CD = h_c$ hat aber ihren Fußpunkt zwischen A und J (Fr. 71 V.), und deshalb ist der Winkel AJC auch $= 90^\circ - \angle JCD$ (Fr. 71 II.); also ist nach Fr. 20 VIII.

$$\begin{aligned}\angle JCD = \angle(w_c, h_c) &= \frac{1}{2}(A - B), \quad \text{wenn } A > B, \\ &= \frac{1}{2}(B - A), \quad \text{wenn } B > A.\end{aligned}$$

Somit bilden die Winkelhalbierende w_c , die Höhe h_c und die Winkeldifferenz $(A - B)$ ein Datum, d. h. je zwei dieser drei Stücke bestimmen das dritte, sie genügen indessen natürlich noch nicht zur Bestimmung des Dreiecks.

IV. Außer den Winkeln und Seiten (Fr. 79) giebt es für das Dreieck und für die Vielecke auch noch andere Bestimmungsstücke. Unter diese wird aber für jetzt der Flächeninhalt noch nicht mit aufzunehmen sein, vielmehr sollen einige darauf bezügliche Aufgaben später (im siebenten Kapitel, Fr. 180) nachgetragen werden. In Fr. 139 bis 143

dagegen folgen einige Aufgaben, deren Lösung einen besondern Kunstgriff nötig macht; auf sie können verschiedene andere Aufgaben mit Vorteil zurückgeführt werden.

137. Welche Data für das Dreieck sind hier zu nennen?

I. Die drei Winkel A, B, C . Vergl. Fr. 68 II.

II. Die beiden Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Vergl. Fr. 71 II.

III. Im symmetrischen Dreiecke der Winkel an der Spitze und die Winkel an der Grundseite. Vergl. Fr. 75 III.

IV. Die Winkelhalbierende, die Höhe und die Winkeldifferenz. Vergl. Fr. 136 III.

V. Die Höhe und Mittellinie für eine Seite und die Differenz der Projektionen der beiden andern Seiten auf jene Seite.

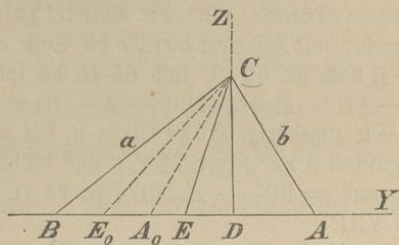


Fig. 126.

Es sei $\angle A > \angle B$; dann ist die Projektion $BD = p$, Fig. 126, der Seite a auf c größer als die Projektion $AD = q$ von b auf c (Fr. 112 X.). Nun ist $ED = EA - DA = \frac{1}{2}c - q = \frac{1}{2}(p + q) - q = \frac{1}{2}(p - q)$. Das rechtwinklige Dreieck CDE läßt sich aber konstruieren (Fr. 81 I.), wenn von seinen drei Seiten $CD = h_c$, $CE = m_c$ und ED zwei gegeben sind; also läßt sich aus zweien die dritte finden.

Wäre das Dreieck ABC stumpfwinklig, so wäre $E_oD = BD - BE_o = p - \frac{1}{2}c = p - \frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}(p - q)$. Nach Fr. 112 VII. wäre ja q als negativ aufzufassen.

VI. Der Halbmesser des umschriebenen Kreises, eine Seite c und ihr Gegenwinkel C .

Wäre r und c bekannt, so trage man c in den Kreis vom Halbmesser r ein (Fr. 102 XII.); dann ist nach 98 II. zugleich der Winkel C zweideutig bestimmt.

Wäre r und C bekannt, so mache man im Kreise vom Halbmesser r an der Tangente LK , Fig. 91 S. 99, in E den $\angle n = C$ und der Schnittpunkt D liefert dann $ED = c$ (Fr. 100 I. und 98 IV.).

Wäre c und C bekannt, so trage man $ED = c$, Fig. 91 S. 99, auf dem einen Schenkel des Winkels $n = C$ auf; der Kreis berührt dann den andern Schenkel LK in E und besitzt ED als Sehne (Fr. 100 I.); sein Mittelpunkt M ist also auf verschiedene Weise leicht zu finden, z. B. nach Fr. 89 V.

In allen Fällen ist die Lage des Punktes C auf dem Kreise und daher auch das Dreieck selbst noch nicht bestimmt.

VII. Der Halbmesser r_0 des eingeschriebenen Kreises um M_0 , ein Winkel C und die um dessen Gegenseite c verminderte Summe $a + b$ der beiden anliegenden Seiten.

In Fig. 102 S. 108 ist in dem rechtwinkligen Dreieck CM_0L_1 der $\angle M_0CL_1 = \frac{1}{2}C$ und $M_0L_1 = r_0$, nach Fr. 105 XI. und 104 VIII. aber auch $CL_1 = c_0 = b_1 = \frac{a + b - c}{2}$.

Das $\triangle CM_0L_1$ ist aber durch je zwei der genannten Stücke bestimmt (Fr. 81) und somit läßt sich aus den letzteren das dritte Stück finden.

VIII. Der Halbmesser r_3 des einer Seite c angeschriebenen Kreises um M_3 , der Gegenwinkel C dieser Seite und die Summe $s = a + b + c$ der drei Seiten (Fr. 81).

In Fig. 102 S. 108 ist ja im rechtwinkligen $\triangle CM_3W_1$ der $\angle M_3CW_1 = \frac{1}{2}C$ und $M_3W_1 = r_3$, nach Fr. 105 XII. aber $CW_1 = \frac{a + b + c}{2}$.

138. Welche Data für die Vierecke sind hier aufzuführen?

I. Die vier Winkel. Vergl. Fr. 72 III.

II. Bei Parallelogrammen zwei parallele Seiten, die Höhe (Fr. 108 XIII.) für das zweite Seitenpaar und die Winkel. Vergl. Fr. 81.

Anstatt eines Winkels könnte auch der Winkel zwischen den beiden Höhen gewählt werden; vergl. Fr. 71 VI.

III. Beim Parallelogramm eine Diagonale, eine der beiden Höhen und der Winkel, welchen sie mit jener Diagonale macht. Vergl. Fr. 81.

IV. Bei Trapezen eine der nichtparallelen Seiten, der an dieser liegende Winkel und die Höhe (Fr. 108 XIII.). Vergl. Fr. 81.

V. Bei Trapezen zwei benachbarte Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und die ihre freien Enden verbindende Diagonale. Vergl. Fr. 80 I. und II.

VI. Bei Trapezen eine Diagonale, der Winkel zwischen ihr und einer parallelen Seite und die Höhe. Vergl. Fr. 81.

VII. Bei Trapezen die Verbindungsstrecke der Mitten der beiden parallelen Seiten, die Höhe und die Differenz der Projektionen der nichtparallelen Seiten auf die parallelen. Vergl. Fr. 137 V.

139. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Höhe h_c , dem Winkel C an der Spitze und der Differenz $p - q$ der Projektionen der beiden andern Seiten a und b auf die Grundseite c .

Anleitung zur Lösung. Errichtet man beim $\triangle ABC$, Fig. 126, im Endpunkte A_0 der Projektionsdifferenz $BA_0 = p - q$ eine Normale A_0Z_0 , verlängert man AC , bis sie A_0Z_0 in N schneidet, und macht man noch $OK \perp A_0Z_0$, so ist

$$\triangle CA_0K \cong \triangle A_0CD \quad (\text{Fr. 108 XII. und I.})$$

$$CK = A_0D = AD \quad (\text{Fr. 67 II., 75 III.})$$

$$\triangle CKN \cong \triangle ADC \quad (\text{Fr. 81 II., 62 I.})$$

$$NK = CD = A_0K \quad (\text{Fr. 67 II., 108 XIII.});$$

es ist also $A_0N = 2DC = 2h_c$ und außerdem $\angle NCB = 180^\circ - C$.

Lösung. Man konstruiere $\triangle BA_0N$ aus $BA_0 = p - q$, $\angle A_0 = 90^\circ$ und $A_0N = 2DC$. Der Eckpunkt C des gesuchten Dreiecks liegt dann zugleich in einer Parallelen zu BA_0 im Abstände $A_0K = h_0$ und auf einem Kreise mit dem Peripheriewinkel $(180^\circ - C)$ über der Sehne BN (Fr. 98 VII.). Der Eckpunkt A findet sich schließlich am bequemsten aus $CA = CA_0$, oder auch durch Verlängerung von NC.

Von den beiden Schnittpunkten zwischen dem Kreise und KC ist nur der von BN aus nach A_0Z hin liegende zu gebrauchen; der andere liefert ein unbrauchbares Dreieck, welches nicht alle gegebenen Stücke enthält.

Wäre h_0 nicht gegeben, so wäre die Aufgabe unbestimmt; jedes andere h_0 liefert ein anderes A_0N und BN, sowie einen anderen Kreisbogen, aber doch ein Dreieck mit $A_0B = p - q$ und C.

140. Wie konstruiert man ein Dreieck aus der Grundseite c, der Höhe h_0 und der Differenz $A - B$ der Grundseitenwinkel?

Anleitung zur Lösung. Ist im $\triangle ABC$, Fig. 126, $BA_0 = BD - DA_0 = BD - DA = p - q$ die Differenz der Projektionen der Seiten a und b auf c, so ist $\angle A_0CB = \angle CA_0A - \angle B$ (Fr. 69 VI.) $= \angle CAA_0 - \angle B$ (Fr. 75 VII.) $= \angle A - \angle B$. Ferner ist $A_0E_0 = E_0B$ und $DE_0 = DA_0 + A_0E_0 = DA + E_0B = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$.

Lösung. Man mache $DE_0 = \frac{1}{2}c$, $\angle E_0DZ = 90^\circ$ und $DC = h_0$, sodann verlängere man CE_0 um $E_0X = E_0C$ und zeichne über CX ein Parallelogramm $CBXA_0$, worin der $\angle CBX = 180^\circ - \angle A_0CB = 180^\circ - \angle (A - B)$. Dazu hätte man einen Kreis zu schlagen, in welchem der Peripheriewinkel über der Sehne CX die Größe $180^\circ - (A - B)$ hat (Fr. 98 VII.), und diesen mit der Verlängerung von DE_0 in B zu schneiden. A findet sich endlich aus $BA = c$.

Der Punkt B (und ähnlich C in Fr. 139) erscheint bestimmt durch zwei geometrische Örter (Fr. 74 XVII.), nämlich: den Kreis und die Gerade DE_0 .

141. Ein Dreieck ABC zu zeichnen aus dem Halbmesser r des umschriebenen Kreises, der Grundseite $AB = c$ und der Winkelhalbierenden $CJ = w_c$.

I. Anleitung zur Lösung. Ist in Fig. 127 der Kreis K um das $\triangle ABC$ geschlagen und schneidet ihn die Winkelhalbierende CJ in J_0 , so entstehen nach Fr. 69 I. zwei gleichwinkelige Dreiecke J_0JA und J_0AC , wenn man J_0A zieht. Denn es ist ja

$$\angle J_0CA = \angle J_0CB = \angle J_0AB \text{ (Vor. und Fr. 96 II.)}$$

$$\angle AJ_0C = \angle JJ_0A \text{ (Fr. 20 I.)}$$

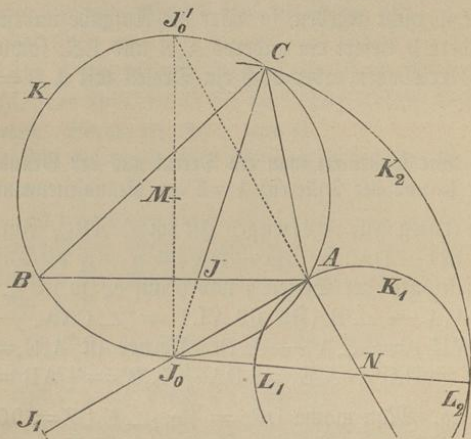


Fig. 127.

Lösung*). Man schlage einen Kreis K um M mit dem Halbmesser $MA = r$, trage in ihn die Sehne $AB = c$ ein (Fr. 102 XII.; vergl. auch Fr. 98 VII.) und mache $\widehat{AJ_0} = \widehat{J_0B}$ (Fr. 90 III.); dann geht die Winkelhalbierende durch J_0 (Fr. 98 IV.). Ferner mache man $AN \perp AJ_0$ und $AN = \frac{1}{2}w_c$,

*) Allgemeiner (aber etwas umständlicher) lautete die Lösung: Man trage in den um M geschlagenen Kreis K vom Halbmesser r die Sehne $AB = c$ ein,

schlage aus N den Kreis K_1 durch A, schneide ihn durch die Gerade J_0NL_2 und schlage aus J_0 den Kreis K_2 durch L_2 ; dann schneidet K_2 den Kreis K im gesuchten Punkte C des Dreiecks ABC. — Der zweite Schnittpunkt zwischen K und K_2 liefert nichts Neues.

Natürlich muß auch $J_0J = J_0L_1$ sein und man könnte damit den Punkt J in BA bestimmen; wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeiten im Zeichnen ist es aber für die Praxis im allgemeinen vorzuziehen, J_0C durch die weiter von einander entfernten Punkte J_0 und C zu bestimmen.

Der Beweis folgt in Fr. 161 VIII. Ein anderer Beweis liegt in Fr. 160 IV.

Sn gleicher Weise wäre die Aufgabe zu lösen, wenn statt CJ die Halbierungslinie $CJ' = w_0'$ des Außenwinkels bei C gegeben wäre; nur würde dann der Bogen $\widehat{AJ_0'B}$ in J_0' zu halbieren und die Normale $AN' = \frac{1}{2}w_0'$ auf AJ_0' zu errichten sein. Wie J_0' in der Verlängerung von NA liegt, so liegt N' in der Verlängerung von J_0A ; CJ' liegt in Fig. 127 rechts von CA und K_2' ist um J_0' durch L_1' zu ziehen.

II. Eine andere Lösung folgt in Fr. 161 X.

142. Wie findet man das Dreieck ABC aus der Grundseite c, dem Gegenwinkel C und der Winkelhalbierenden w_0 ?

I. Beschreibt man über $AB = c$ einen Kreis K, in welchem der Peripheriewinkel über $c = C$ ist (Fr. 98 VII.), so kann man aus dessen Halbmesser r nebst c und w_0 nach Fr. 141 das $\triangle ABC$ finden.

II. Zwei andere Lösungen folgen in Fr. 161 IX. und X.

made $\widehat{AJ_0} = \widehat{BJ_0}$, $AZ \perp J_0A$, schlage um einen beliebigen Punkt P in AZ einen Kreis K_3 durch A, über J_0P einen Halbkreis K_4 , trage in diesen von P aus eine Sehne PQ ein, welche der Entfernung einer w_0 gleichenden Sehne des Kreises K_3 vom Mittelpunkte P an Länge gleicht, und ziehe J_0Q . Dann schneidet J_0Q den Kreis K_3 in zwei Punkten U_1 und U_2 und es ist nach Fr. 92 I. $U_1U_2 = w_0$, ebenso (wie in Fr. 161 IV.) $J_0U_1 \cdot J_0U_2 = J_0A^2$, deshalb ebenfalls $J_0C = J_0U_2$ und $J_0J = J_0U_1$.

143. Wie findet man in einer gegebenen Geraden G einen Punkt M , dessen Entfernungen MA und MB von zwei gegebenen Punkten A und B eine vorgeschriebene Summe s (oder Differenz d) liefern? Vergl. Fr. 148 I.

I. Anleitung zur Lösung. Der gesuchte Punkt M läßt sich auch auffassen als Mittelpunkt eines Kreises K_1 (Fig. 128) vom Halbmesser $MB = MU$ und letzterer berührt

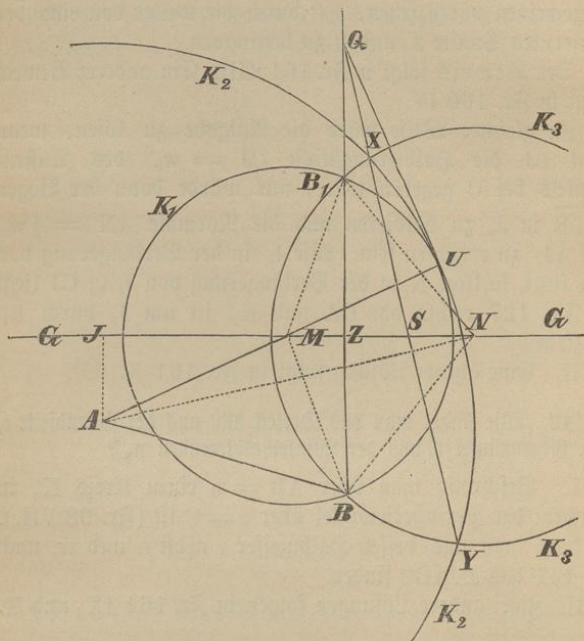


Fig. 128.

den um A mit dem Halbmesser $AU = s = MA + MB$ (oder $d = MA - MB$) geschlagenen Kreis K_2 von innen (oder von außen) in U . Wird ferner um irgend einen Punkt N in G mit dem Halbmesser NB ein dritter Kreis K_3 geschlagen, so

schneiden sich K_3 und K_1 in B und B_1 (Fr. 102 III.), K_3 und K_2 in Y und X (Fr. 102 VII. und Fr. 76), weil $AN > AU - NU > AU - NB_1$ und $AN < AU + NU < AU + NB_1$, (Fr. 91 XIII.). BB_1 und XY schneiden sich in einem Punkte Q, und es muß die nach dem Berührungspunkte U zwischen K_1 und K_2 gezogene Strecke QU die beiden Kreise K_1 und K_2 zugleich berühren.

Lösung. Man mache $BZ \perp G$ und $B_1Z = BZ$, schlage aus A den Kreis K_2 mit dem Halbmesser $AU = s$ (oder d), aus einem Punkte N in G den Kreis K_3 durch B und B_1 , welcher K_2 in Y und X schneidet, und ziehe vom Schnittpunkte Q zwischen BB_1 und YX die Tangente QU an K_2 (Fr. 103 I.); dann schneidet UA die Gerade G in M. — Nach Fr. 103 II. giebt es zwei Tangenten QU an K_2 , zwei Berührungspunkte U und zwei Punkte M in G.

Der Beweis folgt in Fr. 161 XI.

Dürfen A und B auf verschiedenen Seiten von G liegen? Darf G durch A, durch B, oder durch beide gehen? Wie gestaltet sich dann die Lösung?

II. Wie ließe sich die Aufgabe mittels eines biegsamen Fadens von der Länge s (oder d) lösen, dessen Enden in A und B festzumachen wären?

III. Über eine dritte Lösung vergl. 170 VIII.

Sechstes Kapitel.

Die Ähnlichkeit ebener Figuren.

144. Wenn sind zwei Strecken kommensurabel? wenn inkommensurabel?

I. Ist eine Strecke $CD = a$ (Fig. 129) genau 2, 3, 4 . . . x mal so groß als eine andere Strecke $AB = m$, so heißt a ein ganzes

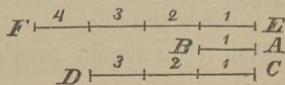


Fig. 129.

Vielfaches von m , während m ein Maß von a genannt wird. Vergl. Fr. 23 III.

Dabei ist $a = xm$, oder $a : m = x$, und m geht also in a auf. Die ganze Zahl x , welche angiebt, wieviel mal m in a enthalten ist, heißt die Maßzahl von a .

II. Geht dieselbe Strecke $AB = m$ sowohl in der Strecke $CD = a$, als in der Strecke $EF = b$ auf, so ist m ein gemeinschaftliches Maß von a und b , und die beiden Strecken a und b heißen dann kommensurabel.

Zwei Strecken, welche kein gemeinschaftliches Maß haben, werden inkommensurabel genannt.

