

Universitätsbibliothek Wuppertal

Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

Einleitung

Nutzungsrichtlinien Das dem PDF-Dokument zugrunde liegende Digitalisat kann unter Beachtung des Lizenz-/Rechtehinweises genutzt werden. Informationen zum Lizenz-/Rechtehinweis finden Sie in der Titelaufnahme unter dem untenstehenden URN.

Bei Nutzung des Digitalisats bitten wir um eine vollständige Quellenangabe, inklusive Nennung der Universitätsbibliothek Wuppertal als Quelle sowie einer Angabe des URN.

[urn:nbn:de:hbz:468-1-4776](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:468-1-4776)

Einführung.

1. Womit und wie beschäftigt sich die Geometrie?

I. Die Geometrie oder Raumlehre ist die Wissenschaft von den Raumgrößen oder räumlichen Gebilden, d. h. den Größen oder Gebilden, welche einen Raum einnehmen, im Raume vorkommen oder doch darin gedacht werden.

II. Die Geometrie ist demnach ein Zweig der Mathematik oder Größenlehre und unterscheidet sich von dem anderen Zweige der Mathematik — der Arithmetik oder Zahlengrößenlehre (vergl. auch Fr. 18 I.) — dadurch, daß in letzterem die Größen einfach als abgesonderte oder diskrete Größen betrachtet werden, d. h. als solche, welche aus Theilen bestehen oder bestehend gedacht werden, während die Geometrie ihre Untersuchungen auf die räumlichen Eigenschaften der Raumgrößen beschränkt.

III. Entsprechend dem in I. und II. Ausgesprochenen wird sich in diesem Katechismus die Untersuchung der Eigenschaften der Raumgebilde in erster Linie auf das Räumliche angewiesen sehen, auf ein Entwerfen und Darstellen derselben, d. i. auf räumliche oder geometrische Konstruktionen.

In das Rechnerische spielt sich die Untersuchung hinüber, wenn es sich um die Vergleichung, Ausmessung und Berechnung des Inhaltes handeln wird. Besondere Abteilungen

dieses Gebietes haben in den Katechismen der Raumberechnung (3. Aufl. 1888), der Feldmeßkunst (5. Aufl. 1891) und der Nivellierkunst (3. Aufl. 1887) noch getrennte Berücksichtigung gefunden.

IV. Eine eigenartige rechnerische Weiterbildung der Lehre vom Dreieck und Dreikant besitzen wir in der Trigonometrie. Vergl. „Katechismus der ebenen und sphärischen Trigonometrie“. Leipzig 1882.

V. Die in III. gekennzeichnete Geometrie pflegt man die synthetische zu nennen zur Unterscheidung von der analytischen Geometrie (vergl. „Katechismus der analytischen Geometrie“. Leipzig 1884), welche in der Behandlungsweise des Stoffes einen wesentlich anderen Weg einschlägt, indem sie zwar von Messungen und Konstruktionen ausgeht, dann aber zur Rechnung greift und schließlich die Ergebnisse der Rechnung wieder in geometrische Sätze, Angaben und Konstruktionen überseht.

2. Welches sind die Grundeigenschaften des Raumes?

Der Begriff „Raum“ ist ein einfacher und ursprünglicher.

Man hat sich aber 1. alle Teile des Raumes als vollständig gleichartig vorzustellen, so daß ein bloßer Ortsunterschied geometrischer Gebilde noch nicht eine Verschiedenheit derselben bedingt.

Man hat sich ferner 2. alle seine Teile als unmittelbar zusammenhängend zu denken und nennt daher die Raumgrößen stetig ausgedehnte oder kontinuierliche Größen.

Der Raum besitzt endlich 3. eine unbegrenzte Ausdehnung, d. h. er erstreckt sich von jeder Stelle, von jedem Orte aus nach allen Seiten hin in ganz unmeßbare Fernen.

3. Was ist ein geometrischer Körper?

Ein nach allen Seiten hin begrenztes Stück des unbegrenzten Raumes heißt ein geometrischer Körper.

