## Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

urn:nbn:de:hbz:468-1-4776

Webers Illuſtrierte Katechismen

Band 69

Zetzſche

# Geometrie

3. Auflage

3 Mark

Verlag von J. J. Weber in Leipzig

Es wird dringend erſucht die Bücher ſauber zu halten und beſonders beim Umblättern die Finger nicht anzufeuchten!

2 8X mk

1 4

25. 7

164

24. 9

24 11.

21

-7. MRZ

-6

16. 10.

23. 8.

21. 3.

21. 7.

23. 10.

-7. 4.

22. 10.

13. 5.

15. 5.

12. 2.

Es wir
zu ha

Verlag von J. J. Weber in Leipzig.

# Katechismus der Algebra

oder die Grundlehren der allgemeinen Arithmetik.
Von
**Friedrich Herrmann.**
Dritte, vermehrte und verbeſſerte Auflage, von
**K. Fr. Heym.**
Mit 8 in den Text gedruckten Figuren.
**Preis gebunden 2 Mark.**

# Katechismus der Praktiſchen Arithmetik.

Kurzgefaßtes
Lehrbuch der Rechenkunſt für Lehrende und Lernende.
Von **E. Schick.**
Dritte, verbeſſerte und vermehrte Auflage,
bearbeitet von **Max Meyer.**
**Preis gebunden 3 Mark.**

# Katechismus der Feldmeßkunſt

mit Kette, Winkelſpiegel und Meßtiſch.
Von Dr. **C. Pietſch.**
Fünfte, vollſtändig umgearbeitete Auflage. Mit 75 Abbildungen.
**Preis gebunden 1 Mark 50 Pf.**

# Katechismus der Analytiſchen Geometrie.

Von Dr. **Max Friedrich.**
Mit 56 in den Text gedruckten Figuren.
**Preis gebunden 2 Mark 40 Pf.**

# Katechismus der Logarithmen.

Von **Max Meyer.**
Mit drei Tafeln: der natürlichen, Briggsſchen Logarithmen
und ſolcher der trigonometriſchen Zahlen.
Mit ſieben in den Text gedruckten Abbildungen.
**Preis gebunden 2 Mark.**

# Katechismus der Geometrie.

# Katechismus

der

# Ebenen u. Räumlichen Geometrie.

Von

Prof. **Dr. Karl Eduard Zetzſche.**

Dritte, vermehrte und verbeſſerte Auflage.

Mit 223 Figuren und 2 Tabellen zur Maßverwandlung.

Leipzig
Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber
1892

# Vorwort.

Da die drei in Fr. 1 III. aufgeführten, in demſelben Verlage erſchienenen Katechismen eine reichliche Auswahl von Zahlenbeiſpielen über Anwendungen der Geometrie darbieten und da der darunter befindliche „Katechismus der Raumberechnung“ füglich zugleich die erſte Einführung in die Geometrie vermitteln kann, ſo habe ich auch bei Bearbeitung der dritten Auflage des „Katechismus der Geometrie“ den bereits in der erſten Auflage verfolgten etwas weiter angelegten Plan beibehalten, ſo wie das ſtrenger wiſſenſchaftliche Gewand, in welches der Stoff gekleidet iſt. Zugleich habe ich wieder der Schärfe und Beſtimmtheit in der Darſtellung und

Ausdrucksweiſe große Sorgfalt gewidmet und mich bemüht, den zu behandelnden Stoff in voller Stetigkeit und klarer innerer Gliederung vorzuführen.

Den Inhalt habe ich nur nach einer Richtung hin zu erweitern mich gedrängt geſehen, und zwar durch Einfügung einer großen Anzahl neuer Aufgaben und Übungsſätze, beſonders in das fünfte und ſiebente Kapitel. Mit Recht wird ja dieſe zugleich anregende und lehrreiche Richtung jetzt auch beim Schulunterrichte gepflegt, um den Schüler thunlichſt zu befähigen, das Gelernte zur Durchführung und Löſung von an ihn herantretenden Unterſuchungen und Aufgaben zu verwerten, ihn in der zur Ausübung „dieſer Kunſt erforderlichen Technik“ zu unterweiſen. Zum ſelbſtthätigen Weiterarbeiten auf dieſem Gebiete ſei namentlich die „Anleitung zur Löſung planimetriſcher Aufgaben mit Übungsbeiſpielen“ von Profeſſor Dr. G. Hoffmann. Dritte Auflage (Leipzig, Fues' Verlag 1891) auch hier warm empfohlen. Auch die „Theoretiſch-praktiſche geometriſche Konſtruktionslehre und algebraiſche Geometrie“ von W. Adam (Leipzig F. A. Brockhaus 1863) vermag dabei gute Dienſte zu leiſten. Von der von mir bisher benutzten Behandlung der „Parallelentheorie“ (Fr. 55 VI.) abzugehen ſah ich mich nicht veranlaßt, da ja die Parallelverſchiebungen auch in anderen Büchern verwertet werden. Ebenſo habe ich die „Projektionen“ wegen ihrer großen Wichtigkeit für das Verſtändnis der verſchiedenen Arten des geometriſchen Zeichnens abermals ſehr eingehend behandelt.

Wieder ſind ferner einzelne Stellen (z. B. Kap. 5 und 7, ſowie Fr. 155 u. a. m.) etwas knapper gehalten; wieder wurde wiederholt (z. B. Fr. 111 X., 161, 165, 175, 201 und 204) dem Leſer zugemutet, ſich die Figuren ſelbſt zu entwerfen; beides geſchah — wie auch die ſchon erwähnte Erweiterung des fünften und ſiebenten Kapitels — in der Abſicht, im Leſer das „Selbſt-Finden“ anzubahnen und Luſt und Geſchmack daran zu entwickeln. Zu einer weiteren Übung hierin böte u. a. eine eingehendere elementare Behandlung der Kegelſchnitte paſſende Gelegenheit, wozu ich den Stoff (ohne beigegebene Figuren) vor längerer Zeit ſchon in meinem „Leitfaden für den Unterricht in der ebenen und räumlichen Geometrie“ (2. Aufl. Chemnitz 1874) zurechtgelegt hatte.

Auf eine Reihe von in demſelben Verlage erſchienenen Katechismen von teils ergänzendem, teils weiterbildendem Inhalte habe ich in Fr. 1 III. und IV. und Fr. 18 I. hinzuweiſen Gelegenheit genommen.

Und ſo empfehle ich denn den „Katechismus der Geometrie“ auch in ſeiner verjüngten Geſtalt einer wohlwollenden Aufnahme, in der zuverſichtlichen Hoffnung, daß er fortfahren werde, der Geometrie neue Freunde zu erwerben.

**Dresden,** im Oktober 1892.

E. B.

# Inhaltsverzeichnis.

## II. Das Dreieck.

## III. Der Kreis und die Gerade. Zwei Kreiſe.

## IV. Vier Gerade in derſelben Ebene. Das Viereck. Die Projektion einer Strecke. Die regelmäßigen Vielecke.

## V. Aufgaben und Übungsſätze.

## VI. Die Ähnlichkeit ebener Figuren.

## VII. Gleichheit, Proportionalität und Flächeninhalt ebener Figuren.

## X. Das Prisma.

## XI. Der Cylinder.

## XII. Die Pyramide.

## XIII. Der Kegel.

## XIV. Die Kugel.

### Anhang.

## Maßtabellen.

---

## Berichtigungen:

S. 32 Z. 2 v. u. fehlt I.
„ 74 „ 3 v. u. ſollte ſtehen: größern $\angle B_1B_2C$.
„ 123 „ 13 v. u. iſt LF ſtatt LV zu leſen.
„ 125 „ 11 u. 12 v. o. muß es heißen: $KN = LM$.
„ 140 „ 2 v. o. iſt $N_0$ ſtatt N zu leſen.
„ 145 „ 10 v. o. iſt ein ſtatt ſein zu leſen.
„ 152 „ 5 v. u. iſt $x + 1$ ſtatt $x - 1$ zu leſen.
„ 169 In Fig. 138 müßte $AHA_2 \perp BC$ ſein.
„ 195 Z. 2 v. u. iſt 167 in 161 umzuändern.
„ 205 „ 5 v. u. iſt XD durch XT zu erſetzen.

# Katechismus der Geometrie.

# Einführung.

---

## 1. Womit und wie beſchäftigt ſich die Geometrie?

I. Die Geometrie oder Raumlehre iſt die Wiſſenſchaft von den Raumgrößen oder räumlichen Gebilden, d. h. den Größen oder Gebilden, welche einen Raum einnehmen, im Raume vorkommen oder doch darin gedacht werden.

II. Die Geometrie iſt demnach ein Zweig der Mathematik oder Größenlehre und unterſcheidet ſich von dem anderen Zweige der Mathematik — der Arithmetik oder Zahlengrößenlehre (vergl. auch Fr. 181.) — dadurch, daß in letzterem die Größen einfach als abgeſonderte oder diskrete Größen betrachtet werden, d. h. als ſolche, welche aus Teilen beſtehen oder beſtehend gedacht werden, während die Geometrie ihre Unterſuchungen auf die räumlichen Eigenſchaften der Raumgrößen beſchränkt.

III. Entſprechend dem in I. und II. Ausgeſprochenen wird ſich in dieſem Katechismus die Unterſuchung der Eigenſchaften der Raumgebilde in erſter Linie auf das Räumliche angewieſen ſehen, auf ein Entwerfen und Darſtellen derſelben, d. i. auf räumliche oder geometriſche Konſtruktionen.

In das Rechneriſche ſpielt ſich die Unterſuchung hinüber, wenn es ſich um die Vergleichung, Ausmeſſung und Berechnung des Inhaltes handeln wird. Beſondere Abteilungen dieſes Gebietes haben in den Katechismen der Raumberechnung (3. Aufl. 1888), der Feldmeßkunſt (5. Aufl. 1891) und der Nivellierkunſt (3. Aufl. 1887) noch getrennte Berückſichtigung gefunden.

IV. Eine eigenartige rechneriſche Weiterbildung der Lehre vom Dreieck und Dreikant beſitzen wir in der Trigonometrie. Vergl. „Katechismus der ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie“. Leipzig 1882.

V. Die in III. gekennzeichnete Geometrie pflegt man die ſynthetiſche zu nennen zur Unterſcheidung von der analytiſchen Geometrie (vergl. „Katechismus der analytiſchen Geometrie“. Leipzig 1884), welche in der Behandlungsweiſe des Stoffes einen weſentlich anderen Weg einſchlägt, indem ſie zwar von Meſſungen und Konſtruktionen ausgeht, dann aber zur Rechnung greift und ſchließlich die Ergebniſſe der Rechnung wieder in geometriſche Sätze, Angaben und Konſtruktionen überſetzt.

### 2. Welches ſind die Grundeigenſchaften des Raumes?

Der Begriff „Raum“ iſt ein einfacher und urſprünglicher.

Man hat ſich aber 1. alle Teile des Raumes als vollſtändig gleichartig vorzuſtellen, ſo daß ein bloßer Ortsunterſchied geometriſcher Gebilde noch nicht eine Verſchiedenheit derſelben bedingt.

Man hat ſich ferner 2. alle ſeine Teile als unmittelbar zuſammenhängend zu denken und nennt daher die Raumgrößen ſtetig ausgedehnte oder kontinuierliche Größen.

Der Raum beſitzt endlich 3. eine unbegrenzte Ausdehnung, d. h. er erſtreckt ſich von jeder Stelle, von jedem Orte aus nach allen Seiten hin in ganz unmeßbare Fernen.

### 3. Was iſt ein geometriſcher Körper?

Ein nach allen Seiten hin begrenztes Stück des unbegrenzten Raumes heißt ein geometriſcher Körper.

Ob in dieſem ringsum begrenzten Raum ein Stoff (Materie) enthalten iſt oder nicht, iſt dem Geometer gleichgültig; nicht ſo dem Phyſiker. Ein mit einem Stoffe erfüllter begrenzter

Raum heißt ein phyſiſcher oder materieller Körper und beſitzt noch andere Eigenſchaften (z. B. Schwere, Glanz, Härte ꝛc.), über welche die Phyſik Auskunft giebt.

**4. Welche andere geometriſche Gebilde treten am Körper auf?**

I. Die Grenzen eines Körpers nennt man Flächen. Ein Körper kann (wie z. B. ein Ei von ſeiner Schale) von einer einzigen, zuſammenhängenden Fläche ringsum begrenzt werden. Wird dagegen ein Körper von mehreren Flächen begrenzt, ſo begrenzen ſich dieſe Flächen da, wo ſie an einander ſtoßen, gegenſeitig. Die Grenzen der Flächen heißen Linien. die Grenzen begrenzter Linien nennt man Punkte.

Punkte, Linien und Flächen können jedoch auch an ſich ſelbſt, ohne Rückſicht auf Körper, an denen ſie auftreten, zum Gegenſtand einer geometriſchen Unterſuchung gemacht werden.

II. Punkte, Linien oder Flächen dürfen aber durchaus nicht etwa als Teile beziehungsweiſe der Linien, Flächen oder Körper aufgefaßt werden. Die dünnſte Schale eines Apfels z. B. iſt noch keine Fläche, der feinſte Bleiſtiftſtrich iſt noch keine Linie, ſondern beide ſind Körper.

Daher laſſen ſich auch Linien, Flächen oder Körper nicht durch Neben=einander=legen oder An=einander=reihen mehrerer einzelner Punkte, Linien oder Flächen erzeugen oder aus ihnen zuſammenſetzen, weil dabei das Unſtetige (Diskontinuierliche) nicht beſeitigt wird.

**5. Welchen Unterſchied in Bezug auf ihre Ausdehnung zeigen die Punkte, Linien, Flächen und Körper?**

I. Die einen Körper umgrenzenden Flächen ſcheiden die zu dem Körper gehörigen, in dem Körper liegenden Punkte des Raumes von den außerhalb des Körpers gelegenen Punkten. Beim Fortſchreiten von innen nach außen durchſchreitet man die Begrenzungsfläche, allein man trifft dabei in der Begrenzungsfläche ſelbſt nicht auf mehrere Punkte hintereinander, und darin beſteht eben das weſentliche Unterſcheidungsmerkmal zwiſchen Fläche und Körper. Vom Innern des Körpers nach außen hin iſt alſo die Fläche gar nicht ausgedehnt; ſie beſitzt demnach eine Ausdehnung weniger als der Körper.

In ähnlicher Weiſe beſitzt die Linie eine Ausdehnung weniger als die Fläche, und der Punkt wieder eine weniger als die Linie.

II. In einer Linie laſſen ſich verſchiedene Punkte unterſcheiden; doch ſteht deren Zahl zu der Länge oder Größe der Linie in keiner Beziehung, ſondern es laſſen ſich auch in verſchieden großen Linien gleichviel Punkte markieren. In der Linie hat zugleich jeder Punkt nur zwei benachbarte Punkte, einen vor ſich und einen hinter ſich; in der Linie liegt Punkt an Punkt bloß nach einer Raumgegend hin, bloß in einer Reihe neben einander; man kann innerhalb der Linie ſelbſt nur auf einem Wege (vorwärts, oder rückwärts) von einem Punkte A (Fig. 1) nach einem andern Punkte B der Linie gelangen. Auch die Linien, welche (wie Fig. 2 bei C) geſchloſſene Züge bilden, machen hiervon nur ſcheinbar eine Ausnahme.

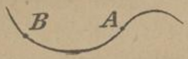

Fig. 1.

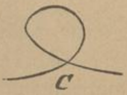

Fig. 2.

Daher hat die Linie nur eine Ausdehnung (oder Dimenſion).

III. Wenn aber die Linie bloß eine Ausdehnung beſitzt, ſo kann der Punkt gar keine beſitzen; er bezeichnet vielmehr bloß einen Ort im Raume, in einer Linie, einer Fläche, einem Körper.

Der Fläche aber werden zwei (vergl. Fr. 198 V.), dem Körper drei Ausdehnungen zugeſchrieben.

IV. Faßt man die Linie als eine Punkte-Reihe, die Fläche als Punkte-Schicht auf, ſo kann man in der Fläche und im Körper neben einander liegende Punktereihen und Punkteſchichten in ähnlicher Weiſe unterſcheiden, wie man in der Linie Punkte unterſcheidet. Ein paſſendes Bild hierfür bietet u. a. ein Ziegelhaufen, in etwas anderer Art eine Zwiebel.

V. Der Umſtand, daß die Punkte einer Linie, einer Fläche, eines Körpers von einem (innerhalb, oder außerhalb der Linie, der Fläche, des Körpers) beliebig gewählten Punkte aus geſehen nach den verſchiedenſten Raumgegenden hin verteilt liegen können, widerſpricht dem ſoeben Feſtgeſetzten keineswegs, wie ſich ſpäter noch deutlicher zeigen wird.

**6. Können Linien, Flächen und Körper durch Bewegung entſtehen?**

I. Wenn ein Punkt ſich *ſtetig* bewegt, ſo gelangt er von ſeinem Ausgangsorte A (Fig. 3), dem *Anfangspunkte*, an einen andern (oder auch wieder an den erſten) Punkt B, den *Endpunkt*. Die beiden Orte A und B ſind räumlich getrennt (verſchieden) und durch den Weg des ſich bewegenden Punktes mit einander verbunden. Dieſer Weg enthält die *ſtetige* Aufeinanderfolge der Orte, an welchen ſich der ſich bewegende Punkt während ſeiner Bewegung vom Anfangspunkte zum Endpunkte einmal befand. Durch die ſtetige Aneinanderreihung der Punkte wird bei einer ſolchen Bewegung nur *eine* Ausdehnung erzeugt, und deshalb *beſchreibt* ein ſich ſtetig bewegender Punkt eine *Linie*, ſein Weg iſt eine Linie.

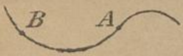

Fig. 3.

Läßt man einen beweglichen Punkt eine Linie beſchreiben, *ſo zieht man eine Linie*.

II. Gelangt bei der ſtetigen Bewegung einer Linie jeder Punkt der Linie immer wieder an einen Ort, wo auch vorher ſchon ein Punkt der Linie lag, ſo entſteht durch die Bewegung nichts Neues.

Gelangen dagegen bei der ſtetigen Bewegung einer Linie deren Punkte an Orte, wo vorher keine Punkte der Linie lagen, ſo erzeugt die Bewegung der ſtetigen Punktereihe (im Einklange mit Fr. 5 IV.) noch eine Ausdehnung, die Linie beſchreibt alſo eine Fläche. Vergl. z. B. Fr. 13.

III. In gleicher Weiſe entſteht bei der ſtetigen Bewegung einer Fläche nur dann ein Körper, wenn die Punkte der Fläche dabei an Orte gelangen, wo vorher keine Punkte dieſer Fläche waren.

IV. Die Bewegung kann in I. bis III. eine willkürliche, geſetzloſe ſein, ſie kann aber auch an ein beſtimmtes Geſetz gebunden ſein.

Auch in anderer Beziehung kann die Zuſammengehörigkeit von Punkten und Punktgruppen durch ein Geſetz, eine Formel bedingt ſein.

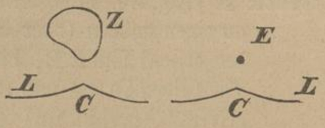

Fig. 4.

In beiden Fällen aber muß es ſich nicht unbedingt jederzeit um ſtetig zuſammenhängende Punkte und Punktgruppen handeln, es kann vielmehr die willkürliche, oder geſetzmäßige Bewegung unter Umſtänden auch eine ſprungweiſe ſein und es können räumlich getrennte Punktgruppen zu einem Ganzen zuſammengehören. So könnte ſich z. B. in Fig. 2 der geſchloſſene Zug von der übrigen Linie abtrennen und unter Umſtänden ferner zu einem Punkte (einem Einſiedler) zuſammenſchrumpfen, wie dies Fig. 4 bei Z und E zeigt.

**7. Giebt es auch halbbegrenzte und unbegrenzte Linien, Flächen und Räume?**

I. An Körpern kommen nach Fr. 4 I. nur begrenzte Flächen und Linien vor. Die ſtetige Bewegung eines Punktes kann aber von deſſen urſprünglichem Orte aus auch ohne

Aufhören fortgehen und liefert dann eine halbbegrenzte, d. i. nach einer Seite hin begrenzte, nach der andern Seite hin aber unbegrenzte Linie.

II. Bewegt ſich nun der Punkt von ſeinem urſprünglichen Orte aus auch noch nach der andern Seite hin ohne Ende ſtetig fort, ſo entſteht dabei eine unbegrenzte Linie.

Auf einer in ſich zurücklaufenden Linie kann ſich der Punkt zwar zeitlich unaufhörlich bewegen, er durchläuft jedoch dabei (wiederholt) nur eine räumlich begrenzte Anzahl von Punkten.

III. Eine ringsum begrenzte Fläche heißt eine Figur; ihre Grenzen bilden ihren Umfang (Perimeter). Beſeitigt man eine oder einige Grenzen der Figur, indem man dieſelben etwa in der Fläche ohne Ende fortbewegt, ſo erhält man eine halbbegrenzte Fläche; durch die Beſeitigung aller Grenzen aber erhält man eine unbegrenzte Fläche.

IV. Ebenſo ſind auch halbbegrenzte und unbegrenzte Räume denkbar.

**8. Auf welche Weiſe kann die Lage einer Linie beſtimmt werden?**

Wegen der großen Verſchiedenheit der Linien untereinander fordert eine jede beſondere Linie auch eine beſondere Weiſe der Beſtimmung ihrer Lage im Raume. Bei den nach einem beſtimmten Geſetze, nach einer beſtimmten Regel gebildeten Linien aber reichen eine gewiſſe Anzahl von Punkten (oder ſonſtigen Beſtimmungsſtücken) zur Beſtimmung der Lage der ganzen Linie aus; ſtets ſind dazu mindeſtens zwei Stücke nötig.

**9. Wenn nennt man eine Linie eine Gerade, eine Strecke, einen Strahl? und welche Eigenſchaften hat die Gerade?**

I. Iſt die Lage einer Linie bereits durch zwei ihrer Punkte (z. B. G durch D und F in Fig. 5 S. 10) beſtimmt, ſo nennt man die Linie gerade oder eine Gerade. 9 1

II. Die Gerade G, Fig. 5, ändert ihre Lage nicht, wenn man zwei ihrer Punkte, z. B. D und F, zugleich feſthält und ſie um dieſe zwei Punkte dreht. 10 2

11 III. Die Gerade G läßt ſich auf ſich ſelbſt verſchieben und umlegen, wobei man nur darauf zu ſehen hat, daß ſie ſtets durch die nämlichen zwei Punkte D und F geht. Vergl. Fr. 15 V.

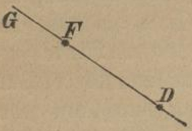

Fig. 5.