III. Sind u und v ganze Zahlen, also ua und vb ganze Vielfache von a und b , dann geht das gemeinschaftliche Maß m von a und b auch in der Summe und dem Unterschiede von ua und vb auf. Ist nämlich $a = xm$ und $b = ym$, wobei x und y ganze Zahlen sind, so ist (Fr. 20 XIII.):

$$ua \pm vb = uxm \pm vym = (ux \pm vy)m,$$

und hier ist $(ux \pm vy)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

IV. Nimmt man die kleinere a von zwei Strecken a und b so oft als möglich (z_0 mal) von der größeren b hinweg, so bleibt, wenn a nicht in b aufgeht, ein Rest r_0 , welcher kleiner als a ist; es ist dann $b = z_0 a + r_0$.

Nimmt man nun r_0 so oft als möglich (z_1 mal) von a weg und bleibt dabei ein weiterer Rest r_1 , so ist dieser kleiner als r_0 , und es ist $a = z_1 r_0 + r_1$. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens erhalte man der Reihe nach die ferneren Reste $r_2, r_3, \dots$.

Wird dabei endlich einmal ein Rest $= 0$, dann sind a und b kommensurabel.

Man erhält nämlich dann zu :

$$b = z_0 a + r_0$$

$$a = z_1 r_0 + r_1$$

weiter :

$$r_0 = z_2 r_1 + r_2$$

$$r_1 = z_3 r_2 + r_3$$

$$r_2 = z_4 r_3 + r_4$$

.....

$$r_{n-2} = z_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = z_{n+1} r_n$$

Demnach ist also zunächst r_{n-1} ein Vielfaches von r_n ; Gleiches gilt wegen III. auch von r_{n-2} und allen vorhergehenden Resten, und endlich ebenso von a und b .

V. Sind die Strecken a und b kommensurabel, ist z. B. $a = xm$ und $b = ym$, so geht m nach III. auch in $r_0 = b - z_0 a$ auf, daher ferner noch in $r_1 = a - z_1 r_0$, dann in $r_2 = r_0 - z_2 r_1$ und in allen folgenden Resten r_3, r_4 2c.

Da ferner nach IV. jeder folgende Rest kleiner ist als der vorhergehende, so werden auch die Maßzahlen der späteren Reste immer kleiner und kleiner; zudem sind alle Maßzahlen $x, y, \dots$ ganze Zahlen (I.), daher muß, wenn man das in IV. beschriebene Verfahren lange genug fortsetzt, endlich eine Maßzahl $= 0$, also der zugehörige Rest ebenfalls $= 0$ werden.

VI. Aus IV. und V. folgt sofort, daß kein Rest $= 0$ werden kann, falls die Strecken a und b inkommensurabel sind, und daß letztere

VII. inkommensurabel sind, sobald kein Rest verschwindet.

VIII. Etwas umständlicher läßt sich nachweisen, daß in IV. der letzte nicht verschwindende Rest r_n das größte gemeinschaftliche Maß*) für a und b ist.

145. Wie verhalten sich zwei Strecken?

I. Das (geometrische) Verhältniß zweier Strecken findet man nach Fr. 23 IV. durch Division der einen durch die andere. (Vergl. Katech. d. prakt. Arithmetik, S. 135 bis 157; desgl. ebenda Fr. 45.)

*) Vergl. Katechismus der praktischen Arithmetik. 3. Aufl. Leipzig 1889. S. 64.

Der hierbei auftretende Quotient ist eine unbenannte Zahl, und jenachdem diese Zahl rational, oder irrational ist (d. h. jenachdem diese Zahl zur Zahl 1 kommensurabel, oder inkommensurabel ist), heißt das Verhältnis selbst ein rationales, oder ein irrationales Verhältnis.

Auf einfache rationale Verhältnisse in Dreiecken sind wir bereits in Fr. 111 VI. bis VIII. gestoßen.

II. Zwei kommensurable Strecken a und b verhalten sich wie ihre Maßzahlen und stehen in einem rationalen Verhältnis zu einander; denn ihre Maßzahlen sind ganze Zahlen, weshalb ihr Quotient rational sein muß. Ist nämlich $a = xm$ und $b = ym$, so ist (nach Fr. 20 IV.):

$$\frac{a}{b} = \frac{xm}{ym} = \frac{x}{y}.$$

III. Sind die Strecken a und b inkommensurabel, so geht ein Maß m von $b = ym$ nicht in a auf, vielmehr ist jedes Vielfache von m entweder größer, oder kleiner als a .

Ist nun xm das größte unter den Vielfachen von m , welche kleiner als a sind, so wird das nächste Vielfache, nämlich $(x+1)m$, schon größer sein als a ; a liegt also zwischen diesen beiden Vielfachen, oder es ist (nach Fr. 20 VIII. und IV.):

$$xm < a < (x+1)m$$

$$\frac{xm}{b} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)m}{b}$$

$$\frac{xm}{ym} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)m}{ym}$$

$$\frac{x}{y} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{y}.$$

Also läßt sich das Verhältnis der inkommensurablen Strecken a und b zwischen zwei rationale Verhältnisse $\frac{x}{y}$ und $\frac{x+1}{y}$ einschließen. Der Unterschied dieser beiden

Verhältnisse ist $\frac{x+1}{y} - \frac{x}{y} = \frac{1}{y}$ und wird um so kleiner, je größer der Nenner y wird; $y = b : m$ aber kann man beliebig groß machen, wenn man nur das Maß m immer kleiner und kleiner wählt. Wenn nun y wächst, so wächst zugleich auch x , sowohl xm , als $(x+1)m$ nähert sich a , und es rücken sich die beiden Grenzverhältnisse einander immer näher und näher, denn der Unterschied zwischen beiden vermindert sich dadurch, daß $\frac{xm}{b} = \frac{x}{y}$ bei wachsendem y nach und nach größer, $\frac{(x+1)m}{b} = \frac{x+1}{y}$ nach und nach kleiner wird. Je näher aber diese beiden Grenzverhältnisse an einander gerückt sind, desto geringer ist der Fehler, welchen man begeht, wenn man das zwischen ihnen liegende Verhältnis $\frac{a}{b}$ der einen, oder anderen Grenze, z. B. $\frac{x}{y}$, gleichsetzt.

Genau jedoch läßt sich das Verhältnis der beiden inkommensurablen Strecken a und b nie durch das Verhältnis zweier ganzen Zahlen ausdrücken, wie groß man auch y wählen mag; das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist vielmehr irrational, und als genaues Verhältnis hätte die Zahl zu gelten, welcher sich die beiden Grenzenverhältnisse $\frac{x}{y}$ und $\frac{x+1}{y}$ immer mehr und mehr nähern, je mehr sie sich bei Vergrößerung von y einander selbst nähern, indem das eine immer größer, das andere immer kleiner wird.

146. Was versteht man unter Längeneinheit und Längenzahl?

I. Da man nach Fr. 145 III. das Verhältnis zweier inkommensurablen Strecken mit beliebig großer Genauigkeit durch ein rationales Verhältnis ersetzen kann, so darf man eine Strecke m als Maß für alle anderen Strecken wählen und nennt dieses Maß dann die Längeneinheit (Maßstab).

II. Die Maßzahl x einer anderen Strecke $a = xm$ heiße die Längenzahl dieser Strecke.

Zwei Strecken verhalten sich dann wie ihre Längenzahlen. Geht zwar nicht die Längeneinheit, wohl aber ein Teil derselben in einer Strecke auf, so ist die Längenzahl der letzteren ein Bruch.

III. Wegen seiner großen Verbreitung benutzen wir als Längeneinheit das Meter oder den Stab (1^m).

Tabellen über die Unterabteilungen und Vielfachen des Meters und sein Verhältnis zu anderen Längeneinheiten, namentlich den verschiedenen Fußmaßen und deren Unterabteilungen, folgen am Schluß dieses Katechismus.

147. Wenn bilden vier Strecken eine Proportion?

I. Vier Strecken a, b, c und d sind einander proportional oder bilden eine (geometrische) Proportion

$$a:b = c:d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

wenn a und b dasselbe Zahlenverhältnis haben, wie c und d ; sind dagegen a und b inkommesurabel, so stehen a, b, c und d in Proportion, wenn a und b bei jeder beliebigen Annäherung immer dieselben Grenzverhältnisse haben, wie c und d .

II. In jeder richtigen Proportion $a:b = c:d$ gleicht wegen Fr. 20 VIII. das Produkt ad der äußern Glieder dem Produkte bc der innern Glieder.

III. In der stetigen Proportion $a:b = b:d$ heißt $b = \sqrt{ad}$ das geometrische Mittel oder die mittlere Proportionale zu a und d . Vergl. Fr. 19 V. und VI.

IV. Ist eine Strecke a in stetiger Proportion (III.), d. h. so geteilt, daß ihr größerer Abschnitt x das geometrische Mittel zwischen a und ihrem kleinern Abschnitte ($a-x$) ist, so heißt der x liefernde Schnitt der Strecke der goldene Schnitt. Vergl. Fr. 164 V.

$$\text{Aus } a:x = x:(a-x) \text{ findet sich: } x = \frac{a}{2} (\sqrt{5}-1).$$

V. In jeder richtigen Proportion darf man wegen II. die innern Glieder mit einander vertauschen und ebenso die äußern; denn dadurch ändern sich die Produkte nicht.

VI. Über die Prüfung der Richtigkeit einer Proportion und über das Rechnen mit Proportionen vergl. Kateschismus der prakt. Arithm. Fr. 129 bis 131 und Fr. 132 ff.

Die geometrische Lösung der Proportionsaufgaben wird in Fr. 164 gezeigt werden.

148. Wie erhält man an einem Dreieck, oder allgemeiner zwischen zwei Geraden proportionale Strecken?

I. Zieht man in einem Dreieck ABC (Fig. 130) eine Parallele A_1C_1 zu einer Seite AC, so werden die Seiten AB und BC durch die Parallele in je zwei Abschnitte geteilt; dabei sind die oberen Abschnitte BA_1 und BC_1 den Seiten BA und BC, die Parallele A_1C_1 aber der dritten Seite AC proportional.

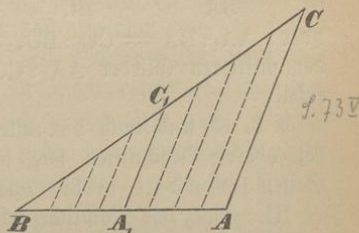


Fig. 130.

Vor. $A_1C_1 \parallel AC$.

Beh. $BA_1 : BA =$

$$BC_1 : BC = A_1C_1 : AC.$$

Bew. Sind BA_1 und BA kommensurabel, wäre also etwa $BA_1 = xm_3$ und $BA = ym_3$, so trage man das gemeinschaftliche Maß m_3 auf ihnen ab und ziehe durch die Teilpunkte (deren einer mit A_1 zusammenfällt) Parallelen zu AC; dann werden BC_1 und BC beziehungsweise auch in x und y gleiche Teile m_1 geteilt (Fr. 111 VI.); daher steht:

$$BA_1 : BA = xm_3 : ym_3 = x : y = xm_1 : ym_1 = BC_1 : BC.$$

Nach Fr. 111 VII. verhält sich ferner auch $A_1C_1 : AC = xm_2 : ym_2 = x : y = BA_1 : BA$. Verbindet man aber die gleichen Verhältnisse (nach Fr. 20 V.), so ergibt sich (wie auch schon in Fr. 111 VI. bis VII.):

$$A_1C_1 : AC = BA_1 : BA = BC_1 : BC.$$

Wären dagegen BA_1 und BA incommensurabel, so sind auch BC_1 und BC incommensurabel; sind m_3 und m_1 wieder Maße von BA_1 und BC_1 , so fällt zwar ein Teilpunkt auf A_1 und auf C_1 , nicht aber auf A und auf C , AC liegt vielmehr zwischen der y^{ten} und $(y+1)^{\text{ten}}$ Parallelen, und deshalb liegt das Verhältnis $BC_1 : BC$, ebenfalls nach Fr. 111 VI., zwischen denselben Grenzen (Fr. 145 III.), wie das Verhältnis $BA_1 : BA$. Daher gilt (nach Fr. 147 I.) der ausgesprochene Satz auch jetzt noch.

II. Subtrahiert man die gleichen Verhältnisse $BA_1 : BA$ und $BC_1 : BC$ von 1 (Fr. 20 VIII.) und macht die Reste gleichnamig, so wird:

$$1 - \frac{BA_1}{BA} = 1 - \frac{BC_1}{BC}; \quad \frac{BA - BA_1}{BA} = \frac{BC - BC_1}{BC},$$

oder: $AA_1 : BA = CC_1 : BC$, wofür man bei Vertauschung der mittleren Glieder $AA_1 : CC_1 = BA : BC = BA_1 : BC_1$ erhält,

d. h. es sind auch die unteren Abschnitte AA_1 und CC_1 den oberen Abschnitten BA_1 und BC_1 , sowie den ganzen Seiten BA und BC proportional.

III. Ganz das Nämliche tritt auf, wenn die Punkte A_1 und C_1 nicht in den Schenkeln AB und CB , sondern auf deren Verlängerungen jenseits B liegen.

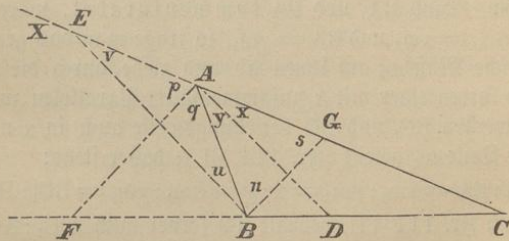


Fig. 131.

IV. Die Halbierungslinie AD (Fig. 131) eines Winkels A des Dreiecks ABC teilt die Gegenseite BC in zwei Abschnitte

BD und DC, welche den anliegenden Seiten AB und AC proportional sind. Vergl. Fr. 73 V.

Zieht man durch B eine Parallele BE zu DA, bis sie in E von der verlängerten CA getroffen wird, dann ist $\angle u = \angle y$ und $\angle v = \angle x$ (Fr. 62 I.); da nun AD den Winkel A halbiert, also $\angle x = \angle y = \frac{1}{2} \angle BAC$ ist, so muß nach Fr. 20 IV. auch $\angle u = \angle v$, und weiter nach Fr. 74 VI. noch $AE = AB$ sein. Aus $AD \parallel EB$ folgt nun nach II., daß $BD : DC = EA : AC$ und daher (wegen Fr. 20 IV.) auch $BD : DC = BA : AC$ ist.

V. Halbirt AF in Fig. 131 den Außenwinkel BAX des $\triangle ABC$ und ist $BG \parallel AF$, so läßt sich ganz so wie in IV. nachweisen, daß $\angle n = \angle q = \angle p = \angle s$, also $AG = AB$ ist, woraus dann nach II. folgt, daß $BF : CF = GA : CA$, oder $BF : CF = AB : AC$ ist, daß also auch

die Halbierungslinie AF des Außenwinkels BAX die Gegenseite BC den beiden anderen Seiten proportional schneidet.

VI. Weil in Fig. 131 nach Fr. 20 VIII. auch $\angle q + \angle y = \angle p + \angle x$ ist, so stehen die beiden Halbierungslinien AD und AF auf einander senkrecht (Fr. 34 III. und 39 II.).

Der Scheitel A liegt demnach im Halbkreise über FD.

VII. Also ist der geometrische Ort (Fr. 74 XVII.) eines Punktes A einer Ebene, dessen Entfernungen AB und AC von zwei gegebenen Punkten B und C dieser Ebene in einem gegebenen Verhältnisse stehen (vergl. Fr. 144), ein Kreis vom Halbmesser $r = \frac{1}{2} DF$. Dieser Kreis heißt der apollonische Kreis.

Für $AB : AC = 1$ fällt D in die Mitte der Seite BC (Fr. 80 II.), DA wird senkrecht BC und F rückt unendlich weit fort, indem $\angle p = \angle C$ und $\angle q + \angle y = \angle D = 90^\circ$ werden, und r wächst ins Unendliche: der Kreis wird zur Geraden. Vergl. Fr. 86 V.

VIII. Auch BG steht auf BE senkrecht (Fr. 71 III.), da:

$$\angle n + \angle u = \angle s + \angle v.$$

IX. Eine Erweiterung von I. und von Fr. 111 VI. bis VIII. bezw. Fr. 108 III. bildet der Satz: Werden zwei Gerade G_1 und G_2 , Fig. 132, von drei Parallelen P_1 , P_2 und P_3 geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte H_1J_1 , J_1K_1 und H_1K_1 auf der einen zu einander, wie die entsprechenden Abschnitte H_2J_2 , J_2K_2 und H_2K_2 auf der andern.

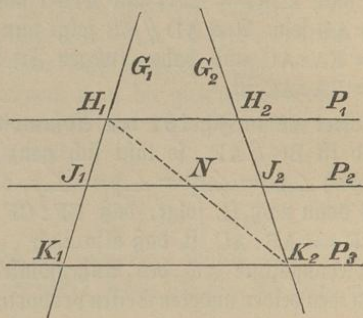


Fig. 132.

Beweis. Man ziehe H_1K_2 , so ist nach I. und Fr. 20 V. $H_1J_1 : J_1K_1 : H_1K_1 = H_1N : NK_2 : H_1K_2 = H_2J_2 : J_2K_2 : H_2K_2$.

X. Für die Abschnitte der Parallelen gilt in Fig. 132 die Gleichung*):

$$J_1J_2 \cdot H_1K_1 = H_1H_2 \cdot J_1K_1 + K_1K_2 \cdot H_1J_1.$$

Beweis. Nach I. und Fr. 147 II. ist:

$$J_1N = \frac{K_1K_2 \cdot H_1J_1}{H_1K_1} \text{ und}$$

$$J_2N = \frac{H_1H_2 \cdot K_2J_2}{K_2H_2} = \frac{H_1H_2 \cdot K_1J_1}{K_1H_1}, \text{ folglich}$$

$$\begin{aligned} J_1J_2 \cdot H_1K_1 &= (J_1N + J_2N) H_1K_1 \\ &= H_1J_1 \cdot K_1K_2 + K_1J_1 \cdot H_1H_2. \end{aligned}$$

Bei $H_1J_1 = K_1J_1 = \frac{1}{2} H_1K_1$ wird (wie in Fr. 111 III.):

$$J_1J_2 = \frac{1}{2} (K_1K_2 + H_1H_2).$$

*) Über die Bedeutung der Produkte in dieser Gleichung vergl. die Anmerkung zu Fr. 159 II.

XI. Aus IV. und V. fließt wegen Fr. 20 V. auch noch:

$$CD : BD = CF : BF,$$

die Gegenseite CB wird also von den beiden Winkelhalbierenden AD und AF innerlich und äußerlich in gleichem Verhältnisse (harmonisch) geschnitten.

149. Lassen sich die Sätze in Fr. 148 umkehren?

I. Schneidet die Strecke A_1C_1 (Fig. 133) die beiden Seiten BA und BC des Dreiecks ABC so, daß die oberen Abschnitte BA_1 und BC_1 den ganzen Seiten BA und BC, oder den unteren Abschnitten A_1A und C_1C proportional sind, so ist die Strecke A_1C_1 der dritten Seite AC parallel.

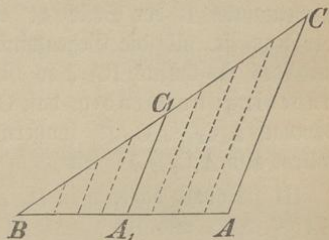


Fig. 133.

Sind BA_1 und BC_1 den ganzen Seiten BA und AC proportional, so sind sie auch den Abschnitten A_1A und C_1C proportional (vergl. Fr. 148 II.) und umgekehrt. Beide Voraussetzungen fallen also wesentlich zusammen und der Satz braucht bloß noch für die erstere Voraussetzung ($BA_1 : BC_1 = BA : BC$) bewiesen zu werden.