Ob in diesem ringsum begrenzten Raum ein Stoff (Materie) enthalten ist oder nicht, ist dem Geometer gleichgültig; nicht so dem Physiker. Ein mit einem Stoffe erfüllter begrenzter

Raum heißt ein physischer oder materieller Körper und besitzt noch andere Eigenschaften (z. B. Schwere, Glanz, Härte etc.), über welche die Physik Auskunft giebt.

4. Welche andere geometrische Gebilde treten am Körper auf?

I. Die Grenzen eines Körpers nennt man Flächen. Ein Körper kann (wie z. B. ein Ei von seiner Schale) von einer einzigen, zusammenhängenden Fläche ringsum begrenzt werden. Wird dagegen ein Körper von mehreren Flächen begrenzt, so begrenzen sich diese Flächen da, wo sie an einander stoßen, gegenseitig. Die Grenzen der Flächen heißen Linien. Die Grenzen begrenzter Linien nennt man Punkte.

Punkte, Linien und Flächen können jedoch auch an sich selbst, ohne Rücksicht auf Körper, an denen sie auftreten, zum Gegenstand einer geometrischen Untersuchung gemacht werden.

II. Punkte, Linien oder Flächen dürfen aber durchaus nicht etwa als Teile beziehungsweise der Linien, Flächen oder Körper aufgefaßt werden. Die dünnste Schale eines Apfels z. B. ist noch keine Fläche, der feinste Bleistiftstrich ist noch keine Linie, sondern beide sind Körper.

Daher lassen sich auch Linien, Flächen oder Körper nicht durch Neben-einander-legen oder An-einander-reihen mehrerer einzelner Punkte, Linien oder Flächen erzeugen oder aus ihnen zusammensetzen, weil dabei das Unstetige (Diskontinuierliche) nicht beseitigt wird.

5. Welchen Unterschied in Bezug auf ihre Ausdehnung zeigen die Punkte, Linien, Flächen und Körper?

I. Die einen Körper umgrenzenden Flächen scheiden die zu dem Körper gehörigen, in dem Körper liegenden Punkte des Raumes von den außerhalb des Körpers gelegenen Punkten. Beim Fortschreiten von innen nach außen durchschreitet man die Begrenzungsfläche, allein man trifft dabei in der Begrenzungsfläche selbst nicht auf mehrere Punkte hintereinander, und darin besteht eben das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zwischen Fläche und Körper. Vom Innern

des Körpers nach außen hin ist also die Fläche gar nicht ausgedehnt; sie besitzt demnach eine Ausdehnung weniger als der Körper.

In ähnlicher Weise besitzt die Linie eine Ausdehnung weniger als die Fläche, und der Punkt wieder eine weniger als die Linie.

II. In einer Linie lassen sich verschiedene Punkte unterscheiden; doch steht deren Zahl zu der Länge oder Größe der Linie in keiner Beziehung, sondern es lassen sich auch in verschieden großen Linien gleichviel Punkte markieren. In der Linie hat zugleich jeder Punkt nur zwei benachbarte Punkte, einen vor sich und einen hinter sich; in der Linie liegt Punkt an Punkt bloß nach einer Raumgegend hin, bloß in einer Reihe neben einander; man kann innerhalb der

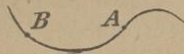


Fig. 1.

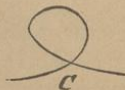


Fig. 2.

Linie selbst nur auf einem Wege (vornwärts, oder rückwärts) von einem Punkte A (Fig. 1) nach einem andern Punkte B der Linie gelangen. Auch die Linien, welche (wie Fig. 2 bei C) geschlossene Züge bilden, machen hiervon nur scheinbar eine Ausnahme.

Daher hat die Linie nur eine Ausdehnung (oder Dimension).

III. Wenn aber die Linie bloß eine Ausdehnung besitzt, so kann der Punkt gar keine besitzen; er bezeichnet vielmehr bloß einen Ort im Raume, in einer Linie, einer Fläche, einem Körper.