12 IV. Jeder Teil einer Geraden iſt ſelbſtverſtändlich auch gerade und fällt ſeiner ganzen Ausdehnung nach mit der Geraden zuſammen, ſobald er an irgend einer Stelle ſo auf die Gerade gelegt wird, daß er zwei Punkte mit ihr gemein hat.

13 V. Ein nach beiden Seiten hin begrenzter Teil einer Geraden heißt eine Strecke.

VI. Eine Strecke kann ebenfalls auf ſich ſelbſt verſchoben werden und bleibt dabei beſtändig in derſelben Geraden liegen, ſofern man nur dafür ſorgt, daß zwei Punkte von ihr in jeder ihrer neuen Lagen mit zwei beliebigen Punkten von ihr in ihrer urſprünglichen, bezw. in einer ihrer ſchon dageweſenen neuen Lagen zuſammenfallen.

VII. Durch eine ſolche Verſchiebung einer Strecke gelangt man zu einer Verlängerung derſelben, wenn man die von ihr neu eingenommenen Punkte den von ihr urſprünglich eingenommenen anfügt.

14 VIII. Verlängert man ſo die Strecke unaufhörlich über den einen ihrer Endpunkte hinaus, ſo erhält man eine halbbegrenzte Gerade. Eine ſolche nur einſeitig begrenzte Gerade heißt ein Strahl.

IX. Verlängert man eine Strecke unaufhörlich über ihre beiden Endpunkte hinaus, ſo wird ſie zur unbegrenzten Geraden.

Jede Gerade an ſich iſt alſo als unbegrenzt zu denken.

**10. Was verſteht man unter einer gebrochenen, einer krummen und einer gemiſchten Linie?**

16 I. Eine gebrochene Linie beſteht aus mehreren, an einander gelegten Teilen verſchiedener Geraden.

II. Eine Linie heißt krumm, wenn zur Beſtimmung ihrer Lage mehr als zwei Punkte erforderlich ſind. (Vergl. IV.) 15

III. Eine gemiſchte Linie beſteht aus an einander gelegten Teilen von Geraden und Krummen. (Vergl. I.) 18

IV. Kein Teil einer Krummen kann gerade ſein. 19

V. Jede in ſich zurücklaufende Linie iſt krumm. Dreht man ſie nämlich um zwei ihrer Punkte, welche man feſthält, ſo kommen diejenigen ihrer Punkte, welche außerhalb der durch jene beiden Punkte beſtimmten Geraden liegen, in neue Lagen und zwar an Orte, wo bisher keine Punkte der Linie lagen. Über den dabei von jenen Punkten beſchriebenen Weg vergl. Fr. 181 XIV. 19a

**11. Welche Flächen heißen Regelflächen und welche nennt man Ebenen? was iſt eine ebene Figur?**

I. Bewegt ſich eine unbegrenzte Gerade ſtetig, ohne dabei in ihrer urſprünglichen Lage zu verharren, ſo beſchreibt ſie eine Regelfläche (geradlinige Fläche). In jeder ſolchen Fläche läßt ſich durch jeden Punkt (wenigſtens) eine mit der Fläche ganz zuſammenfallende, ganz in der Fläche liegende Gerade ziehen, d. h. eine ſolche, deren Punkte ſämtlich zugleich Punkte der Fläche ſind.

II. Unter den Regelflächen zeichnet ſich die Ebene dadurch aus, daß je zwei ihrer Punkte durch eine ganz in der Ebene liegende Gerade verbunden werden können. 1

III. Ein ringsum begrenztes Stück von einer Ebene nennt man nach Fr. 7 III. eine ebene Figur.

**12. Welche Grundeigenſchaften beſitzt die Ebene?**

I. In jeder Ebene laſſen ſich daher von jedem Punkte aus nach allen Seiten hin, alſo unzählig viele, Strahlen ziehen. 20

II. Eine Gerade kann, wenn ſie einmal zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, nach Fr. 11 II. nicht zumteil außerhalb der Ebene liegen. 21

III. Daher folgt aus der Unbegrenztheit der Geraden (Fr. 10 IX.), daß auch die Ebene unbegrenzt iſt.

### 13. Wie kann eine Ebene entſtehen?

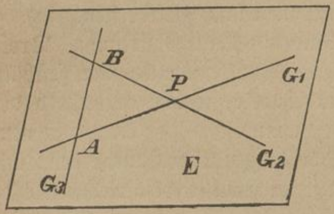

Fig. 6.

I. Läßt man auf zwei in einer ſchon vorhandenen Ebene E (Fig. 6) durch denſelben Punkt P gezogenen, verſchiedenen unbegrenzten Geraden $G_1$ und $G_2$ eine dritte Gerade $G_3$ ſich ſo fortbewegen, daß ſie ſtets irgend einen Punkt A mit der erſten Geraden $G_1$ und irgend einen andern Punkt B mit der zweiten Geraden $G_2$ gemein hat, ſo bleibt die dritte Gerade $G_3$ beſtändig in der Ebene E und muß auch, wenn nur die Bewegung in entſprechender Weiſe lange genug fortgeſetzt wird, nach und nach **alle** Punkte dieſer Ebene E überſtreichen.

II. Durch die in I. erwähnte Bewegung der Geraden $G_3$ würde alſo die Ebene E beſchrieben worden ſein, wenn ſie vorher noch nicht vorhanden geweſen wäre. (Vergl. auch Fr. 44 II. und 55 III.)

### 14. Wodurch iſt die Lage einer Ebene beſtimmt?

22 I. Haben zwei Ebenen zwei durch einen Punkt P, Fig. 6, gehende unbegrenzte Gerade $G_1$ und $G_2$*) gemein, ſo müſſen ſie ganz zuſammenfallen, weil jede dritte Gerade $G_3$, welche durch je zwei verſchiedene Punkte jener beiden Geraden gelegt wird, beiden Ebenen zugleich und ganz angehören muß (Fr. 12 II.).

23 II. **Zwei** durch den **nämlichen Punkt** gehende **Gerade** beſtimmen alſo die Lage einer Ebene, weil ſich durch dieſelben nur **eine einzige** Ebene legen läßt.

---

*) Will man mehrere Gebilde wegen ihrer Gleichartigkeit mit dem nämlichen Buchſtaben bezeichnen und doch auch von einander unterſcheiden, ſo kann man dem Buchſtaben unten je eine kleine Ziffer (oder einen Buchſtaben) anfügen. In ähnlicher Weiſe ſetzt man oben Striche an die Buchſtaben, z. B. a, a', a''.

24 III. Da aber weiter nach Fr. 9 I. jene beiden in I. und II. genannten Geraden $G_1$ und $G_2$ ſelbſt ſchon durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte beſtimmt ſind, z. B. A, B und P, ſo reichen dieſe *drei Punkte* zur Beſtimmung der Ebene aus.

25 IV. In gleicher Weiſe iſt *eine Gerade und ein außerhalb derſelben liegender Punkt*, z. B. $G_3$ und P, zur Beſtimmung der Ebene ausreichend.

**15. Welche weiteren Eigenſchaften hat die Ebene?**

26 I. Aus Fr. 14 ergiebt ſich zugleich, daß jede Ebene E ſich auf den beiden Geraden $G_1$ und $G_2$, d. h. auf ſich ſelbſt, verſchieben läßt. Vergl. Fr. 9 III.

26 II. Ebenſo kann man jede Ebene auf ſich ſelbſt ganz umlegen (vergl. Fr. 9 III.), wobei nur darauf zu achten iſt, daß die nach Fr. 14 II. bis IV. notwendigen Beſtimmungsſtücke beibehalten werden.

III. Da nach Fr. 14 zwei verſchiedene Ebenen höchſtens eine Gerade mit einander gemein haben können, ſo muß ferner beim *Umbrechen* oder *Umklappen* einer Ebene — d. h. wenn man den einen Teil derſelben, ohne den Zuſammenhang der Teile irgendwo zu zerſtören, auf den andern vollſtändig auflegt — die Linie, in welcher beide Teile an einander ſtoßen, um welche das Umbrechen oder Umklappen erfolgt, eine Gerade ſein.

27 IV. Jede unbegrenzte Ebene wird durch eine in ihr gezogene Gerade in zwei, zu beiden Seiten der Geraden liegende halbbegrenzte Teile (*Halbebenen*) geteilt. Vergl. Fr. 21 IV.

V. Die in III. und IV. ausgeſprochene Eigenſchaft der Ebene namentlich läßt ſich in Verbindung mit Fr. 9 III. und VI. gut zur Prüfung des *Lineals* — d. i. des Hilfsmittels, womit wir Gerade zu ziehen pflegen (Fr. 6 I.) — benutzen, und zwar durch Umlegen und durch Verſchieben des Lineals in der Ebene und an einer mittels desſelben gezogenen Geraden.

**16. Was iſt eine krumme, gebrochene, gemiſchte Fläche?**

28 I. Krumm heißt eine Fläche, wenn keiner ihrer Teile eben iſt. Zwei Gerade, welche durch denſelben Punkt gehen, beſtimmen alſo die Lage einer krummen Fläche noch nicht.

29 II. Eine gebrochene Fläche iſt aus aneinanderſtoßenden ebenen Flächenteilen,

III. eine gemiſchte Fläche aber aus ebenen und krummen Flächenteilen zuſammengeſetzt. 30

**17. Wie teilt man die Geometrie ein?**

Man teilt die Geometrie ein in die ebene Geometrie (Planimetrie, Epipedometrie) und die räumliche oder körperliche Geometrie (Stereometrie).

Erſtere beſchäftigt ſich bloß mit ſolchen Raumgebilden, welche ſich in einer Ebene befinden, letztere mit den nicht auf eine Ebene beſchränkten Raumgebilden.

**18. Was verſteht man unter Buchſtabenrechnung?**

I. Im gewöhnlichen Leben führt man Rechnungen mit den gebräuchlichen in Ziffern geſchriebenen (Zahlen-) Größen aus, wie dies u. a. der „Katechismus der Praktiſchen Arithmetik“. 3. Aufl. Leipzig 1889, lehrt. Dabei iſt jedoch im Endergebnis meiſt der Einfluß der einzelnen in die Rechnung eingeführten Größen nicht mehr zu erkennen, und eben ſo wenig kann man ſchnell angeben, wie das Ergebnis ſich ändert, wenn in der Rechnung andere Zahlen verwendet werden. Beides wird möglich, ſobald man die Rechnungsgrößen mit allgemeinen Zeichen bezeichnet. Man hat dazu die Buchſtaben gewählt und nennt dann eine ſolche, mit allgemeinen Zahlenzeichen ausgeführte Rechnung eine Buchſtabenrechnung. Mittels der Buchſtabenrechnung oder Algebra laſſen ſich auch allgemeine Regeln in möglichſter Kürze und Überſichtlichkeit ausdrücken. Vergl. „Katechismus der Algebra“. 3. Aufl. Leipzig 1887.

II. In derſelben Rechnung bedeutet der nämliche Buchſtabe ſtets eine genau beſtimmte und ſtets die nämliche Größe, über die Anzahl der in ihr enthaltenen Einheiten aber wird irgend eine Angabe nicht gemacht; verſchiedene Größen dagegen (auch wenn ſie einmal zufällig gleichviel Einheiten enthielten) hat man mit verſchiedenen Buchſtaben zu bezeichnen.

**19. Welcher Zeichen und Schreibweiſen bedient ſich die Buchſtabenrechnung?**

I. Die Buchſtabenrechnung bedient ſich im allgemeinen zunächſt derſelben Zeichen wie die Ziffernrechnung, in einzelnen Fällen vereinfacht ſie aber die Schreibweiſe und wendet nach Bedarf eigenartige Bezeichnungsweiſen an.

II. Es mögen hier die allgemein üblichen, auch im „Katechismus der Raumberechnung“ (3. Aufl., Fr. 11—44, unter Beigabe von Tafeln) und im „Katechismus der Praktiſchen Arithmetik“ (3. Aufl. Fr. 18 und 19) aufgeführten Zeichen und Regeln für die Gleichheit (=), Addition und Subtraktion, Multiplikation und Diviſion, Potenzierung und Wurzelausziehung als bekannt vorausgeſetzt und nur noch erwähnt werden, daß das Zeichen:

$>$ bedeutet: „iſt größer als“, z. B. $a > b$, $5 > 4$.
$<$ „ „iſt kleiner als“, z. B. $a < b$, $4 < 5$.
$\gtrless$ „ „iſt größer oder kleiner“.
$\lessgtr$ „ „iſt kleiner oder größer“.

III. () oder {} oder [] deuten an, daß die innerhalb der Klammern ſtehende Größe als ein zuſammengehöriges Ganzes aufzufaſſen und zu behandeln iſt. Iſt dieſe Größe in ihren einzelnen, durch + und — verbundenen Teilen oder Gliedern gegeben, ſo heißt ſie eine *mehrteilige Größe*.

Die Größe $\frac{a+b}{2}$ nennt man das *arithmetiſche Mittel* aus a und b.

IV. Das Produkt aus 3 und a (oder die Summe $a+a+a$) ſchreibt man kurz: 3a. — Der „*Koeffizient*“ 3 giebt darin die Anzahl der gleichen Poſten an.

Daher iſt $4a+5a=9a$; $9a-2a=7a$; $3a.4b = 12ab$; $12ab:3b=4a$.

V. Die n-te **Potenz** von a, d. h. das Produkt aus n gleichen Faktoren von der Größe a, wird durch $a^n$ bezeichnet und kurz „a zur n-ten“ ausgeſprochen. Der „**Exponent**“ n giebt dabei die Anzahl der gleichen Faktoren an. $a^2$ nennt man das Quadrat von a.

Daher iſt $a^5 . a^3 = a^8$; $a^8 : a^2 = a^6$. Ebenſo iſt $(ab)^n = a^n b^n$ und $(a:b)^n = a^n : b^n$; $3^2 = 3.3 = 9$; $5^4 = 5.5.5.5 = 625$; $10^3 = 1000$; $0{,}1^2 = 0{,}01$.

Auch iſt $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

VI. Wird die Größe a in n gleiche Faktoren zerlegt, ſo wird einer dieſer Faktoren durch $\sqrt[n]{a}$ dargeſtellt. Falls $n = 2$ iſt, braucht man es nicht mit zu ſchreiben; ſo iſt z. B. $\sqrt{9} = \pm 3$, weil $(\pm 3)^2 = 9$.

Die Größe $\sqrt{ab}$ nennt man das **geometriſche Mittel** aus a und b.

Etwa ſonſt noch nötig werdende Entlehnungen aus der Buchſtabenrechnung mögen an den betreffenden Stellen ſelbſt eingefügt werden.

### 20. Welche allgemeine Sätze ſind noch zu merken?

Als **Grundſätze** mögen hier aufgeführt werden:

I. Jede Größe iſt ſich ſelbſt gleich.
II. Jede Größe gleicht der Summe aller ihrer Teile.
III. Jede Größe iſt größer als jeder ihrer Teile.
IV. Von zwei gleichen Größen darf jede für die andere geſetzt werden.
V. Sind zwei Größen a und b einer dritten c gleich, ſo ſind ſie (wegen IV.) unter ſich ſelbſt gleich.
Iſt alſo $a = c$ und $b = c$, ſo iſt $a = b$.
VI. Iſt $a = b$ und $b \gtrless c$, ſo iſt auch $a \gtrless c$.
VII. Iſt $a > b$ und $b > c$, ſo iſt auch $a > c$; kürzer: dann iſt $a > b > c$.

VIII. Gleiches zu Gleichem addiert, von Gleichem ſubtrahiert, mit Gleichem multipliziert, oder dividiert, liefert Gleiches.

Iſt alſo $a = b$ und $c = d$, ſo iſt:

$$\begin{aligned} a + c &= b + d, \\ a - c &= b - d, \\ ac &= bd, \\ a : c &= b : d. \end{aligned}$$

IX. Iſt dagegen $a = b$ und $c > d$, ſo iſt:

$$\begin{array}{ll} a + c > b + d, & ac > bd, \\ c - a > d - b, & c : a > d : b, \\ a - c < b - d, & a : c < b : d. \end{array}$$

X. Iſt $a > b$ und $c > d$, ſo iſt:

$$\begin{array}{ll} a + c > b + d, & ac > bd, \\ a - d > b - c, & b : c < a : d. \end{array}$$

Ferner mögen hier noch folgende, im Spätern oft zu benutzende Regeln über das Rechnen mit mehrteiligen Größen (vergl. auch „Katechismus der Algebra". 3. Aufl. Leipzig 1887, Fr. 31 ff.) Platz finden:

XI. Soll eine mehrteilige Größe (vergl. Fr. 19 III.) zu einer anderen addiert, oder von ihr ſubtrahiert werden, ſo müſſen alle ihre Teile nach einander addiert oder ſubtrahiert werden, z. B.:

$$\begin{aligned} a + (b - c + d) &= a + b - c + d; \\ a - \{b - c + d\} &= a - b + c - d. \end{aligned}$$

XII. Soll eine mehrteilige Größe mit einer einteiligen multipliziert, oder dividiert werden, ſo müſſen alle ihre Teile mit dieſer Größe multipliziert, oder dividiert werden, z. B.:

$$\begin{aligned} a\,(b + c - d) &= ab + ac - ad; \\ [b + c - d] : a &= b : a + c : a - d : a. \end{aligned}$$

XIII. Soll eine mehrteilige Größe mit einer andern mehrteiligen Größe multipliziert werden, ſo muß jedes

Glied der einen mit jedem Gliede der andern multipliziert werden, z. B.:

$$\begin{aligned}(a + b - c)\,(x - y + z) &= (a + b - c)\,x - (a + b - c)\,y \\ &\quad + (a + b - c)\,z \\ &= ax + bx - cx - ay - by + cy \\ &\quad + az + bz - cz.\end{aligned}$$

XIV. Eine mehrteilige Größe iſt richtig durch eine andere mehrteilige Größe dividiert, wenn das Produkt aus Quotient und Diviſor den Dividend wieder giebt; z. B. iſt

$$a^2 - b^2 : (a + b) = (a - b),$$

weil $(a = b)\,(a - b) = a^2 - b^2$.

## Erſter Abſchnitt.

# Die Geometrie der Ebene.

### Erſtes Kapitel.

## Eine, zwei, drei und mehr Gerade in derſelben Ebene. Winkel, Kreis, Dreieck, Vieleck.

21. Welche Folgerungen laſſen ſich noch aus Fr. 9 und 14 ziehen?

I. Legt man zwei Punkte einer Geraden auf zwei Punkte einer anderen Geraden, ſo müſſen die beiden Geraden nach Fr. 9 I. einander decken, d. h. jeder Punkt der einen muß mit einem Punkte der anderen zuſammenfallen. 31

II. Durch zwei gegebene Punkte, z. B. durch D und F in Fig. 5 (S. 10), läßt ſich nur eine Gerade G ziehen. 9

III. Werden zwei Ebenen mit den in Fr. 14 II., oder III., oder IV. genannten Stücken auf einander gelegt, ſo müſſen ſie ſich ebenfalls decken.

IV. Auch irgend zwei Halbebenen (Fr. 15 IV.) laſſen ſich zum Decken bringen.

V. Daher iſt die Gerade auf den beiden Seiten, die man in einer Ebene an ihr nach den beiden durch ſie getrennten Halbebenen unterſcheiden kann, von gleicher Beſchaffenheit.

22. **Welche ähnliche Sätze ergeben ſich hieraus für Strecken?**

I. Wenn zwei Strecken oder Strahlen ſich decken, ſo decken ſich auch ihre Verlängerungen. Vergl. Fr. 9 VI. bis IX.

II. Jede Strecke hat alſo an jedem Ende nur eine Verlängerung.

III. Zwei Strecken decken ſich, wenn ihre Grenz- oder Endpunkte paarweiſe auf einander fallen.

IV. Zwei Strecken, welche ſich zum Decken bringen laſſen, ſind gleichlang oder gleich.

V. Zwei Strecken können gleichlang ſein, ohne ſich zu decken; doch kann man ſie dann ſtets zum Decken bringen.

Legt man nämlich das eine Paar ihrer Endpunkte auf einander und bringt dann noch einen Punkt der einen mit einem Punkte der andern zum Zuſammenfallen, ſo muß auch das andere Paar ihrer Endpunkte zuſammenfallen, und die Strecken decken ſich.

Auch zwei Strahlen kann man ſo zum Decken bringen.

Legt man Strecken von ungleicher Länge ſo auf einander, ſo wird die längere über die kürzere hinausragen.

VI. An Strecken läßt ſich außer der Lage nur die Länge unterſcheiden.

VII. Sind von einer Strecke die beiden Endpunkte bekannt, ſo iſt die Lage und die Länge oder Größe der Strecke gegeben. Man bezeichnet daher eine Strecke durch die zwei an ihre Endpunkte geſetzten großen Buchſtaben; in Fig. 7 z. B. iſt EF oder $\overline{EF}$ die Strecke zwiſchen den Punkten E und F. Noch kürzer bezeichnet man die Strecke mit einem darangeſetzten kleinen Buchſtaben, z. B. $\overline{EF} = a$.

Fig. 7..

VIII. Die Strecke $\overline{EF}$ nennt man die Entfernung oder den Abſtand der zwei Punkte E und F. Vergl. Fr. 77 III.

VIII a) Die gerade Linie iſt der kürzeſte Weg zwiſchen zwei Punkten. Definition nach Burckhardt

**23. Wie vollzieht man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Diviſion von Strecken?**

I. Will man zwei Strecken KH und HT (Fig. 8) addieren, ſo legt man ſie mit dem einen Endpunkte H auf einander, ſo daß die zweite die Verlängerung der erſten bildet; dann iſt KT = KH + HT.

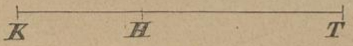

Fig. 8.

II. In ähnlicher Weiſe iſt HT = KT — KH.

III. Iſt ferner in Fig. 9 PO = ON = NM = ML, ſo iſt PL = 4 × PO = 4 PO. Vergl. Fr. 144.

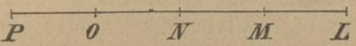

Fig. 9.

IV. Umgekehrt findet man durch wiederholte Subtraktion der Strecke PO, daß PL : PO = 4 iſt. Solche Diviſionen ſind bloße Vergleichungen; von ihnen wird in Fr. 145 weiter die Rede ſein.

V. Die Diviſion einer Strecke durch eine ganze Zahl n, d. h. die Teilung einer Strecke in n gleiche Teile wird ſpäter (in Fr. 127 und 128) gelehrt werden.