Zieht man nun durch A_1 eine Parallele zu AC, so muß dieselbe die Seite BC in einem zwischen B und C gelegenen Punkte C_2 schneiden, und es wäre dann:

$$\frac{BC_2}{BC} = \frac{BA_1}{BA} \quad (\text{Fr. 148 I.})$$

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} \quad (\text{Vor.})$$

$$\frac{BC_2}{BC} = \frac{BC_1}{BC} \quad (\text{Fr. 20 V.})$$

$$BC_2 = BC_1 \quad (\text{Fr. 20 VIII.}).$$

Es fällt also der Punkt C_2 auf C_1 , d. h. die Strecke A_1C_2 fällt mit A_1C_1 zusammen, und es ist demnach $A_1C_1 \parallel AC$.

II. Versucht man in gleicher Weise wie in I. den Parallelismus zwischen A_1C_1 und AC für den Fall nachzuweisen, wo $BA_1 : A_1C_1 = BA : AC$ ist, so findet man, daß dann $A_1C_2 = A_1C_1$ sein müsse. Da es nun aber in BC (und seiner Verlängerung) im allgemeinen zwei Punkte C_1 und C_3 giebt, welche von A_1 um die Strecke $A_1C_2 = A_1C_1$ entfernt sind (Fr. 74 XI. und XII.), und da diese zwei Punkte in BC von B aus nach C hin liegen (Fr. 69 VII.), sobald der Gegenwinkel B der Seite AC und der Schneidenden A_1C_1 kleiner ist, als die Gegenwinkel C und C_1 der Seite BA und des Abschnitts BA_1 , so ist es in diesem Falle nicht unbedingt notwendig, daß C_2 mit C_1 zusammenfällt und demnach $A_1C_1 \parallel AC$ ist, sondern es könnte C_2 auch auf C_3 fallen, also $A_1C_3 \parallel AC$ sein.

III. Sobald dagegen in II. $\angle C_1 < \angle B > \angle C$ oder $BA_1 < A_1C_1$ und $BA < AC$ ist, fällt B zwischen jene zwei Punkte C_1 und C_3 , und in der Seite BC selbst liegt deshalb nur der eine dieser Punkte, nämlich C_1 (während der andere C_3 in der Verlängerung von CB liegt).

Daher muß jetzt der ebenfalls zwischen B und C liegende Punkt C_2 mit C_1 zusammenfallen, oder es muß $A_1C_1 \parallel AC$ sein.

IV. Fallen die in II. und III. erwähnten beiden Punkte C_1 und C_3 , welche von A_1 um A_1C_1 entfernt sind, von B aus beide nach C hin, so ist von den beiden Winkeln A_1C_1B und A_1C_3B der eine spitz, der andere stumpf (Fr. 74 III.).

Verhält sich daher die schneidende Strecke A_1C_1 zur dritten Seite AC wie der obere Abschnitt BA_1 zu seiner Seite BA , so ist die Strecke A_1C_1 der Seite AC parallel, sobald die Gegenwinkel des Abschnitts BA_1 und seiner Seite BA entweder beide spitz oder beide stumpf sind.

V. Teilt man eine Dreiecksseite BC (Fig. 131) in D proportional den beiden anderen Seiten AB und AC , so halbiert AD den Gegenwinkel A der ersten Seite BC .

Verlängert man nämlich CA nach E, so daß $AE = AB$ wird, dann ist (nach der Vor.) $AB:BD = AC:DC$, also auch $EA:BD = AC:DC$ (Fr. 20 IV.), folglich $AD \parallel EB$ (nach I.), und deshalb $\angle x = \angle v$ und $\angle y = \angle u$ (Fr. 62 I.); da nun (nach Fr. 74 I.) $\angle v = \angle u$ ist, so muß (nach Fr. 20 IV.) auch $\angle x = \angle y$ sein.

150. Welche Grundsätze folgen aus dem Begriffe der Ähnlichkeit?

Da zwei ebene Figuren ähnlich genannt werden (Fr. 66 III.), sobald sie gleiche Gestalt haben, so muß man:

I. ähnliche Figuren $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ (Fig. 134) erhalten, wenn man ähnliche Figuren, z. B. Dreiecke, in gleicher Weise aneinandersetzt; und

II. ähnliche Figuren in gleicher Weise in ähnliche Teile, z. B. in ähnliche Dreiecke, zerlegen können.

151. Wenn heißen zwei Punkte oder Strecken ähnlichliegend?

I. Lassen sich zwei ähnliche Figuren, wie $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ in Fig. 134, von zwei Punkten P_1 und P_2 aus in ähnliche Figuren, z. B. in Dreiecke, zerlegen, so heißen jene zwei Punkte ähnlichliegende (homologe).

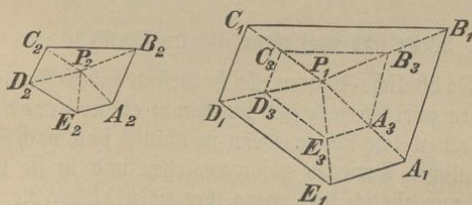


Fig. 134.

II. Haben zwei ähnliche Figuren, wie $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ in Fig. 134, einen gemeinschaftlichen ähnlichliegenden Punkt P_1 , so heißt dieser, wenn die entsprechenden Seiten paarweis parallel sind, Ähnlichkeitspunkt. (Vergl. Fr. 105 IV.)

III. Ähnlichliegende Strecken verbinden ähnlichliegende Punkte.

152. Wovon hängt die Gestalt eines Dreiecks ab?

I. Aus Fr. 78 II. und V. (vergl. Fig. 66) folgt: daß die Änderung eines Winkels A in einem Dreieck ABC auch die Änderung der Gegenseite CB nach sich zieht, also auch die der Gestalt.

II. Vergrößert man eine Seite BC (vergl. Fig. 66) eines Dreiecks ABC, ohne die beiden anderen Seiten zu ändern, so ändert sich nach Fr. 78 III. auch der Gegenwinkel A der ersteren Seite, mithin auch die Gestalt.

III. Vergrößert man (vergl. Fig. 69) eine Seite, ohne die anliegende Seite und den zwischen diesen beiden Seiten liegenden Winkel des Dreiecks zu ändern, so ändert sich ebenfalls die Gestalt.

IV. Soll sich also die Gestalt eines Dreiecks nicht ändern, so darf weder die Größe eines Winkels, noch das Verhältnis zweier Seiten geändert werden. Die Gestalt eines Dreiecks wird demnach durch die Größe seiner drei Winkel und durch das Verhältnis seiner drei Seiten bedingt.

153. Wenn sind zwei ebene Figuren ähnlich?

I. Da ähnliche Figuren gleiche Gestalt haben (Fr. 66 III.), so können zwei Dreiecke und überhaupt ebene geradlinige Figuren (welche sich ja, wenn sie ähnlich sind, nach Fr. 150 aus ähnlichen Dreiecken zusammensetzen und in sie zerlegen lassen), nur ähnlich sein, wenn ihre Winkel der Reihe nach einander gleich und ihre Seiten der Reihe nach einander proportional sind, also in demselben geometrischen Verhältnisse zu einander stehen.

II. Zwei krummlinige bzw. gemischtlinige ebene Figuren sind ähnlich, wenn sich in jeder von einem Punkte aus nach allen Punkten proportionale Strecken ziehen lassen.

154. Welche Sätze über die Ähnlichkeit folgen weiter hieraus?

I. Zwei ebene Figuren, welche einer dritten ähnlich sind, sind selbst ähnlich, weil ihre Winkel der Reihe nach den Winkeln der dritten Figur (Fr. 153 I.) und deshalb unter sich gleich sind (Fr. 20 V.), und weil die Seiten beider Figuren der Reihe nach in demselben Verhältniss zu einander stehen (Fr. 20 V.), nämlich in demselben Verhältnisse, in welchem die Seiten der dritten Figur zu einander stehen.

II. In ähnlichen ebenen Figuren verhalten sich ähnlichliegende Strecken (Fr. 151 III., I.) wie zwei ähnlichliegende Seiten.

III. In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge wie zwei ähnlichliegende Seiten oder Strecken.

Sind u_1 und u_2 die Umfänge der beiden Figuren, $a_1, b_1, c_1 \dots$ die Seiten der einen, $a_2, b_2, c_2 \dots$ die Seiten der anderen, so ist nach Fr. 153 I. und 20 VIII.)

$$\frac{a_1}{a_1} = \frac{a_2}{a_2}, \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} + \frac{c_1}{a_1} + \dots = \frac{a_2}{a_2} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{c_2}{a_2} + \dots$$

$$\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{a_1} = \frac{a_2 + b_2 + c_2 + \dots}{a_2}$$

$$\frac{u_1}{a_1} = \frac{u_2}{a_2}.$$

IV. Regelmäßige Figuren (Fr. 113 I.) von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, und ihre Umfänge verhalten sich wie die Halbmesser der eingeschriebenen und wie jene der umgeschriebenen Kreise.

V. Alle Kreisflächen, alle Ausschnitte und Abschnitte von gleichen Centriwinkeln sind unter sich ähnlich (Fr. 153 II.), und ihre Mittelpunkte sind ähnlichliegende Punkte.

155. Wie kann man von einem Dreieck ABC ein diesem ähnliches Dreieck abschneiden?

I. Da in Zr. 148 I., wo $A_1C_1 \parallel AC$ war, nicht bloß $\angle A_1 = \angle A$ und $\angle C_1 = \angle C$ (Zr. 62 I.), sondern auch $BA_1 : BA = BC_1 : BC = A_1C_1 : AC$ war, so ist dort $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ (Zr. 153 I.).

II. Jede Strecke A_1C_1 also, welche einer Seite AC des $\triangle ABC$ parallel ist, schneidet von diesem Dreiecke ein ihm ähnliches $\triangle A_1BC_1$ ab.

III. Verbindet man die Mitten der drei Seiten eines Dreiecks ABC geradlinig unter einander, so sind die drei Verbindungslinien den drei Seiten des Dreiecks ABC parallel (Zr. 149 I.) und zerlegen das Dreieck ABC in vier unter sich kongruente (Zr. 108 I.) und dem ganzen $\triangle ABC$ ähnliche Dreiecke (II.).

IV. Verbindet man die vier Seitenmitten eines Vierecks geradlinig, so begrenzen die vier Verbindungslinien ein Parallelogramm (Zr. 59 II.), weil je zwei derselben einer Diagonale parallel sind (Zr. 149 I.). Ist das Viereck ein Rechteck, oder ein Rhombus, so erhält man einen Rhombus (Zr. 81 I.), oder ein Rechteck (Zr. 110 VIII.).

156. Wenn sind zwei Dreiecke ähnlich?

Um nachzuweisen, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, braucht man nicht darzuthun, daß die drei Winkel der Reihe nach einander gleich und die drei Seiten einander proportional sind; vielmehr sind zwei Dreiecke*) $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ schon ähnlich:

I. wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen;

II. wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der diesen Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen;

) Auch bei zwei ähnlichen Dreiecken verfährt man, wie in Zr. 67 VII.) angegeben wurde; ist $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, so ist dann auch:

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2,$$

oder kürzer:

$$c_1 : a_1 : b_1 = c_2 : a_2 : b_2.$$

III. wenn sie im Verhältniß zweier Seiten und in dem Gegenwinkel der größeren dieser Seiten übereinstimmen;

IV. wenn sie im Verhältniß zweier Seiten übereinstimmen, und wenn außerdem das eine Paar der Gegenwinkel gleich ist und die beiden Winkel des anderen Paares zugleich spitz, oder zugleich stumpf sind;

V. wenn sie in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen, oder wenn die drei Seiten des einen der Reihe nach den drei Seiten des anderen proportional sind.

Beweis zu I. Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen Winkeln $B_1 = B_2$ auf einander (Fr. 31), so folgt aus der in I. vorausgesetzten Gleichheit der Winkel $A_1 = A_2$, daß $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ (Fr. 62 II.) ist; deshalb ist:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \text{ (Fr. 155 II.)}.$$

Beweis zu II. Legt man die beiden Dreiecke mit den beiden gleichen Winkeln $B_1 = B_2$ auf einander (Fr. 31), so daß die proportionalen Seiten $B_1A_1 = c_1$ und $B_2A_2 = c_2$, sowie $B_1C_1 = a_1$ und $B_2C_2 = a_2$ auf einander zu liegen kommen, dann ist $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ (Fr. 149 I.); deshalb ist

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \text{ (Fr. 155 II.)}.$$

Beweis zu III. und IV. Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen Winkeln B_1 und B_2 (vergl. Fig. 133) und den einander proportionalen anliegenden Seiten B_1A_1 und B_2A_2 auf einander (Fr. 31 und 22 V.), so werden die Gegenseiten A_1C_1 und A_2C_2 parallel (Fr. 149 III., oder IV.) und deshalb wiederum $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (Fr. 155 II.).

Beweis zu V. Dieser Fall, in welchem $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ ist, geht in II. über, sobald ein Winkelpaar gleich groß ist, z. B. $A_1 = A_2$.

Zeichnete man nun ein Dreieck $A_3B_3C_3$, in welchem $\angle A_3 = \angle A_2$, $b_3 = b_1$ und $c_3 = c_1$ wäre, also (wegen der Vor.) auch $b_3 : c_3 = b_1 : c_1 = b_2 : c_2$; dann wäre $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (II.) und $b_3 : a_3 = b_2 : a_2$ (Fr. 153 I.); da aber auch $b_1 : a_1 = b_2 : a_2$ vorausgesetzt wurde, so müßte auch

$b_3 : a_3 = b_1 : a_1$, und weil $b_3 = b_1$ gemacht wurde, so müßte weiter $b_1 : a_3 = b_1 : a_1$, d. h. $a_3 = a_1$ sein. Dann wären aber die in allen drei Seiten übereinstimmenden Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_1B_1C_1$ kongruent (Zr. 80 I.) und demgemäß $\angle A_3 = \angle A_1$ (Zr. 67 II.). Da nun $\angle A_3 = \angle A_2$ gemacht wurde, so ist auch $\angle A_1 = \angle A_2$ (Zr. 20 V.) und $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (II.).

VI. Zum Schluß möge auf die große Verwandtschaft zwischen den vorstehenden Ähnlichkeitsätzen und den Kongruenzätzen (Zr. 80) aufmerksam gemacht werden.

157. Wie findet man in ähnlichen Figuren ähnlichliegende Punkte?

Ist $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$ (Fig. 135) und will man in letzterer den Punkt P_2 suchen, welcher P_1 in ersterer ähnlich liegt, so ziehe man P_1A_1 und P_1E_1 und mache $\angle E_2A_2P_2 = \angle E_1A_1P_1$ und $\angle A_2E_2P_2 = \angle A_1E_1P_1$; dann ist der

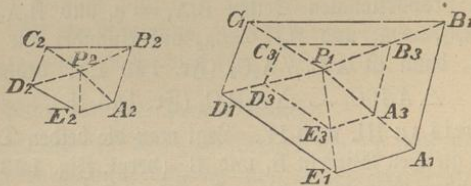


Fig. 135.

Schnittpunkt P_2 zwischen A_2P_2 und E_2P_2 der gesuchte Punkt, weil zunächst $\triangle A_2P_2E_2 \sim \triangle A_1P_1E_1$ (Zr. 156 I.), dann aber $\angle P_2A_2B_2 = \angle P_1A_1B_1$ und $P_2A_2 : P_1A_1 = A_2E_2 : A_1E_1 = A_2B_2 : A_1B_1$ (Zr. 153 I.), daher auch:

$$\triangle A_2P_2B_2 \sim \triangle A_1P_1B_1 \text{ (Zr. 156 II.) } \text{ u.}$$

158. Wie zeichnet man über einer gegebenen Strecke A_2B_2 eine Figur, welche einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich ist?

I. Man lege B_2A_2 (Fig. 135) parallel zu der ihr ähnlichliegenden Seite B_1A_1 der gegebenen Figur $A_1B_1C_1D_1E_1$, zerlege

letztere (durch Diagonalen, oder sonstwie) in Dreiecke $A_1B_1P_1$, $B_1C_1P_1$, zc. und ziehe $A_2P_2 \parallel A_1P_1$, $B_2P_2 \parallel B_1P_1$, $C_2P_2 \parallel C_1P_1$, $B_2C_2 \parallel B_1C_1$ zc.; dann ist (nach Fr. 156 I.) $\triangle A_2P_2B_2 \sim \triangle A_1P_1B_1$, $\triangle B_2P_2C_2 \sim \triangle B_1P_1C_1$ zc., also auch $A_2B_2C_2D_2E_2 \sim A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fr. 150 I.).

II. Noch einfacher wird die Lösung, wenn man P_1 zu einem Ähnlichkeitspunkte (Fr. 151 II.) der beiden Figuren macht; so wird $A_3B_3C_3D_3E_3 \sim A_1B_1C_1D_1E_1$, wenn man zwischen den Geraden P_1A_1 , P_1B_1 zc. die Strecken $A_3B_3 \parallel A_1B_1$, $B_3C_3 \parallel B_1C_1$ zc. zieht und dafür sorgt, daß $A_3B_3 = A_2B_2$ wird.

Ob dabei P_1 innerhalb $A_1B_1C_1D_1E_1$, oder in einer Seite, in einem Eckpunkte, oder außerhalb dieser Figur liegt, ist ganz gleichgültig. Man könnte daher auch $A_3B_3 = A_2B_2$ auf einer Parallelen zu B_1A_1 auftragen und P_1 als Schnittpunkt zwischen B_3B_2 und A_1A_3 bestimmen.

III. Soll von einem mit der Kette, oder dem Meßtische vermessenen Feldstück nach einem verjüngten (Transversal-) Maßstabe eine Karte angefertigt werden, so ist eine dem Feldstück ähnliche Figur zu zeichnen. Vergl. darüber Katch. d. Feldmeßkunst (fünfte Aufl. Leipzig 1891) Fr. 97 bis 107.

159. Welche proportionale Strecken in Dreiecken sind noch hervorzuheben?

I. Nach Fr. 108 XIII. und Fr. 64 III. heißt in einem Parallelogramm und Trapez die Entfernung der Paralleelseiten von einander, im Dreieck die Entfernung einer Spitze von deren Gegenseite die Höhe.

Die auf der Höhe senkrechte Seite des Dreiecks und des Parallelogramms heißt Grundseite.

II. Das Produkt*) zweier Seiten $AC = b$ und $BC = a$ (Fig. 136 S. 168) eines $\triangle ABC$ ist gleich dem Produkt

*) Da man zwei Strecken ebensowenig wie zwei benannte Zahlen mit einander multiplizieren kann, so denke man sich unter diesen Produkten die Produkte der (unbenannten) Längenzahlen (Fr. 146 II.). Eine andere Deutung dieser Produkte wird sich, im Anschluß an Fr. 169 und 170, später (Fr. 177 V.) finden.

aus der Höhe $CE = h_c$ für die dritte Seite $AB = c$ und dem Durchmesser $DA = 2r$ des umgeschriebenen Kreises.

Zieht man nämlich DC , so ist

$$\angle B = \angle D \quad (\text{Fr. 96 II.})$$

$$\angle E = R = \angle ACD \quad (\text{Fr. 96 III.})$$

$$\triangle BEC \sim \triangle DCA \quad (\text{Fr. 156 I.})$$

$$BC : CE = DA : AC \quad (\text{Fr. 153 I.})$$

$$BC \cdot AC = CE \cdot DA \quad (\text{Fr. 147 II.}).$$

III. Das Produkt der drei Seiten eines Dreiecks dividiert durch den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist gleich dem Produkt aus Grundseite und Höhe.

Da nämlich (nach II.) $ab = 2rh_c$ war, so wird nach Fr. 20 VIII. weiter $abc = 2rh_c c$, oder $abc : 2r = h_c c$.