Der Fläche aber werden zwei (vergl. Fr. 198 V.), dem Körper drei Ausdehnungen zugeschrieben.

IV. Faßt man die Linie als eine Punkte-Reihe, die Fläche als Punkte-Schicht auf, so kann man in der Fläche

und im Körper neben einander liegende Punktereihen und Punkteschichten in ähnlicher Weise unterscheiden, wie man in der Linie Punkte unterscheidet. Ein passendes Bild hierfür bietet u. a. ein Ziegelhaufen, in etwas anderer Art eine Zwiebel.

V. Der Umstand, daß die Punkte einer Linie, einer Fläche, eines Körpers von einem (innerhalb, oder außerhalb der Linie, der Fläche, des Körpers) beliebig gewählten Punkte aus gesehen nach den verschiedensten Raumgegenden hin verteilt liegen können, widerspricht dem soeben festgesetzten keineswegs, wie sich später noch deutlicher zeigen wird.

6. Können Linien, Flächen und Körper durch Bewegung entstehen?

I. Wenn ein Punkt sich stetig bewegt, so gelangt er von seinem Ausgangsorte A (Fig. 3), dem Anfangspunkte, an einen andern (oder auch wieder an den ersten) Punkt B, den Endpunkt. Die beiden Orte A und B sind räumlich getrennt (verschieden) und durch den Weg des sich bewegenden Punktes mit einander verbunden. Dieser Weg ent-

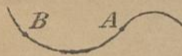


Fig. 3.

hält die stetige Aufeinanderfolge der Orte, an welchen sich der sich bewegende Punkt während seiner Bewegung vom Anfangspunkte zum Endpunkte einmal befand. Durch die stetige Aneinanderreihung der Punkte wird bei einer solchen Bewegung nur eine Ausdehnung erzeugt, und deshalb beschreibt ein sich stetig bewegender Punkt eine Linie, sein Weg ist eine Linie.

Läßt man einen beweglichen Punkt eine Linie beschreiben, so zieht man eine Linie.

II. Gelangt bei der stetigen Bewegung einer Linie jeder Punkt der Linie immer wieder an einen Ort, wo auch vorher schon ein Punkt der Linie lag, so entsteht durch die Bewegung nichts Neues.

Gelangen dagegen bei der stetigen Bewegung einer Linie deren Punkte an Orte, wo vorher keine Punkte der Linie

lagen, so erzeugt die Bewegung der stetigen Punktreihe (im Einflange mit Fr. 5 IV.) noch eine Ausdehnung, die Linie beschreibt also eine Fläche. Vergl. z. B. Fr. 13.

III. In gleicher Weise entsteht bei der stetigen Bewegung einer Fläche nur dann ein Körper, wenn die Punkte der Fläche dabei an Orte gelangen, wo vorher keine Punkte dieser Fläche waren.

IV. Die Bewegung kann in I. bis III. eine willkürliche, gesetzlose sein, sie kann aber auch an ein bestimmtes Gesetz gebunden sein.

Auch in anderer Beziehung kann die Zusammengehörigkeit von Punkten und Punktgruppen durch ein Gesetz, eine Formel bedingt sein.

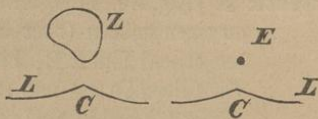


Fig. 4.

In beiden Fällen aber muß es sich nicht unbedingt jederzeit um stetig zusammenhängende Punkte und Punktgruppen handeln, es kann vielmehr die willkürliche, oder gesetzmäßige Bewegung unter Umständen auch eine sprungweise sein und es können räumlich getrennte Punktgruppen zu einem Ganzen zusammengehören. So könnte sich z. B. in Fig. 2 der geschlossene Zug von der übrigen Linie abtrennen und unter Umständen ferner zu einem Punkte (einem Einsiedler) zusammenschrumpfen, wie dies Fig. 4 bei Z und E zeigt.