VI. Wie findet man die Größe zweier Strecken aus ihrer Summe s und ihrer Differenz d?

**24. Was iſt über die Richtung der Geraden zu ſagen?**

I. Aus Fig. 10 erſieht man, daß ein Punkt P zur Beſtimmung einer Geraden nicht ausreicht, daß ſich vielmehr durch dieſen Punkt P viele, verſchiedene Gerade PQ, PR, PS, PT ꝛc. ziehen laſſen. Dieſe verſchiedenen Geraden laufen von dem Punkte P aus nach ebenſoviel verſchiedenen Richtungen, oder dieſe Geraden beſchreibt ein ſich geradlinig bewegender Punkt (vergl. Fr. 6 I.), wenn er von jenem Punkte P aus ſich in den verſchiedenen Richtungen bewegt.

II. Die beiden Strahlen PT und PU derſelben Geraden TU laufen von P aus nach entgegengeſetzten Richtungen.

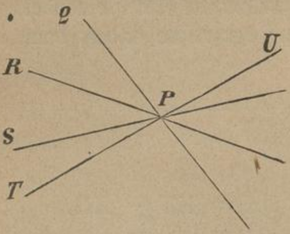

Fig. 10.

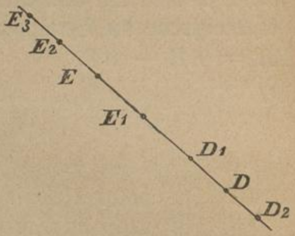

Fig. 11.

III. Zur Beſtimmung der Richtung der Bewegung des ſich von D (Fig. 11) aus bewegenden und bei ſeiner Bewegung die Gerade DE beſchreibenden Punktes reicht (wegen Fr. 21 II.) der zweite Punkt E aus, welcher zugleich mit D die Gerade DE beſtimmt. — Die Gerade DE giebt zugleich die Richtung an, in welcher der bewegliche Punkt ſich beim Beſchreiben dieſer Geraden DE von D aus bewegt, oder in welcher irgend ein Punkt E der Geraden von dem Punkte D aus liegt. Vergl. Fr. 46.

IV. Der Punkt E bewegt ſich in derſelben Richtung, ſo lange er ſich in derſelben Geraden DE, von demſelben Punkte D aus geſehen, nach derſelben Seite hin bewegt.

V. Zieht man von dem Punkte D der Geraden DE nach verſchiedenen, von D aus in demſelben Strahle liegenden Punkten $E_1$, $E_2$, $E_3$ ꝛc. dieſer Geraden DE Strecken $DE_1$, $DE_2$, $DE_3$ ꝛc., ſo fallen dieſe Strecken (nach Fr. 21 I.) ſämtlich auf einander, wennſchon ſie ſich zufolge ihrer verſchiedenen Länge nicht decken.

Alle Punkte des Strahls DE liegen alſo von dem Punkte D aus in derſelben Richtung. Dagegen können (wegen Fr. 10 IV.) zwar einzelne, jedoch durchaus nicht alle Punkte einer Krummen von einem und demſelben Punkte der Krummen aus in der nämlichen Richtung liegen.

VI. Ebenſo liegen die Punkte $E_1$, $E_2$, $E_3$ ꝛc. auch von den Punkten $D_1$, oder $D_2$ aus in *derſelben Richtung* wie von dem Punkte D aus (Fr. 22 II.).

VII. Die in V. und VI. ausgeſprochenen beiden Eigenſchaften, durch welche ſich die Gerade vor der Krummen auszeichnet, berechtigen zu der Behauptung: *die Gerade hat überall* (an allen ihren Punkten und Stellen) *dieſelbe Richtung.*

**25. Auf welche weitere Beſtimmungsweiſe für die Gerade führen die in Fr. 24 angeſtellten Erörterungen?**

I. Nach Fr. 9 I. iſt die Lage der Geraden DE (Fig. 11) durch die beiden Punkte D und E beſtimmt. Da nun durch den zweiten Punkt E die Richtung der Bewegung des von dem Punkte D aus die Gerade DE beſchreibenden Punktes (Fr. 24 III.) oder die Richtung der von D auslaufenden Geraden DE beſtimmt wird (Fr. 24 VII.) und da umgekehrt auch nach Fr. 24 V. alle Punkte der Geraden von D aus in derſelben Richtung liegen, ſo müßte die Lage einer (unbegrenzten) Geraden DE auch beſtimmt ſein, wenn man den *Punkt* D von ihr hat und außerdem noch die *Richtung* angeben könnte, in welcher ſich ein beweglicher Punkt von dem Punkte D aus zu bewegen hat, um die Gerade DE zu beſchreiben.

II. Demnach iſt die *Lage der Geraden* auch *beſtimmt durch einen Punkt und ihre Richtung* und man kann (im Einklange mit Fr. 24 I.) von jedem Punkte D aus nur *eine Gerade von vorgeſchriebener Richtung* ziehen.

**26. Welche Verſchiedenheit in Bezug auf die Zahl der gemeinſamen Punkte können zwei Gerade in derſelben Ebene zeigen?**

Zwei verſchiedene in derſelben Ebene liegende Gerade können (wegen Fr. 21 II.) *niemals zwei* Punkte gemein haben, ſondern entweder bloß *einen*, oder gar *keinen* Punkt. Im letzteren Falle nennt man die beiden Geraden *gleichlaufend* oder *parallel* (//); im erſten Falle ſagt man, ſie ſchneiden ſich in dieſem Punkte (dem Schnittpunkte).

Nach dem Schnittpunkte P (Fig. 12) hin ſind die beiden Geraden SR und TQ zuſammenlaufend oder konvergent, von ihm aus ſind ſie auseinanderlaufend oder divergent.

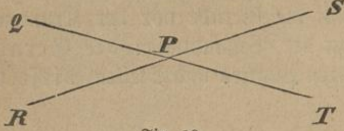

Fig. 12.

### 27. Können ſich zwei Gerade berühren?

I. Wenn zwei Gerade NL und TS (Fig. 13) einen Punkt M gemein haben, ſo iſt es unmöglich, daß der eine Strahl ML der einen Geraden NL mit einem Strahle MS der anderen TS zuſammenfällt, während die beiden andern Strahlen MN und MT nicht auf einander liegen (Fr. 22 I.).

II. Ebenſowenig kann dabei die eine Gerade TS ganz auf der einen Seite der anderen Geraden NL liegen.

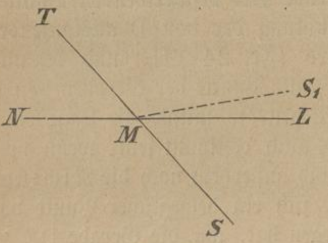

Fig. 13.

Wäre nämlich nicht MS, ſondern $MS_1$ die Verlängerung von TM, ſo wäre die Halbebene oberhalb $TMS_1$ offenbar kleiner, als die Halbebene oberhalb NML. Da aber dieſe beiden Halbebenen ſich nach Fr. 21 IV. decken müßten, ſo muß die gemachte „Annahme“: daß $MS_1$ die Verlängerung von TM ſei, falſch ſein, weil man von ihr ausgehend durch richtige Schlüſſe auf etwas Falſches kommt.

Daß $TMS_1$ keine Gerade ſein kann, lehrt auch folgende Betrachtung: Dreht man die Halbebene $TMS_1$ in der Ebene um den feſtgehaltenen Punkt M, ſo daß MT ſich MN nähert, dann entfernt ſich gleichzeitig $MS_1$ von ML, und wenn MT daher auf MN zu liegen kommt, ſo werden $MS_1$ und ML doch nicht auf einander fallen, in Widerſpruch mit I.

III. Die beiden ſich ſchneidenden Geraden TS und NL müſſen alſo im Punkte M *durch einander hindurchgehen.* Ferner haben ſie, wie überall, ſo auch in dem Punkte M nicht die nämliche Richtung (Fr. 24 I. und VII.).

Unter Benutzung eines erſt ſpäter (vergl. Fr. 83 IV. und 85 Anm.) auftretenden Begriffs könnte man demnach ſagen: *Zwei Gerade können ſich nicht berühren.*

**28. Was iſt hiernach über die geradlinige oder krummlinige Verbindung zweier Punkte zu bemerken?**

I. Iſt in einer unbegrenzten Ebene eine unbegrenzte Gerade QT (Fig. 12) gezogen, ſo muß jede neue Gerade RS, welche zwei zu verſchiedenen Seiten jener erſten Geraden liegende Punkte R und S jener Ebene verbindet, die erſte Gerade QT einmal, aber auch *nur einmal* ſchneiden.

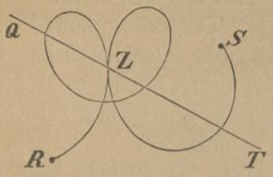

Fig. 14.

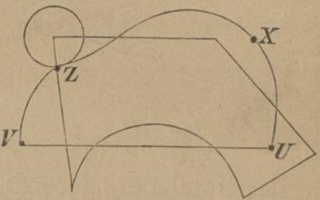

Fig. 15.

II. Werden dieſe beiden Punkte R und S durch eine in der Ebene liegende Krumme verbunden (Fig. 14), ſo kann es mehr als einen Schnittpunkt geben, ſtets aber eine *ungerade* Anzahl; doch können dabei mehrere Schnitte in einen Punkt Z zuſammenfallen.

III. Jede Linie, welche einen Punkt U (Fig. 15) innerhalb und einen Punkt V außerhalb einer mit der Linie und den beiden Punkten in einerlei Ebene liegenden Figur verbindet, ſchneidet den Umfang der Figur *wenigſtens einmal.*

IV. Läuft die eben erwähnte Linie von V nach U und dann weiter nach einem wieder außerhalb der Figur liegenden

Punkte X, ſo ſchneidet ſie den Umfang der Figur wenigſtens zweimal.

V. Jede Gerade, welche in der Ebene einer ebenen Figur liegt und in die Figur eintritt, muß bei ihrer Unbegrenztheit (Fr. 9 IX.) den Umfang der Figur wenigſtens noch einmal ſchneiden (Fr. 11 III.).

**29. Was iſt ein Streifen und was ein ebener geradliniger Winkel?**

I. Das zwiſchen zwei parallelen Geraden liegende halbbegrenzte Stück einer Ebene heißt ein Streifen.

II. Zwei von einem Punkte A (Fig. 16) auslaufende Strahlen AB und AC ſchließen zwiſchen ſich ein halbbegrenztes ebenes Flächenſtück ABDCA ein, welches man einen ebenen geradlinigen Winkel (∠) nennt.

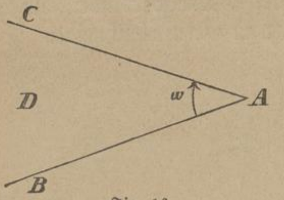

Fig. 16.

Der Schnittpunkt A der beiden Strahlen heißt der Scheitel, die Strahlen ſelbſt die Schenkel des Winkels.

Zur Bezeichnung des Winkels benutzt man gewöhnlich drei große Buchſtaben, von denen einer an jeden Schenkel und einer an den Scheitel geſetzt wird; letzteren ſtellt man beim Schreiben und Sprechen ſtets in die Mitte. Wo kein Irrtum entſtehen kann, bezeichnet man den Winkel bloß mit dem am Scheitel ſtehenden großen Buchſtaben. Sehr bequem iſt es, zur Bezeichnung des Winkels einen kleinen Buchſtaben in ſeine Öffnung zu ſetzen. Alſo:

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{w}.$$

**30. Wenn ſind zwei Winkel gleich groß?**

Zwei Winkel ſind gleich, wenn ſie ſich zum Decken bringen laſſen, wozu bloß nötig iſt, daß ihre Scheitel und ihre Schenkel auf einander fallen, weil dann (nach Fr. 14 I.) auch die ganzen halbbegrenzten Ebenen auf einander fallen.

**31. Wie laſſen ſich zwei gleiche Winkel zum Decken bringen?**

Legt man die beiden gleichen Winkel mit ihren Scheiteln und je einem Schenkel auf einander (vergl. Fr. 22 V.), ſo läßt ſich zunächſt das den einen Winkel bildende Flächenſtück noch mit einem ſeiner Punkte auf das den anderen bildende auflegen; dabei müßten ſich (nach Fr. 14 IV.) die ganzen Ebenen decken. Fielen dann aber die beiden anderen Schenkel nicht auch auf einander, ſo wäre (wegen Fr. 20 III.) der eine Winkel größer als der andere, was ja nicht ſein ſoll.

**32. Wie vollzieht man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Diviſion von Winkeln?**

I. Bei der Addition zweier Winkel legt man dieſelben in derſelben Ebene mit dem Scheitel und einem Schenkel ſo auf einander, daß der eine Winkel außer den anderen fällt. So iſt in Fig. 17 $\angle$ GFE + $\angle$ GFH = $\angle$ EFH.

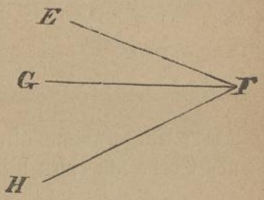

Fig. 17.

II. Bei der Subtraktion hat man den zu ſubtrahierenden Winkel auf den mit ihm den Scheitel und den einen Schenkel gemeinſchaftlich beſitzenden zweiten Winkel zu legen. In Fig. 17 iſt $\angle$ HFE — $\angle$ HFG = $\angle$ GFE.

III. Die Multiplikation eines Winkels läßt ſich auf die Addition zurückführen (vergl. Fr. 23 III.).

IV. Die Diviſion eines Winkels durch einen anderen Winkel erfolgt durch wiederholte Subtraktion des letzteren (vergl. Fr. 23 IV.).

V. Über die Diviſion eines Winkels durch eine ganze Zahl wird ſpäter (Fr. 125 und 126) Einiges nachfolgen.

**33. Was iſt ein geſtreckter oder flacher Winkel?**

Fallen die Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus nach entgegengeſetzten Seiten hin in dieſelbe Gerade (Fr. 24 II.), ſo heißt der Winkel ein geſtreckter oder flacher.

**34. Welche Eigenſchaften haben die flachen Winkel?**

I. Alle geſtreckten oder flachen Winkel ſind gleich groß, weil ſie ſich zum Decken bringen laſſen (Fr. 21 IV.).

II. Jeder geſtreckte Winkel iſt (nach Fr. 15 IV. und 21 IV.) die Hälfte der unbegrenzten Ebene.

III. Die Summe aller Winkel x, y, z (Fig. 18) in einer Ebene, an der einen Seite einer Geraden AB und mit gemeinſchaftlichem Scheitel S beträgt einen geſtreckten.

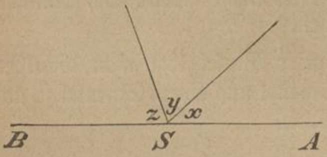

Fig. 18.

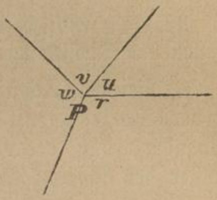

Fig. 19.

IV. Die Summe aller Winkel u, v, w, r (Fig. 19) in einer Ebene um einen Punkt P beträgt zwei geſtreckte.

**35. Was verſteht man unter einem hohlen und einem überſtumpfen Winkel?**

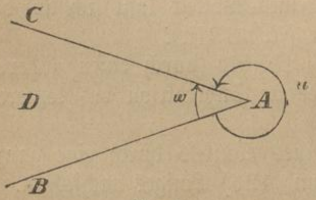

Fig. 20.

I. Jeder Winkel w (Fig. 20), welcher kleiner als ein geſtreckter iſt, heißt ein hohler oder konkaver.

Jeder Winkel u, welcher größer als ein geſtreckter iſt, heißt ein erhabener, überſtumpfer oder konvexer.

II. Mit jedem hohlen Winkel w entſteht zugleich ein erhabener u, und beide ergänzen ſich (nach Fr. 34 IV.) zu zwei flachen. Vergl. Fr. 44 V.

**36. Was ſind anſtoßende Winkel und Nebenwinkel?**

I. **Anſtoßende Winkel** nennt man zwei hohle Winkel EFG und GFH (Fig. 21), welche einen gemeinſchaftlichen Scheitel F und einen gemeinſchaftlichen Schenkel FG haben, und bei denen die beiden anderen Schenkel FE und FH zwar auf verſchiedene Seiten des gemeinſchaftlichen Schenkels fallen, aber nicht in dieſelbe Gerade.

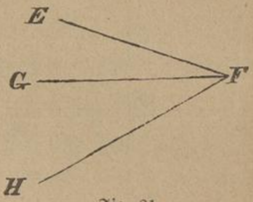

Fig. 21.

II. Haben zwei hohle Winkel EDF und CDF (Fig. 22) einen gemeinſchaftlichen Scheitel D und einen gemeinſchaftlichen Schenkel DF, während die beiden anderen Schenkel DE und DC vom Scheitel D aus nach entgegengeſetzten Seiten hin in derſelben Geraden liegen, ſo nennt man ſie **Nebenwinkel**.

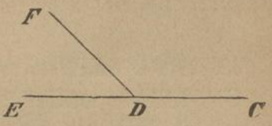

Fig. 22.

**37. Wenn iſt ein Winkel ein rechter, ſchiefer, ſpitzer und ſtumpfer? Was bedeutet winkelrecht oder normal?**

I. Iſt ein Winkel KNQ (Fig. 23) ſeinem Nebenwinkel TNQ gleich, ſo heißt er ein **rechter** (R).

Der Nebenwinkel eines rechten Winkels iſt daher auch ein rechter.

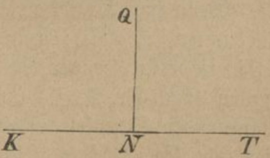

Fig. 23.

II. Jeder hohle Winkel, welcher größer oder kleiner als ein rechter iſt, heißt ein **ſchiefer**, und zwar ein **ſpitzer**, wenn er kleiner, dagegen ein **ſtumpfer**, wenn er größer iſt als ein rechter. In Fig. 2~~1~~2 iſt ∠FDC ſtumpf, ∠FDE ſpitz.

III. Jeder ſtumpfe Winkel iſt größer als jeder ſpitze (Fr. 20 VII.).

IV. Die Schenkel eines rechten Winkels ſtehen winkelrecht oder normal (⊥) auf einander. Anſtatt winkelrecht ſagt man auch perpendikular oder ſenkrecht*).

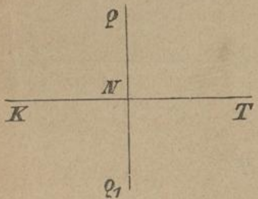

Fig. 24.

Ebenſo ſtehen zwei Gerade KT und $QQ_1$ (Fig. 24) winkelrecht auf einander, wenn ſie einen rechten Winkel einſchließen. Dabei heißt der Punkt N, in welchem die eine QN, bezw. $QQ_1$ der beiden auf einander winkelrechten Geraden die andere KT trifft, der Fußpunkt der Normalen, der Senkrechten od. des Perpendikels.

**38. Was iſt ein Winkel von 1 Grad, 1 Minute und 1 Sekunde?**

Ein Winkel, welcher genau der neunzigſte Teil eines rechten iſt, heißt ein Winkel von 1 Grad (1°) oder ein Winkelgrad. Daher iſt $\mathfrak{R} = 90°$, ferner ein flacher Winkel $= 180°$.

Der ſechzigſte Teil und der dreitauſendſechshundertſte Teil eines Gradwinkels heißen ein Winkel von 1 Minute (1′) oder eine Winkelminute und ein Winkel von 1 Sekunde (1″) oder eine Winkelſekunde. Vergl. Fr. 50.

**39. Welche Sätze gelten in Bezug auf die Größe der Nebenwinkel und der anſtoßenden Winkel?**

I. Wenn zwei Winkel gleich ſind, ſo ſind auch ihre Nebenwinkel unter ſich gleich; denn wenn die beiden Winkel (nach Fr. 31) in entſprechender Weiſe zum Decken gebracht werden, ſo fallen (nach Fr. 22 I.) auch die Verlängerungen der zu verlängernden Schenkel auf einander; die beiden Nebenwinkel decken ſich alſo und ſind gleich (Fr. 30).

II. Jeder rechte Winkel iſt die Hälfte eines flachen (Fr. 37 I.).

III. Alle rechten Winkel ſind unter ſich gleich (Fr. 34 I. und 20 VIII.).

---

*) Eine lotrechte oder vertikale Gerade ſteht auf der wagrechten oder horizontalen winkelrecht. In lotrechter Richtung wirkt die Schwerkraft.

IV. Die Summe zweier Nebenwinkel FDE und FDC (Fig. 25) beträgt einen geſtreckten (Fr. 34 III.), oder zwei rechte Winkel (Fr. 39 II.), oder 180° (Fr. 38).

Der Nebenwinkel eines ſpitzen Winkels iſt daher ſtumpf, der eines ſtumpfen ſpitz (Fr. 37 II).

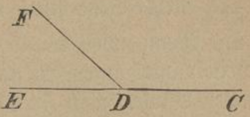

Fig. 25.

V. Nach IV. betragen zwei anſtoßende Winkel entweder mehr, oder weniger als zwei rechte (Fr. 36 I. und 20 III.); auch muß

VI. jeder ſtumpfe Winkel FDC (Fig. 25) größer und jeder ſpitze Winkel FDE kleiner ſein als ſein Nebenwinkel.

VII. Ein Winkel FDC, welcher größer als ſein Nebenwinkel iſt, muß nach Fr. 37 I. größer als ein rechter, d. h. ein ſtumpfer (Fr. 37 II.) ſein.

**40. Läßt ſich der Satz 39 IV. umkehren?**

Ja. Giebt man nämlich den zwei Winkeln FDC und FDE (Fig. 25), deren Summe 180° beträgt, einen gemeinſchaftlichen Scheitel D und einen gemeinſchaftlichen Schenkel DF, und legt man die beiden anderen Schenkel DC und DE in derſelben Ebene auf verſchiedene Seiten des gemeinſchaftlichen Schenkels DF, ſo müſſen die beiden anderen Schenkel in *eine* Gerade fallen, die Winkel ſind alſo Nebenwinkel. Denn wenn die Verlängerung von ED mit $DC_1$ bezeichnet wird, ſo muß der Nebenwinkel $FDC_1$ des Winkels FDE (nach Fr. 39 IV.) die Größe $FDC_1 = 180^\circ - \angle FDE$ haben; dieſelbe Größe hat aber nach unſerer „*Vorausſetzung*“ *), daß $\angle FDC + \angle FDE = 180^\circ$ ſei, auch der Winkel FDC. Daher müſſen die Winkel $FDC_1$ und FDC ſich decken (Fr. 31), d. h. es muß $DC_1$ auf DC fallen.

**41. Wenn ſind zwei Winkel Scheitelwinkel?**

Zwei Winkel QPR und SPT (Fig. 26 S. 32) mit gemeinſchaftlichem Scheitel P heißen *Scheitelwinkel*, wenn beide

---

*) Vergl. die Anm. zu 61 I.