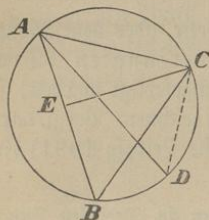


Fig. 136.

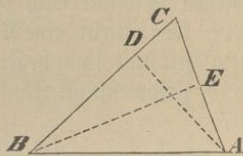


Fig. 137.

IV. Zwei Höhen AD und BE (Fig. 137) eines Dreiecks ABC verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Grundseiten BC und AC . Weil nämlich $\angle C = \angle C$ und $\angle E = R = \angle D$, so ist $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (Fr. 156 I.), also:

$$AD : AC = BE : BC \quad (\text{Fr. 153 I.})$$

$$AD : BE = AC : BC \quad (\text{Fr. 147 V.}).$$

V. Gleiches gilt von den zwei Höhen eines Parallelogramms.

VI. Zieht man durch die drei Spitzen eines Dreiecks ABC (Fig. 138) drei Gerade parallel zu den drei Seiten, bis sie sich in A_1 , B_1 und C_1 schneiden, so erhält man drei Parallelo-

gramme $ABCB_1$, AC_1BC und ABA_1C ; daher ist $AB_1 = AC_1 = BC$, $BC_1 = BA_1 = AC$ und $CA_1 = CB_1 = AB$ (Fr. 108 III.).

Die auf den Seiten des $\triangle A_1B_1C_1$ in deren Mitten A , B und C errichteten Senkrechten AA_2 , BB_2 und CC_2 , welche sich nach Fr. 88 V. in einem Punkte H schneiden, sind zugleich (wegen Fr. 62 V.) die drei Höhen des $\triangle ABC$ und demnach schneiden sich die drei Höhen jedes Dreiecks in einem Punkte H . Dieser Punkt kann innerhalb, oder außerhalb des Dreiecks, oder in einer Spitze desselben liegen.

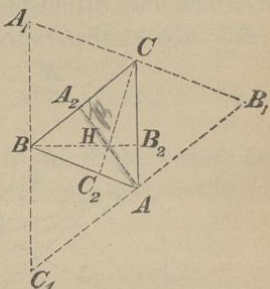


Fig. 138.

VII. Verbindet man die drei Höhen-Fußpunkte A_2 , B_2 und C_2 geradlinig, so halbieren die drei Höhen AA_2 , BB_2 und CC_2 die drei Winkel des Fußpunktendreiecks $A_2B_2C_2$.

Da nämlich $\angle HC_2B = \angle HA_2B = R$, so läßt sich durch die vier Punkte B , C_2 , H , A_2 und in gleicher Weise auch durch die vier Punkte C , B_2 , H , A_2 ein Kreis legen (Fr. 97 III.); daher ist $\angle HA_2C_2 = \angle HBC_2$ und $\angle HA_2B_2 = \angle HCB_2$ (Fr. 96 II.). Nun ist aber $\angle BHC_2 = \angle CHB_2$ (Fr. 42 II., oder 20 I.) und $\angle BC_2H = R = CB_2H$, daher weiter $\angle HBC_2 = \angle HCB_2$ (Fr. 69 I.). Deshalb ist endlich $\angle HA_2C_2 = \angle HA_2B_2$ (Fr. 20 IV.). Ebenso findet man, daß $\angle HB_2A_2 = \angle HB_2C_2$ und $\angle HC_2A_2 = \angle HC_2B_2$ ist.

VIII. Der Höhenschnittpunkt H ist daher, jenachdem er innerhalb, oder außerhalb des Dreiecks ABC liegt, der Mittelpunkt des eingeschriebenen, oder des einen der drei äußeren Berührungskreise des Fußpunktendreiecks $A_2B_2C_2$, und die drei Eckpunkte A , B , C sind die Mittelpunkte der drei anderen dieser Kreise. — Vergl. auch Fig. 102 auf S. 108.

IX. Verbindet man den Höhengschnittpunkt H (Fig. 139) mit den Endpunkten B und C der einen Seite BC, den Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises (Fr. 88 IV.) mit den Mitten N_2 und N_3 der beiden anderen Seiten AC und AB, so erhält man zwei Dreiecke BHC und N_2MN_3 , deren Seiten paarweise parallel sind (Fr. 57 II., 149 I.). Da diese Dreiecke ähnlich sind (Fr. 63 I., 156 I.), so verhält sich

$$HB : MN_2 = BC : N_2N_3 = 2 : 1 \text{ (Fr. 148 I.), d. h.}$$

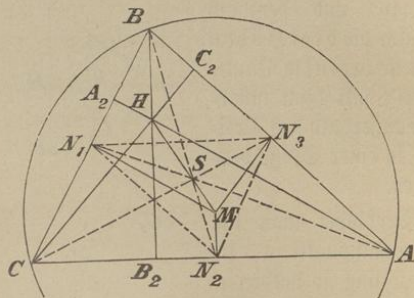


Fig. 139.

der Höhengschnittpunkt H ist von einem Eckpunkte B doppelt so weit entfernt, als jener Mittelpunkt M von der Gegenseite AC.

X. Zieht man in einem $\triangle ABC$ (Fig. 140) eine Schwerpunkts-Transversale, d. h. eine Strecke AN von einer Spitze A nach der Mitte N der Gegenseite BC (die Mittellinie m_a , Fr. 64 III.), so halbiert diese jede Parallele DE zur Gegenseite.

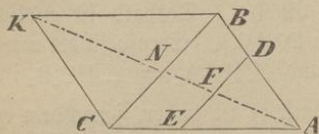


Fig. 140.

Nach Fr. 148 I. verhält sich nämlich:

$$\frac{DF}{BN} = \frac{AF}{AN} = \frac{FE}{NC},$$

und weil $BN = NC$ ist, so muß auch $DF = FE$ sein (Fr. 20 VIII.). Vergl. Fr. 111 IX.

XI. Jede Diagonale AK (Fig. 140) eines Parallelogramms $ABKC$ halbiert jede zur anderen Diagonale BC parallele Strecke DE (X.); denn im $\triangle ABC$ ist $BN = NC$ (Fr. 110 III.), und zugleich soll $DE \parallel BC$ sein.

XII. Aus X. ergibt sich leicht, daß die durch die Mitten F und N der Paralleelseiten DE und BC eines Trapezes $EDBC$ gelegte Gerade durch den Schnittpunkt A der nicht-parallelen Seiten BD und CE geht (vergl. Fr. 111 X.) und alle Parallelen zu den Paralleelseiten halbiert.

Denn verbindet man A mit N , so schneidet AN die Seite DE in ihrer Mitte F .

XIII. Die drei Mittellinien oder Schwerpunkts-Transversalen des $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkte S (dem Schwerpunkte des $\triangle ABC$).

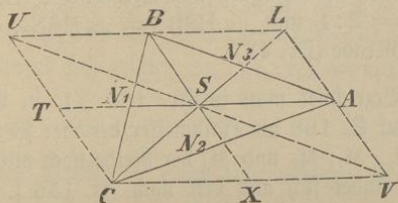


Fig. 141.

Zieht man durch die Spitzen des Dreiecks ABC je zwei Parallelen UL und CV , UC und LV (Fig. 141), zu den (bis T und X verlängerten) Transversalen AN_1 und BN_2 , so ist nach Fr. 148 II. $CT = TU$ und $CX = XV$, weil ja bez. $CN_1 = N_1B$ und $CN_2 = N_2A$ ist (X.). Daher ist der Schnittpunkt S zwischen AN_1 und BN_2 zugleich der Schnittpunkt der Diagonalen VU und CL (Fr. 110 IV.), und es ist $CS = SL$ (Fr. 110 III.). Da nun weiter $AS \parallel LB$ und $AL \parallel SB$ (nach der Konstruktion), so ist der Punkt N_3 , worin AB von der Diagonale CL geschnitten wird, die Mitte von AB (Fr. 110 III.), d. h. die dritte Transversale CN_3 geht ebenfalls durch S .

XIV. Da ferner in Fig. 141 im Parallelogramm ASBL wegen Fr. 110 III. noch $SN_3 = N_3L$ sein muß, so ist $N_3S = \frac{1}{2}LS = \frac{1}{2}SC$, also $SC = 2N_3S$ und $N_3C = 3N_3S$, d. h.

die drei Mittellinien oder Schwerpunkts-Transversalen schneiden sich gegenseitig im Verhältnis 1 : 2.

XV. Von den vier*) merkwürdigen Punkten des Dreiecks (XIII., VI., Fr. 88 V., Fr. 104 II.) liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises in einer Geraden HSM, und es verhält sich $MS : SH = 1 : 2$.

In den beiden $\triangle BHS$ und N_2MS (Fig. 139) ist nämlich $\angle HBS = \angle MN_2S$ (Fr. 62 I.) und $BH : N_2M = 2 : 1 = BS : N_2S$ (IX. und XIV.), also $\triangle BHS \sim \triangle N_2MS$ (Fr. 156 II.), und deshalb nach Fr. 153 I. $HS : MS = BH : N_2M = 2 : 1$ und $\angle HSB = \angle MSN_2$, also auch HSM eine Gerade (Fr. 43).

XVI. Bezeichnet man in Fr. 105 XI. in Bezug auf Fig. 102 auf S. 108 die Halbmesser der vier Berührungskreise um M_0, M_1, M_2 und M_3 der Reihe nach mit r_0, r_1, r_2 und r_3 , so findet sich aus den nach Fr. 156 I. ähnlichen $\triangle AM_1U_2$ und AM_0L_2 die Proportion $M_1U_2 : M_0L_2 = AU_2 : AL_2$; da aber $AU_2 = AN_2 + N_2C + CU_2 = a_2 + c_2 + c_1 = c_0 + a_0 + b_0 = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$ ist, so wird:

$$r_1 : r_0 = s : a_0, \quad r_2 : r_0 = s : b_0, \quad r_3 : r_0 = s : c_0.$$

Daher verhält sich

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{1}{a_0} : \frac{1}{b_0} : \frac{1}{c_0}.$$

*) Auch die drei von den Spitzen A, B und C nach den Berührungspunkten (N_1, N_2 und N_3 in Fig. 102 auf S. 108) der drei äußeren Berührungskreise gezogenen drei Transversalen schneiden sich in einem Punkte P. Dieser fünfte merkwürdige Punkt des Dreiecks liegt mit M_0 und dem Schwerpunkte S des Dreiecks in einer Geraden, wobei letzterer die Strecke PM_0 auch im Verhältnis 1 : 2 teilt.

Nach ist

$$\frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2} + \frac{r_0}{r_3} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{s} = 1,$$

oder

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_0}.$$

XVII. Weil aber in Fig. 102 $M_0C \perp CM_1$ und $M_0L_1 \perp CB \perp N_1M_1$, so sind die nach Fr. 71 VI. gleichwinkligen Dreiecke M_0L_1C und CN_1M_1 ähnlich (Fr. 156 I.), und es verhält sich $r_0 : c_0 = c_1 : r_1$. Da nun nach XVI. $r_0s = a_0r_1$ und nach Fr. 105 XI. $c_1 = b_0$ ist, so ergibt sich weiter:

$$r_0r_1 = c_0c_1 = c_0b_0 \quad \text{und} \quad r_0r_1 \cdot r_0s = c_0b_0 \cdot a_0r_1$$

oder $r_0^2s = a_0b_0c_0 = (s-a)(s-b)(s-c).$

$$\text{Ebenso ist } r_0r_2 = a_0c_0$$

$$r_0r_3 = b_0a_0,$$

$$\text{daher } r_0^3r_1r_2r_3 = a_0^2b_0^2c_0^2 = (r_0^2s)^2 = r_0^4s^2$$

$$r_0r_1r_2r_3 = r_0^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Endlich findet sich weiter $r_0r_1 \cdot (r_1 : r_0) = c_0b_0 \cdot (s : a)$ und hieraus $r_1^2 = sb_0c_0 : a_0.$

$$\text{Ebenso } r_2^2 = sc_0a_0 : b_0 \quad \text{und} \quad r_3^2 = sa_0b_0 : c_0.$$

160. Welche Strecken in einem rechtwinkligen Dreieck sind proportional?

I. Die von der Spitze C (Fig. 142) des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ABC auf die Hypotenuse AB = h gefällte Senkrechte CN = p werde entsprechend Fr. 112 als die Projektierende, die Hypotenusenabschnitte AN = x und BN = y als die Projektionen der Katheten AC = a und BC = b bezeichnet.

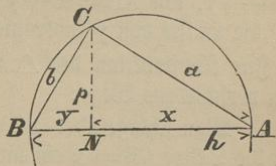


Fig. 142.

Nun stimmen die $\triangle\triangle$ ANC und CNB mit dem $\triangle ACB$ in je zwei Winkeln überein, sind also nach Fr. 156 I. unter sich und mit dem $\triangle ACB$ ähnlich.

Aus den Proportionen $x:p = p:y$, $x:a = a:h$ und $y:b = b:h$ (Fr. 153 I.) findet sich daher (unter Berücksichtigung der Anmerkung zu Fr. 159 II.) weiter:

$$p^2 = xy, \quad a^2 = xh, \quad b^2 = yh,$$

d. h. die Projizierende p ist die mittlere Proportionale zu den beiden Hypotenusenabschnitten x und y ,

jede Kathete aber ist die mittlere Proportionale zu ihrer Projektion und der Hypotenuse h . Vergl. Fr. 147.

II. Weiter folgt hieraus $ab = ph$ (Fr. 19 VI.). Nach Fr. 159 II. wäre $ab = 2rp$; also ist $h = 2r$. Vergl. Fr. 96 V.

III. Durch Addition ergibt sich weiter:

$$a^2 + b^2 = xh + yh = (x + y)h = h \cdot h = h^2,$$

d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. Vergl. Fr. 19 V.

IV. Da $h = x + y$, so kann man nach I. auch schreiben:

$$a^2 = x(y + x) \quad \text{und} \quad b^2 = y(y + x).$$

Trägt man nun auf CB von C aus das Stück $CU = \frac{1}{2}y$ auf, so ist nach III. und Fr. 20 V.

$$\begin{aligned} \overline{AU}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CU}^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = x(y+x) + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 \\ &= x^2 + 2x\left(\frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 \end{aligned}$$

$$AU = x + \frac{1}{2}y.$$

Man kann demnach aus a und y sowohl $AN = x = AU - \frac{1}{2}y$, wie $AB = x + y = h$ finden, indem man von AU die Hälfte von y subtrahiert, bezw. sie zu ihm addiert.

Zur Konstruktion des $\triangle ABC$ aus a und y bieten sich nun verschiedene Wege:

1. Man schlage über $AC = a$ einen Halbkreis, trage in ihn die Sehne $AN = x$ ein und verlängere sie um $NB = y$;

2. man verlängere $BN = y$ um $AN = x$, schlage über AB einen Halbkreis und trage in ihn die Sehne AC ein;

3. man mache von A aus $AN = x$, $NC \perp AN$ und schneide NC mit einem Kreise aus A vom Halbmesser a .

V. In gleicher Weise hätte man nach I. auch

$$a^2 = h(h-y) \quad \text{und} \quad b^2 = h(h-x),$$

und könnte h (und x) aus a und y durch Vermittelung von $AU = h - \frac{1}{2}y$ ganz wie in IV. finden.

161. Welche Proportionen bestehen zwischen den Sehnen und den Tangenten eines Kreises?

Unter Bezugnahme auf die Anmerkung zu Fr. 159 II. lassen sich folgende Sätze aussprechen:

I. Die Produkte aus den Abschnitten zweier sich innerhalb des Kreises in E , oder außerhalb des Kreises in F (Fig. 143) schneidenden Sehnen desselben Kreises sind gleich.

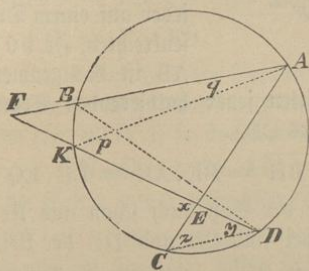


Fig. 143.

Bew. 1.

$$\begin{aligned} \angle E &= \angle E \quad (\text{Fr. 42 II.}) \\ \angle KAE &= \angle CDE \quad (\text{Fr. 96 II.}) \\ \triangle KAE &\sim \triangle CDE \quad (\text{Fr. 156 I.}) \\ KE:AE &= CE:DE \quad (\text{Fr. 153 I.}) \\ KE \cdot DE &= AE \cdot CE. \end{aligned}$$

Bew. 2.

$$\begin{aligned} \angle F &= \angle F \quad (\text{Fr. 20 I.}) \\ \angle FAK &= \angle FDB \quad (\text{Fr. 96 II.}) \\ \triangle FAK &\sim \triangle FDB \quad (\text{Fr. 156 I.}) \\ KF:AF &= BF:DF \quad (\text{Fr. 153 I.}) \\ KF \cdot DF &= AF \cdot BF. \end{aligned}$$

Das Produkt $FA \cdot FB$ (bez. $EA \cdot EC$) heißt die Potenz des Punktes F (bez. E) in Bezug auf den Kreis.

II. Da nach Fr. 94 III. in Fig. 144 die durch E gelegte, auf ME senkrechte Sehne BA die kleinste Sehne ist, welche sich durch E ziehen läßt, und da nach Fr. 81 I. zugleich $EB = EA$ ist, so

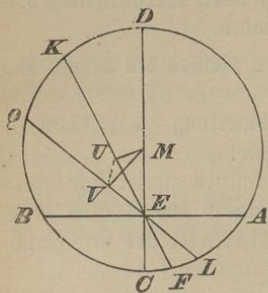


Fig. 144.

gleichet die Potenz des Punktes E in Bezug auf den Kreis dem Quadrate der Hälfte der kleinsten durch E gehenden Sehne. Oder:

Die Hälfte $BE = EA$ (Fig. 144) einer von einer zweiten Sehne LQ halbierten (also auch jeder auf einem Durchmesser CD senkrechten, Fr. 90 VIII.) Sehne AB ist das geometrische Mittel aus den Abschnitten jener halbierenden Sehne LQ (oder jenes Durchmessers CD).

Nach I. ist ja $\overline{BE^2} = BE \cdot AE = LE \cdot EQ = CE \cdot ED$.

Für CD folgt der Satz auch schon aus Fr. 160 I. und Fr. 96 III. Dabei sind CE und DE der kleinste und der größte der dem Satze $\overline{BE^2} = CE \cdot ED$ genügenden Abschnitte, welche der Kreis zu liefern vermag. Verlangt man den einen Faktor noch größer als ED, so muß man einen Kreis von größerem Halbmesser nehmen, oder sich auf IV. einlassen.

III. Schneiden sich in Fig. 144 die Strecken LQ und FK in E so, daß $FE \cdot EK = LE \cdot EQ$, dann liegen die vier Endpunkte L, F, Q und K auf demselben Kreise.

Bezeichnet man nämlich den Punkt, worin der durch L, F und Q gelegte Kreis FK zum zweiten Male schneidet (Fr. 83 VIII.) mit K_1 , so ist (nach I.) $FE \cdot EK_1 = LE \cdot EQ$, daher nach unserer Voraussetzung ($FE \cdot EK = LE \cdot EQ$) und Fr. 20 V. auch $FE \cdot EK_1 = FE \cdot EK$, oder $EK_1 = EK$, d. h. K_1 fällt mit K zusammen.

Ähnliches gilt für B, A, D, K (Fig. 143) in Bezug auf F.

IV. Schneiden sich eine Tangente FT (Fig. 145) und eine Sehne AB desselben Kreises, so ist die Strecke FN zwischen dem Schnittpunkte F und dem Berührungspunkte N die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Secante.

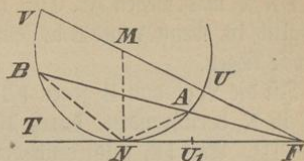


Fig. 145.