7. Gibt es auch halbbegrenzte und unbegrenzte Linien, Flächen und Räume?

I. An Körpern kommen nach Fr. 4 I. nur begrenzte Flächen und Linien vor. Die stetige Bewegung eines Punktes kann aber von dessen ursprünglichem Orte aus auch ohne

Aufhören fortgehen und liefert dann eine halbbegrenzte, d. i. nach einer Seite hin begrenzte, nach der andern Seite hin aber unbegrenzte Linie.

II. Bewegt sich nun der Punkt von seinem ursprünglichen Orte aus auch noch nach der andern Seite hin ohne Ende stetig fort, so entsteht dabei eine unbegrenzte Linie.

Auf einer in sich zurücklaufenden Linie kann sich der Punkt zwar zeitlich unaufhörlich bewegen, er durchläuft jedoch dabei (wiederholt) nur eine räumlich begrenzte Anzahl von Punkten.

III. Eine ringsum begrenzte Fläche heißt eine Figur; ihre Grenzen bilden ihren Umfang (Perimeter). Beseitigt man eine oder einige Grenzen der Figur, indem man dieselben etwa in der Fläche ohne Ende fortbewegt, so erhält man eine halbbegrenzte Fläche; durch die Beseitigung aller Grenzen aber erhält man eine unbegrenzte Fläche.

IV. Ebenso sind auch halbbegrenzte und unbegrenzte Räume denkbar.

8. Auf welche Weise kann die Lage einer Linie bestimmt werden?

Wegen der großen Verschiedenheit der Linien unter einander fordert eine jede besondere Linie auch eine besondere Weise der Bestimmung ihrer Lage im Raume. Bei den nach einem bestimmten Gesetze, nach einer bestimmten Regel gebildeten Linien aber reichen eine gewisse Anzahl von Punkten (oder sonstigen Bestimmungsstücken) zur Bestimmung der Lage der ganzen Linie aus; stets sind dazu mindestens zwei Stücke nötig.

9. Wenn nennt man eine Linie eine Gerade, eine Strecke, einen Strahl? und welche Eigenschaften hat die Gerade?

I. Ist die Lage einer Linie bereits durch zwei ihrer Punkte (z. B. G durch D und F in Fig. 5 S. 10) bestimmt, so nennt man die Linie gerade oder eine Gerade.

II. Die Gerade G, Fig. 5, ändert ihre Lage nicht, wenn man zwei ihrer Punkte, z. B. D und F, zugleich festhält und sie um diese zwei Punkte dreht.

III. Die Gerade G läßt sich auf sich selbst verschieben und umlegen, wobei man nur darauf zu sehen hat, daß sie stets durch die nämlichen zwei Punkte D und F geht. Vergl. Fr. 15 V.

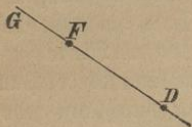


Fig. 5.

IV. Jeder Teil einer Geraden ist selbstverständlich auch gerade und fällt seiner ganzen Ausdehnung nach mit der Geraden zusammen, sobald er an irgend einer Stelle so auf die Gerade gelegt wird, daß er zwei Punkte mit ihr gemein hat.

V. Ein nach beiden Seiten hin begrenzter Teil einer Geraden heißt eine Strecke.

VI. Eine Strecke kann ebenfalls auf sich selbst verschoben werden und bleibt dabei beständig in derselben Geraden liegen, sofern man nur dafür sorgt, daß zwei Punkte von ihr in jeder ihrer neuen Lagen mit zwei beliebigen Punkten von ihr in ihrer ursprünglichen, bezw. in einer ihrer schon dagewesenen neuen Lagen zusammenfallen.

VII. Durch eine solche Verschiebung einer Strecke gelangt man zu einer Verlängerung derselben, wenn man die von ihr neu eingenommenen Punkte den von ihr ursprünglich eingenommenen anfügt.

VIII. Verlängert man so die Strecke unaufhörlich über den einen ihrer Endpunkte hinaus, so erhält man eine halb-begrenzte Gerade. Eine solche nur einseitig begrenzte Gerade heißt ein Strahl.