Schenkel PQ und PR des einen Winkels in die Verlängerungen der Schenkel TP und SP des anderen Winkels fallen.

**42. Welche Sätze gelten über die Größe von Scheitelwinkeln?**

I. Wenn zwei Winkel gleich ſind, ſo ſind auch ihre Scheitelwinkel unter ſich gleich; denn bringt man die beiden gleichen Winkel (nach Fr. 31) zum Decken, ſo decken ſich auch die Verlängerungen ihrer Schenkel (Fr. 22 I.), die beiden Scheitelwinkel decken ſich alſo auch und ſind gleich (Fr. 30).

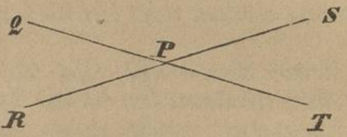

Fig. 26.

II. Jeder Winkel iſt ſeinem Scheitelwinkel gleich. In Fig. 26 iſt ja der Winkel SPT ebenſowohl als der Winkel QPR der Nebenwinkel des Winkels RTP, und deshalb iſt (nach Fr. 20 I. und Fr. 39 I.) $\angle SPT = \angle QPR$.

**43. Läßt ſich der Satz Fr. 42 II. umkehren?**

Ja. Wenn nämlich von zwei Schenkeln PS und PR (Fig. 26) zweier gleichen Winkel SPT und RPQ mit gemeinſchaftlichem Scheitel P jeder die Verlängerung des andern bildet und die beiden anderen Schenkel PT und PQ zu verſchiedenen Seiten der von den beiden erſten gebildeten Geraden SPR liegen, ſo fallen auch die beiden letzteren Schenkel in eine Gerade, d. h. die beiden Winkel ſind Scheitelwinkel. Denn da RPS gerade, ſo iſt $\angle QPR + \angle QPS = 180^\circ$ (Fr. 39 IV.), folglich $\angle SPT + \angle QPS = 180^\circ$ (Fr. 20 IV.); deshalb iſt QPT eine Gerade (Fr. 40), SPT und RPQ aber ſind Scheitelwinkel (Fr. 41).

**44. Wie kann ein Winkel durch Drehung eines Strahles entſtehen?**

I. Hält man einen Strahl AB (Fig. 27) an ſeinem Endpunkte A feſt, ſo muß er bei jeder Bewegung in ſeiner

Ebene ſeine Richtung ändern (Fr. 25 II.); er kommt z. B. aus ſeiner urſprünglichen Lage $AB_0$ nach einander in die Lagen $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$ ꝛc.

Eine ſolche Bewegung nennt man eine (ebene) Drehung des Strahls AB um ſeinen Endpunkt A.

II. Bei dieſer Drehung überſtreicht der Strahl AB (ähnlich wie in Fr. 13) nach und nach alle Punkte der Ebene.

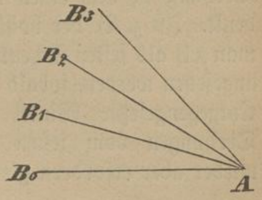

Fig. 27.

III. Jeden Winkel BAC (Fig. 28) kann man ſich dadurch entſtanden denken, daß der eine Schenkel AC von dem anderen, in ſeiner urſprünglichen Lage liegenbleibenden (feſten) Schenkel AB aus ſich in der Ebene des Winkels um den Scheitel A dreht.

IV. Drehungen von gleicher Größe entſprechen gleichgroße Richtungsänderungen und gleichgroße bei der Drehung überſtrichene Winkel. Vergl. Fr. 45 II.

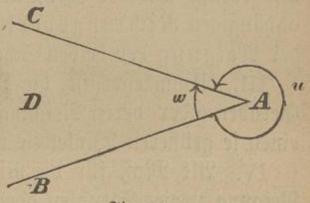

Fig. 28.

V. In einer Ebene iſt aber eine Drehung eines Strahls nur in einem doppelten Sinne, nur nach zwei verſchiedenen Richtungen hin, möglich; denn der Strahl AC kann in der Ebene von der Lage AB aus nur durch zwei verſchiedene Drehungen in die Lage AC kommen, entweder bei der durch den Pfeil w angegebenen, oder in der durch den Pfeil u angegebenen Drehungsrichtung. Dieſe beiden Drehungen ſind einander entgegengeſetzt, weil die Fortſetzung der bisherigen Drehung des ſich drehenden Strahles den durch ſie bereits erzeugten Winkel größer macht, während eine Drehung in der andern Richtung ihn kleiner macht.

Unterſcheidet man dieſe beiden Drehungen als poſitiv (+) und negativ (—), ſo kann man auch die Winkel als poſitiv und negativ bezeichnen, jenachdem man ſie ſich durch Drehung in dem einen oder in dem andern Sinne erzeugt denkt. Iſt z. B. der hohle Winkel CAB = w poſitiv, wenn man AB als feſten Schenkel betrachtet, ſo kann er als negativ angeſehen werden, ſobald man AC als feſten Schenkel wählt. Entgegengeſetzte Winkel ſind dann durch entgegengeſetzte Drehungen vom feſten Schenkel aus entſtanden; immer wieder aber erfordern gleiche Winkel gleiche Drehungen.

### 45. Wovon hängt die Größe eines Winkels ab?

I. Das als Winkel bezeichnete, nach der einen Seite (nach D) hin unbegrenzte Flächenſtück iſt (wegen Fr. 22 II.) ſchon beſtimmt, wenn man anſtatt der beiden Strahlen auch nur zwei vom Scheitel A auslaufende Strecken kennt, mögen dieſe lang oder kurz ſein; ſomit hängt die Größe des Winkels nicht von der Länge ſeiner Schenkel ab.

II. Dagegen wächſt die Größe des Winkels mit der Vergrößerung der zu ſeiner Erzeugung nötigen Drehung (Fr. 44 V.), und ebenſo mit der ebenfalls von der Größe der Drehung abhängigen Richtungsverſchiedenheit (Fr. 24 I.) oder der Neigung der beiden Schenkel AC und AB gegen einander.

III. Umgekehrt iſt die Richtungsverſchiedenheit zweier Geraden oder deren Neigung gegen einander um ſo größer, einen je größeren Winkel ſie mit einander einſchließen.

IV. Als Maß für die Richtungsverſchiedenheit oder die Neigung zweier Strahlen oder Geraden kann ſtets ein hohler bis flacher (Fr. 35 II.), oder ſelbſt ein ſpitzer bis rechter (Fr. 39 IV.) Winkel benutzt werden.

### 46. Wie läßt ſich die Richtung einer Geraden in einer Ebene noch beſtimmen?

I. Während nach Fr. 24 III. die Richtung einer von dem Punkte A auslaufenden Geraden AC (Fig. 28) durch den zweiten Beſtimmungspunkt C beſtimmt wird, läßt ſich die

Richtung einer in einer beſtimmten Ebene liegenden Geraden AC durch den Winkel w beſtimmen, den dieſe Gerade mit einer zweiten Geraden AB in jener Ebene einſchließt. Vergl. ferner Fr. 54 II.

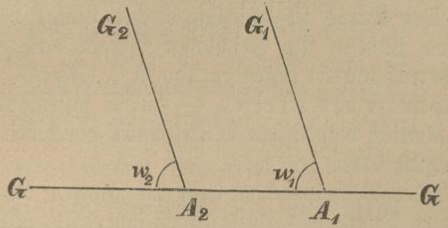

Fig. 29.

II. Machen zwei von den Punkten $A_1$ und $A_2$ (Fig. 29) einer Geraden G auslaufende Gerade $G_1$ und $G_2$ nach gleicher Seite hin gleiche Winkel $w_1$ und $w_2$ mit G, ſo weichen ihre Richtungen in gleichem Sinne um gleich viel von der ſich nach Fr. 24 VII. überall gleich bleibenden Richtung von G ab. $G_1$ und $G_2$ müßten ſomit gleiche Richtung haben und ebenſo:

III. iſt es in I. gleichgültig, wo in AB der Scheitel A des Winkels w zwiſchen den beiden Geraden liegt, ſo lange es ſich bloß um die Richtung, nicht aber um die Lage der beiden Geraden handelt. Vergl. auch Fr. 55 V.

**47. Was iſt ein Kreis, und wie entſteht er?**

I. Ändert eine Strecke AB (Fig. 30), während ſie ſich in einer Ebene um ihren feſten Endpunkt A dreht (vergl. Fr. 44), ihre Länge nicht, ſo kommt der andere Endpunkt B von $B_0$ ausgehend nach und nach in die Lagen $B_1$, $B_2$, $B_3$ ꝛc. und

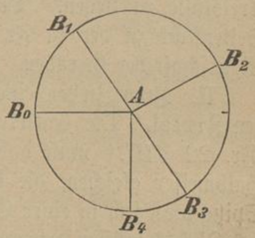

Fig. 30.

ſchließlich wieder auf ſeinen Ausgangspunkt $B_0$ in der urſprünglichen Lage $AB_0$ der Strecke zurück.

Der Punkt B beſchreibt alſo bei dieſer Drehung eine in ſich zurücklaufende ebene Linie, welche **Kreislinie** oder kurz **Kreis** genannt wird.

II. Der **Kreis** iſt diejenige **ebene** Linie, von deren ſämtlichen Punkten ſich gleichlange Gerade nach einem **in derſelben Ebene***) liegenden Punkte A (Fig. 30) — dem **Mittelpunkte des Kreiſes** — ziehen laſſen, oder deren Punkte ſämtlich von dieſem Mittelpunkte gleichweit entfernt ſind (Fr. 22 VIII.).

III. Der Mittelpunkt A liegt im Innern des Kreiſes. Die andern Punkte der Ebene liegen innerhalb, oder außerhalb des Kreiſes, jenachdem ſie von dem Mittelpunkte in kleinerer, oder in größerer Entfernung liegen, als die Punkte des Kreiſes. Vergl. Fr. 82.

IV. Auch das von der Kreislinie umſchloſſene ebene Flächenſtück nennt man zuweilen **Kreis** und unterſcheidet dann von ihm die Kreislinie als **Umfang** (Peripherie) des Kreiſes.

V. Auch von einem Kreiſe kann wegen Fr. 47 II. und 14 III. kein Punkt außerhalb einer Ebene liegen, ſobald einmal drei Punkte, oder zwei Punkte desſelben und der Mittelpunkt in dieſer Ebene liegen. Vergl. Fr. 12 II.

VI. Dreht man einen Kreis in ſeiner Ebene um ſeinen Mittelpunkt, ſo kommt dabei kein Kreispunkt außerhalb der Kreislinie zu liegen. Dieſe Eigenſchaft des Kreiſes iſt ein Seitenſtück zu der in Fr. 9 III. und Fr. 24 beſprochenen Eigenſchaft der Geraden. Vergl. aber Fr. 84 bis 86.

VII. Zum Ziehen eines Kreiſes (Fr. 6 I.) benutzt man den **Zirkel**. Die Entfernung der Spitzen beider Schenkel (Fr. 22 VIII.) muß dabei unverändert bleiben und dem Halbmeſſer gleichen, die den Kreis beſchreibende bewegliche Spitze muß ſich in einer Ebene bewegen (II.). Die Schenkel des Zirkels müſſen demnach hinreichend ſteif ſein.

---

*) Vergl. hierzu Fr. 190 VI. und VII.

**48. Was iſt ein Halbmeſſer und Durchmeſſer des Kreiſes?**

I. Jede der unter ſich gleichen, vom Mittelpunkte A (Fig. 30) nach einem Kreispunkte B gezogenen Strecken AB nennt man einen Halbmeſſer (Radius).

II. Zwei nach entgegengeſetzten Seiten hin in eine Gerade fallende Halbmeſſer $AB_1$ und $AB_3$ bilden einen Durchmeſſer (Diameter).

III. Alle Durchmeſſer, ebenſo alle Halbmeſſer desſelben Kreiſes ſind unter ſich gleich.

**49. Wenn ſind zwei Kreiſe gleich und wenn ungleich?**

I. Legt man zwei Kreiſe mit ihren Mittelpunkten und einem Durchmeſſer auf einander (Fr. 22 V.), und bringt man noch einen Punkt des zweiten Kreiſes in die Ebene des erſten, ſo decken ſich die Ebenen beider Kreiſe (Fr. 21 III.).

Decken ſich dabei die Durchmeſſer, ſo decken ſich auch die Kreiſe ſelbſt, weil ſonſt nach Fr. 20 III. zwei ihrer Halbmeſſer ungleich ſein müßten, was bei der gemachten Vorausſetzung und Fr. 20 V. in Widerſpruch mit Fr. 48 III. ſtünde.

II. Daher ſind zwei Kreiſe gleich, wenn ſie gleiche Halbmeſſer, oder gleiche Durchmeſſer haben.

III. Legt man zwei Kreiſe von ungleichem Halbmeſſer in derſelben Ebene mit ihren Mittelpunkten auf einander, ſo liegen alle Punkte des Kreiſes mit kleinerem Halbmeſſer innerhalb des andern Kreiſes (Fr. 22 V. und Fr. 47 III.).

IV. Kreiſe von verſchiedenem Halbmeſſer ſind daher ungleich; weitere Erörterungen hierüber folgen ſpäter.

**50. Was iſt ein Kreisbogen, ein Bogen von 1 Grad, 1 Minute, 1 Sekunde?**

I. Jedes Stück, z. B. $B_1B_2$, Fig. 30, eines Kreiſes heißt ein Kreisbogen (Arcus).

II. Den dreihundertſechzigſten Teil des ganzen Kreiſes nennt man einen Bogen von 1 Grad (1°) oder einen Bogengrad.

Der ſechzigſte und dreitauſendſechshundertſte Teil von einem Bogengrad heißen ein Bogen von 1 Minute (1′) oder eine Bogenminute und ein Bogen von 1 Sekunde (1″) oder eine Bogenſekunde. Vergl. Fr. 38.

III. Die Bögen von 90°, 60° und 45° nennt man Quadrant, Sextant, Oktant.

**51. Wie bezeichnet man einen Kreisbogen?**

Zur Beſtimmung eines Bogens von einem gegebenen Kreiſe braucht man (wegen Fr. 47 I.) nur die beiden Endpunkte $B_1$ und $B_2$ (Fig. 30) des Bogens. Dieſe beiden Endpunkte benutzt man daher auch zur Bezeichnung des Bogens. Will man aber den Bogen zwiſchen $B_1$ und $B_2$ ſchärfer von der zwiſchen $B_1$ und $B_2$ möglichen Strecke $\overline{B_1B_2}$ unterſcheiden, ſo bezeichnet man den Bogen $B_1B_2$ als $\overset{\frown}{B_1B_2}$.

**52. Wenn laſſen ſich zwei Kreisbögen zum Decken bringen?**

I. Wie ſich Kreiſe von gleichem Halbmeſſer zum Decken bringen laſſen, iſt ſchon in Fr. 49 I. angegeben worden.

II. Legt man die Mittelpunkte zweier Bögen desſelben Kreiſes (oder zweier gleichen Kreiſe) und das eine Paar ihrer Endpunkte auf einander, und ſorgt man noch dafür, daß die Bögen in derſelben Ebene und von den aufeinanderliegenden Endpunkten aus nach derſelben Seite hin liegen, ſo muß jeder Punkt des kürzeren Bogens auf einen Punkt des längeren fallen (Fr. 49 I.). Die beiden aufeinandergelegten Bögen decken ſich daher und ſind demgemäß gleichgroß, ſobald auch ihre anderen Endpunkte aufeinanderfallen.

III. Kreisbögen von gleicher Länge laſſen ſich doch nicht ſo auf einander legen, wie es eben in I. angegeben wurde, ſobald ihre Halbmeſſer verſchiedene Größe haben. Die Bögen weichen demnach hierin von der Strecke ab; vergl. Fr. 22 V.

**53. Was iſt ein Halbkreis?**

Jeder Durchmeſſer teilt den Kreis in zwei ſich deckende, daher gleichgroße Halbkreiſe (Fr. 52 I.), die ſich durch

Umklappen um ihren Durchmeſſer zum Decken bringen laſſen (Fr. 9 III., 15 III. und 48 III.).

**54. Welche Beziehung beſteht zwiſchen den Bögen und den zu ihnen gehörigen Centriwinkeln?**

I. Die Größe des zwiſchen zwei Halbmeſſern AB und AC (Fig. 31) liegenden Bogens $\widehat{BC}$ iſt wie die Größe des von dieſen Halbmeſſern gebildeten Mittelpunkts- oder Centriwinkels CAB = w (Fr. 45 II.) von der Größe der Drehung abhängig, durch welche der Schenkel AC von AB aus in ſeine Lage kommt; denn mit der Drehung vergrößert (und verkleinert) ſich gleichzeitig auch der zugehörige Winkel w und Bogen $\widehat{BC}$.

II. Daher kann man auch aus der Größe des Bogens $\widehat{BC}$ auf die Größe des Centriwinkels w und die Richtungsverſchiedenheit der beiden Geraden AC und AB ſchließen.

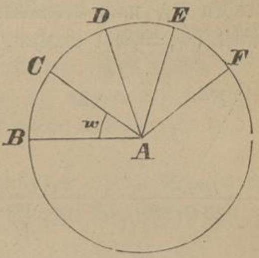

Fig. 31.

III. Zu zwei gleichen Mittelpunktswinkeln desſelben Kreiſes gehören auch gleiche Bögen, weil dieſe Bögen, ſobald man nach Fr. 31 die Centriwinkel zum Decken bringt, ſich ebenfalls decken (Fr. 52 I.).

IV. Daß zu gleichen Bögen desſelben Kreiſes auch gleiche Mittelpunktswinkel gehören, folgt aus Fr. 52 I. wegen Fr. 30.

V. Sind in Fig. 31 die Bögen $\widehat{BD}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{BF}$ ꝛc. der Reihe nach 2, 3, 4 ꝛc. mal ſo groß als $\widehat{BC}$, ſo ſind die zugehörigen Centriwinkel DAB, EAB, FAB auch 2, 3, 4 mal ſo groß als ∠ CAB. Ebenſo wachſen und verkleinern ſich auch umgekehrt die Bögen genau in demſelben Verhältniſſe wie die zugehörigen Centriwinkel, oder, wie man kürzer ſagt:

Die zuſammengehörigen Bögen und Centriwinkel deſſelben Kreiſes ſind einander proportional.

VI. Zu einem Winkel von 1° gehört auch ein Bogen von 1°; der Halbkreis umfaßt 180° und gehört zu einem geſtreckten Winkel.

3 Gerade

**55. Worin beſteht die Parallelverſchiebung eines Strahls, bezw. einer Geraden in einer Ebene?**

I. Wenn von einer Geraden AB (Fig. 32) zwei Strahlen CD und EF in derſelben Ebene auslaufen, welche mit der Geraden BA nach derſelben Seite (nach B) hin denſelben Winkel ($w_1 = w_2$) machen, ſo machen ihre Verlängerungen CL und EK gegen A hin ebenſo große Winkel $w_3$ und $w_4$, wie die Strahlen ſelbſt gegen B hin; denn nach Fr. 42 II. iſt $\angle w_3 = \angle w_1$ und $\angle w_4 = \angle w_2$.

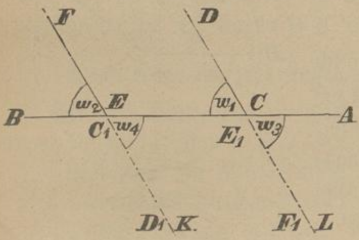

Fig. 32.

Dreht man alſo die ganze urſprüngliche Figur um 180° in ihrer Ebene*), ſo kann man ſie ſo legen, daß die Punkte C und E ihren Ort wechſeln und jeder der beiden Strahlen CD und EF als $C_1D_1$ und $E_1F_1$ auf die Verlängerung EK, bezw. CL des anderen kommt.

Schnitten ſich nun die Strahlen CD und EF, ſo müßten ſich auch ihre Verlängerungen CL und EK ſchneiden; da aber nach Fr. 21 II. zwei verſchiedene Gerade nicht zwei Punkte gemein haben können, ſo können die beiden Geraden LD und KF gar keinen Punkt gemein haben, müſſen vielmehr parallel ſein (Fr. 26).

---

*) Bei $w_1 = w_2 = 90°$ würde man auch durch Umklappen zum Ziel kommen; vergl. Fr. 57 V.

II. Denkt man ſich nun die dritte Gerade FK ganz unbeweglich, die erſte und zweite AB und DL aber feſt mit einander verbunden, ſo daß ſie ihre Lage gegen einander nicht ändern können, und bewegt man dann die beiden letzteren in ihrer Ebene ſo, daß die erſte AB ihre Lage nicht ändert, ſondern bloß auf ſich ſelbſt verſchoben wird (Fr. 9 III.), ſo muß die andere DL auf die dritte FK fallen, ſobald der Punkt C nach E kommt (Fr. 31). Überhaupt bleibt die zweite Gerade DL bei dieſer Bewegung immer zu ihrer urſprünglichen Lage parallel; daher nennt man eine ſolche Bewegung eine Parallelbewegung oder, ſchärfer bezeichnend, Parallelverſchiebung in der Ebene.

III. Die Gerade DL kann bei einer ſolchen Bewegung (ähnlich wie in Fr. 13) die ganze Ebene überſtreichen.

IV. Die beiden unter $w_1 = w_2$ gegen BA geneigten Strahlen CD und EF in Fig. 32 haben gleiche Richtung (vergl. Fr. 46 II.).

V. Umgekehrt machen CD und EF, wenn ſie gleiche Richtung haben, auch mit AB gleiche Winkel $w_1$ und $w_2$ nach derſelben Seite hin.

VI. Haben die beiden in derſelben Ebene liegenden unbegrenzten Geraden $G_1$ und $G_2$ (Fig. 33) verſchiedene Richtung, und verſchiebt man $G_1$ parallel zu ſich ſelbſt (II.) auf der zwei Punkte A und B in $G_1$ und $G_2$ verbindenden Strecke AB nach B hin, ſo kommt $G_1$ endlich in die Lage G′ und ſchneidet jetzt $G_2$ in B. Verſchiebt man darauf die in die Lage G′

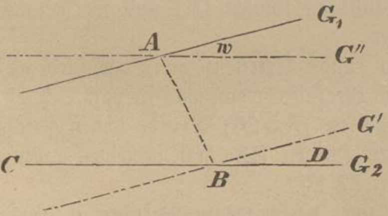

Fig. 33.

gekommene Gerade $G_1$ auf der nach Bedarf verlängerten AB immer noch parallel zu ſich wieder nach A hin zurück (oder weiter), ſo rückt der Schnittpunkt zwiſchen $G_1$ ($G'$) und $G_2$ von B aus nach C (oder D) hin fort; ſind aber die beiden Geraden $G_1$ und $G_2$ unbegrenzt, ſo hören ſie bei der Parallelbewegung von $G_1$ nicht auf, ſich zu ſchneiden, ſelbſt wenn $G_1$ wieder in ihre alte Lage zurückkommt.