Bew.

$$\angle F = \angle F \text{ (Fr. 20 I.)}$$

$$\angle FBN = \angle FNA \text{ (Fr. 100 I.)}$$

$$\triangle FNB \sim \triangle FAN \text{ (Fr. 156 I.)}$$

$$FN : FB = FA : FN \text{ (Fr. 153 I.)}$$

$$FN^2 = FA \cdot FB.$$

Denkt man sich in Fig. 143 die Secante FD so weit verschoben, bis die beiden Schnittpunkte D und K in einen (N) zusammenfallen (Fr. 85 IV.), so findet man aus I. ebenfalls:

$$FN \cdot FN = FA \cdot FB.$$

V. Wird die Sehne zum Durchmesser $UV = 2r$, so wird $\overline{FN}^2 = FU \cdot FV = (FM - r)(FM + r) = FM^2 - r^2$, was man auch aus Fr. 160 III. hätte finden können, weil wegen Fr. 83 X. doch $r = MN \perp TF$ ist.

VI. Ist umgekehrt $\overline{FN}^2 = FA \cdot FB$, so berührt FN in N den Kreis durch A, B und N.

Trifft nämlich eine von F an diesen Kreis gelegte Tangente (Fr. 103 I.) den Kreis in N_1 , so ist $\overline{FN}_1^2 = FA \cdot FB$ (IV.), daher $\overline{FN}^2 = \overline{FN}_1^2$ (Vor. und Fr. 20 V.), oder $FN = FN_1$; deshalb muß nach Fr. 91 XVII. entweder N auf N_1 fallen, oder FN_1 ist die zweite Tangente, welche sich von F an den Kreis ziehen läßt (Fr. 103 II., V.).

VII. Ist ferner $\overline{FN}^2 = FA \cdot FB$ und FN Tangente des um M geschlagenen Kreises in N, so liegen B und A entweder auf dem Kreise um M, oder auf einem anderen Kreise, welcher FT in N berührt. Denn weil $FN : FB = FA : FN$,

und $\angle F = \angle F$, ist $\triangle FNB \sim \triangle FAN$ und $\angle FBN = \angle FNA$, was wegen Zr. 100 I. und Zr. 97 I. und II. nur möglich ist, wenn A und B auf einem von FT in N berührten Kreise liegen.

Ist die Lage von B gegen FT gegeben, so muß A auf dem FT in N berührenden, durch B geschlagenen Kreise liegen.

VIII. Aus IV. folgt auch der Beweis für die Richtigkeit der Lösung der in Zr. 141 gestellten Aufgabe. In Fig. 127 soll nach der dort angestellten Betrachtung

$$\triangle J_0JA \sim \triangle J_0AC \text{ (Zr. 156 I.)}$$

$$J_0J : J_0A = J_0A : J_0C \text{ (Zr. 153 I.)}$$

$J_0A^2 = J_0J \cdot J_0C = (J_0C - CJ) J_0C = (J_0C - w_c) J_0C$,
sein; nach der gegebenen Lösung und IV. ist aber:

$$J_0A^2 = J_0L_1 \cdot J_0L_2 = (J_0L_2 - w_c) J_0L_2 = (J_0C - w_c) J_0C.$$

IX. Die in VIII. gegebene Weiterbildung der in Zr. 141 angefangenen Betrachtung liefert noch eine andere Lösung für die in Zr. 142 gestellte Aufgabe.

Macht man in Fig. 127 $\angle BAJ_0 = \frac{1}{2}C$ und $J_0J_0 \perp BA$ in deren Mitte, so ist wieder (und zwar für jeden Punkt C des Kreises K): $\triangle J_0JA \sim \triangle J_0AC$ (Zr. 156 I.)

$$J_0A^2 = J_0J \cdot J_0C = J_0J (J_0J + JC).$$

Die Lösung der in Zr. 142 gestellten Aufgabe fordert aber, daß $J_0C = w_c$ sei, und dazu hätte man noch J_0J zu finden aus der Gleichung:

$$J_0A^2 = J_0J (J_0J + w_c).$$

Auch hier liefert der zweite Punkt in BA, welcher dieser Gleichung genügt (Zr. 74 XIII.), nichts Neues.

Man könnte nun die Aufgabe so lösen, daß man an $BA = c$ in A und in B den Winkel $BAJ_0 = ABJ_0 = \frac{1}{2}C$ anträgt und so zunächst mittels des gleichschenkeligen $\triangle ABJ_0$ den Punkt J_0 und die Strecke J_0A bestimmt, ohne den Kreis K zu schlagen, daß man dann $AN \perp J_0A$ und $AN = \frac{1}{2}w_c$ macht, von N aus auf J_0N die Strecken $NL_1 = NL_2 = \frac{1}{2}w_c$ abschneidet, BA in J mit einem Kreise um J_0 vom Halbmesser $J_0J = J_0L_1$ schneidet und J_0J um $J_0C = w_c$ verlängert. Nach Zr. 160 IV. (oder Zr. 161 IV.) ist dann $J_0A^2 = J_0L_1 (J_0L_1$

$+ L_1 L_2 = J_0 L_1 (J_0 L_1 + w_c) = J_0 J (J_0 J + w_c) = J_0 J \cdot J_0 C$.
 Der gefundene Punkt C liegt demnach auf dem Kreise K durch B, J_0 und A und $\angle BCA = 180^\circ - \angle B J_0 A$ (Fr. 96 VIII.) $= 2 \angle B A J_0$ hat die vorgeschriebene Größe C, wird auch von JC halbiert.

X. Eine andere Lösung für die in Fr. 141 gestellte Aufgabe (und eine dritte Lösung für die Aufgabe in Fr. 142) giebt Fr. 161 II. an die Hand. Nach Bestimmung der Sehne AJ_0 mache man $AJ_1 = 2 AJ_0$, schlage über AJ_1 aus M_0 einen Kreis K_0 von aussehend großem Halbmesser und ziehe in letzterem eine Sehne $HJ_0 H_0$, deren Mitte um $\frac{1}{2} w_c$ von J_0 absteht (Fr. 90 V., 96 VII.); dann ist nach Fr. 161 II. $AJ_0^2 = J_0 H \cdot J_0 H_0$, ferner $J_0 H = J_0 H_0 + w_c$ und deshalb $J_0 H_0 = J_0 J$, sowie $J_0 H = J_0 C$. — Am einfachsten macht man $J_0 M_0 = \frac{1}{2} w_c$.

XI. Aus IV. in Verbindung mit I. folgt ferner der Beweis für die Richtigkeit der in Fr. 143 gegebenen Lösung der dort vorgeführten Aufgabe. In Fig. 128 waren B, B_1 , X und Y Punkte des Kreises K_1 , und deshalb ist

$$BQ \cdot B_1 Q = YQ \cdot XQ \text{ (I.)};$$

zugleich war QU Tangente des Kreises K_2 , auf welchem ebenfalls X und Y liegen, und demnach ist auch

$$\overline{QU}^2 = YQ \cdot XQ \text{ (IV.)};$$

daher ist auch $\overline{QU}^2 = BQ \cdot B_1 Q$ (Fr. 20 V.) und QU Tangente an den nach Fr. 88 durch B, B_1 und U zu schlagenden Kreis K_1 (VI.). Der Mittelpunkt von K_1 muß aber M sein, denn der Mittelpunkt von K_1 muß in UA liegen (wegen Fr. 83 X.) und zugleich auf G (Fr. 74 XVII.), weil ja $BB_1 \perp G$ und $BZ = BZ$ gemacht wurde.

Man könnte den Beweis auch mit VII. führen; denn QU war ja Tangente an K_2 , also $QU \perp UA$, und deshalb müssen, weil $\overline{QU}^2 = BQ \cdot BQ_1$ sein soll, B aber nicht auf K_2 liegen kann (Fr. 76 I.), B und B_1 auf einem andern QU in U berührenden Kreise liegen, nach der Bestimmung des Punktes B_1 kann aber der Mittelpunkt dieses Kreises nur in G, also in M liegen.

II. Verlängert man die nach den Endpunkten der Sehne $BA = s$ gezogenen Halbmesser $MA = MB = r$, bis sie die der Sehne BA parallele Tangente FE in E und F schneiden, so bestehen nach Fr. 148 I. zwischen den Entfernungen dieser Punkte von einander ($FE = t$) und vom Mittelpunkt ($EM = r_1$), dem Halbmesser r , der Sehne s und ihrer Entfernung e vom Mittelpunkte die drei Gleichungen:

$$s : t = r : r_1$$

$$s : t = e : r$$

$$e : r = r : r_1.$$

III. Ist die Sehne s die Seite eines in den Kreis vom Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks (n -eck), so ist t die Seite des demselben Kreise umgeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl; wegen II. ist auch da $t = \frac{rs}{e} = \frac{r_1 s}{r}$.

IV. Aus der Seite $BA = s$, Fig. 147, eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks (n -eck) kann man (Fr. 113 VIII.) die Seite $AC = s_2$ des in denselben Kreis eingeschriebenen Vielecks von doppelt so viel ($2n$) Seiten (Fr. 90 VIII.) und deren Entfernung e_2 vom Mittelpunkte finden, weil nach Fr. 160 I., 96 III. und nach Fr. 163 I.:

$$s_2^2 = \overline{AC}^2 = CL \cdot DC = 2r(r - e),$$

$$e_2^2 = r^2 - \frac{1}{4}s_2^2 = r^2 - \frac{1}{2}r(r - e)$$

$$= r^2 - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}re = \frac{1}{2}r(r + e).$$

V. Aus der Seite $EF = t$, Fig. 147, eines umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks (n -eck) läßt sich die Seite $QK = t_2$ des demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks von doppelt so viel ($2n$) Seiten finden. Macht man nämlich $AQ \perp EM$ und $BK \perp FM$, so ist nach Fr. 90 VIII., 103 IV. QK eine ganze, AQ und BK aber zwei halbe Seiten des $2n$ -eck.

Da nun $\triangle EAQ \sim \triangle ECM \sim \triangle ADM$ (Fr. 156 I.), so steht:

$$AQ:EA = CM:EC = DM:AD$$

$$AQ:EQ = CM:EM,$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{2}t_2:(r_1-r) = r:\frac{1}{2}t = e:\frac{1}{2}s$$

$$t_2 = \frac{4r(r_1-r)}{t} = \frac{4e(r_1-r)}{s}.$$

Da nun nach II. $r_1 = r^2:e$ und demnach eben sowohl $e(r+r_1) = r(e+r)$, als auch $4e(r_1-r) = 4(r^2-re) = 4r(r-e) = [4r(r-e)(r+e)]:(r+e)$ ist, so wird wegen I.: $4e(r_1-r) = rs^2:(r+e)$

$$\text{und} \quad t_2 = \frac{rs}{r+e} = \frac{te}{r+e} = \frac{tr}{r+r_1}.$$

VI. Die Umfänge u_n und u_{2n} des in einen Kreis vom Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen n -ecks und $2n$ -ecks sind (wegen I. und IV.):

$$u_n = ns = 2n \sqrt{r^2 - e^2} = 2n \sqrt{(r+e)(r-e)}$$

$$u_{2n} = 2ns_2 = 2n \sqrt{2r(r-e)}.$$

VII. Die Umfänge U_n und U_{2n} des einem Kreise vom Halbmesser r umgeschriebenen regelmäßigen n -ecks oder $2n$ -ecks sind (wegen III. und V.):

$$U_n = nt = \frac{nrs}{e} = \frac{r}{e} u_n,$$

$$U_{2n} = 2nt_2 = \frac{2nte}{r+e} = \frac{2e}{r+e} U_n.$$

VIII. Weil nun $2r > r+e$, so ist $u_{2n} > u_n$, d. h. der Umfang eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist kleiner als der Umfang eines demselben Kreise eingeschriebenen Vielecks von doppelt, viermal, achtmal u. so viel Seiten;

$$u_n < u_{2n} < u_{4n} < \dots$$

IX. Weil ferner $2e < r+e$, so ist $U_n > U_{2n}$, d. h. der Umfang eines umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist größer als der Umfang des demselben Kreise umgeschriebenen Vielecks von doppelt, viermal, achtmal u. so viel Seiten;

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > \dots$$

X. Weil endlich $r > e$, so ist

$$U_n > u_n,$$

d. h. der Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist kleiner, als der Umfang des demselben Kreise umgeschriebenen Vielecks von ebensoviel Seiten.

XI. Da nun aber $e = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$ ist, und da s um so kleiner wird, je größer die Seitenzahl n wird (Fr. 91 VI.), so nähert sich e um so mehr dem Halbmesser r , je größer n wird. Daher wird das Verhältniß $U_n : u_n$ (VII.) zugleich mit dem Verhältniß $r : e$ um so mehr $= 1$ (d. h. die beiden Umfänge U_n und u_n unterscheiden sich um so weniger von einander), je größer die Seitenzahl n wird.

Obwohl also bei wiederholter Verdoppelung der Seitenzahl der Umfang U immer kleiner, der Umfang u aber immer größer wird, so geht doch jene Verkleinerung und diese Vergrößerung nicht über alle Grenzen hinaus fort, vielmehr nähern sich (weil ja nach X. stets $U_n > u_n$ ist) hierbei U und u einem gemeinschaftlichen Grenzwerte W , es ist also:

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > \dots > W > \dots > u_{4n} > u_{2n} > u_n.$$

XII. Die gemeinschaftliche Grenze, der sich die beiden Verhältnisse $u_n : 2r$ und $U_n : 2r$ nähern, ist (vergl. Fr. 178 IV.):

$$\pi = 3,141\,592\,65 \dots;$$

Annäherungswerte von π , ferner die häufig gebrauchten Zahlenwerte von $1 : \pi$, $\sqrt{\pi}$ und $1 : \sqrt{\pi}$ folgen in Fr. 178 V.

164. Wie löst man die Aufgaben der Proportionslehre geometrisch?

I. Die vierte Proportionale BC_1 (vergl. Fig. 130) zu drei gegebenen BA , BC und BA_1 findet man, indem man BA und BC auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels ABC aufträgt, auf BA noch BA_1 abschneidet und $A_1C_1 \parallel AC$ macht. Dann ist nach Fr. 148 I.:

$$BA : BC = BA_1 : BC_1.$$

II. Macht man in I. $BA_1 = BC$, so findet man zu zwei Strecken BA und BC die dritte Proportionale BC_1 , da dann $BA : BC = BC : BC_1$ ist.

III. Zu zwei gegebenen Strecken $AN = x$ und $NB = y$ (vergl. Fig. 142) findet man die mittlere Proportionale, indem man über $AB = x + y$ als Durchmesser einen Kreis schlägt und diesen durch eine in N auf AB errichtete Senkrechte $NC = p$ in C schneidet. Weil dann $\angle ACB = 90^\circ$ (Fr. 96 III.), so ist $x : p = p : y$ (Fr. 160 I.).

Eine andere Lösung mit Hilfe von Fr. 103 II. giebt Fr. 161 IV. (oder V.) an die Hand.

IV. Da in III. $p^2 = xy$, also $p = \sqrt{xy}$, so ließe sich dieses Verfahren auch zum Ausziehen der Quadratwurzel benutzen.

In ähnlicher Weise könnte man die Auffindung der Strecke BC_1 nach I., bez. nach II. als die geometrische Konstruktion des arithmetischen (algebraischen) Ausdrucks $\frac{BC \cdot BA_1}{BA}$ und $\frac{BC^2}{BA}$ betrachten.

V. Will man eine Strecke $FN = a$ (vergl. Fig. 145) nach stetiger Proportion schneiden (goldener Schnitt, vergl. Fr. 147 IV.), d. h. so, daß der größere Abschnitt $FU_1 = x$ die mittlere Proportionale zwischen der Strecke FN und dem kleineren Abschnitt NU_1 ist, so errichte man in N eine Senkrechte $NM = \frac{1}{2}FN$, schlage aus M einen Kreis mit dem Halbmesser MN , ziehe aus F den Durchmesser $FUMV$ und mache $FU_1 = FU$.

Denn dann ist $UV = 2MN = FN$ und nach Fr. 161 V.

$$\begin{aligned} \overline{FN}^2 &= \overline{FV} \cdot \overline{FU} = (\overline{FU} + \overline{UV}) \cdot \overline{FU} \\ &= (\overline{FU} + \overline{FN}) \cdot \overline{FU} = \overline{FU}^2 + \overline{FN} \cdot \overline{FU}, \end{aligned}$$

also weiter:

$$\begin{aligned} \overline{FU_1}^2 &= \overline{FU}^2 = \overline{FN}^2 - \overline{FN} \cdot \overline{FU} = \overline{FN} (\overline{FN} - \overline{FU}) \\ &= \overline{FN} (\overline{FN} - \overline{FU_1}) = \overline{FN} \cdot \overline{NU_1}, \end{aligned}$$

oder:

$$\overline{FN} : \overline{FU_1} = \overline{FU_1} : \overline{NU_1}.$$

Man könnte aber im Einklang mit Fr. 147 IV. auch die Größe von $FU = x$ nach Fr. 160 III. finden:

$$\overline{MF}^2 = \overline{FN}^2 + \overline{MN}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$x = MF - MU = \frac{a}{2} \sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

VI. Ist in Fig. 125 DMU eines der zehn kongruenten gleichschenkeligen Dreiecke eines regelmäßigen Zehnecks (Fr. 113 IV.), so ist $\angle DMU = \frac{1}{10} \mathfrak{R} = \frac{2}{5} \mathfrak{R}$ (Fr. 34 IV.);

$$\begin{aligned} \text{daher} \quad \angle DUM &= \angle UDM = \frac{1}{2} (2\mathfrak{R} - \angle DMU) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \mathfrak{R} = \frac{4}{5} \mathfrak{R} = 2 \angle DMU \\ &\quad (\text{Fr. 68 II.}). \end{aligned}$$

Halbiert nun UF den Winkel DUM, so wird $\angle DUF = DMU$, daher $\triangle DUF \sim \triangle DMU$ (Fr. 156 I.), folglich $DF:DU = DU:DM$ und $DU:UF = DM:MU = 1$, d. h. $DU = UF$ (Fr. 153 I.).

Weil aber auch $\angle FUM = \frac{1}{2} \angle DUM = \angle DMU$ ist, so folgt aus $UF = FM$ (Fr. 74 VI.) weiter:

$$DU = FM \text{ (Fr. 20 V.),}$$

und endlich wird aus $DF:DU = DU:DM$ nach Fr. 20 IV. jetzt

$$DF:FM = FM:DM.$$

Schneidet man also den Halbmesser DM eines Kreises nach stetiger Proportion (V.), so gleicht der größere Abschnitt FM der Seite DU des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks. Die Seite DC des regelmäßigen Fünfecks erhält man, wenn man $UC = UD$ macht.

165. Wie findet man einen Kreis, von welchem zwei Punkte und eine Tangente, oder ein Punkt und zwei Tangenten gegeben sind?

I. Sind zwei Tangenten T_1S und T_2S und ein im $\angle T_1ST_2$ gelegener Punkt P_1 gegeben, so muß der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises (wegen Fr. 103 VII.) auf der Geraden SX liegen, welche den $\angle T_1ST_2$ halbiert.

Liegt nun P_1 außerhalb SX, so falle man von P_1 eine Senkrechte P_1E auf SX herab und verlängere dieselbe jenseits

SX um das Stück $EP_2 = P_1E$; dann ist P_2 auch ein Punkt des gesuchten Kreises (Zr. 74 XI.), und somit wäre die zweite Aufgabe auf die erste zurückgeführt.

Liegt dagegen P_1 in SX, so tangiert auch die in P_1 auf SX errichtete Senkrechte den gesuchten Kreis (Zr. 83 II.), und die Aufgabe ist nach Zr. 104 II. und IV. zu lösen.