IX. Verlängert man eine Strecke unaufhörlich über ihre beiden Endpunkte hinaus, so wird sie zur unbegrenzten Geraden.

Jede Gerade an sich ist also als unbegrenzt zu denken.

10. Was versteht man unter einer gebrochenen, einer krummen und einer gemischten Linie?

I. Eine gebrochene Linie besteht aus mehreren, an einander gelegten Teilen verschiedener Geraden.

II. Eine Linie heißt krumm, wenn zur Bestimmung ihrer Lage mehr als zwei Punkte erforderlich sind. (Vergl. IV.) 15

III. Eine gemischte Linie besteht aus an einander gelegten Theilen von Geraden und Krümmen. (Vergl. I.) 18

IV. Kein Theil einer Krümmen kann gerade sein. 19

V. Jede in sich zurücklaufende Linie ist krumm. Dreht man sie nämlich um zwei ihrer Punkte, welche man festhält, so kommen diejenigen ihrer Punkte, welche außerhalb der durch jene beiden Punkte bestimmten Geraden liegen, in neue Lagen und zwar an Orte, wo bisher keine Punkte der Linie lagen. Über den dabei von jenen Punkten beschriebenen Weg vergl. Fr. 181 XIV. 19a

11. Welche Flächen heißen Regelflächen und welche nennt man Ebenen? was ist eine ebene Figur?

I. Bewegt sich eine unbegrenzte Gerade stetig, ohne dabei in ihrer ursprünglichen Lage zu verharren, so beschreibt sie eine Regelfläche (geradlinige Fläche). In jeder solchen Fläche läßt sich durch jeden Punkt (wenigstens) eine mit der Fläche ganz zusammenfallende, ganz in der Fläche liegende Gerade ziehen, d. h. eine solche, deren Punkte sämtlich zugleich Punkte der Fläche sind.

II. Unter den Regelflächen zeichnet sich die Ebene dadurch aus, daß je zwei ihrer Punkte durch eine ganz in der Ebene liegende Gerade verbunden werden können.

III. Ein ringsum begrenztes Stück von einer Ebene nennt man nach Fr. 7 III. eine ebene Figur.

12. Welche Grundeigenschaften besitzt die Ebene?

I. In jeder Ebene lassen sich daher von jedem Punkte aus nach allen Seiten hin, also unzählig viele, Strahlen ziehen. 20

II. Eine Gerade kann, wenn sie einmal zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, nach Fr. 11 II. nicht zum Theil außerhalb der Ebene liegen. 21

III. Daher folgt aus der Unbegrenztheit der Geraden (Fr. 10 IX.), daß auch die Ebene unbegrenzt ist.

13. Wie kann eine Ebene entstehen?

I. Läßt man auf zwei in einer schon vorhandenen Ebene E (Fig. 6) durch denselben Punkt P gezogenen, verschiedenen unbegrenzten Geraden G_1 und G_2 eine dritte Gerade G_3 sich so fortbewegen, daß sie stets irgend einen Punkt A mit der ersten Geraden G_1 und irgend einen andern Punkt B mit der zweiten Geraden G_2 gemein hat, so bleibt die dritte Gerade G_3 be-

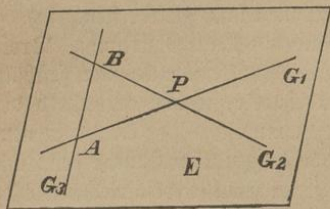


Fig. 6.

ständig in der Ebene E und muß auch, wenn nur die Bewegung in entsprechender Weise lange genug fortgesetzt wird, nach und nach alle Punkte dieser Ebene E überstreichen.

II. Durch die in I. erwähnte Bewegung der Geraden G_3 würde also die Ebene E beschrieben worden sein, wenn sie vorher noch nicht vorhanden gewesen wäre. (Vergl. auch Fr. 44 II. und 55 III.)