VII. Weſentlich anders iſt es, wenn die Gerade $G_1$ um den Punkt A gedreht wird. Dann kann ſie (Fr. 25 II. und 44 I.) durch allmähliche Verkleinerung des Winkels $w$ ſchließlich in die Lage $G''$ gebracht werden, in welcher ſie mit $G_2$ gleiche Richtung hat, alſo zu $G_2$ parallel ſein muß (Fr. 55 V. und I.).

**56. Wieviel verſchiedene Lagen gegen einander können zwei in derſelben Ebene liegende Gerade haben?**

I. Zwei ſich ſchneidende Gerade haben verſchiedene Richtung. Ebenſo haben alle Gerade, welche von einem und demſelben Punkte auslaufen, oder nach ihm hinlaufen, verſchiedene Richtung. Vergl. Fr. 24 I. und 25 II.

II. Zwei in derſelben Ebene liegende Gerade von gleicher Richtung ſind parallel (I. und Fr. 25 II., oder Fr. 55 V. und I.).

III. Zwei Gerade in derſelben Ebene, aber von verſchiedener Richtung können (I.) und werden (Fr. 55 VI.) ſich ſchneiden.

Strahlen und Strecken von verſchiedener Richtung ſchneiden ſich ebenfalls, wenn man ſie nach Bedarf verlängert.

IV. Parallele (Fr. 26) Gerade haben gleiche Richtung, weil ſie ſonſt (wegen III.) ſich ſchneiden müßten. Vergl. Anm. zu Fr. 77 IV.

V. Bei zwei verſchiedenen Geraden in derſelben Ebene können alſo überhaupt nur die in Fr. 26 aufgeführten zwei verſchiedenen Lagen gegen einander vorkommen.

**57. Welche Folgerungen fließen aus Fr. 56?**

I. Durch jeden Punkt A (Fig. 33) einer Ebene läßt ſich in der Ebene nur eine Parallele $G''$ zu einer in dieſer Ebene liegenden Geraden $G_2$ ziehen; denn jede in derſelben Ebene durch A gelegte andere Gerade $G_1$ hat eine andere Richtung als $G''$ (Fr. 56 I.) und muß deshalb auch $G_2$ ſchneiden (Fr. 56 III.). Vergl. auch Fr. 25 II.

II. Alle in derſelben Ebene liegende Perpendikel (z. B. in Fig. 34 PQ und TK) auf derſelben Geraden MN haben gleiche Richtung (Fr. 55 IV., weil ja $\angle u = \angle v = \mathfrak{R}$, Fr. 39 III.) und ſind deshalb parallel (Fr. 56 II.).

III. Daher läßt ſich auch (wegen Fr. 56 I.) in einem Punkte Q (Fig. 34) einer Geraden MN auf dieſer Geraden MN und in einer beſtimmten Ebene nur eine Senkrechte QP errichten.

IV. Auch von einem Punkte T läßt ſich nur eine Senkrechte TK auf eine Gerade MN herabfällen. Denn ließen ſich mehrere Senkrechte von T auf MN fällen, z. B. TK und TS, ſo hätten ſie nach Fr. 56 I. verſchiedene Richtung, während ſie doch nach II. gleiche Richtung haben müßten.

V. Beim Umklappen der Ebene um die Gerade MN (Fr. 15 III.) kommen die auf MN ſenkrechten PQ und TK auf $P_1Q$ und $T_1K$ zu liegen und dabei ſind $PQP_1$ und $TKT_1$ zwei Gerade (Fr. 40).

Aus dieſer Bemerkung läßt ſich nicht nur ein Verfahren ableiten, wie man von T eine Senkrechte auf MN herabfällen kann, ſondern auch ein anderweiter Nachweis für die Richtigkeit des Satzes IV. Denn wären TS und TK zugleich auf NM ſenkrecht, ſo müßten $TST_1$ und $TKT_1$ beide Gerade ſein, was nach Fr. 21 II. unmöglich iſt.

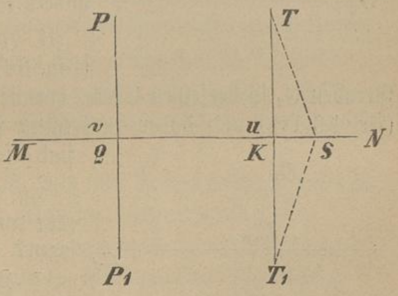

Fig. 34.

VI. Stünden in Fig. 35 $PP_1$ und $XX_1$ zugleich in Q auf MN ſenkrecht, ſo wäre $\angle v = 90^\circ = \angle w$ und $\angle v + \angle w + \angle r > 180^\circ$; dies iſt aber als Fr. 34 III. widerſprechend unmöglich.— Hierin liegt zugleich ein anderer Nachweis für die Richtigkeit des Satzes III.

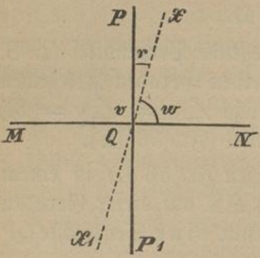

Fig. 35.

**58. Wieviel Fälle laſſen ſich in betreff der Richtung bei drei Geraden in derſelben Ebene unterſcheiden?**

Drei Gerade in derſelben Ebene haben entweder gleiche Richtung, oder zweierlei, oder dreierlei verſchiedene Richtungen.

**59. Was iſt über drei Gerade von einerlei Richtung zu ſagen?**

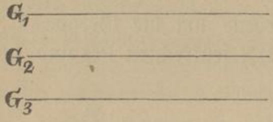

Fig. 36.

I. Haben drei in derſelben Ebene liegende Gerade $G_1$, $G_2$ und $G_3$ (Fig. 36) gleiche Richtung, ſo ſchneidet keine die andere (Fr. 56 II. und 26).

II. Zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 36), welche einer dritten Geraden $G_3$ in derſelben Ebene parallel ſind, haben mit $G_3$ (Fr. 56 IV.) und daher auch unter ſich gleiche Richtung, ſind alſo parallel (Fr. 56 II.).

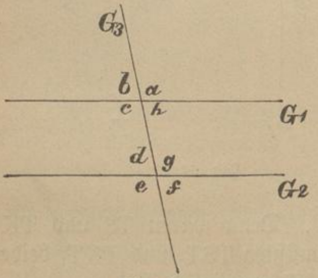

Fig. 37.

**60. Was iſt über drei Gerade von zweierlei Richtung zu ſagen?**

I. Zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 37) von gleicher Richtung werden beide von einer andersgerichteten, in derſelben Ebene liegenden dritten Geraden $G_3$ geſchnitten (Fr. 56 III.).

II. Wird die eine $G_1$ von zwei parallelen Geraden $G_1$ und $G_2$ von einer dritten, in derſelben Ebene liegenden Geraden $G_3$ geſchnitten, ſo wird auch die zweite $G_2$ von der dritten $G_3$ geſchnitten (Fr. 56 III.); denn $G_1$ und $G_3$ haben verſchiedene Richtung (Fr. 56 I.) und deshalb auch $G_1$ und $G_3$.

III. Es entſtehen dabei 8 Winkel, welche (abgeſehen von den Nebenwinkeln und den Scheitelwinkeln) paarweiſe mit beſonderen Namen belegt werden.

IV. Am wichtigſten iſt die Unterſcheidung der 8 Winkel nach ihrer Lage an der Schneidenden:

*Gegenwinkel* liegen auf derſelben Seite der Schneidenden;
*Wechſelwinkel* liegen auf verſchiedenen Seiten der Schneidenden.

Faßt man daneben zugleich die Lage der Winkel gegen die beiden Parallelen ins Auge, ſo nennt man:

*Ergänzungswinkel* die Winkel, welche entweder bei gleicher Lage an der Schneidenden verſchieden an den Parallelen liegen, oder bei gleicher Lage an den Parallelen verſchieden an der Schneidenden;

*Gleichliegende* (korreſpondierende) *Winkel* die, welche an der Schneidenden und an den Parallelen gleich liegen.

Von etwas geringerer Bedeutung ſind die

*Verſchiedenliegenden Winkel*, welche verſchiedene Lage ſowohl an der Schneidenden als an den Parallelen haben.

Minder wichtig iſt auch die Unterſcheidung der Winkel bloß nach ihrer Lage gegen die beiden Parallelen:

*Innere Winkel* liegen innerhalb der Parallelen;
*Äußere Winkel* liegen außerhalb der Parallelen;
*Gemiſchte Winkel* liegen einer außerhalb, der andere innerhalb der Parallelen.

Es ſind alſo in Fig. 37:

$\left.\begin{matrix} \text{c und d} \\ \text{h und g} \end{matrix}\right\}$ innere ~~Gegenwinkel und~~ Ergänzungswinkel,

| | |
|---|---|
| b und e<br>a und f | äußere Gegenwinkel und Ergänzungswinkel, |
| b und d, a und g<br>c und e, h und f | gemiſchte Gegenwinkel und gleichliegende Winkel, |
| g und c<br>h und d | innere Wechſelwinkel und verſchieden liegende Winkel, |
| b und f<br>a und e | äußere Wechſelwinkel und verſchieden liegende Winkel, |
| b und g, a und d<br>c und f, h und e | gemiſchte Wechſelwinkel und Ergänzungswinkel. |

**61. Welche Beziehungen finden zwiſchen den Gegen-, Wechſel- und Ergänzungswinkeln ſtatt?**

I. Sind ein Paar korreſpondierende Winkel unter ſich gleich, ſo ſind auch die Winkel eines jeden der drei anderen Paare unter ſich gleich.

Vor.*) $\angle a = \angle g$ (Fig. 37).
Beh. 1. $\angle b = \angle d$;
2. $\angle h = \angle f$;
3. $\angle c = \angle e$.

Bew. Sind die Winkel a und g einander gleich, ſo ſind es auch ihre Nebenwinkel: $\angle b = \angle d$ und $\angle h = \angle f$ (Fr. 39 I.), und ihre Scheitelwinkel: $\angle c = \angle e$ (Fr. 42 I.).

In dem vorſtehenden Satze müßte eigentlich der Reihe nach jedes der vier Paare korreſpondierender Winkel als gleich „vorausgeſetzt" und daraus die Gleichheit der drei anderen Paare „bewieſen" werden. Dieſe Beweisführung

---

*) Jeder wiſſenſchaftliche Satz knüpft an eine „Vorausſetzung" (vergl. Fr. 40), welche das Gegebene, als wahr Angenommene enthält, eine aus dieſer Vorausſetzung ſich ergebende Wahrheit: die „Behauptung". Muß die Richtigkeit eines ſolchen Satzes ohne weiteres notwendig allgemein anerkannt werden, ſo heißt der Satz ein „Grundſatz"; die Richtigkeit eines „Lehrſatzes" dagegen muß durch einen „Beweis" erſt beſonders nachgewieſen werden.

Werden in einer Figur behufs der Beweisführung gewiſſe Linien ꝛc. hinzugefügt, ſo faßt man dieſelben unter dem Namen „Konſtruktion" zuſammen.

würde aber nur auf eine dreimalige Wiederholung des eben geführten Beweiſes hinauslaufen, weil die vier Paare einander ganz gleichgeordnet ſind. Es mag daher hier und in II. bis IV., wie auch in Fr. 62 der Beweis für ein ganz beliebig herausgegriffenes Paar genügen.

II. Sind ein Paar verſchieden liegende Winkel unter ſich gleich, ſo ſind es auch die drei anderen Paare (Fr. 39 I. oder 42 I.), weil dieſe Scheitel- oder Neben-Winkel von jenen ſind.

III. Liefert ein Paar Ergänzungswinkel als Summe 180°, ſo thun es auch die drei gleichartigen anderen Paare.

a) Die Ergänzungswinkel ſind innere oder äußere Gegenwinkel:

Vor. $\angle a + \angle f = 180°$.

Beh. $\angle b + \angle e = \angle h + \angle g = \angle d + \angle c = 180°$.

Bew. 1:

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{aligned}\angle a &= 180° - \angle b\\ \angle f &= 180° - \angle e\end{aligned}\right\} & \text{(Fr. 39 IV.).} \\ \hline {}^{*)} & \\ 180° = \angle a + \angle f & \\ \quad = (180° - \angle b) + (180° - \angle e) & \text{(Vor. und} \\ \hline 180° = \angle b + \angle e. & \text{Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

Bew. 2:

$$\begin{array}{rl} (\angle a + \angle h) + (\angle f + \angle g) = 360° & \text{(Fr. 39 IV.).} \\ \angle a + \angle f = 180° & \text{(Vor.)} \\ \hline \angle h + \angle g = 180° & \text{(Fr. 20 VIII.).} \end{array}$$

Bew. 3:

$$\begin{array}{rl} \angle a + \angle f = 180° & \text{(Vor.)} \\ \left.\begin{aligned}\angle a &= \angle c\\ \angle f &= \angle d\end{aligned}\right\} & \text{(Fr. 42 II.).} \\ \hline \angle c + \angle d = 180° & \text{(Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

---

*) Ein ſolcher Strich (ſprich: „folglich“) in einem in dieſer überſichtlichen Form geſchriebenen Beweiſe bedeutet, daß das zunächſt unter dem Striche Stehende aus dem über dem Striche Stehenden gefolgert oder geſchloſſen worden iſt.

Die hinter jeder Zeile ſtehenden Nummern geben die früheren Sätze an, welche als Beweisgrund für die Wahrheit des Inhalts der Zeile gelten.

b) Die Ergänzungswinkel ſind gemiſchte Wechſelwinkel: Iſt $\angle a + \angle d = 180^\circ$ Vor., ſo folgt aus $(\angle a + \angle b) + (\angle g + \angle d) = 360^\circ$ (Fr. 39 IV.) durch Subtraktion, daß auch $\angle b + \angle g = 180^\circ$ iſt (Fr. 20 VIII.). Da aber nach Fr. 42 II. $\angle a = \angle c$, $\angle d = \angle f$, $\angle b = \angle h$ und $\angle g = \angle e$ iſt, ſo muß auch $\angle c + \angle f = 180^\circ$ und $\angle h + \angle e = 180^\circ$ ſein (Fr. 20 IV.).

IV. Iſt eine der vier Vorausſetzungen in I. bis III. erfüllt, ſo ſind auch die drei anderen erfüllt.

Vor. $\angle a + \angle d = 180^\circ$.
Beh. 1. $\angle a = \angle e$.
2. $\angle a + \angle f = 180$.
3. $\angle a = \angle g$.

Bew. 1.
$$\begin{array}{ll} \angle a = 180^\circ - \angle d & \text{(Vor.).} \\ \angle e = 180^\circ - \angle d & \text{(Fr. 39 IV.).} \\ \hline \angle a = \angle e & \text{(Fr. 20 V.).} \end{array}$$

Bew. 2.
$$\begin{array}{ll} \angle a + \angle d = 180^\circ & \text{(Vor.).} \\ \angle d = \angle f & \text{(Fr. 42 II.).} \\ \hline \angle a + \angle f = 180^\circ & \text{(Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

Bew. 3.
$$\begin{array}{ll} \angle a = 180^\circ - \angle d & \text{(Vor.).} \\ \angle g = 180^\circ - \angle d & \text{(Fr. 39 IV.).} \\ \hline \angle a = \angle g & \text{(Fr. 20 V.).} \end{array}$$

**62. Kann man aus dem Parallelismus zweier Geraden auf die Größe der Gegen- und Wechſel-Winkel ſchließen und umgekehrt?**

I. Werden zwei parallele Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 37 auf S. 44) von einer dritten $G_3$ geſchnitten, ſo ſind

1. je zwei korreſpondierende Winkel, z. B. a und g, unter ſich gleich (Fr. 55 V.), weil $G_1$ und $G_2$ nach Fr. 56 IV. gleiche Richtung haben; daraus folgt dann nach Fr. 61 IV., daß
2. auch je zwei innere oder äußere Wechſelwinkel, z. B. a und e, unter ſich gleich ſind und
3. je zwei Ergänzungswinkel, z. B. a und f, oder a und d, zuſammen 180° ausmachen.

II. Werden zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ von einer dritten $G_3$ ſo geſchnitten, daß entweder

1. je zwei korreſpondierende Winkel unter ſich gleich,
2. oder je zwei innere oder äußere Wechſelwinkel unter ſich gleich,
3. oder je zwei Ergänzungswinkel zuſammen 180°

ſind, ſo ſind die beiden Geraden $G_1$ und $G_2$ parallel.

Der Beweis für 1. liegt in Fr. 55 I.; von 2. oder 3. aber kommt man durch Fr. 61 IV. auf 1. zurück.

III. Behalten wir die Benennung der acht Winkel auch für den Fall bei, wo zwei nicht parallele Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 38) von einer dritten $G_3$ geſchnitten werden, ſo ſind bei zwei ſolchen Geraden

1. je zwei korreſpondierende Winkel ungleich,
2. je zwei innere oder äußere Wechſelwinkel ungleich,
3. die Ergänzungswinkel paarweiſe entweder größer, oder kleiner als 180°.

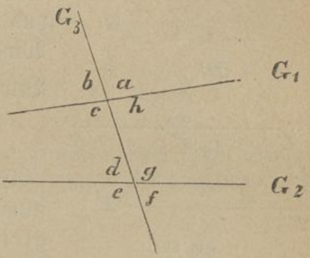

Fig. 38.

Bew. Wäre $\angle a + \angle d = 180°$, oder $\angle a + \angle f = 180°$, oder $\angle a = \angle e$, oder endlich $\angle a = \angle g$, dann müßte (nach II.) $G_1 \,//\, G_2$ ſein, und da dies der Vorausſetzung (daß $G_1$ und $G_2$ ſich ſchneiden) widerſpräche, ſo muß die Annahme (daß z. B. $\angle a = \angle g$) falſch ſein.

IV. Werden zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 38) von einer dritten $G_3$ ſo geſchnitten, daß

1. zwei korreſpondierende Winkel ungleich,
2. zwei innere oder äußere Wechſelwinkel ungleich,
3. zwei Ergänzungswinkel zuſammen entweder größer, oder kleiner als 180°

ſind, ſo ſchneiden ſich die beiden Geraden $G_1$ und $G_2$, denn wären ſie parallel, ſo wären (nach I.) die unter 1. bis 3. aufgeführten Beziehungen nicht möglich. Vergl. Fr. 69 IX.

Anm. Dieſe vier Sätze liefern eine Beſtätigung von Fr. 57 I.

V. Steht eine Gerade auf der einen von zwei Parallelen ſenkrecht, ſo ſteht ſie auch auf der andern ſenkrecht (I. 3).

**63. Was folgt aus dem Parallelismus der Schenkel zweier Winkel?**

I. Sind die Schenkel zweier Winkel BAC und DEF paarweiſe nach derſelben Seite hin, oder nach entgegengeſetzten Seiten hin parallel (BA // DE und AC // EF), ſo ſind die beiden Winkel gleich.

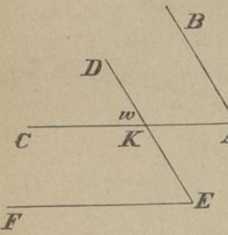

Fig. 39.

Bew. Sind A und E flache Winkel, ſo folgt der Satz aus Fr. 34 I.

Sind A und E hohl, oder überſtumpf und liegen die Schenkel gleichſinnig (Fig. 39), ſo ſchneiden ſich (nach Fr. 56 III.) je zwei nicht parallele Schenkel, z. B. ED und AC in K, und dann gleicht nach Fr. 62 I. ſowohl $\angle$ A als $\angle$ E dem $\angle$ w, daher iſt $\angle A = \angle E$ (Fr. 20 V.).

Sind endlich A und E hohl, oder überſtumpf und liegen die Schenkel entgegengeſetzt, ſo wird bei Verlängerung von DE nach ED′ und FE nach EF′ jetzt der Winkel D′EF, die nämliche Lage gegen BAC haben, wie der Winkel DEF in Fig. 39 gegen BAC; daher gleicht zunächſt $\angle$ D′EF′ und wegen Fr. 42 II. dann auch $\angle$ DEF dem $\angle$ BAC.

II. Liegen die Schenkel zweier Winkel BAC und DEF ſo paarweiſe parallel, daß das eine Paar EF und AC gleichſinnig, das andere ED und AB entgegengeſetzt parallel iſt, ſo ergänzen ſich die beiden Winkel zu 180° (Fr. 39 IV.).

Hier wird nämlich der durch die Verlängerung ED′ von DE erzeugte Nebenwinkel D′EF gegen BAC ſo liegen, wie in Fig. 39 der Winkel DEF.

**64. Was iſt über drei Gerade von dreierlei Richtung zu ſagen?**

I. Hat von drei Geraden $G_1$, $G_2$ und $G_3$ in einer Ebene jede eine andere Richtung, ſo gehen ſie entweder alle drei durch einen Punkt S (Fig. 40), oder es ſchneiden ſich immer nur je zwei in einem Punkte.

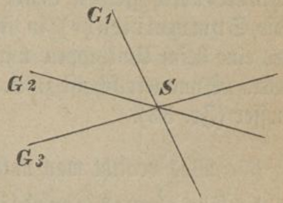

Fig. 40.

II. Im letzteren Falle begrenzen die drei Geraden eine ebene Figur ABC (Fig. 41), welche man ein *ebenes geradliniges Dreieck* oder kurzweg ein *Dreieck* (△) nennt.

Die drei Schnittpunkte A, B und C der drei Geraden heißen die *Eckpunkte* oder *Spitzen*, die zwiſchen ihnen liegenden Strecken AB = c, BC = a und AC = b heißen die *Seiten* des Dreiecks. Durch dieſe Wahl der Buchſtaben a, b, c deutet man zugleich den jeder Seite gegenüberliegenden Winkel an.

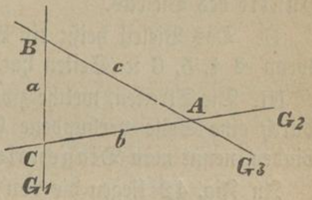

Fig. 41.

III. Sind alle drei Seiten eines Dreiecks gleich groß, ſo heißt das Dreieck *gleichſeitig*; bei dem *gleichſchenkeligen* Dreieck ſind bloß zwei Seiten gleich; bei dem *ungleichſeitigen* Dreieck iſt keine Seite der anderen gleich. Vergl. Fr. 114 und 115.

Die Senkrechte AD = $h_a$, welche in einem Dreieck ABC von der Spitze A auf die Gegenſeite a herabgefällt wird, heißt die *Höhe* des Dreiecks, die von A nach der Mitte E von a gezogene Strecke AE = $m_a$ die *Mittellinie* des

Dreiecks, beides in Bezug auf die Seite a. Für $h_a$ nennt man a die Grundſeite, A die Spitze.