II. Sind zwei Punkte P_1 und P_2 und eine Tangente TS gegeben und wird letztere von der verlängerten Sehne P_1P_2 in F, von der auf P_1P_2 in deren Mitte E errichteten (durch den Mittelpunkt M gehenden) Senkrechten XES aber in S geschnitten, so ist die Entfernung FN des Berührungspunktes N des gesuchten Kreises von dem Schnittpunkte F nach Zr. 161 IV. zu finden aus $\overline{FN}^2 = FP_1 \cdot FP_2$. Trägt man die nach Zr. 164 III. konstruierte Strecke FN von F aus in TS auf, so hat man jetzt drei Punkte: P_1 , P_2 und N des Kreises und kann diesen nach Zr. 89 II. zeichnen.

Da man aber FN auf ST von F ebensowohl nach S hin als nach der entgegengesetzten Seite hin auftragen kann, so giebt es im allgemeinen zwei Lösungen.

Anm. S ist der äußere Ähnlichkeitspunkt (Zr. 105 IV.) nicht bloß für die beiden bei Lösung der gestellten Aufgabe sich ergebenden Kreise K_1 und K_2 um M_1 und M_2 , sondern auch für alle Kreise K_0 , welche aus einem Punkte M_0 in SEX als Mittelpunkt geschlagen werden und TS berühren. Jeder dieser Kreise wird von P_1S in zwei Punkten P' und P'' geschnitten und dabei ist stets $P'M_0 \parallel P_1M_1$ und $P''M_0 \parallel P_1M_2$ (Zr. 153 I. und 156 IV.). Diese Bemerkung führt zu einer andern sehr bequemen Lösung für I. und II. durch Ziehen zweier Parallelen durch P_1 .

III. Ist in II. $P_1P_2 \parallel ST$, so wird $EMS \perp ST$, und weil auch $MN \perp ST$, so rückt der Berührungspunkt N nach S; es giebt also jetzt bloß eine Lösung. Der Schnittpunkt F ist jetzt unendlich weit von N entfernt (Zr. 77 IV. Anm.).

IV. Wenn P_1 (oder P_2) in ST liegt, d. h. mit N zusammenfällt, haben I. und II. ebenfalls bloß eine Lösung. NF ist dabei = 0.

V. Liegen P_1 und P_2 in II. auf verschiedenen Seiten von ST, so giebt es keine Lösung (Zr. 83 VI.).

VI. Ist in I. $\angle T_1ST_2 = 180^\circ$, so giebt es unzählige Lösungen, weil die Lage von S und von SE nicht bestimmt ist.

Vergl. Fr. 88 IV. und Fr. 104 II. bis IV.

Siebentes Kapitel.

Gleichheit, Proportionalität und Ausmessung des Flächeninhaltes ebener Figuren.

166. Wenn sind Paralleleogramme und Dreiecke inhaltsgleich?

I. Dreiecke EFK und HGK (Fig. 148), ebenso Paralleleogramme EFGH und KGNL, welche zwischen Parallelen AB und CD liegen, haben gleiche Höhe (Fr. 159 I., 108 XIII.).

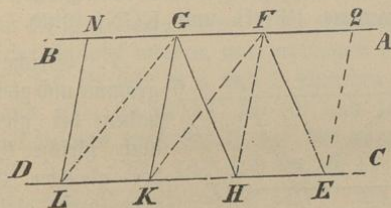


Fig. 148.

II. Dreiecke und Paralleleogramme von gleicher Höhe lassen sich zwischen Parallelen legen (Fr. 108 XIII.).

III. Paralleleogramme EFGH und KGNL (Fig 148) über gleichen Grundseiten ($GF = NG$) und von gleicher Höhe sind inhaltsgleich (vergl. Fr. 66 IV.).

Bew. Legt man die Paralleleogramme zwischen Parallellinien AB und CD so, daß GF an NG stößt und die Paralleleogramme außer einander liegen, so ist:

$$\begin{aligned}
 EK &= EH + HK \\
 &= KL + HK = HL \text{ (Zr. 20 VIII., 108 III.)} \\
 EF &= HG \text{ (Zr. 108 III.)} \\
 \angle FEK &= \angle GHL \text{ (Zr. 62 I.)} \\
 \triangle FEK &\cong \triangle GHL \text{ (Zr. 80 II.);}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ferner: } FG &= GN \text{ (Vor.)} \\
 GK &= NL \text{ (Zr. 108 III.)} \\
 \angle FGK &= \angle FNL \text{ (Zr. 62 I.)} \\
 \triangle FGK &\cong \triangle GNL \text{ (Zr. 80 II.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangle FEK + \triangle FGK &= \triangle GHL + \triangle GNL \text{ (Zr. 20 VIII.)} \\
 EFGK &= HGNL \text{ (Zr. 20 II.)} \\
 EFGK - \triangle HGK &= HGNL - \triangle HGK \text{ (Zr. 20 VIII.)} \\
 EFGH &= KGNL \text{ (Zr. 20 II.)}
 \end{aligned}$$

IV. Dreiecke FGH und GNL (Fig. 148) von gleicher Grundseite ($FG = GN$) und gleicher Höhe sind inhaltsgleich, da sie nach Zr. 108 II. die Hälfte der gleichen Parallelogramme EFGH und KGNL sind.

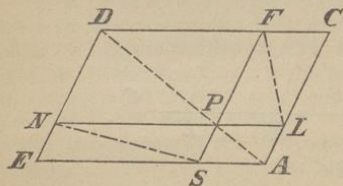


Fig. 149.

V. Gleiche Parallelogramme und gleiche Dreiecke haben bei gleicher Höhe auch gleiche Grundseiten, bei gleichen Grundseiten aber auch gleiche Höhen (III., IV.).

VI. Zieht man durch einen Punkt P der Diagonale AD eines Parallelogramms ACDE (Fig. 149) zwei Parallele LN und SF zu den Seiten, so zerfällt das Parallelogramm in vier mit dem Ganzen gleichwinkelige Parallelogramme, von denen die zwei um die Diagonale liegenden ALPS und PFDN ähnlich sind; die beiden anderen LPFC und SPNE heißen die Ergänzungen (Komplemente) der ersteren und sind inhaltsgleich.

Da nämlich $\angle LPA = \angle FDP$ und $\angle LAP = \angle FPD$ (Fr. 62 I.), so ist $\triangle ALP \sim \triangle PFD$ (Fr. 156 I.) und $ALPS \sim PFDN$ (Fr. 108 I. und 150 I.).

Zieht man ferner von den nach Fr. 108 I. kongruenten $\triangle \triangle ACD$ und DEA die ebenfalls kongruenten $\triangle \triangle ALP$ und PSA , PFD und DNP ab, so bleiben die (wenn auch nicht stets kongruenten, so doch sicher) gleichen Parallelogramme $LPFC$ und $SPNE$ übrig (Fr. 20 VIII.).

VII. Weil in VI. $\triangle ALP \sim \triangle PFD$, so ist $LP : LA = FD : FP$, oder auch $LP : PS = PN : FP$ (Fr. 108 III.) und $LP \cdot FP = PS \cdot PN$, d. h. es sind die Produkte der auf derselben Seite der Diagonale DA gelegenen Abschnitte der Parallelen LN und SF gleichgroß. — Vergl. Fr. 161 I.

VIII. Zwei Parallelogramme $LPFC$ und $SPNE$ (Fig. 149) (oder zwei Dreiecke LPF und SPN , Fr. 108 II.), welche in einem Winkel P übereinstimmen (also zwei Rechtecke stets), sind inhaltsgleich, wenn die Produkte aus ihren jenen Winkel P einschließenden Seiten gleich sind.

Legt man die Parallelogramme so an einander, daß die Winkel P Scheitelwinkel werden, und verlängert CL und ES , CF und EN , bis sie sich in A und D schneiden, und zieht man PA und PD , so ist $AL = SP$ und $DF = NP$ (Fr. 108 III.), und man erhält aus der vorausgesetzten Gleichung $SP \cdot NP = PL \cdot PF$, nach Fr. 20 IV. $AL \cdot DF = PL \cdot PF$, also $AL : PL = PF : DF$. Da außerdem $\angle ALP = \angle PFD$ (Fr. 63 I.), so ist $\triangle ALP \sim \triangle PFD$ (Fr. 156 II.) und $\angle LAP = \angle FPD$ (Fr. 153 I.). Weil aber auch $\angle LAP = \angle SPA$ (Fr. 62 I.), so ist weiter $\angle SPA = \angle FPD$ (Fr. 20 V.) und deshalb muß APD eine Gerade sein (Fr. 43.), nämlich die Diagonale des Parallelogramms $ACDE$; demnach ist endlich:

$$LPFC = SPNE \text{ (VI.)}$$

IX. Zwei Parallelogramme (deshalb auch zwei Dreiecke, Fr. 108 II.) sind inhaltsgleich, wenn die Produkte aus Höhe und Grundseite gleich sind (Fr. 20 IV.); denn jedes der

beiden Parallelogramme gleicht dann nach III. dem Rechtecke, welches dieselben Höhen und Grundseiten hat, die beiden Rechtecke aber sind nach VIII. inhaltsgleich.

X. Die der Grundseite gegenüber liegenden Seiten solcher Parallelogramme, welche gleichen Flächeninhalt und eine gemeinschaftliche Grundseite haben, liegen in einer zur Grundseite parallelen Geraden.

XI. Die Spitzen aller Dreiecke von gleichem Flächeninhalte, welche sich über der nämlichen Grundseite zeichnen lassen, liegen in einer zu dieser Grundseite parallelen Geraden.

167. Wenn lassen sich zwei Parallelogramme unmittelbar addieren und subtrahieren?

I. Stimmen zwei Parallelogramme $ABEF$ und $ABCD$ in einer Seite $AB = a$ (Fig. 150 und 151) und einem

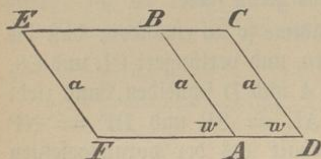


Fig. 150.

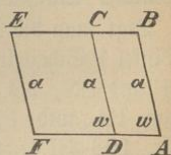


Fig. 151.

Winkel w überein, so lassen sich dieselben mit dieser gleichen Seite AB so an einander legen, daß (entweder wegen Fr. 107 I. und 40, oder wegen Fr. 31) die anstoßenden Seiten AF und AD in eine Gerade fallen. Daher ist ihre Summe und ihre Differenz ein Parallelogramm von dem nämlichen Winkel w und der nämlichen Seite a , dessen zweite Seite DF aber in Fig. 150 die Summe $AF + AD$, in Fig. 151 dagegen die Differenz $AF - AD$ der anderen Seiten AF und AD der beiden Parallelogramme $ABEF$ und $ABCD$ ist.

II. Bezeichnen wir der Kürze halber ein aus den Seiten $AB = a$ und $AD = b$ konstruiertes Rechteck $ABCD$ mit $\boxed{AB, AD}$ oder $\boxed{a, b}$, dann läßt sich der auf zwei Rechtecke angewendete Satz I. kurz so schreiben:

$$\boxed{a, b} + \boxed{a, c} = \boxed{a, (b+c)}$$

und

$$\boxed{a, b} - \boxed{a, c} = \boxed{a, (b-c)}.$$

III. Umgekehrt ist auch

$$\boxed{a, (b+c)} = \boxed{a, b} + \boxed{a, c}$$

und

$$\boxed{a, (b-c)} = \boxed{a, b} - \boxed{a, c}.$$

IV. Ein über der Seite a konstruiertes Quadrat wäre nach II. durch $\boxed{a, a}$ zu bezeichnen, möge aber kürzer durch $\boxed{a}$ bezeichnet werden.

168. Welchen Inhalt besitzt die von einer Strecke bei ihrer Parallelverschiebung in einer Ebene erzeugte Figur?

Bewegt sich eine Strecke $AB = a$, Fig. 152, von unveränderlicher Länge (wie in Fr. 55 II.) parallel zu sich selbst in einer Ebene an einer krummen Linie BCD hin, ohne denselben Teil der Ebene wiederholt zu überstreichen, so erzeugt sie eine gemischtlinige Figur $ABCDKL$, deren Inhalt dem des Rechtecks aus der Strecke AB und dem von ihr in der zur Strecke AB senkrechten Richtung zurückgelegten Wege $SQ = q$ gleicht.

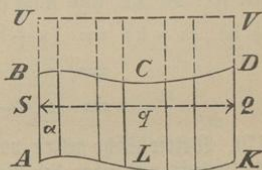


Fig. 152.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich sofort, wenn man die Figur $ASQKL$ abschneidet und auf der andern Seite als $BUVDC$ ansetzt (Fr. 62 V., 108 XIII.).

169. Wie groß sind die Quadrate über der Summe und Differenz zweier Strecken, ferner die Differenz zweier Quadrate?

I. Das Quadrat über der Summe $(a+b)$ zweier Strecken a und b besteht aus der Summe der Quadrate über den

beiden Strecken und dem doppelten Rechteck aus den beiden Strecken*). Nach Fr. 167 III. und IV., sowie Fr. 20 XI. ist nämlich:

$$\begin{aligned} a+b &= (a+b), (a+b) \\ &= (a+b), a + (a+b), b \\ &= \{a, a + b, a\} + \{a, b + b, b\} \\ &= a + 2a, b + b. \end{aligned}$$

II. Das Quadrat über der Differenz $a-b$ zweier Strecken a und b ist gleich der Differenz zwischen der Summe der Quadrate über beiden Strecken und dem doppelten Rechteck aus ihnen. Aus Fr. 167 III. und IV. nebst 20 XI. folgt ja:

$$\begin{aligned} a-b &= (a-b), (a-b) \\ &= (a-b), a - (a-b), b \\ &= \{a, a - b, a\} - \{a, b - b, b\} \\ &= a + b - 2a, b. \end{aligned}$$

III. Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Rechteck aus der Summe und der Differenz ihrer Seiten**). Denn wegen Fr. 20 XI. und nach Fr. 167 III. und IV. ergibt sich:

$$\begin{aligned} (a+b), (a-b) &= (a+b), a - (a+b), b \\ &= \{a, a + a, b\} - \{a, b + b, b\} \\ &= a - b. \end{aligned}$$

170. Welche Sätze gelten von den Quadraten über den Seiten eines Dreiecks und über der Projizierenden?

I. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse $AB = h$ gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten $AC = a$ und $BC = b$ (vergl. Fr. 160 III.).

*) Die drei Sätze I. bis III., welche sich mit einer Fig. 149 ähnelnden Figur auch leicht rein geometrisch beweisen lassen, sind die Seitenstücke zu den drei arithmetischen Sätzen:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \text{ und} \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b). \end{aligned}$$

Ähnliches gilt von den Sätzen in Fr. 170 in Bezug auf die Sätze in Fr. 160. Vergl. auch Fr. 177 V.

**) Der Satz läßt sich auch unmittelbar beweisen, durch Ineinanderlegen der Quadrate.

Beschreibt man über AB das Quadrat AEFB (Fig. 153), fällt man von E und F Senkrechte EK und FD auf die verlängerte CB, darauf von A und F Senkrechte AM und FL auf EK, so sind die Winkel v , m , u und n gleich (Fr. 71 VI.), weil ihre Schenkel der Reihe nach auf einander senkrecht stehen. Die rechtwinkligen $\triangle ABC$, AEM , EFL und BFD , welche außerdem noch in den Hypotenusen $AB = AE = EF = BF$ übereinstimmen

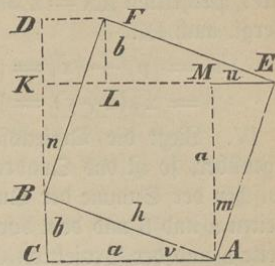


Fig. 153.

(Fr. 108 VII.), sind deshalb kongruent (Fr. 81 II.); daher ist $AM = AC$ und $FL = FD = BC$ (Fr. 67 II.), oder es sind $AMKC$ und $LFDK$ die Quadrate über AC und $FL = BC$ (Fr. 108 VII.). Schneiden wir nun die beiden Dreiecke AEM und EFL von $AEFB$ ab und setzen sie als ABC und BFD an den Rest $AMLEB$ wieder an, so wird: $AEFB = AMKC + LFDK$ (Fr. 20 II.), oder

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

Dieser Satz heißt der Pythagoräische Lehrsatz.

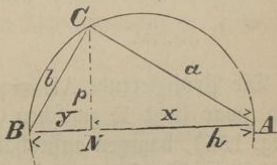


Fig. 154.

II. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Projizierenden $CN = p$ (vergl. Fig. 154) gleich dem Rechtecke aus den Projektionen $AN = x$ und $NB = y$ der Katheten:

$$h^2 = x + y = x + y + 2xy \quad (\text{Fr. 169 I.})$$

$$h^2 = a^2 + b^2 = \{x + p\} + \{y + p\} \quad (\text{I.})$$

$$x, y = \frac{1}{2} \{h - x - y\} = p \quad (\text{Fr. 20 VIII.})$$

III. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete $AC = a$ (Fig. 154) gleich dem Rechteck aus ihrer Projektion $AN = x$ und der Hypotenuse $AB = h$. — Vergl. auch IX.

$$\boxed{a} = \boxed{p} + \boxed{x} = \boxed{x, y} + \boxed{x, x} \\ = \boxed{x, (x+y)} = \boxed{x, h} \quad (\text{I, II.; Fr. 167 II.}).$$

IV. Liegt die Dreiecksseite c einem spitzen Winkel C gegenüber, so ist das Quadrat über ihr gleich der Differenz zwischen der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten a und b und dem doppelten Rechteck aus der zweiten Seite a und der Projektion $CE = q$ der dritten Seite b auf die zweite a .

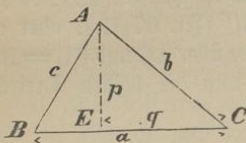


Fig. 155.

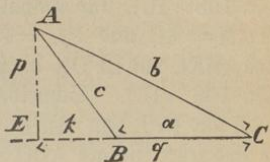


Fig. 156.

Die Projizierende $AE = p$ trifft die Seite $CB = a$ in E und zwar liegt E zwischen C und B , wenn $\angle B < 90^\circ$ (Fig. 155), dagegen außerhalb BC (Fig. 156), wenn $\angle B > 90^\circ$ ist (Fr. 71 V.); im ersten Falle ist $BE = a - q$, im anderen $BE = q - a$.

Nun ist nach I. und Fr. 169 II.:

$$\boxed{a-q} = \boxed{a} + \boxed{q} - 2\boxed{a, q} = \boxed{q-a}.$$

$$\boxed{c} = \boxed{BE} + \boxed{p} = \boxed{a + q - 2\boxed{a, q}} + \boxed{b - q} \\ = \boxed{a} + \boxed{b} - 2\boxed{a, q}.$$

Bei $\angle B = 90^\circ$ endlich ist $q = a$, also $BE = 0$ und $\boxed{c} = \boxed{a} + \boxed{b} - 2\boxed{a, a} = \boxed{b} - \boxed{a}$, wie es I. verlangt.

V. Liegt die Dreiecksseite b (Fig. 156) einem stumpfen Winkel B gegenüber, so ist das Quadrat über ihr gleich der

Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten und dem doppelten Rechteck aus der zweiten Seite a und der Projektion $BE = k$ der dritten Seite c auf die zweite a .

Die Projizierende $AE = p$ trifft CB in E außerhalb CB (Fr. 71 V.); daher ist $CE = k + a$ und nach I. und Fr. 169 I.:

$$\boxed{b} = \boxed{p} + \boxed{k+a} = \boxed{p} + \boxed{k} + \boxed{a} + 2\boxed{a, k} \\ = \boxed{c} + \boxed{a} + 2\boxed{a, k}.$$

VI. In I., IV. und V. liegt eine weitere Entwicklung von Fr. 78 II.

VII. Ist das Quadrat der Seite h eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten a und b , so ist der h gegenüberliegende Winkel C ein rechter, weil sonst nach IV., oder nach V. $\boxed{h} > \boxed{a} + \boxed{b}$ sein müßte.