14. Wodurch ist die Lage einer Ebene bestimmt?

22 I. Haben zwei Ebenen zwei durch einen Punkt P , Fig. 6, gehende unbegrenzte Gerade G_1 und G_2 *) gemein, so müssen sie ganz zusammenfallen, weil jede dritte Gerade G_3 , welche durch je zwei verschiedene Punkte jener beiden Geraden gelegt wird, beiden Ebenen zugleich und ganz angehören muß (Fr. 12 II.).

23 II. Zwei durch den nämlichen Punkt gehende Gerade bestimmen also die Lage einer Ebene, weil sich durch dieselben nur eine einzige Ebene legen läßt.

*) Will man mehrere Gebilde wegen ihrer Gleichartigkeit mit dem nämlichen Buchstaben bezeichnen und doch auch von einander unterscheiden, so kann man dem Buchstaben unten je eine kleine Ziffer (oder einen Buchstaben) anfügen. In ähnlicher Weise setzt man oben Striche an die Buchstaben, z. B. a , a' , a'' .

III. Da aber weiter nach Fr. 9 I. jene beiden in I. und II. genannten Geraden G_1 und G_2 selbst schon durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte bestimmt sind, z. B. A, B und P, so reichen diese drei Punkte zur Bestimmung der Ebene aus. 24

IV. In gleicher Weise ist eine Gerade und ein außerhalb derselben liegender Punkt, z. B. G_3 und P, zur Bestimmung der Ebene ausreichend. 25

15. Welche weiteren Eigenschaften hat die Ebene?

I. Aus Fr. 14 ergibt sich zugleich, daß jede Ebene E sich auf den beiden Geraden G_1 und G_2 , d. h. auf sich selbst, verschieben läßt. Vergl. Fr. 9 III. 26

II. Ebenso kann man jede Ebene auf sich selbst ganz umlegen (vergl. Fr. 9 III.), wobei nur darauf zu achten ist, daß die nach Fr. 14 II. bis IV. notwendigen Bestimmungsstücke beibehalten werden. 26

III. Da nach Fr. 14 zwei verschiedene Ebenen höchstens eine Gerade mit einander gemein haben können, so muß ferner beim Umbrechen oder Umklappen einer Ebene — d. h. wenn man den einen Teil derselben, ohne den Zusammenhang der Teile irgendwo zu zerstören, auf den andern vollständig auflegt — die Linie, in welcher beide Teile an einander stoßen, um welche das Umbrechen oder Umklappen erfolgt, eine Gerade sein.

IV. Jede unbegrenzte Ebene wird durch eine in ihr gezogene Gerade in zwei, zu beiden Seiten der Geraden liegende halbbegrenzte Teile (Halbebenen) geteilt. Vergl. Fr. 21 IV. 27

V. Die in III. und IV. ausgesprochene Eigenschaft der Ebene namentlich läßt sich in Verbindung mit Fr. 9 III. und VI. gut zur Prüfung des Lineals — d. i. des Hilfsmittels, womit wir Gerade zu ziehen pflegen (Fr. 6 I.) — benutzen, und zwar durch Umlegen und durch Verschieben des Lineals in der Ebene und an einer mittels desselben gezogenen Geraden.

16. Was ist eine krumme, gebrochene, gemischte Fläche?

I. Krumm heißt eine Fläche, wenn keiner ihrer Teile eben ist. Zwei Gerade, welche durch denselben Punkt gehen, bestimmen also die Lage einer krummen Fläche noch nicht.

II. Eine gebrochene Fläche ist aus aneinanderstoßenden ebenen Flächenteilen,

III. eine gemischte Fläche aber aus ebenen und krummen Flächenteilen zusammengesetzt.

17. Wie teilt man die Geometrie ein?

Man teilt die Geometrie ein in die ebene Geometrie (Planimetrie, Epihedometrie) und die räumliche oder körperliche Geometrie (Stereometrie).

Erstere beschäftigt sich bloß mit solchen Raumgebilden, welche sich in einer Ebene befinden, letztere mit den nicht auf eine Ebene beschränkten Raumgebilden.