Im gleichſchenkeligen Dreieck heißen die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite heißt Grundſeite oder Baſis und der Scheitel des der Grundlinie gegenüberliegenden Winkels die Spitze.

IV. Ein Dreieck und ebenſo ein anderes ebenes Gebilde heißt ſymmetriſch gegen eine Gerade, wenn es durch dieſe (die Symmetrieaxe) ſo in zwei Teile zerlegt wird, daß der eine beim Umklappen um die Symmetrieaxe den andern deckt. Symmetriſch iſt z. B. der Kreis gegen jeden Durchmeſſer (Fr. 53).

s. Seite 114

### 65. Was verſteht man unter einem Vieleck?

I. Ein ebenes geradliniges Vieleck oder kurzweg ein Vieleck iſt eine ebene Figur, welche von lauter Strecken begrenzt wird, wobei jedoch jede Strecke nur die beiden ihr benachbarten Strecken ſchneidet. Die das Vieleck begrenzenden Strecken heißen ſeine Seiten, ihre Schnittpunkte die Eckpunkte des Vielecks.

II. Das Vieleck heißt ein Viereck, Fünfeck, Sechseck ꝛc., wenn es 4, 5, 6 ꝛc. Seiten hat.

III. Die Strecken, welche zwei nicht benachbarte, alſo nicht durch eine Seite verbundene Eckpunkte eines Vielecks verbinden, nennt man Diagonalen. Vergl. Fr. 72 I. und II.

In Fig. 42 liegen die von A aus gezogenen Diagonalen AC, AD und AE des Sechsecks ABCDEF ſämtlich innerhalb der Figur. Es kann jedoch eine Diagonale auch ganz, oder teilweiſe außerhalb der Figur liegen, ebenſo eine, oder ſelbſt mehrere Seiten ſchneiden, teilweiſe mit ihnen zuſammenfallen, bezw. ihre Verlängerung bilden.

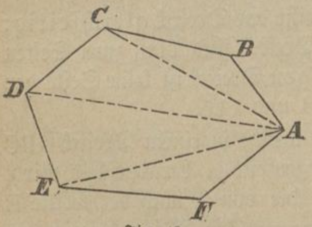

Fig. 42.

Man könnte z. B. in Fig. 42 das △ ABC um AC nach innen klappen. Ferner ließe ſich das △ BCD ſo um BD klappen, daß C auf AD, oder in die Verlängerung von AD, oder ſelbſt innerhalb AED fiele.

IV. Nach I. bilden die Seiten eines Vielecks — im Einklang mit Fr. 7 III. — nur die Grenzen der Figur, laufen aber nicht durch die Fläche der Figur hindurch.

Man kann jedoch — u. a. durch ähnliche Umklappungen wie in III., vergl. z. B. Fig. 64 bei Auffaſſung der Strecke AB als Diagonale — auch auf geometriſche Gebilde kommen, deren Seiten durch die Fläche hindurchlaufen, oder auch andere als die beiden benachbarten Seiten ſchneiden. So würde man von dem mittlern Siebeneck ABCDEJ in Fig. 43 durch fortgeſetzte Verſchiebung der Eckpunkte C und J zu den links und rechts ſtehenden Gebilden gelangen, welche als Aneinanderfügung eines Vierecks und eines Dreiecks, bezw. zweier Vierecke und eines Dreiecks aufgefaßt werden mögen. Noch verwickelter wird die Geſtaltung, wenn man in der rechts ſtehenden Zeichnung den Punkt C über F hinaus nach links verſchöbe. Vergl. auch Fig. 108 bis 110 in Fr. 106 IV.

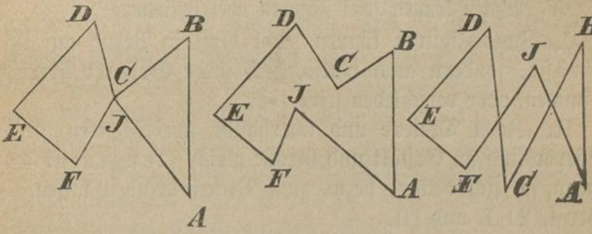

Fig. 43.

V. Von jedem Eckpunkte A eines n-ecks ABCDEF, Fig. 42, laſſen ſich nur $n - 3$ Diagonalen (Fr. 65 III.) ziehen, da außer A und ſeinen beiden Nachbarn B und F nur noch $n - 3$ Eckpunkte vorhanden ſind.

VI. Für die n-Eckpunkte des n-ecks würden daher n-mal (n—3) Diagonalen möglich ſein, wenn dabei nicht jede zweimal vorkäme. Deshalb hat das n-eck nur $\frac{1}{2}$ n (n—3) Diagonalen.

Das Viereck hat ſomit $\frac{1}{2} . 4 . 1 = 2$ Diagonalen,
„ Fünfeck „ „ $\frac{1}{2} . 5 . 2 = 5$ „
„ Sechseck „ „ $\frac{1}{2} . 6 . 3 = 9$ „ u. ſ. w.

## Zweites Kapitel.

# Das Dreieck.

**66. Worin können zwei Figuren übereinſtimmen?**

I. Zwei Figuren können nicht bloß in Bezug auf ihre Größe, ſondern auch rückſichtlich ihrer Geſtalt übereinſtimmen, oder verſchieden ſein.

II. Zwei Dreiecke und überhaupt zwei Figuren, bezw. Körper ſind an Geſtalt und Größe gleich (kongruent $\cong$), wenn ſie ſich decken, bezw. zum Decken bringen laſſen. — Vergl. 21 I. und III.

III. Haben zwei Figuren oder Körper bloß gleiche Geſtalt, ſo nennt man ſie ähnlich ($\sim$);

IV. haben ſie bloß gleiche Größe, ſo heißen ſie inhaltsgleich, oder kurzweg gleich ($=$).

**67. Was gilt von kongruenten Figuren?**

I. In zwei kongruenten Vielecken, alſo namentlich auch in zwei kongruenten Dreiecken, müſſen alle Stücke (d. ſ. Seiten und Winkel) der Reihe nach ſich decken und demnach gleich ſein.

II. Daher ſind in kongruenten Dreiecken die Gegenſeiten gleicher Winkel und die Gegenwinkel gleicher Seiten gleich, d. h. diejenigen Seiten und Winkel, welche beziehungsweiſe gleichen Winkeln und gleichen Seiten gegenüberliegen.

III. Kongruente Figuren, z. B. Dreiecke, in gleicher Weiſe aneinandergeſetzt, geben kongruente Figuren.

IV. Umgekehrt laſſen ſich kongruente Figuren in gleicher Weiſe in kongruente Teile zerlegen.

V. Es iſt daher nicht notwendig, die Kongruenz von mehr als dreiſeitigen Figuren eingehend zu unterſuchen, da ſich dieſelbe auf die Kongruenz der Dreiecke zurückführen läßt.

VI. Um die Kongruenz zweier Figuren (oder Körper) darzuthun, braucht man nicht immer die Gleichheit *aller* Winkel und Seiten nachzuweiſen. Etwas Ähnliches zeigte ſich ſchon in Fr. 21 I. und III., Fr. 31 und 52.

VII. Zwei Dreiecke*) z. B. müſſen ſchon kongruent ſein, wenn ſie in *zwei Seiten und dem von dieſen eingeſchloſſenen Winkel* übereinſtimmen.

Bringt man die beiden übereinſtimmenden Winkel zum Decken (Fr. 31) und ſorgt man dafür, daß die paarweiſe gleichen Seiten auf denſelben Schenkel fallen, ſo müſſen dieſe zwei Seitenpaare (Fr. 22 V.) ſich decken und wegen Fr. 22 III. auch das dritte Seitenpaar; demnach müſſen die Dreiecke kongruent ſein (Fr. 66 II.).

VIII. Ebenſo ſind (nach Fr. 66 II.) zwei Dreiecke kongruent, wenn ſie in *einer Seite und den beiden Winkeln* übereinſtimmen, welche an dieſer Seite liegen.

Legt man nämlich die Dreiecke mit den beiden übereinſtimmenden Seiten auf einander (Fr. 22 V.), und zwar ſo, daß die Scheitel der paarweiſe gleichen Winkel auf den nämlichen Endpunkt zu liegen kommen, ſo decken ſich dieſe beiden Winkelpaare (Fr. 31), ihre anderen Schenkel müſſen ſich daher paarweiſe decken und in demſelben Punkte ſchneiden (Fr. 26); dieſer Punkt iſt der dritte Eckpunkt beider Dreiecke und letztere decken ſich alſo.

---

*) Zwei kongruente Dreiecke pflegt man ſo zu benennen, daß die Buchſtaben an den gleichen Winkeln ſich in gleicher Weiſe folgen; iſt z. B. $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$, ſo ſchreibt man: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ und weiß dann zugleich, daß $A_1 B_1 = A_2 B_2$ ꝛc.

Zweckmäßig bezeichnet man ferner die Seiten der Dreiecke mit kleinen Buchſtaben und die Winkel mit denſelben großen Buchſtaben, ſo daß z. B. die Seite $a = BC$ dem $\angle A = \angle BAC$ gegenüberliegt. Vergl. Fr. 64 II.

### 68. Wie groß iſt die Summe der drei Winkel eines Dreiecks?

I. Verlängert man zwei Seiten CB und AB eines Dreiecks ABC (Fig. 44) über ihren Schnittpunkt B hinaus nach E und D und zieht man durch B eine Gerade NF ſo, daß ſie mit BE einen eben ſo großen Winkel einſchließt, wie CA mit AB, daß alſo $\angle v = \angle A$ iſt, dann ſind NF und CA parallel (Fr. 61 I. 1.). Nun kann aber die Gerade NF zunächſt weder mit BC, noch mit BA zuſammenfallen, weil ſie dabei (gegen Fr. 26) die ihr parallele AC ſchneiden müßte. Träte ferner die unbegrenzte Gerade NF bei B in das Dreieck ABC hinein, ſo müßte ſie auch irgendwo wieder aus demſelben herauskommen (Fr. 28 IV.); nun kann aber NF weder die ihr parallele Seite AC ſchneiden (Fr. 26), noch zum zweiten Male die von ihr ſchon in B geſchnittenen Seiten AB und BC (Fr. 21 II.). Demnach kann NF nicht in das Dreieck laufen, auch kann deshalb weder NB, noch deren Verlängerung BF in den $\angle w$ eintreten (Fr. 27 II.), ſondern ſie muß innerhalb der beiden Winkel EBC und DBA liegen, wie es Fig. 44 zeigt. Weil nun aber NF und CA parallel ſind, muß $\angle u = \angle C$ ſein; da ferner auch $\angle w = \angle B$ (Fr. 42 II.) iſt und $\angle v = \angle A$ gemacht wurde, ſo iſt die Summe der drei Winkel A, B und C ſo groß wie die Summe der drei Winkel u, w und v, d. h. = 2 R (Fr. 34 III.).

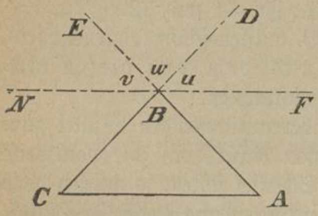

Fig. 44.

II. Es beträgt alſo die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ſtets 180° oder 2 R.

### 69. Welche Folgerungen ergeben ſich aus Fr. 68?

I. Iſt in einem Dreiecke die Summe zweier Winkel ſo groß wie die Summe zweier Winkel eines zweiten Dreiecks, ſo ſind die dritten Winkel der beiden Dreiecke gleich (Fr. 20 VIII.).

II. Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel überein, ſo iſt die Summe der beiden anderen Winkel in beiden Dreiecken gleich groß (Fr. 20 VIII.).

III. Jeder Winkel eines Dreiecks iſt hohl (Fr. 35 I.).

IV. Die Summe zweier (inneren) Winkel eines Dreiecks iſt kleiner als 180° (Fr. 20 III.).

V. Verlängert man eine Seite AB (Fig. 44) eines Dreiecks ABC nach E, ſo entſteht zwiſchen der Verlängerung BE und der anderen durch denſelben Endpunkt B gehenden Seite BC der Außenwinkel EBC.

Da nun dieſer Außenwinkel EBC mit dem innern Winkel CBA zuſammen ebenfalls 180° ausmacht (Fr. 39 IV.), ſo muß $\angle EBC = \angle A + \angle C$ ſein (Fr. 20 V.), oder:

VI. Jeder Außenwinkel gleicht der Summe der beiden inneren Gegenwinkel.

VII. Daher iſt jeder Außenwinkel größer, als jeder ſeiner inneren Gegenwinkel.

VIII. Sind die drei Winkel eines Dreiecks unter ſich gleich, ſo iſt jeder $= 60° = \frac{2}{3}$ R.

IX. Zu Fr. 62 IV. 3. läßt ſich jetzt noch ergänzend bemerken: wenn zwei Gerade von einer dritten ſo geſchnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel von 180° abweicht, dann liegt der Schnittpunkt jener beiden Geraden auf derjenigen Seite der dritten, wo die Summe der inneren Winkel kleiner als 180° iſt.

**70. Wieviel Arten Dreiecke giebt es rückſichtlich der Winkel?**

I. In einem Dreiecke kann nicht mehr als ein Winkel ein rechter, bezw. ein ſtumpfer ſein, und ebenſowenig kann in einem Dreiecke ein rechter und ein ſtumpfer zugleich vorkommen (Fr. 69 IV.), vielmehr müſſen ſtets wenigſtens zwei Winkel eines Dreiecks ſpitz ſein.

II. Daher giebt es rückſichtlich der Winkel nur drei Arten Dreiecke:
das rechtwinkelige Dreieck mit einem rechten Winkel,
das ſtumpfwinkelige Dreieck mit einem ſtumpfen Winkel,
das ſpitzwinkelige Dreieck mit drei ſpitzen Winkeln.

III. Im rechtwinkeligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die *Hypotenuſe*, die beiden den rechten Winkel einſchließenden Seiten die *Katheten*.

**71. Was iſt noch über die Winkel der rechtwinkeligen und der ſtumpfwinkeligen Dreiecke zu bemerken?**

I. Im rechtwinkeligen oder ſtumpfwinkeligen Dreieck iſt der rechte oder ſtumpfe Winkel der größte (Fr. 37 III.).

II. Im rechtwinkeligen Dreieck iſt der rechte Winkel gleich der (nach Fr. 68 II. 90° betragenden) Summe der beiden ſpitzen.

III. Ein Dreieck iſt rechtwinkelig, wenn der eine Winkel desſelben gleich der Summe der beiden anderen iſt; denn dann iſt jener Winkel die Hälfte von 2 R (Fr. 68 II.).

IV. Sind in einem rechtwinkeligen Dreieck die beiden ſpitzen Winkel gleich, ſo iſt jeder $= 45^\circ = \frac{1}{2}$ R.

V. Machen zwei Gerade SF und KE (Fig. 45) ſchiefe Winkel, ſo kann die von einem Punkte P der einen SF auf die andere KE herabgelaſſene Senkrechte PQ nur auf die Seite des ſpitzen Winkels SFK fallen, weil ſonſt das Dreieck PFQ einen ſtumpfen und einen rechten Winkel haben müßte, was aber Fr. 70 I. widerſpräche.

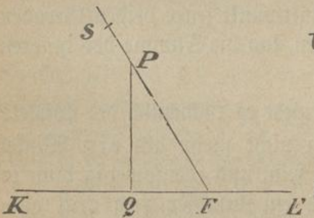

Fig. 45.

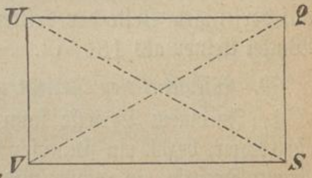

Fig. 46.

VI. Die Normalen auf den Schenkeln eines hohlen Winkels ſchneiden ſich ſtets (Fr. 62 IV.), und zwar unter einem ebenſo großen Winkel als die Schenkel ſelbſt.

Iſt nämlich der hohle Winkel ein *rechter*, wie QSV in Fig. 46, und iſt $UQ \perp SQ$, $UV \perp SV$, ſo iſt $UQ \parallel SV$

(Fr. 62 II. 3.), und deshalb ſchneiden ſich VU und UQ (Fr. 60 II.), und zwar unter einem rechten Winkel QUV (Fr. 62 V.).

Wäre dagegen der hohle Winkel ein ſchiefer, ſo iſt entweder er ſelbſt, oder ſein Nebenwinkel ein ſpitzer, z. B. w in Fig. 47; errichtet man nun im Punkte E des Schenkels BC eine Senkrechte EZ, ſo muß dieſe die Gerade DBN, in welcher der andere Schenkel (entweder BD, oder BN) des hohlen Winkels liegt, in einem von B aus nach D hin liegenden Punkte F ſchneiden (Fr. 69 IX.), und dabei iſt ∠ EFB = DFM ſpitz; errichtet man daher in einem von F aus nach D, oder nach N hin liegenden Punkte A, oder K der Geraden DN eine Senkrechte AM oder KL, ſo muß dieſe die auf BC ſenkrechte EF in M, oder in L ſchneiden (Fr. 62 IV. 3.), und dabei ſtimmen die Dreiecke MAF und LKF mit dem △ BEF in dem Winkel bei F und in dem rechten Winkel (bei A, K, E) überein, weshalb die ſpitzen Winkel v, u und w (Fr. 69 I.) und auch deren ſtumpfe Nebenwinkel (Fr. 39 I.) unter ſich gleiche Größe haben.

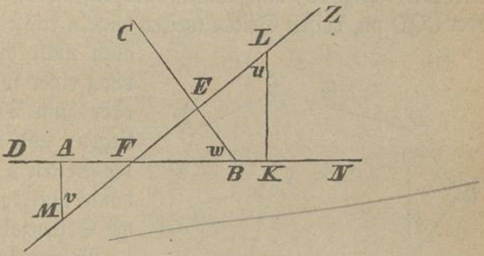

Fig. 47.

Liegt der Schnittpunkt der Normalen KL mit EZ im Winkelraume von w, ſo iſt der gegen w hin gekehrte Schnittwinkel (wie in Fig. 47 der ∠KLZ) = $180^\circ - w$ (Fr. 39 IV.).

Anm. Ein kürzerer Beweis ließe ſich aus Fr. 72 III. herleiten.

## 72. Wie groß iſt die Winkelſumme des Vielecks?

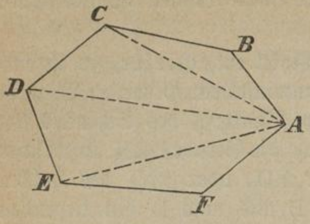

Fig. 48.

I. Das n-eck ABCDEF läßt ſich nach Fig. 48 aus n—2 von außen, oder innen aneinandergelegten Dreiecken, die paarweiſe eine ganze Seite gemein haben, zuſammenſetzen und auch wieder in n—2 ſolche Dreiecke zerlegen.

II. Fügt man an die Seite AB oder CD eines Vielecks ABCDEF (Fig. 49) nach innen, oder außen ein Dreieck ASB, oder CQD an, deſſen Seiten weiter keine n-ecksſeite ſchneiden, auch nicht die Verlängerung einer ſolchen bilden, oder zum Teil auf ihr liegen, und nimmt man die Seiten AB, bezw. CD dann hinweg, ſo wächſt die Seitenzahl um 1.

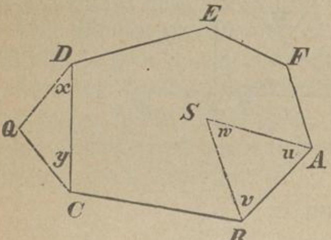

Fig. 49.

Beim Anfügen nach außen wächſt die Winkelſumme des Vielecks um $\angle x + \angle y + \angle Q = 180^\circ$ (Fr. 68 II.).

Im andern Falle vermindert ſich die Winkelſumme um $\angle u + \angle v$ und vermehrt ſich gleichzeitig um den überſtumpfen Winkel $(360^\circ - w)$ bei S, wächſt alſo überhaupt um $(360^\circ - w) - u - v = 360^\circ - (w + u + v) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

In jedem der beiden Fälle wächſt alſo die Winkelſumme um 2 R, wenn die Seitenzahl um 1 wächſt.

III. Daher beträgt in Fortſetzung von Fr. 68 II. die Winkelſumme:

im Viereck $2 \,.\, 2\,\mathfrak{R} = 4\,\mathfrak{R}$,
„ Fünfeck $3 \,.\, 2\,\mathfrak{R} = 6\,\mathfrak{R}$,
„ Sechseck $4 \,.\, 2\,\mathfrak{R} = 8\,\mathfrak{R}$,
. . . . . . . . . . . . . .
„ n-eck $(n—2)\; 2\,\mathfrak{R} = (2\,n—4)\;\mathfrak{R}$.

IV. Das n-eck kann höchſtens n—3 überſtumpfe Winkel oder einſpringende Ecken haben (Fr. 72 III.); denn n—2 überſtumpfe Winkel würden ja ſchon mehr als (n—2) 2 $\mathfrak{R}$ betragen (Fr. 35 I.).

V. Stehen zwei Seiten UV und QS, Fig. 50, eines Vierecks UVSQ auf der dritten Seite VS ſenkrecht, ſo beträgt die Summe der beiden Winkel U und Q an der vierten Seite UQ 2 $\mathfrak{R}$ (III.). Legt man nun das Viereck auf VS um, ſo fällt SQ auf VU (Fr. 39 III., 31).

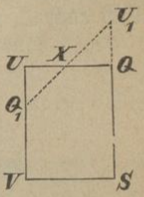

Fig. 50.

Iſt dann noch $Q = \mathfrak{R}$, ſo iſt auch $U = \mathfrak{R}$, und beim Umlegen muß Q auf U fallen; denn fiele Q nach $Q_1$, ſo müßte $\angle U = \mathfrak{R}$ (Fr. 72 III.) und $\angle UQ_1X = \mathfrak{R}$ (Fr. 37 I.) ſein, was Fr. 70 I. widerſpricht. Daher:

VI. ſind in einem Viereck mit drei rechten Winkeln V, S und Q je zwei einander gegenüberliegende Seiten nicht bloß parallel (Fr. 62 II. 3.), ſondern auch gleich (V.).

VII. Iſt umgekehrt bei $\angle V = \mathfrak{R} = \angle S$ auch $UV = QS$, ſo decken ſich U und Q beim Umlegen auf VS, und es iſt nicht nur $\angle U = \angle Q = \mathfrak{R}$ (III.), ſondern es ſind weiter nach VI. auch die Gegenſeiten paarweiſe parallel und gleich.