VIII. Aus I. findet sich in Berücksichtigung der Anmerkungen zu 159 I. und 169 I. eine weitere Lösung der Aufgabe in Fr. 143. Fällt man von A und B , Fig. 128, die Senkrechten $AJ = p_a$ und $BZ = p_b$ auf G und stehen deren Fußpunkte um $ZJ = g$ von einander ab, während M von p_a um $JM = x$, von p_b um $ZM = y = g - x$ entfernt ist, dann hat man

$$\overline{AM}^2 = a^2 = p_a^2 + x^2 \quad \text{und}$$

$$\overline{BM}^2 = b^2 = [s - a]^2 = p_b^2 + y^2 = p_b^2 + [g - x]^2;$$

$$[s - \sqrt{p_a^2 + x^2}]^2 = p_b^2 + [g - x]^2,$$

woraus sich x durch Rechnung finden läßt.

IX. Wie III. mit Fr. 160 IV. bezügl. der Werte a^2 und b^2 übereinstimmt, so folgt aus III. auch ferner, daß in Übereinstimmung mit Fr. 160 V. (vergl. auch Fr. 161 VIII.):

$$\boxed{a} = \boxed{h, x} = \boxed{h, (h - y)} \quad \text{und}$$

$$\boxed{b} = \boxed{h, y} = \boxed{h, (h - x)}.$$

Ebenso findet sich aus I. und Fr. 169 III. noch:

$$\boxed{a} = \boxed{h} - \boxed{b} = \boxed{h+b, h-b},$$

was schon in Fr. 160 IV. liegt und in Fr. 161 IX. benutzt worden ist.

X. In jedem Dreieck ABC, Fig. 126 S. 142, ist die Summe $\boxed{a} + \boxed{b}$ der Quadrate über zwei Seiten gleich der Summe aus dem halben Quadrate der dritten Seite $AB=c$ und aus dem doppelten Quadrate der zu c gehörigen Mittellinie $CE=m$.

Wäre $b < a$ (wie in Fig. 126 S. 142), so wäre $\angle B < \angle A$ (Fr. 73 III.), somit $\angle B < 90^\circ$ (Fr. 71 I.). Deshalb liegt der zufolge Fr. 71 V. von B aus nach A hin fallende Fußpunkt D der Höhe $h_c = CD$ von B aus noch jenseits der Mitte E der Seite c , weil doch nach Fr. 112 X. $DA < DB$, also $DA < \frac{1}{2}AB$ sein muß. Mag daher CA von CB aus jenseits CE liegen, oder zwischen CB und CD, immer ist $\angle BEC > 90^\circ$ (Fr. 69 VII.) und $\angle AEC < 90^\circ$ (Fr. 39 IV.). Für die Projektion $DE=e$ der Mittellinie m , die Seiten c und a und die Strecke m des Dreiecks BEC besteht daher nach V. die Gleichung:

$$\boxed{a} = \boxed{\frac{1}{2}c} + \boxed{m} + 2\boxed{\frac{1}{2}c, e};$$

ebenso für die Seiten des Dreiecks AEC nach IV. die Gleichung:

$$\boxed{b} = \boxed{\frac{1}{2}c} + \boxed{m} - 2\boxed{\frac{1}{2}c, e}.$$

Deshalb ist nach Fr. 20 VIII., und weil $\boxed{\frac{1}{2}c} = \frac{1}{4}\boxed{c}$

$$\boxed{a} + \boxed{b} = \frac{1}{2}\boxed{c} + 2\boxed{m}.$$

Wäre dagegen $b = a$, so fiel E auf D, und es wäre $DE=e=0$, $CE=CD$ und in Übereinstimmung mit I. immer wieder:

$$\boxed{a} + \boxed{b} = 2\left\{\boxed{\frac{1}{2}c} + \boxed{m}\right\}.$$

XI. Sind in X. die Punkte A und B und somit auch $AB=c$ gegeben und liegt C auf einem um E mit dem Halbmesser m geschlagenen Kreise, so ist die rechte Seite der in X. gefundenen Gleichung bekannt und demnach die Summe $\boxed{a} + \boxed{b}$ unveränderlich, wenn C auf dem Kreise fortrückt.

Nach I. darf diese Summe $= \boxed{f}$ gesetzt werden. Demnach muß

der geometrische Ort (Fr. 74 XVII.) eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate der Abstände a und b

von zwei gegebenen Punkten A und B einem gegebenen Quadrate $[f]$ gleicht, ein Kreis sein, welcher um die Mitte E von $AB = c$ mit dem Halbmesser m zu schlagen ist, für welchen

$$[m] = \frac{1}{2}[f] - \frac{1}{4}[c] \quad \text{sein müßte.}$$

Nach Fr. 20 VI. und nach Berücksichtigung von Fr. 177 V. ließe sich der Halbmesser m aus

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{4}c^2}$$

ausrechnen.

Wäre in einem besonderen Falle $m = \frac{1}{2}c$, so erhielte man $[c] = [f] = [a] + [b]$ und käme somit auf I. zurück.

171. Wie verwandelt man eine Figur in eine inhaltsgleiche?

I. Zieht man in einem ebenen Vieleck $ABCDE$ (Fig. 157) eine Diagonale AC und zu dieser durch B eine Parallele BB_1 , bis sie die verlängerte DC in B_1 schneidet, dann ist $\triangle AB_1C = \triangle ABC$ (Fr. 166 IV.), daher auch $AB_1DE = ABCDE$, AB_1DE hat jedoch eine Seite weniger als $ABCDE$.

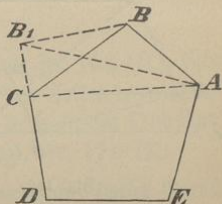


Fig. 157.

II. Durch Wiederholung des in I. beschriebenen Verfahrens läßt sich jedes Vieleck endlich in ein inhaltsgleiches Dreieck verwandeln.

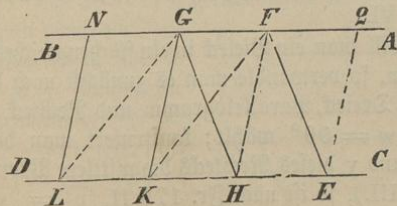


Fig. 158.

III. Will man ein Dreieck KEF (Fig. 158) in ein flächengleiches Parallelogramm verwandeln, so halbiere man

Winkel w , so lassen sie sich nach Fr. 167 I. addieren und subtrahieren.

II. Soll die Summe, oder die Differenz der Vielecke ein Quadrat sein, so muß man die Vielecke nach Fr. 171 VI. in Quadrate verwandeln.

Trägt man dann die Seiten $CA = a$ und $CB = b$ (Fig. 154 S. 193) zweier Quadrate auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitel C aus auf, so erhält man eine Hypotenuse $AB = h$, für welche nach Fr. 170 I.

$$[h] = [a] + [b] \text{ ist.}$$

Zu $[h]$ addiert man in gleicher Weise das dritte Quadrat $[c]$ etc.

Schlägt man dagegen über der Seite $AB = h$ des ersten Quadrats als Durchmesser einen Halbkreis und schneidet denselben in C mit einem aus A mit dem der Seite $AB = a$ des zweiten Quadrates gleichenden Halbmesser geschlagenen Kreise, so ist (Fr. 170 I.)

$$[b] = [h] - [a].$$

Zu demselben Ziele würde es (nach Fr. 169 III.) führen, wenn man zunächst ein Rechteck mit den Seiten $u = (h + a)$ und $v = (h - a)$ bildete und dieses noch in ein Quadrat $[b]$ (Fr. 171 VI.) verwandelte. — Vergl. Fr. 170 IX.

173. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Parallelogramme?

I. Teilt man die Grundseite AD eines Parallelogramms $P = ABCD$ (Fig. 160) in n gleiche Teile $AN = NQ = \dots$, und zieht man durch die Teilpunkte Parallelen zu AB , so zerfällt P in n kongruente Parallelogramme $ABSN = NSUQ = \dots = p$ (Fr. 108 XIII. und 109 I.). Es ist also:

$$P = np \text{ oder } p = P : n.$$

II. Teilt man die Höhe AX eines Parallelogramms

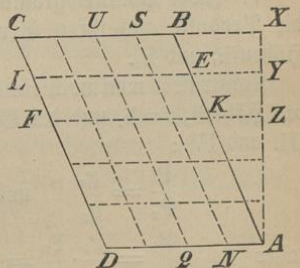


Fig. 160.

$P = ABCD$ (Fig. 160) in n gleiche Teile $XY = YZ = \dots$, und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zur Grundseite AD , so zerfällt P in n kongruente Parallelogramme $EBCL = KELF = \dots = p'$ (Zr. 111 VI., 109 I.). Es ist also $P = np'$ oder $p' = P : n$.

III. Zwei Parallelogramme P_1 und P_2 von gleicher Höhe h verhalten sich wie ihre Grundseiten g_1 und g_2 .

Sind die Grundseiten kommensurabel (Zr. 144 II.), ist z. B. $g_1 = xm$ und $g_2 = ym$, so kann man nach I. P_1 in x Parallelogramme p_1 von der Höhe h und der Grundseite m , P_2 aber in y Parallelogramme p_2 von der Höhe h und der Grundseite m zerlegen; daher ist $p_1 = p_2$ (Zr. 166 III.) und

$$P_1 : P_2 = xp_1 : yp_2 = x : y = xm : ym = g_1 : g_2.$$

Sind die Grundseiten inkommensurabel und etwa $g_1 = xm$, dann ist $ym < g_2 < (y+1)m$, aber wegen Zr. 166 III. auch $P_1 = xp$ und $yp < P_2 < (y+1)p$, also:

$$\frac{y}{x} < \frac{g_2}{g_1} < \frac{y+1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x} < \frac{P_2}{P_1} < \frac{y+1}{x},$$

d. h. $g_2 : g_1$ und $P_2 : P_1$ haben immer dieselben Grenzverhältnisse; daher ist (ähnlich wie in Zr. 148 I.) auch hier $P_1 : P_2 = g_1 : g_2$.

IV. Zwei Parallelogramme P_1 und P_2 von gleicher Grundlinie g verhalten sich wie ihre Höhen h_1 und h_2 .

Der Beweis ist genau so wie in III. zu führen, nur hat man anstatt I. den Satz in II. zu benutzen.

V. Zwei Parallelogramme P_1 und P_2 verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien g_1 und g_2 und ihren Höhen h_1 und h_2 .

Konstruiert man noch ein drittes Parallelogramm P_3 mit der Höhe $h_3 = h_1$ und der Grundlinie $g_3 = g_2$, so ist nach III. und IV.:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_3} &= \frac{g_1}{g_3} \quad \text{und} \quad \frac{P_3}{P_2} = \frac{h_3}{h_2}, \\ \text{daher} \quad \frac{P_1}{P_2} &= \frac{P_1}{P_3} \cdot \frac{P_3}{P_2} = \frac{g_1}{g_3} \cdot \frac{h_3}{h_2} = \frac{g_1 h_1}{g_2 h_2}. \end{aligned}$$

VI. Zwei Parallelogramme FLAT und KAND (Fig. 161), welche in einem Winkel A übereinstimmen, verhalten sich wie Produkte aus den diesen Winkel einschließenden Seiten. Legt man nämlich die Parallelogramme so an einander, daß die $\angle A$ Scheitelwinkel werden, und verlängert FT und DN, bis sie sich in C schneiden, so ist nach III.:

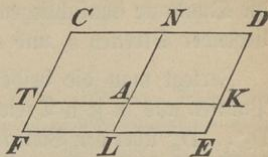


Fig. 161.

$$\frac{\text{FLAT}}{\text{TANC}} = \frac{\text{LA}}{\text{AN}}, \quad \frac{\text{TANC}}{\text{KAND}} = \frac{\text{TA}}{\text{AK}},$$

folglich wegen Fr. 20 VIII.:

$$\frac{\text{FLAT}}{\text{KAND}} = \frac{\text{LA}}{\text{AN}} \cdot \frac{\text{TA}}{\text{AK}} = \frac{\text{LA} \cdot \text{TA}}{\text{AN} \cdot \text{AK}}.$$

174. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke?

Da jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist (Fr. 108 II.), so verhalten sich zwei Dreiecke:

- I. bei gleicher Höhe wie ihre Grundlinien (Fr. 173 III.);
- II. bei gleicher Grundlinie wie ihre Höhen (Fr. 173 IV.);
- III. bei verschiedenen Höhen und Grundlinien wie die Produkte aus den Höhen und Grundlinien (Fr. 173 V.);
- IV. bei Übereinstimmung in einem Winkel A wie die Produkte aus den diesen Winkel einschließenden Seiten (Fr. 173 VI.).

175. Wie verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren?

I. Ähnliche Dreiecke D und D' verhalten sich wie die Quadrate (vergl. Fr. 19 V.) ähnlich liegender Seiten b und b' (c und c'), oder ähnlich liegender Strecken s und s'.

Weil $\angle A = \angle A'$ und $b : b' = c : c' = s : s'$ (Fr. 153 I., 154 II.), so ist nach Fr. 174 IV.:

$$\frac{D}{D'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{b}{b'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{s}{s'}\right)^2 = \frac{b^2}{(b')^2} = \frac{s^2}{(s')^2}.$$

II. Ähnliche Vielecke V_1 und V_2 (und ebenso krummlinige sowie gemischtlinige Figuren, Fr. 153 II.) verhalten sich wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten a_1 und a_2 , oder ähnlichliegender Strecken s_1 und s_2 .

Zerlegt man die beiden n -ecke von zwei ähnlichliegenden Punkten aus in je n Dreiecke $D_1, D_2, D_3 \dots D_n$ und $D_1', D_2', D_3' \dots D_n'$ über den Vielecksseiten a_1, b_1, c_1 zc. und a_2, b_2, c_2 zc., so ist nach I. und Fr. 153 I.:

$$\begin{aligned} V_1 &= D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n \\ &= D_1 \left(1 + \frac{D_2}{D_1} + \frac{D_3}{D_1} + \dots + \frac{D_n}{D_1} \right); \\ V_2 &= D_1' + D_2' + D_3' + \dots + D_n' \\ &= D_1' \left(1 + \frac{D_2'}{D_1'} + \frac{D_3'}{D_1'} + \dots + \frac{D_n'}{D_1'} \right). \end{aligned}$$

Nun ist: $b_2 : b_1 = a_2 : a_1$ (Fr. 153 I.)

$$\frac{b_2^2}{b_1^2} = \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \frac{a_2^2}{a_1^2} \quad (\text{Fr. 19 V. und 20 VIII.})$$

$$b_1^2 : b_2^2 = D_2 : D_2', \quad D_1 : D_1' = a_1^2 : a_2^2 \quad (\text{I.})$$

$$D_2 : D_2' = D_1 : D_1' \quad (\text{Fr. 20 IV.})$$

$$D_2 : D_1 = D_2' : D_1' \quad (\text{Fr. 147 V.}).$$

Ebenso ist: $D_3 : D_1 = D_3' : D_1'$ zc.,

daher nach Fr. 20 VIII. auch

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{D_1}{D_1'} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

III. Werden über den Seiten a, b, h eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren F_a, F_b und F_h beschrieben, so ist die über der Hypotenuse h beschriebene F_h gleich der Summe der Figuren F_a und F_b über den Katheten a und b .

$$F_a : F_h = a^2 : h^2, \quad F_b : F_h = b^2 : h^2 \quad (\text{II.})$$

$$(F_a + F_b) : F_h = (a^2 + b^2) : h^2 = 1 \quad (\text{Fr. 160 III.})$$

$$F_a + F_b = F_h.$$

IV. Um sowohl, wie in einen Kreis beschriebene ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Kreise (II.), weil diese Halbmesser ähnlichliegende Strecken sind.

V. Regelmäßige Figuren von gleicher Seitenzahl (Fr. 154 IV.) verhalten sich wie die Quadrate der (ähnlichliegenden) Halbmesser der eingeschriebenen oder umgeschriebenen Kreise.

VI. Für das demselben Kreise eingeschriebene und umgeschriebene n -eck f_n und F_n hat man nach II. und Fr. 163 III.:

$$f_n : F_n = s^2 : t^2 = e^2 : r^2 = r^2 : r_1^2.$$

176. Welche Figur benutzt man als Maß für die Figuren?

I. Als Flächeneinheit, d. h. als Maß für die Figuren, wählt man das Quadrat über der Längeneinheit (1 Meter oder Stab, Fr. 146 III.) und nennt dasselbe ein Quadratmeter oder einen Quadratstab ($1 \square^m = 1^{qm}$).

II. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Quadratmeter eine Figur enthält, heißt die Flächenzahl derselben.

Damit die nachfolgenden Formeln den Flächeninhalt in Quadratmetern liefern, sind die in ihnen vorkommenden Maße in Metern einzusetzen.

III. Wollte man nicht das Meter als Längeneinheit benutzen, sondern z. B. das Centimeter, so würde die Flächenzahl auch den Inhalt in Quadratcentimetern (vergl. die Tabellen I und II im Anhange) angeben.

Stets aber müssen die in Fr. 177 bis 179 für die Ausmessung verwerteten Strecken in einer und derselben Längeneinheit ausgedrückt sein, dürfen also nie mehrfach benannte Zahlen sein.

177. Wie findet man den Flächeninhalt eines Dreiecks und eines Vierecks*).

I. Die Flächenzahl eines Quadrates ist das Quadrat (vergl. Fr. 19 V.) der Längenzahl a seiner Seite a , weil nach Fr. 175 II. $a : 1 \square^m = a^2 : 1^2 = a^2$ ist, also:

$$a = a^2 \cdot 1 \square^m = a^2 \square^m.$$

II. Ist die Seite des Quadrates 10^m , 100^m zc., so enthält das Quadrat ($10^2 =$) $100 \square^m$, ($100^2 =$) $10\,000 \square^m$ zc.

III. Ist die Seite des Quadrates $0,1^m$, $0,01^m$ zc., so enthält das Quadrat ($0,1^2 =$) $0,01 \square^m$, ($0,01^2 =$) $0,0001 \square^m$ zc.

IV. Die Flächenzahl eines Rechtecks ist das Produkt aus den Längenzahlen a und b von zwei nicht-parallelen Seiten a und b ; weil nach Fr. 173 VI. $a, b : 1 \square^m = ab : 1 \cdot 1 = ab$ ist, so wird:

$$a, b = ab \square^m.$$

V. Kürzer sagt man: der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt aus dessen beiden Seiten a und b .

In ähnlicher Weise pflegt man auch die Sätze über den Inhalt des Quadrates (I.) und anderer Figuren (VI. bis IX.,

Fr. 178 und 179) kurz auszusprechen. Vergl. die Anm. zu Fr. 159 II. und zu Fr. 169 I.

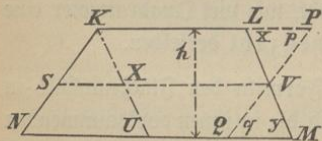


Fig. 162.

VI. Die Flächenzahl eines Parallelogramms NKPK, Fig. 162, ist das Produkt gh aus den Längenzahlen g und h der Grundseite $NQ = g$ und der Höhe h (IV.); denn das Parallelogramm gleicht dem Rechteck $[g, h]$ (Fr. 166 III.).