18. Was versteht man unter Buchstabenrechnung?

I. Im gewöhnlichen Leben führt man Rechnungen mit den gebräuchlichen in Ziffern geschriebenen (Zahlen-) Größen aus, wie dies u. a. der „Katechismus der Praktischen Arithmetik“. 3. Aufl. Leipzig 1889, lehrt. Dabei ist jedoch im Endergebnis meist der Einfluß der einzelnen in die Rechnung eingeführten Größen nicht mehr zu erkennen, und eben so wenig kann man schnell angeben, wie das Ergebnis sich ändert, wenn in der Rechnung andere Zahlen verwendet werden. Beides wird möglich, sobald man die Rechnungsgrößen mit allgemeinen Zeichen bezeichnet. Man hat dazu die Buchstaben gewählt und nennt dann eine solche, mit allgemeinen Zahlenzeichen ausgeführte Rechnung eine Buchstabenrechnung. Mittels der Buchstabenrechnung oder Algebra lassen sich auch allgemeine Regeln in möglichster Kürze und Übersichtlichkeit ausdrücken. Vergl. „Katechismus der Algebra“. 3. Aufl. Leipzig 1887.

II. In derselben Rechnung bedeutet der nämliche Buchstabe stets eine genau bestimmte und stets die nämliche Größe,

über die Anzahl der in ihr enthaltenen Einheiten aber wird irgend eine Angabe nicht gemacht; verschiedene Größen dagegen (auch wenn sie einmal zufällig gleichviel Einheiten enthielten) hat man mit verschiedenen Buchstaben zu bezeichnen.

19. Welcher Zeichen und Schreibweisen bedient sich die Buchstabenrechnung?

I. Die Buchstabenrechnung bedient sich im allgemeinen zunächst derselben Zeichen wie die Ziffernrechnung, in einzelnen Fällen vereinfacht sie aber die Schreibweise und wendet nach Bedarf eigenartige Bezeichnungsweisen an.

II. Es mögen hier die allgemein üblichen, auch im „Katechismus der Raumberechnung“ (3. Aufl., Fr. 11—44, unter Beigabe von Tafeln) und im „Katechismus der Praktischen Arithmetik“ (3. Aufl. Fr. 18 und 19) aufgeführten Zeichen und Regeln für die Gleichheit (=), Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division, Potenzierung und Wurzelausziehung als bekannt vorausgesetzt und nur noch erwähnt werden, daß das Zeichen:

$>$ bedeutet: „ist größer als“, z. B. $a > b$, $5 > 4$.
 $<$ = „ist kleiner als“, z. B. $a < b$, $4 < 5$.
 $\geq$ = „ist größer oder kleiner“.
 $\leq$ = „ist kleiner oder größer“.

III. () oder { } oder [] deuten an, daß die innerhalb der Klammern stehende Größe als ein zusammengehöriges Ganzes aufzufassen und zu behandeln ist. Ist diese Größe in ihren einzelnen, durch + und — verbundenen Teilen oder Gliedern gegeben, so heißt sie eine mehrteilige Größe.

Die Größe $\frac{a+b}{2}$ nennt man das arithmetische Mittel aus a und b .

IV. Das Produkt aus 3 und a (oder die Summe $a+a+a$) schreibt man kurz: $3a$. — Der „Koeffizient“ 3 giebt darin die Anzahl der gleichen Posten an.

Daher ist $4a + 5a = 9a$; $9a - 2a = 7a$; $3a \cdot 4b = 12ab$; $12ab : 3b = 4a$.

- V. Die n -te Potenz von a , d. h. das Produkt aus n gleichen Faktoren von der Größe a , wird durch a^n bezeichnet und kurz „ a zur n -ten“ ausgesprochen. Der „Exponent“ n giebt dabei die Anzahl der gleichen Faktoren an. a^2 nennt man das Quadrat von a .

Daher ist $a^5 \cdot a^3 = a^8$; $a^8 : a^2 = a^6$. Ebenso ist $(ab)^n = a^n b^n$ und $(a:b)^n = a^n : b^n$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; $10^3 = 1000$; $0,1^2 = 0,01$.