**73. Iſt durch die Gleichheit, oder Ungleichheit zweier Winkel, bezw. Seiten eines Dreiecks auch die Gleichheit, oder Ungleichheit der Gegenſeiten, bezw. der Gegenwinkel derſelben bedingt?**

I. Halbiert man in dem $\triangle ABC$ (Fig. 51 S. 62), in welchem $\angle A = \angle C$ ſei, den Winkel an der Spitze B, macht man alſo $\angle m = \angle n$, ſo iſt auch $\angle p = \angle q$ (Fr. 69 I.); demnach ſtimmen die beiden Dreiecke ABD und CBD in der Seite BD (Fr. 20 I.) und den beiden anliegenden Winkeln überein, ſind alſo kongruent (Fr. 67 VIII.), und deshalb iſt $AB = CB$ (Fr. 67 II.).

Die Gleichheit der Winkel A und C bedingt alſo die Gleichheit ihrer Gegenſeiten CB und AB.

II. Halbiert man in dem $\triangle ABC$ (Fig. 51), in welchem $AB = CB$ ſei, den Winkel an der Spitze B, ſo ſtimmen, weil auch $BD = BD$ iſt (Fr. 20 I.), die beiden Dreiecke ABD und CBD in den Winkeln m und n und deren einſchließenden Seiten überein, ſind alſo kongruent (Fr. 67 VII.), und deshalb iſt auch $\angle A = \angle C$ (Fr. 67 II.).

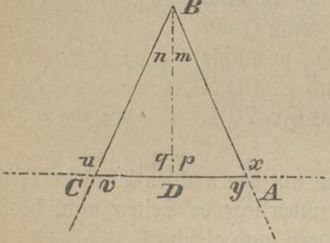

Fig. 51.

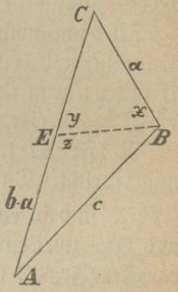

Fig. 52.

Die Gleichheit der Seiten AB und CB zieht demnach die Gleichheit ihrer Gegenwinkel C und A nach ſich.

III. Iſt in Fig. 52 $CA > CB$, ſo kann man von C aus auf CA ein Stück CE abſchneiden, welches CB gleicht; zieht man dann die Strecke BE, ſo iſt $\angle x = \angle y$ (II.). Weil ferner $\angle CBA > \angle x$ iſt (Fr. 20 III.), ſo muß auch $\angle B > \angle y$ ſein, und da wieder $\angle y > \angle A$ iſt (Fr. 69 VII.), ſo iſt um ſo mehr $\angle B > \angle A$ (Fr. 20 VII.).

Der größeren Seite AC = b eines Dreiecks ſteht alſo auch der größere Winkel B gegenüber.

IV. Sind zwei Winkel B und C eines Dreiecks ABC ungleich, ſo iſt die dem größeren $\angle$ B gegenüberliegende Seite AC = b größer als die Gegenſeite AB = c des kleineren Winkels C.

Es muß offenbar entweder $b = c$, oder $b > c$, oder $b < c$ ſein.

Wäre $b = c$, ſo müßte $\angle B = \angle C$ ſein (II.); wäre $b < c$, ſo wäre auch $\angle B < \angle C$ (III.); da aber beides der Vorausſetzung ($\angle B > \angle C$) widerſpricht, ſo muß $b > c$ ſein.

V. Halbiert man den $\angle$ B (Fig. 53) eines $\triangle$ ABC, in welchem BC > BA iſt, durch die Gerade BX, ſo ſchneidet BX in N die Seite AC ſo, daß NC > NA iſt. Vergl. Fr. 148 IV.

Der Winkel BNC iſt ein ſtumpfer (Fr. 39 VII.), weil

$$\angle BAN > \angle BCN \text{ (III.)}$$

$$\angle BAN + \angle m > \angle BCN + \angle n \text{ (Vor. u. Fr. 20 IX.)}$$

$$\angle BNC > \angle BNA + \text{ (Fr. 69 VI.)}.$$

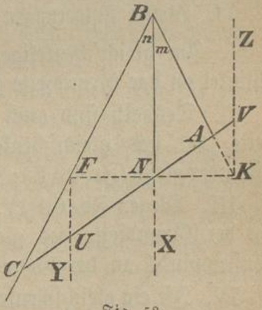

Fig. 53.

Errichtet man nun in N auf BX eine Senkrechte FK, ſo ſchneidet dieſelbe die Strahlen BC und BA in F und K ſo, daß F innerhalb BC, K außerhalb BA liegt. Zieht man dann noch durch F und K zwei Parallelen FY und KZ zu BX, ſo ſchneiden dieſe die Gerade CA in U und V; dabei liegt U innerhalb CN, V außerhalb NA, denn es ſind ja $\angle$ NFY und $\angle$ NKZ rechte (nach Konſtr. und Fr. 62 V.), dagegen

$\angle$ CFN ſtumpf (Fr. 69 VII.) und $\angle$ BKN ſpitz (Fr. 70 I.). Deshalb iſt weiter:

$$\begin{array}{c}
\triangle BNF \cong \triangle BNK \text{ (Fr. 67 VIII.)} \\ \hline
FN = NK \text{ (Fr. 67 II.)} \\
\angle NFY = \mathfrak{R} = \angle NKZ \text{ (Konſtr. u. Fr. 62 V.)} \\
\angle FNU = \angle KNV \text{ (Fr. 42 II.)} \\ \hline
\triangle FNU \cong \triangle KNV \text{ (Fr. 67 VIII.)} \\ \hline
NU = NV \text{ (Fr. 67 II.)} \\
NC > NU \text{ (Fr. 20 III.)}; \qquad NV > NA \text{ (Fr. 20 III.)} \\ \hline
NC > NA \text{ (Fr. 20 IV., VII.).}
\end{array}$$

VI. Halbiert man in dem $\triangle$ ABC, Fig. 53, in welchem BC $>$ BA iſt, die Seite AC, ſo kann nach V. die vom Halbierungspunkte H nach B gezogene Gerade HB den Winkel B nicht halbieren, und kann ferner

VII. die Mitte einer zwiſchen BC und BA normal zur Winkelhalbierenden BX gezogenen Strecke FK nicht in der Geraden HB liegen,

VIII. endlich aber kann die Gerade HB nach VI. und Fr. 31 die auf ihr zwiſchen BC und BA errichteten Normalen nicht halbieren; es würde ja dies nach Fr. 67 VIII. bedingen, daß $\angle$ HBC $=$ $\angle$ HBA wäre.

**74. Welche Folgerungen ergeben ſich aus Fr. 73?**

I. Im gleichſchenkeligen Dreieck (Fr. 64 III.) ſind die Winkel an der Grundſeite gleich (Fr. 73 II.).

II. Deshalb ſind auch die Außenwinkel an der Grundſeite AC des gleichſchenkeligen Dreiecks ABC (Fig. 51) einander gleich (Fr. 39 I.); $\angle u = \angle v = \angle x = \angle y$.

III. Wegen Fr. 69 IV. ſind die beiden gleichen Winkel an der Grundſeite des gleichſchenkeligen Dreiecks ſpitz, die Außenwinkel an der Grundſeite aber ſtumpf (Fr. 39 IV.).

IV. Iſt ein gleichſchenkeliges Dreieck rechtwinkelig, ſo mißt jeder Winkel an der Grundſeite 45° (Fr. 68). — Vergl. Fr. 71 IV.

V. Im gleichſeitigen Dreieck (Fr. 64 III.) folgt aus der Gleichheit der Seiten $a = b$ und $b = c$, daß Winkel $A = B$ und $B = C$; daher iſt $\angle A = \angle B = \angle C$ (Fr. 20 V.), und jeder Winkel iſt $= 60^\circ = \frac{2}{3}\,\mathfrak{R}$ (Fr. 69 VIII.)

VI. Die Gegenſeiten zweier gleichen Winkel desſelben Dreiecks ſind gleich (Fr. 73 I.), das Dreieck alſo gleichſchenkelig; iſt aber

VII. das Dreieck gleichwinkelig, ſo iſt es wegen Fr. 73 I. und Fr. 20 V. auch gleichſeitig.

VIII. Aus Fr. 73 IV. folgt wegen Fr. 71 I., daß im rechtwinkeligen und im ſtumpfwinkeligen Dreieck die dem rechten oder ſtumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite des Dreiecks iſt. Deshalb iſt auch

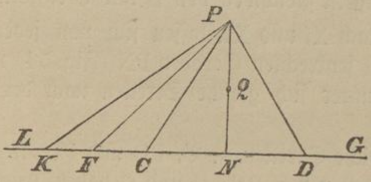

Fig. 54.

IX. die von einem Punkte P (Fig. 54) auf eine nicht durch P gehende Gerade G herabgefällte Senkrechte PN kürzer als jede von dieſem Punkte P nach einem beliebigen Punkte C in dieſer Geraden G gezogene Strecke PC.

Dieſe Senkrechte PN heißt der **Abſtand** oder die **Entfernung** des Punktes P von der Geraden G.

X. Die von einem Punkte P (Fig. 54) nach verſchiedenen, in einer nicht durch P gehenden Geraden G liegenden Punkten C, F, K ꝛc. gezogenen Strecken PC, PF, PK ꝛc. werden (wegen VIII.) um ſo länger, je weiter dieſe Punkte C, F, K ꝛc. vom Fußpunkte N der von P auf G herabgefällten Senkrechten PN abſtehen. Die Winkel PCF, PFK ꝛc. ſind nämlich ſtumpf (Fr. 69 VII.), da ja

$$\angle PNL = 90^\circ.$$

Lägen die Punkte, wie F und D, auf verſchiedenen Seiten von N, ſo klappe man die Ebene um NP um.

Umgekehrt rückt F um ſo weiter von N hinweg, je größer PF wird.

XI. Sind die beiden Punkte C und D (Fig. 54) einer Geraden G gleich weit entfernt von dem Fußpunkte N der von einem Punkte P auf G gefällten Senkrechten PN, ſo ſtehen D und C auch von P gleich weit ab. Die beiden Dreiecke PNC und PND ſtimmen ja in den rechten Winkeln (Fr. 39 III.) bei N und deren einſchließenden Seiten überein, ſind alſo kongruent (Fr. 67 VII.), und deshalb iſt CP=DP (Fr. 67 II.).

XII. Auch jeder andere Punkt, z. B. Q, in NP und ſeiner Verlängerung iſt gleichweit von D und C entfernt.

XIII. Nach X. und XI. laſſen ſich von jedem Punkte P in der auf G ſenkrechten Geraden PN (Fig. 54) nicht mehr als zwei unter ſich gleiche Strecken nach der Geraden G ziehen.

Zwei gleiche Strecken, z. B. PD und PC, liegen auf verſchiedenen Seiten von PN; D und C haben gleichen Abſtand von N.

XIV. Im gleichſchenkligen Dreiecke DPC, Fig. 54, iſt nach X. jede Strecke, welche von der Spitze P nach einem Punkte der Grundſeite CD gezogen wird, kleiner als die Schenkel DP und CP,

XV. und jede Strecke PF nach einem Punkte F in der Verlängerung der Grundſeite CD größer als DP und CP.

XVI. Jeder Punkt S (Fig. 55) außerhalb der von dem Punkte P auf die Gerade G herabgefällten Senkrechten PN hat ungleiche Entfernung von zwei in G liegenden und von N gleichweit abſtehenden Punkten D und C.

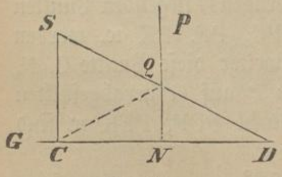

Fig. 55.

SD (oder SC) muß nämlich nach Fr. 28 I. die Senkrechte NP in Q ſchneiden; zieht man nun noch die Strecke QC, ſo iſt:

$$\begin{array}{c} DQ = CQ \text{ (XI.)} \\ \hline \angle QCD = \angle QDC \text{ (Fr. 73 II.)} \\ \angle SCD > \angle QCD \text{ (Fr. 20 III.)} \\ \hline \angle SCD > \angle QDC \text{ (Fr. 20 VI.)} \\ \hline SD > SC \text{ (Fr. 73 IV.).} \end{array}$$

XVII. Daher muß jeder Punkt Q (Fig. 55), welcher von den beiden Punkten D und C der Geraden G gleichweit entfernt iſt, in der Geraden NP liegen, welche in der Mitte N zwiſchen D und C auf G ſenkrecht ſteht; wenn nämlich Q außer PN läge, ſo könnte nach XVI. nicht QC = QD ſein.

Kürzer ſpricht man dieſen Satz ſo aus: Die Senkrechte PN iſt der geometriſche Ort eines von den Punkten D und C gleichweit entfernten Punktes*).

XVIII. Fällt man von einem Punkte T (Fig. 56) der Halbierungslinie BX eines (hohlen) Winkels ABC Senkrechte TU und TV auf die Winkelſchenkel AB und BC und klappt man den $\angle y$ um BT auf den $\angle x$, ſo müſſen ſich beide decken (Fr. 31). Da nun T auf ſich ſelbſt liegen geblieben iſt, ſo müſſen auch TV und TU ſich decken (Fr. 57 IV.); deshalb iſt alſo auch

$BU = BV$ und ebenſo

$TV = TU$ (Fr. 22 IV.),

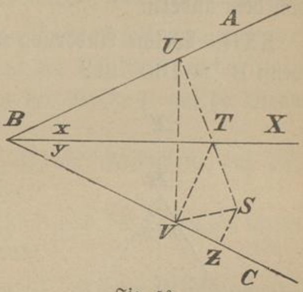

Fig. 56.

d. h. jeder Punkt T der Halbierungslinie BX iſt von den Schenkeln AB und CB gleichweit entfernt (vergl. IX.).

---

*) Vergl. Fr. 134 IV. — Über andere geometriſche Örter vergleiche XX., Fr. 96 IX., Fr. 98 III., Fr. 108 XIII., Fr. 133 VIII., Fr. 148 VII., Fr. 166 X und XI., Fr. 170 XI., Fr. 206 III., Fr. 240 IV.

XIX. Fällt man von dem nicht in der Halbierungslinie BX (Fig. 56) gelegenen Punkte S des hohlen Winkels ABC die Senkrechten SU und SZ auf die Schenkel AB und CB, ſo wird die eine Senkrechte SU die Halbierungslinie BX in T ſchneiden (Fr. 28 I.). Zieht man nun $TV \perp BC$, dann UV und SV, ſo iſt $UT = VT$ (XVIII.), $\angle TUV = \angle TVU$ (Fr. 73 II.), $\angle TVU < \angle SVU$ (Fr. 20 III.), daher $\angle TUV < \angle SVU$ (Fr. 20 IV.) und $SU > SV$ (Fr. 73 IV.); da aber $\angle SZV = 90^\circ$ gemacht wurde, muß $SV > SZ$ ſein (VIII.) und deshalb $SU > SZ$ (Fr. 20 VII.),

d. h. jeder Punkt S außerhalb der Halbierungslinie BX iſt von den Schenkeln AB und BC ungleichweit entfernt.

XX. Daher iſt die Halbierungslinie BX (Fig. 56) des hohlen Winkels B der geometriſche Ort eines innerhalb B liegenden und von den Schenkeln AB und CB gleichweit entfernten Punktes T,

XXI. dagegen liegt jeder innerhalb B gelegene Punkt S außerhalb der Halbierungslinie BX des hohlen Winkels B, ſobald er von dem einen Schenkel weiter entfernt liegt, als von dem andern.

XXII. Welche Änderung in XVIII. bis XXI. wird nötig, wenn $B > 180^\circ$ iſt?

**75. Was iſt vom ſymmetriſchen Dreieck zu bemerken?**

I. Die Symmetrieaxe XX (Fr. 64 IV.) eines ſymmetriſchen Dreiecks ABC, Fig. 57, kann nur durch einen Eckpunkt B laufen.

II. Im ſymmetriſchen Dreiecke ABC, Fig. 57, werde die von der Symmetrieaxe geſchnittene Seite AC die Grundſeite oder Baſis, ihr Gegenwinkel die Spitze,

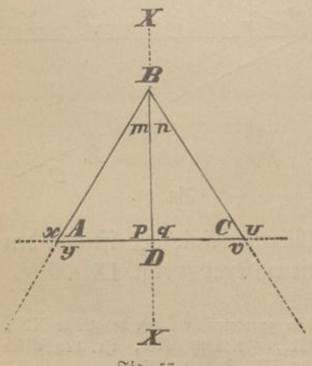

Fig. 57.

die anderen beiden Seiten AB und CB die Schenkel genannt; die zwiſchen Spitze und Baſis gelegene Strecke CD der Symmetrieaxe heiße Symmetrieſtrecke. Vergl. Fr. 64 III.

III. Da △ BDC beim Umklappen das △ BDA deckt (Fr. 64 IV.), ſo iſt BA = BC, d. h. das ſymmetriſche Dreieck iſt entweder gleichſchenkelig, oder gleichſeitig (Fr. 64 III.).

Von ihm gelten daher die Sätze in Fr. 74 I. bis VII., XIV. und XV.

IV. Zugleich iſt $\angle m = \angle n$,

$$\angle p = \Re = \angle q,$$

und $AD = CD$;

d. h. die Symmetrieaxe XX halbiert den Winkel B an der Spitze, halbiert die Grundſeite AC und ſteht auf der Grundſeite ſenkrecht.

Daher gelten vom ſymmetriſchen Dreiecke auch die Sätze in Fr. 74 X. bis XIII., XVI. bis XXI. Vergl. Fr. 73 V.

V. Das gleichſchenkelige Dreieck iſt ſymmetriſch gegen die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze (Fr. 73 II.), das gleichſeitige gegen die Halbierungslinie jedes Winkels.

VI. In dem ſymmetriſchen Dreiecke fallen zuſammen:

1. die Halbierungslinie des Winkels B an der Spitze;
2. die Senkrechte von der Spitze B auf die Grundſeite AC;
3. die in der Mitte D der Grundſeite auf dieſer errichtete Senkrechte;
4. die durch die Spitze B und die Mitte der Grundſeite gezogene Gerade.

VII. Ein Dreieck ABC, Fig. 57, iſt ſymmetriſch gegen XX:

1. wenn $\angle m = \angle n$ und $\angle p = \angle q = \Re$;
2. wenn $AD = CD$ und $BD \perp AC$;
3. wenn $\angle m = \angle n$ und $AD = CD$.

Der Beweis zu 1. und 2. ſtützt ſich auf Fr. 67 VII. und VIII., der zu 3. auf V. in Verbindung mit Fr. 73 VI.

**76. Welche Beziehungen beſtehen zwiſchen den Seiten des Dreiecks?**

I. In jedem Dreieck iſt die Summe $a + b$ zweier Seiten größer als die dritte Seite c.

Verlängert man die Seite $AC = b$ (Fig 58) um ein Stück $CD = CB = a$ und zieht DB, ſo iſt $\angle CBD = \angle CDB$ (Fr. 74 I.); da nun $\angle ABD > \angle CBD$ (Fr. 20 III.), ſo iſt auch $\angle ABD > \angle CDB$ (Fr. 20 IV.), deshalb $AD > AB$ (Fr. 73 IV.) oder $a + b > c$ (Fr. 20 II.).

II. In jedem Dreieck iſt die Differenz $b - a$ zweier Seiten kleiner als die dritte Seite c.

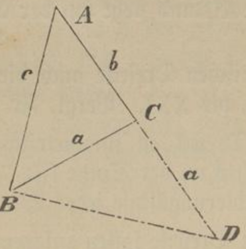

Fig. 58.

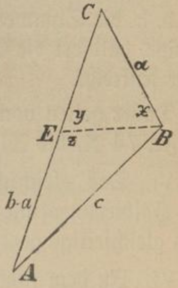

Fig. 59.

Trägt man auf der (größern) Seite $CA = b$ (Fig. 59) von C aus ein Stück $CE = CB = a$ ab und zieht man die Strecke BE, ſo iſt $\angle z > 90°$ (Fr. 74 III.) und deswegen $EA < AB$ (Fr. 74 VIII.) oder $b - a < c$ (Fr. 20 II.).

**77. Welche Folgerungen laſſen ſich aus Fr. 76 ziehen?**

I. In Fig. 60 muß nach Fr. 76 I. der Reihe nach

$$CD + DA > CA$$
$$DE + EA > DA \text{ ꝛc. ſein.}$$

Daher iſt auch

$$AB < BC + CA$$
$$AB < BC + CD + DA$$
$$AB < BC + CD + DE + EA \text{ ꝛc.,}$$

d. h. die Strecke AB iſt kürzer als jede zwiſchen den Punkten A und B gezogene gebrochene Linie.

Auch wenn die gebrochene Linie, z. B. BEMA in Fig. 61, die Strecke AB ſchneidet, hört der Satz I. nicht auf zu gelten, da

$$BE + EF > BF$$
$$FM + MA > FA.$$

Selbſt wenn die gebrochene Linie nicht in einer und derſelben Ebene liegt, gilt der Satz I. noch, da dann in Fig. 60 nur jedes der auf einander folgenden Dreiecke ABC, ACD ꝛc. in einer andern Ebene liegt.

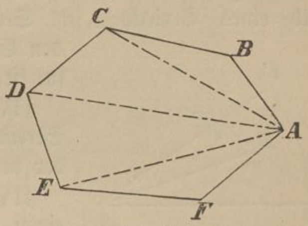

Fig. 60.

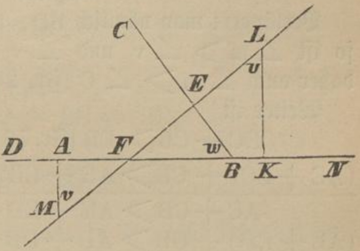

Fig. 61.

II. In Fig. 62 ſchmiegt ſich die gebrochene Linie ADCEB weit mehr an die zwiſchen A und B gezogene krumme Linie AFDKCLENB an, als die gebrochene ACB. Setzt man daher das in Fig. 62 angedeutete Verfahren weiter fort, ſo wird man eine ſich um ſo genauer an die krumme Linie anſchmiegende gebrochene erhalten, je mehr Zwiſchenpunkte man in der krummen wählt; um ſo weniger werden ſich auch die einzelnen Teile der krummen in ihrer Länge von den einzelnen Strecken der gebrochenen unterſcheiden, und wie die gebrochene, ſo wird auch die krumme größer ſein als die Strecke AB.

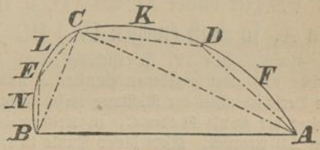

Fig. 62.

III. Die Strecke $\overline{AB}$ iſt alſo die *kürzeſte Linie* zwiſchen den zwei Punkten A und B. Vergl. Fr. 22 VIII.

IV. Zieht man von einem Punkte D (Fig. 63) innerhalb eines Dreiecks ABC Strecken DA und DB nach den Endpunkten einer Seite AB, ſo iſt

(IV a) die Summe dieſer Strecken kleiner als die Summe der beiden anderen Dreiecksſeiten,

(IV b) erſtere ſchließen aber einen größern Winkel ein als letztere.