VII. Die Flächenzahl D des Dreiecks $NKU = D$, Fig. 162, ist das halbe Produkt aus den Längenzahlen g

*) Weiteres hierüber und Beispiele hierzu enthält der „Katechismus der Raumberechnung“ (3. Aufl. Leipzig 1888, Fr. 61 bis 128) und der „Katechismus der Feldmessaunst“ (5. Aufl. Leipzig 1891, Fr. 108 bis 121).

und h der Grundseite $NU = g$ und Höhe h (VI.). Da nämlich D die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe ist (Fr. 108 II.), so ist:

$$D = \frac{1}{2} gh \square^m.$$

VIII. Das Dreieck D mit den drei Seiten a, b, c läßt sich aber auch vom Mittelpunkte M , (vergl. Fig. 102 auf S. 108) des eingeschriebenen Kreises in drei Dreiecke zerlegen, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser r_0 jenes Kreises ist, deren Grundlinien aber a, b, c sind; daher findet man mit Fr. 159 XVII., wenn a, b, c, s und r_0 die Längenzahlen von a, b, c, s und r_0 bedeuten:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} ar_0 + \frac{1}{2} br_0 + \frac{1}{2} cr_0 = \frac{1}{2} r_0 (a + b + c) \\ &= r_0 s = \sqrt{r_0^2 s^2} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)} \square^m. \end{aligned}$$

IX. Die Flächenzahl T des Trapezes $T = NKLM$, Fig. 162, ist das halbe Produkt aus den Längenzahlen p und h der mittleren Parallelen $p = SV = \frac{1}{2} (KL + MN)$ und der Höhe h .

Man kann nämlich das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke von der Höhe h und den Grundlinien $KL = a^m$ und $NM = b^m$ zerlegen; daher ist nach VII.:

$$T = \frac{1}{2} ha + \frac{1}{2} hb = \frac{a+b}{2} h = ph \square^m.$$

X. Die Flächenzahl Z des Trapezoids Z (vergl. Fr. 106 V. und Fig. 165 in Fr. 180) ist das Produkt aus der Längenzahl d einer Diagonale $XD = d$ und dem arithmetischen Mittel der Längenzahlen h_1 und h_2 der Entfernungen h_1 und h_2 jener Diagonale d von den beiden anderen, auf verschiedenen Seiten von d liegenden Eckpunkten Y und V , bezw. U und S .

Denn diese Diagonale d teilt Z in zwei Dreiecke von der Grundlinie d und den Höhen h_1 und h_2 ; daher ist nach VII.:

$$Z = \frac{1}{2} d h_1 + \frac{1}{2} d h_2 = \frac{h_1 + h_2}{2} d = h_0 d \square^m,$$

wenn $h_0 = \frac{1}{2} (h_1 + h_2)$ dem arithmetischen Mittel aus h_1 und h_2 ist. Vergl. Zr. 180 VI.

178. Wie findet man den Flächeninhalt*) eines Vielecks?

I. Das Vieleck läßt sich behufs seiner Ausmessung oder der Berechnung seines Flächeninhaltes auf verschiedene Weise in Dreiecke, Trapeze, Trapezoiden zerlegen. (Vergl. Katech. der Raumberechnung, 3. Aufl. Zr. 78 bis 81 und Katech. der Feldmeßkunst, 5. Aufl. Zr. 122 bis 131.)

II. Für die Inhalte f_n und F_n der demselben Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen n -ecke findet man wegen Zr. 113 IV. nach Zr. 177 VII., 163 VI. und VII.:

$$f_n = \frac{1}{2} e s \cdot n = \frac{1}{2} u_n e \quad \text{und} \quad F_n = \frac{1}{2} r t \cdot n = \frac{1}{2} U_n r.$$

Während also bei demselben Kreise das Verhältnis $F_n : U_n$ von n unabhängig und unveränderlich $= \frac{1}{2} r$ ist, wird das Verhältnis $f_n : u_n = \frac{1}{2} e$ um so größer, je größer e , d. h. je größer n wird, doch bleibt $f_n : u_n$ stets kleiner als $\frac{1}{2} r$, weil $e = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$ (Zr. 163 I.).

III. Dividiert man die nach II. bestimmten beiden Inhalte f_m und F_m mit r^2 , so erhält man die beiden Quotienten $f_m : r^2 = (u_m : 2r)(e' : r)$ und $F_m : r^2 = U_m : 2r$, worin e' den Abstand der Seite des m -ecks vom Mittelpunkte bedeutet.

Ferner würde man aus II. nach Zr. 163 IV., I. und VI. finden:

*) Will man in Zr. 178 und 179 die Flächenzahlen, so muß man anstatt der in den Formeln vorkommenden Strecken deren Längenzahlen einsetzen, wie in Zr. 177.

$$f_{2n} = \frac{1}{2} u_{2n} \cdot e_2 = \frac{1}{2} 2n \cdot s_2 e_2 = n \sqrt{2r(r-e)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} r(r+e)} \\ = nr \sqrt{(r-e)(r+e)} = \frac{1}{2} nrs = \frac{1}{2} ru_n, \text{ und} \\ f_{2n} : r^2 = u_n : 2r.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen und $F_{2n} = \frac{1}{2} r U_{2n}$ erkennt man, daß sich die beiden Verhältnisse $f_{2n} : r^2$ und $F_{2n} : r^2$ derselben Grenze (Fr. 163 XI.) nähern, wie die Verhältnisse $u_n : 2r$ und $U_{2n} : 2r$.

IV. Bei Aufsuchung der in III. erwähnten Grenze kann man davon ausgehen, daß beim regelmäßigen Sechseck $s = r$ ist (Fr. 132 II.); mit Benutzung von Fr. 163 I. bis XII. findet man daraus:

Seiten- zahl	$u_n : 2r$	$U_n : 2r$	$f_n : r^2$	$F_n : r^2$
$n = 6$	3	3,464 1016	2,598 0762	3,464 1016
12	3,105 8285	3,215 3903	3	3,215 3903
24	3,132 6286	3,159 6599	3,105 8285	3,159 6599
48	3,139 3502	3,146 0862	2c.	2c.
96	3,141 0319	3,142 7146		
192	3,141 4524	3,141 8730		
384	3,141 5576	3,141 6627		
768	3,141 5838	3,141 6101		
1536	3,141 5904	3,141 5970		

V. Nach Fr. 163 XII. ist die in III. erwähnte Grenze die Zahl $\pi = 3,141 592 65 \dots$; angenähert darf für π die Zahl

$$\frac{22}{7}, \quad \text{oder} \quad \frac{311}{99}, \quad \text{oder} \quad \frac{333}{106}, \quad \text{oder} \quad \frac{355}{113}$$

gesetzt werden. Aus dem genauen Werte von π ergibt sich weiter:

$$1 : \pi = 0,318 31 \dots \\ \sqrt{\pi} = 1,772 45 \dots \quad \text{und} \quad 1 : \sqrt{\pi} = 0,564 19 \dots$$

179. Welche Formeln findet man für den Umfang und Inhalt des Kreises*) und seiner Teile?

I. Die Kreisfläche K liegt stets zwischen f_n und F_n (Zr. 113 VIII.), oder es ist

$$f_n < K < F_n.$$

II. Je mehr mit wachsendem n sich f_n und F_n einander nähern (Zr. 178 III.), desto mehr nähern sie sich auch dem stets zwischen ihnen liegenden K ; daher ist nach Zr. 178 V. auch $K : r^2 = \pi$, oder:

$$K = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2.$$

III. Rückwärts wäre

$$r = \frac{1}{2} d = \sqrt{K : \pi},$$

also:
$$r = \frac{1}{2} d = 0,564\,19 \sqrt{K}.$$

IV. Betrachtet man den Kreis K als ein regelmäßiges Vieleck von unzähliger viel Seiten (Zr. 113 VIII.), so muß sich aus Zr. 163 XII. auch für den Kreisumfang u ergeben

$$u : 2r = \pi = K : r^2;$$

daher ist nicht nur $K = \frac{1}{2} ur$, sondern auch:

$$u = 2\pi r = \pi d \quad \text{und} \quad d = 2r = u : \pi = 0,318\,31 u.$$

V. Gehört in einem Kreise vom Halbmesser r zu einem Centriwinkel von w Graden der Bogen b , so hat man (Zr. 54 V.):

$$b : 2r\pi = w^\circ : 360^\circ; \quad b = \pi r w^\circ : 180^\circ.$$

VI. Beim Kreise vom Halbmesser $r = 1$ läßt sich der zu einem Centriwinkel w gehörige Bogen $\widehat{w}$ leicht finden; nach V. ist bei

$$w = 1^\circ \text{ der Bogen } \widehat{1^\circ} = \pi : 180^\circ = 0,017\,453\,2925;$$

$$w = 1' = \widehat{1'} = \widehat{1^\circ} : 60 = 0,000\,290\,8882;$$

$$w = 1'' = \widehat{1''} = \widehat{1'} : 60 = 0,000\,004\,8481.$$

*) Vergl. Anm. zu Zr. 178. — Beispiele hierzu enthält der Katech. der Raumberechnung Zr. 82 bis 119.

VII. Der dem Halbmesser r gleiche Bogen gehört zu einem Centriwinkel $w^\circ = 57^\circ 17' 44,806'' = 206264,806''$.

VIII. Der Kreisabschnitt $S = CMDEC$, Fig. 163 (vergl. Fr. 87 I.), wächst ebenfalls proportional dem Bogen $CED = b$ und dem Centriwinkel $CMD = w^\circ$. Daher verhält sich $S : K = w^\circ : 360^\circ = b : u$, und es ist:

$$S = \pi r^2 w^\circ : 360^\circ = \frac{1}{2} rb.$$

Der Ausschnitt S läßt sich wie ein Dreieck (Fr. 177 VII.) berechnen; ebenso wegen IV. der Kreis. Die Höhe ist in beiden Fällen $= r$, die Grundseite gleicht im erstern Falle

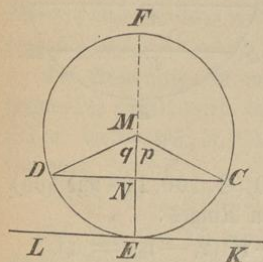


Fig. 163.

dem Bogen b , im andern dem Umfange u .

IX. Die Kreisabschnitte $A = CDEC$ und $A_1 = CDFC$ (Fig. 163) werden erhalten, wenn man das $\triangle CDM$ vom Ausschnitt $S = CMDEC$ subtrahiert, bezieh. zum Ausschnitt $S_1 = CMDFC$ addiert. Ihre Inhalte sind demnach:

$$A = \frac{1}{2} (br - se) \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{1}{2} (b_1 r + se),$$

wobei $b = \widehat{CED}$, $b_1 = \widehat{CFD}$, $e = MN$, $s = \widehat{CD}$.

Eine Tabelle zur Berechnung der Abschnitte enthält der Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. S. 52.

Wäre bloß die Sehne $CD = s$ und die Pfeilhöhe $NE = k = r - e$ des Abschnittes A gegeben, so hätte man (Fr. 163 I.):

$$s^2 = 4(r - e)(r + e) = 4k(2r - k) = 8kr - 4k^2,$$

also $8kr = s^2 + 4k^2$, woraus sich $r = (s^2 + 4k^2) : 8k$ berechnen läßt. — Ähnlich ist es beim größeren Abschnitt A_1 .

X. Ein zwischen zwei parallelen Sehnen AB und KS (Fig. 164) gelegenes Stück ABSKA der Kreisfläche heißt eine Kreiszone und läßt sich als Differenz der beiden Abschnitte AEBA und KESK berechnen.

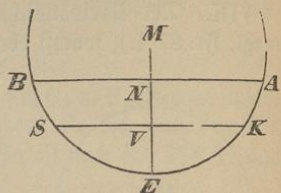


Fig. 164.

XI. Die Fläche eines Kreisringes bleibt übrig, wenn aus einem Kreise K_1 vom Halbmesser r_1 ein anderer K_2 vom Halbmesser r_2 herausgeschnitten wird, wie in Fig. 92, 98 und 100 (S. 100, 104 und 105). Daher ist die Fläche B eines solchen Ringes:

$$B = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = u_0 i,$$

wenn $i = r_1 - r_2$ die Breite eines gleichgroßen concentrischen Kreisringes und $u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = 2\pi r_0$ den mittleren Umfang bedeutet, d. h. den durch die Mitte von i gehenden Kreis K_0 vom Halbmesser $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = r_2 + \frac{1}{2}i$.

XII. Für einen concentrischen Ringausschnitt, dessen Centriwinkel w° , dessen Halbmesser r_1 und r_2 und dessen Bögen b_1 und b_2 sind, hätte man nach VIII. und V.:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2}(b_1 r_1 - b_2 r_2) = (r_1^2 - r_2^2) \pi w^\circ : 360^\circ \\ &= \frac{1}{2}(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \pi w^\circ : 180^\circ \\ &= \frac{1}{2} i (b_1 + b_2) = i b_0, \end{aligned}$$

wenn wieder $i = (r_1 - r_2)$ die Breite und $b_0 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = r_0 \pi w^\circ : 180^\circ$ den mittleren Bogen bedeutet.

XIII. Wenn zwei Kreise vom Halbmesser r_1 und r_2 und der Centralen $M_1 M_2 = e$ sich schneiden, wie in Fig. 93 bis 95, so teilen sie sich in drei Teile: eine (konvex-konvexe) Linse $L = QAPBQ$ und zwei Monde $N_1 = DPAQD$ und $N_2 = CPBQC$ (konvex-konkave Linsen). Die Linse läßt sich als Summe, jeder Mond als Differenz zweier Kreisabschnitte ansehen.

Setzt man nun die Bögen $PBQ = b_1$ und $PDQ = b_2$, $PAQ = b_2$ und $PCQ = b_1$, ferner $M_1 P M_2 Q M_1 = \triangle M_1 P Q$

$\mp \triangle M_2PQ = 2 \triangle M_1PM_2 = v$, im $\triangle M_1PM_2$ aber $s = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + e)$, so ist nach Fr. 177 VIII.

$$v = 2 \sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-e)}$$

$$b_1 + b_3 = 2\pi r_1, \quad \text{und} \quad b_2 + b_4 = 2\pi r_2;$$

deshalb nach IX. weiter:

$$N_1 = \frac{1}{2}(b_3r_1 - b_2r_2) + v \quad L = \frac{1}{2}(b_1r_1 + b_2r_2) - v$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(b_1r_2 - b_1r_1) + v \quad 2L + N_1 + N_2 = K_1 + K_2.$$

Die Abschnitte, in welche e durch die gemeinschaftliche Sehne PQ geteilt wird, lassen sich nach Fr. 170 IV. bequem finden, weil im $\triangle M_1PM_2$ einer der Winkel M_1 und M_2 spitz sein muß.

Bei $r_1 = r_2$ wird $N_1 = N_2$.

180. Wie läßt sich der Flächeninhalt bei Aufstellung der Data für das Dreieck und die Vierecke verwerten?

I. Da nach Fr. 177 VIII. für den Inhalt des Dreiecks D die Gleichungen

$$D = r_0 s \quad \text{und}$$

$$D = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

gelten, so lassen sich auch noch

$$D, r_0, s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad \text{und} \quad D, a, b, c$$

als Data für das Dreieck den in Fr. 137 aufgeführten anreihen.

II. Ebenso bilden wegen Fr. 177 VII. die drei Größen D , g und h ein Datum für das Dreieck.

III. Nach 174 IV. verhalten sich die Inhalte zweier Dreiecke, welche einen Winkel A gemein haben, wie die Produkte aus ihren diesen Winkel einschließenden Seiten b und c . Deshalb müssen für zwei in einem Winkel A übereinstimmende flächengleiche Dreiecke die Produkte b_1c_1 und b_2c_2 gleich groß sein. Man kann daher, wenn von den drei Stücken D , A und bc zwei gegeben sind, durch Verwandlung des Dreiecks das dritte finden.

IV. Für das Parallelogramm (vergl. Fr. 138 II. und III.) bilden wegen Fr. 177 VI. auch noch der Inhalt P , die Grundseite g und die Höhe h ein Datum.

V. Für das Trapez (vergl. Fr. 138 IV. bis VII.) markiert die in Fr. 177 IX. gegebene Gleichung noch den Inhalt T , die Höhe h und die mittlere Parallele $p = \frac{a+b}{2}$ als drei zu einem Datum zusammengehörige Größen.

VI. Für das Trapezoid würde Fr. 177 X. als ein Datum Z , d und die Summe $(h_1 + h_2)$ der Höhen liefern. Außerdem besitzt man in den beiden Diagonalen d_1 und d_2 , dem von diesen eingeschlossenen Winkel w und dem Flächeninhalte Z ein Datum.

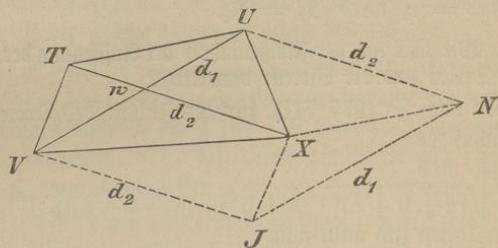


Fig. 165.

Zeichnet man nämlich in Fig. 165 über $UV = d_1$ mit dem Winkel w und der zweiten Seite $UN = TX = d_2$ das Parallelogramm $P = JNUV$ (Fr. 109 I.) und zieht NX , sowie JX , so ist

$$UN \parallel TX \parallel VJ \text{ (n. d. Konstr.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} TU = XN \\ TV = XJ \\ UV = NJ \end{array} \right\} \text{ (Fr. 108 V. und III.)}$$

$$\triangle VTU \cong \triangle JXN \text{ (Fr. 80 I.)}$$

$$JNUV = JXNUTV \text{ (Fr. 20 VIII.)}$$

$$\begin{aligned} P &= JXTV + XTUV \text{ (Fr. 20 II.)} \\ &= 2(\triangle VXT + \triangle TXU) \text{ (Fr. 108 II.)} \\ &= 2(VXUT) = 2Z. \end{aligned}$$

Aus dreien der oben genannten Stücke kann man daher das vierte finden. Indessen ist natürlich (vergl. Fr. 136 II. und III.) durch drei dieser Stücke das Trapezoid VXUT nicht bestimmt, da ja z. B. nur die Neigung der beiden Diagonalen gegen einander durch w gegeben ist, nicht aber ihr Schnittpunkt; es läßt sich somit nicht nur der Anfangspunkt T mit TX selber auf TX verschieben, wobei T auch (wie in Fig. 113 S. 117) über d_1 hinüber auf die Seite von X rücken kann, sondern es läßt sich auch d_2 parallel zu TX auf d_1 verschieben.

Z und P sind übrigens — ähnlich wie in Fr. 177 X. — proportional dem Produkte $d_1 d_2$ aus den beiden Diagonalen; denn entspricht im rechtwinkligen Dreieck mit dem $\angle w$ der Hypotenuse 1 die w gegenüberliegende Kathete k , so gehört zu der Hypotenuse d_2 die Kathete $h_1 + h_2 = 2h_0$, und es ist $1 : k = d_2 : 2h_0$ und $Z = h_0 d_1 = \frac{1}{2} k d_1 d_2$. Man könnte also mit Z und w auch $(d_1 d_2)$, oder $(h_0 d_1)$ mit w , d_1 und d_2 zu einem Datum vereinen.

VII. Im Tangentenviereck ABCD, Fig. 103 (S. 109), gehören als Datum zusammen: der Flächeninhalt F, der Umfang U (oder wegen Fr. 133 V. die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten) und der Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises.

Da man sich das Viereck in die vier Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM von der Höhe r (Fr. 83 X.) zerlegen kann, von denen jedes eine Seite des Viereckes als Grundseite hat, so ist nach Fr. 177 VII. auch $F = \frac{1}{2} Ur = (AB + CD) r$.

VIII. Es mag hier noch hervorgehoben werden, daß in Fr. 141 und 142, bezw. Fr. 161 IX. und X. nebenbei die Aufgabe: „ein Quadrat (oder auch ein Rechteck) in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Seiten einen gegebenen Längensunterschied besitzen“ auf Grund von Fr. 161 II., IV., V., Fr. 160 IV. und Fr. 170 IX. mit gelöst worden ist.