Auch ist $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- VI. Wird die Größe a in n gleiche Faktoren zerlegt, so wird einer dieser Faktoren durch $\sqrt[n]{a}$ dargestellt. Falls $n = 2$ ist, braucht man es nicht mit $\sqrt{}$ zu schreiben; so ist z. B. $\sqrt{9} = \pm 3$, weil $(\pm 3)^2 = 9$.

Die Größe $\sqrt[n]{a \cdot b}$ nennt man das geometrische Mittel aus a und b .

Etwa sonst noch nötig werdende Entlehnungen aus der Buchstabenrechnung mögen an den betreffenden Stellen selbst eingefügt werden.

20. Welche allgemeine Sätze sind noch zu merken?

Als Grundsätze mögen hier aufgeführt werden:

- I. Jede Größe ist sich selbst gleich.
- II. Jede Größe gleicht der Summe aller ihrer Teile.
- III. Jede Größe ist größer als jeder ihrer Teile.
- IV. Von zwei gleichen Größen darf jede für die andere gesetzt werden.
- V. Sind zwei Größen a und b einer dritten c gleich, so sind sie (wegen IV.) unter sich selbst gleich.
Ist also $a = c$ und $b = c$, so ist $a = b$.
- VI. Ist $a = b$ und $b \geq c$, so ist auch $a \geq c$.
- VII. Ist $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$;
kürzer: dann ist $a > b > c$.

VIII. Gleiches zu Gleichem addiert, von Gleichem subtrahiert, mit Gleichem multipliziert, oder dividiert, liefert Gleiches.

Ist also $a = b$ und $c = d$, so ist:

$$a + c = b + d,$$

$$a - c = b - d,$$

$$ac = bd,$$

$$a : c = b : d.$$

IX. Ist dagegen $a = b$ und $c > d$, so ist:

$$a + c > b + d,$$

$$ac > bd,$$

$$c - a > d - b,$$

$$c : a > d : b,$$

$$a - c < b - d,$$

$$a : c < b : d.$$

X. Ist $a > b$ und $c > d$, so ist:

$$a + c > b + d,$$

$$ac > bd,$$

$$a - d > b - c,$$

$$b : c < a : d.$$

Ferner mögen hier noch folgende, im Spätern oft zu benutzende Regeln über das Rechnen mit mehrteiligen Größen (vergl. auch „Katechismus der Algebra“. 3. Aufl. Leipzig 1887, Fr. 31 ff.) Platz finden:

XI. Soll eine mehrteilige Größe (vergl. Fr. 19 III.) zu einer anderen addiert, oder von ihr subtrahiert werden, so müssen alle ihre Teile nach einander addiert oder subtrahiert werden, z. B.:

$$a + (b - c + d) = a + b - c + d;$$

$$a - \{b - c + d\} = a - b + c - d.$$

XII. Soll eine mehrteilige Größe mit einer einteiligen multipliziert, oder dividiert werden, so müssen alle ihre Teile mit dieser Größe multipliziert, oder dividiert werden, z. B.:

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad;$$

$$[b + c - d] : a = b : a + c : a - d : a.$$

XIII. Soll eine mehrteilige Größe mit einer andern mehrteiligen Größe multipliziert werden, so muß jedes

Glied der einen mit jedem Gliede der andern multipliziert werden, z. B.:

$$\begin{aligned}
 (a + b - c)(x - y + z) \\
 &= (a + b - c)x - (a + b - c)y \\
 &\quad + (a + b - c)z \\
 &= ax + bx - cx - ay - by + cy \\
 &\quad + az + bz - cz.
 \end{aligned}$$

XIV. Eine mehrtheilige GröÙe ist richtig durch eine andere mehrtheilige GröÙe dividiert, wenn das Produkt aus Quotient und Divisor den Dividend wieder giebt; z. B. ist

$$\begin{aligned}
 a^2 - b^2 : (a + b) &= (a - b), \\
 \text{weil } (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2.
 \end{aligned}$$