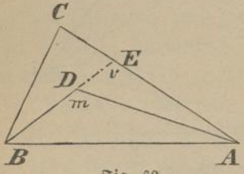

Fig. 63.

Verlängert man nämlich BD, bis ſie AC in E ſchneidet, ſo iſt $\angle m > \angle v$ und $\angle v > \angle C$ (Fr. 69 VII.), daher auch $\angle m > \angle C$ (Fr. 20 VII.).

Weiter iſt

$$\begin{array}{c}
EC + CB > EB \text{ (Fr. 76 I.)} \\
\hline
(AE + EC) + CB > AE + EB \text{ (Fr. 20 IX.)} \\
\hline
AC + CB > AE + ED + DB \text{ (Fr. 20 II.)} \\
(AE + ED) + DB > AD + DB \text{ (Fr. 76 I. und Fr. 20 IX.)} \\
\hline
AC + CB > AD + DB \text{ (Fr. 20 VII.).}
\end{array}$$

V. Iſt dabei $AC = AD$, d. h. liegen C und D im Kreiſe um A, ſo muß (wegen IV.) $BC > BD$ ſein.

Anm. Aus IV. iſt erſichtlich, daß der Winkel zwiſchen zwei Geraden, welche von zwei gegebenen Punkten A und B (Fig. 63) auslaufen, alſo auch die Verſchiedenheit der Richtung dieſer beiden Geraden um ſo kleiner wird, je weiter der Punkt D oder C, in welchem die beiden Geraden zuſammenlaufen, von AB wegrückt. Rückt dieſer Punkt in *unendliche Entfernung* von AB, d. h. ſchneiden ſich die beiden Geraden gar nicht mehr, ſondern ſind ſie parallel, ſo wird die Richtungsverſchiedenheit = 0. Vergl. Fr. 56 IV.

VI. Zieht man von einem im Außenwinkel CBL (Fig. 64) des Winkels B eines Dreiecks ABC (aber *nicht* im Scheitelwinkel von C) gelegenen Punkte F

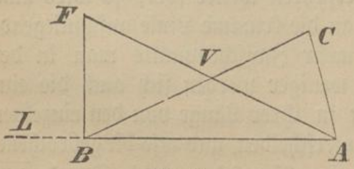

Fig. 64.

Strecken FA und FB nach den Endpunkten der Seite AB, ſo muß die eine Strecke FA die eine Seite CB in V ſchneiden (Fr. 28 I.). Dabei iſt die Summe dieſer ſich ſchneidenden Strecke und Seite größer als die Summe der ſich nicht ſchneidenden; denn es iſt:

$$\underline{AC < AV + VC;\ BF < BV + VF\ (\text{Fr. 76 I.})}$$
$$AC + BF < AV + VF + VC + BV\ (\text{Fr. 20 X.})$$
$$AC + BF < AF + BC\ (\text{Fr. 20 II.}).$$

VII. Iſt dabei $AC = AF$, d. h. liegen C und F im Kreiſe um A, ſo muß wegen VI.

$$BF < BC$$

ſein.

VIII. Iſt dabei $AC = BC$, ſo iſt $BF < AF$ (VI.). Vergl. Fr. 74 XVI.

IX. Daher kann in V. nicht

$$AC = AD = BC = BD,$$

und in VII. nicht

$$AC = AF = BF = BC$$

ſein.

X. In verwandter Weiſe wie in IV. läßt ſich auch der allgemeinere Satz beweiſen, daß der Umfang eines Vielecks mit lauter hohlen Winkeln kleiner iſt, als der Umfang eines dasſelbe umſchließenden Vielecks.

XI. Daß die Sätze IV., VI. und IX. nicht zu gelten aufhören, wenn der Punkt D, bezw. F in die Seite BC rückt und beide ſich in V begegnen, iſt aus Fr. 76 I. leicht nachzuweiſen.

**78. In welcher Weiſe ändert ſich ein Winkel, bezw. eine Seite eines Dreiecks zugleich mit ſeiner Gegenſeite und ihrem Gegenwinkel?**

I. Legt man die zwei Dreiecke $AB_1C$ und $AB_2C$ (Fig. 65), in denen $AC = AC$ und $AB_1 = AB_2$, aber $\angle B_1AC > \angle B_2AC$ iſt, mit den gleichen

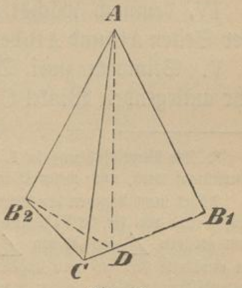

Fig. 65.

Seiten AC an einander, ſo fällt die Halbierungslinie AD des Winkels $B_1AB_2$*) zwiſchen $AB_1$ und AC und ſchneidet die Seite $B_1C$ etwa in D (Fr. 28 III. und Fr. 26). Zieht man nun noch $DB_2$, ſo iſt

$$\begin{array}{c} \triangle B_1AD \cong \triangle B_2AD \text{ (Fr. 67 VII.)} \\ \hline B_1D = B_2D \text{ (Fr. 67 II.)} \\ \hline B_1C = B_1D + DC = B_2D + DC \text{ (Fr. 20 II. und IV.)} \\ B_2D + DC > B_2C \text{ (Fr. 76 I.)} \\ \hline B_1C > B_2C \text{ (Fr. 20 IV.).} \end{array}$$

II. Läßt man alſo in einem Dreiecke ABC (Fig. 66) zwei Seiten AC und AB ungeändert, ſo wächst die dritte Seite CB mit dem von jenen beiden Seiten eingeſchloſſenen Winkel A. Vergl. Fr. 77 V. und VII.

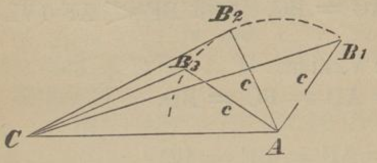

Fig. 66.

III. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten ($a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$) überein, während die dritten Seiten ungleich ſind ($c_1 > c_2$), ſo können die von jenen Seitenpaaren eingeſchloſſenen Winkel $C_1$ und $C_2$ nicht gleich ſein, weil ſonſt die Dreiecke kongruent wären (Fr. 67 VII.) und $c_1 = c_2$ ſein müßte. Ebenſowenig kann $C_1 < C_2$ ſein, weil ja dann auch $c_1 < c_2$ ſein müßte (II.). Daher kann nur $C_1 > C_2$ ſein, und

IV. demnach wächst in Fig. 66 bei ungeänderter Länge der Seiten AC und AB der Winkel A mit der dritten Seite BC.

V. Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite a und einem ihr anliegenden Winkel C überein, ſo wächst auch der zweite

---

*) Die Beweisführung in I. ändert ſich weder, wenn $\angle B_1AB_2$ flach, oder überſtumpf wird, noch wenn C in $\overline{B_1B_2}$, oder im Dreieck $B_1AB_2$ liegt.

Führt man dagegen den Beweis zu III. ebenfalls unmittelbar mit Fig. 65 (auf Grund von Fr. 73 III. und Fr. 67 VII., indem man $B_1B_2$ zieht und von dem größern $\angle B_1B_2D$ den $\angle B_1B_2D = \angle B_2B_1C$ abſchneidet), ſo macht die erwähnte Größen- und Lagenverſchiedenheit eine kleine Abänderung in der Beweisführung nötig, ſofern man nicht (in Fig. 65) $AC > AB$ vorausſetzt.

dieſer Seite a anliegende Winkel B, wenn ſeine Gegenſeite b wächst, und umgekehrt. Fig. 59 vermag dies unmittelbar anſchaulich zu machen.

**79. Durch welche Stücke iſt ein Dreieck beſtimmt?** s. auch Frage 67

I. Ein Dreieck iſt beſtimmt, wenn man von ihm ſo viel Stücke (d. h. Winkel und Seiten) kennt, daß ſich aus ihnen bloß ein Dreieck zeichnen läßt.

II. Durch ein Stück iſt ein Dreieck noch nicht beſtimmt, weder durch einen Winkel, noch durch eine Seite.

In Fig. 67 ſtimmen die Dreiecke AVB, ACB, AFB in der Seite AB, in Fig. 68 die Dreiecke $AB_1C_1$, $AB_2C_2$, $AB_3C_3$ ꝛc. in dem Winkel A überein, ſind aber trotzdem an Größe und Geſtalt verſchieden.

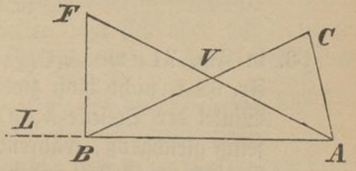

Fig. 67.

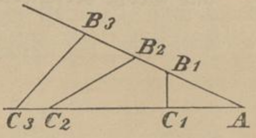

Fig. 68.

III. Auch zwei Stücke reichen zur Beſtimmung eines Dreiecks nicht aus. Denn:

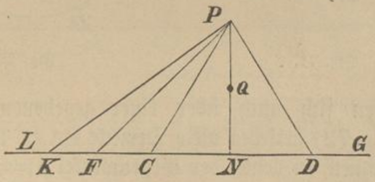

Fig. 69.

1. in Fig. 69 ſtimmen die Dreiecke DPN, DPC, DPF in der Seite DP und dem anliegenden Winkel D überein;

2. in Fig. 70 enthalten die Dreiecke $ACB_1$, $ACB_2$, $ACB_3$ zwei gleiche Seiten AC und $AB_1 = AB_2 = AB_3$;

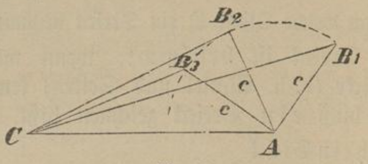

Fig. 70.

3. in Fig. 71, wo $A_1C_1 // A_2C_2 // A_3C_3$, ſind nach Fr. 62 I. nicht bloß zwei, ſondern ſogar alle drei Winkel der Dreiecke $A_1BC_1$, $A_2BC_2$, $A_3BC_3$ gegenſeitig gleichgroß, während in jedem dieſer Fälle die Dreiecke an Geſtalt, oder an Größe, oder an Geſtalt und Größe verſchieden ſind. Endlich

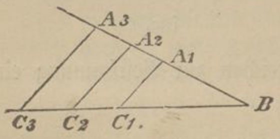

Fig. 71.

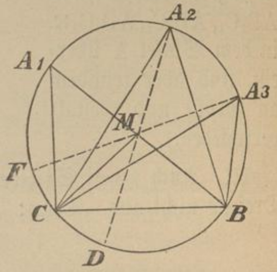

Fig. 72.

4. laſſen ſich auch über einer gegebenen Seite BC (Fig. 72) beliebig viele Dreiecke $BA_1C$, $BA_2C$, $BA_3C$ zeichnen, in denen der Gegenwinkel $A_1 = A_2 = A_3$ der Seite BC die nämliche Größe A hat; denn man braucht (wegen Fr. 68 II.) dazu nur $\angle CA_1B + \angle BA_1C = \angle CA_2B + \angle BA_2C = \angle CA_3B + \angle BA_3C = 180^\circ - A$ zu machen. Vergl. Fr. 98 III.

IV. Auch die für ein Dreieck gegebenen drei Winkel beſtimmen, wie Fig. 71 zeigt (vergl. III. 3.), das Dreieck noch nicht, ſelbſt wenn ſie der in Fr. 68 II. enthaltenen Bedingung genügen; eben dieſer Bedingung wegen ſind ja die drei Winkel nicht unabhängig von einander.

V. Durch die drei Seiten iſt das Dreieck beſtimmt; denn in zwei Dreiecken, welche in den drei Seiten übereinſtimmen, müſſen auch die Winkel der Reihe nach gleich groß ſein, weil ſonſt die Seiten verſchieden ſein müßten (Fr. 78 II.).

Aus drei gegebenen Seiten läßt ſich aber nur dann ein Dreieck zeichnen, wenn die Bedingungen in Fr. 76 erfüllt ſind.

VI. Aus Fr. 67 VII. folgt, daß zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel das Dreieck beſtimmen.

VII. Auch zwei Winkel und eine Seite beſtimmen das Dreieck. Denn ſind in zwei Dreiecken zwei Winkel paarweiſe gleich, ſo ſind es wegen Fr. 69 I. auch die dritten Winkel; aus Fr. 67 VIII. ergiebt ſich daher ſtets die Kongruenz der Dreiecke.

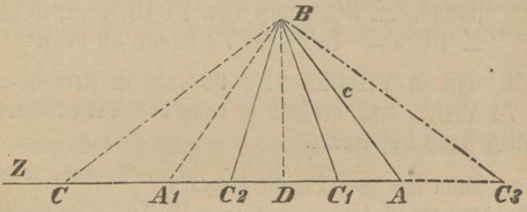

Fig. 73.

VIII. Sind zu einem Dreieck ein Winkel $ZAB = A$ (Fig. 73), eine dieſem Winkel anliegende Seite $AB = c$ und deſſen Gegenſeite $a$ gegeben, ſo iſt zunächſt zu unterſcheiden, ob $a$ größer, gleich, oder kleiner iſt als die von B auf AZ gefällte Senkrechte $BD = h$.

1. Iſt $a < h$, ſo iſt aus $a$, $c$ und $A$ kein Dreieck möglich (Fr. 74 IX.).

2. Iſt $a = h$, ſo läßt ſich aus a, c und A nur ein Dreieck ABD zeichnen (Fr. 74 IX.), und dieſes iſt bei D rechtwinkelig.

Iſt endlich $a > h$, ſo kann a wieder entweder größer, oder gleich, oder kleiner als c ſein.

Macht man nun $DA_1 = DA$, alſo $BA_1 = BA$ (Fr. 74 XI.), ſo fällt

3. bei $c = a > h$*) der dritte Eckpunkt des einzigen möglichen (gleichſchenkeligen) Dreiecks $ABA_1$ auf $A_1$ (Fr. 74 XIII.).

4. Bei $c < a > h$ dagegen giebt es zwar zwei von B um die Strecke a entfernte Punkte C und $C_3$ in AZ (Fr. 74 XIII.), aber nur das eine $\triangle$ ABC enthält c, A und a zugleich, während das $\triangle ABC_3$ zwar a und c, aber nicht A, ſondern $\angle BAC_3 = 180^\circ - A$ enthält.

5. Bei $c > a > h$ endlich giebt es zwei Dreiecke $ABC_1$ und $ABC_2$, in denen c, a und A vorkommen; dabei iſt $DC_1 = DC_2$ (Fr. 74 XIII.); $\angle BC_1A$ iſt ſtumpf, $\angle BC_2A$ ſpitz (Fr. 74 III.), $\angle BC_1A + \angle BC_2A = 180^\circ$ (Fr. 74 I. und 39 IV.).

IX. Iſt in VIII. $\angle A \geq 90^\circ$, ſo iſt ſtets $c < a$ (Fr. 74 VIII.), und deshalb iſt dann das Dreieck durch c, a und A ſtets beſtimmt.

**80. Wenn ſind zwei Dreiecke kongruent?**

Zwei Dreiecke ſind kongruent, wenn ſie übereinſtimmen:

I. in den drei Seiten (Fr. 79 V.);

II. in zwei Seiten und dem Zwiſchenwinkel (Fr. 79 VI.);

III. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren dieſer beiden Seiten (Fr. 79 VIII. 4. und IX.);

IV. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen dieſer Seiten, während die Gegenwinkel der zweiten dieſer Seiten

---

*) Eigentlich ſind hier zwei Seiten ($c = a$) und zwei Winkel ($C = A$; Fr. 73 II.) gegeben.

beide ſtumpf, oder beide ſpitz ſind, oder während die Summe der letzteren beiden Gegenwinkel von 180° verſchieden iſt (Fr. 79 VIII. 5.);

V. in einer Seite und zwei Winkeln (Fr. 79 VII.).

**81. Wenn ſind zwei rechtwinkelige Dreiecke kongruent?**

Zwei rechtwinkelige Dreiecke ſind kongruent, wenn ſie (außer im rechten Winkel; Fr. 39 III.) noch übereinſtimmen:

I. in zwei Seiten (Fr. 80 II., oder III.);

II. in einem Winkel und einer Seite (Fr. 80 V.).

---

### Drittes Kapitel.

## Der Kreis und die Gerade. Zwei Kreiſe.

**82. Welche Lagen kann ein Punkt gegen einen Kreis haben?**

Ein Punkt in der Ebene eines Kreiſes liegt entweder auf dem Kreiſe, oder innerhalb, oder außerhalb des Kreiſes, jenachdem ſeine Entfernung vom Mittelpunkte gleich, kleiner, oder größer iſt, als der Halbmeſſer des Kreiſes (Fr. 47 bis 49).

**83. Wie viel Punkte hat ein Kreis mit einer in ſeiner Ebene liegenden Geraden gemein?**

I. Liegt der Fußpunkt $N_1$ (Fig. 74) der vom Mittelpunkte M eines Kreiſes vom Halbmeſſer r auf die Gerade $G_1$ gefällten Senkrechten $MN_1$ außerhalb dieſes Kreiſes, iſt alſo $MN_1 > r$, ſo liegen alle anderen Punkte der Geraden $G_1$ ebenfalls außerhalb des Kreiſes (Fr. 74 IX.).

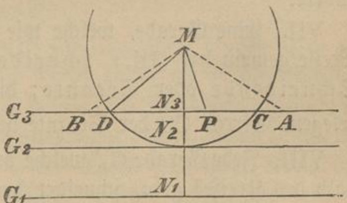

Fig. 74.

$G_1$ hat alſo keinen Punkt mit dem Kreiſe gemein.

II. Liegt der Fußpunkt $N_2$ (Fig. 74) der von M auf die Gerade $G_2$ gefällten Senkrechten $MN_2$ *auf* dem Kreiſe, iſt alſo $MN_2 = r$, ſo liegen alle anderen Punkte der Geraden $G_2$ außerhalb des Kreiſes (Fr. 74 IX.).

$G_2$ hat dann mit dem Kreiſe nur *einen Punkt* gemein.

III. Liegt der Fußpunkt $N_3$ (Fig. 74) der von M auf die Gerade $G_3$ gefällten Senkrechten $MN_3$ *innerhalb* des Kreiſes, iſt alſo $MN_3 < r$, ſo kann man in $G_3$ von $N_3$ aus nach beiden Seiten hin $N_3A = N_3B = r$ auftragen, und dann iſt (wegen Fr. 74 VIII.) MA ſowohl als MB größer als r; A und B liegen außerhalb, $N_3$ innerhalb des Kreiſes, und deshalb muß $G_3$ den Kreis wenigſtens zweimal ſchneiden (Fr. 28 IV.). Da ſich aber nach Fr. 74 XIII. von M aus höchſtens zwei Strecken von der Länge r nach $G_3$ ziehen laſſen, ſo hat auch $G_3$ jetzt mit dem Kreis *nur zwei Punkte* C und D gemein und kann überhaupt eine Gerade auch mit einem Kreiſe *nie mehr als zwei Punkte* gemein haben.

IV. Eine Gerade $G_2$, welche mit dem Kreiſe nur einen Punkt gemein hat (II.), heißt eine *Berührungslinie* oder *Tangente* des Kreiſes.

V. Die Senkrechte $G_2$ auf einem Halbmeſſer $MN_2$ berührt in $N_2$ den Kreis um M (II.).

VI. Jenſeits $G_2$, nach $G_1$ hin, giebt es keinen Punkt, welcher von M um r entfernt iſt (II. und Fr. 20 III.); alſo geht der Kreis nicht von der einen Seite von $G_2$ auf die andere.

VII. Eine Gerade, welche wie $G_3$ zwei Punkte mit dem Kreiſe gemein hat (III.), *ſchneidet* den Kreis, heißt eine *Schneidende* oder *Secante*; die innerhalb des Kreiſes gelegene Strecke CD der Secante heißt eine *Sehne*.

VIII. Jede Gerade $G_3$, welche durch einen Punkt P innerhalb des Kreiſes geht, ſchneidet den Kreis zweimal. Fällt man nämlich von M eine Senkrechte auf $G_3$, ſo iſt entweder P ſelbſt, oder $N_3$ deren Fußpunkt; da aber im letzteren Falle $MN^3$ noch kürzer als MP ſein muß (Fr. 74 IX.), ſo liegt $N_3$

ebenſowohl als P innerhalb des Kreiſes, und dieſer wird (nach III.) von $G_3$ geſchnitten.

IX. Jede Gerade $G_3$, welche durch einen Punkt D des Kreiſes geht, ohne auf dem nach dieſem Punkte gezogenen Halbmeſſer MD ſenkrecht zu ſtehen, ſchneidet den Kreis (nach III.), weil der Fußpunkt $N_3$ der von M auf $G_3$ gefällten Senkrechten $MN_3$ innerhalb des Kreiſes liegt, da (nach Fr. 74 IX.) $MN_3$ kleiner als der Halbmeſſer MD iſt.

X. Jede Tangente $G_2$ ſteht daher (wegen II. und IX.) ſenkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte $N_2$ gezogenen Halbmeſſer $MN_2$ in deſſen Endpunkte $N_2$.

XI. Durch jeden Punkt $N_2$ eines Kreiſes läßt ſich demnach (wegen X. und Fr. 57 III.) nur eine Tangente ziehen.

XII. Alle Punkte einer Tangente, den Berührungspunkt ausgenommen, liegen außerhalb des Kreiſes (X. und II.).

XIII. Liegen der Mittelpunkt M eines Kreiſes und ein Punkt Q zu verſchiedenen Seiten einer Geraden $G_3$, ſo ſchneiden ſich Gerade und Kreis (VIII.). Denn ſteht in Fig. 74 $MN_1$ in $N_3$ auf $G_3$ ſenkrecht, ſo wird eine durch Q gehende Parallele zu $G_3$ $MN_2$ entweder in $N_2$, oder zwiſchen $N_2$ und $N_3$ ſchneiden, und $N_3$ liegt demnach innerhalb des Kreiſes (Fr. 82).

XIV. Nach X. laſſen ſich nicht drei unter einander parallele Tangenten an denſelben Kreis legen.

### 84. Iſt der Kreis krumm?

I. Da nach Fr. 74 XII. ſich von jedem Punkte Q in NP, Fig. 54 auf S. 65, ein Kreis durch die beiden Punkte C und D ſchlagen läßt, dieſe Kreiſe aber ſich beim Aufeinanderlegen mit ihren Mittelpunkten nicht decken, vielmehr ungleich ſind (Fr. 49 IV.), ſo iſt der Kreis und jeder Kreisbogen krumm (Fr. 10 II. und IV.). Vergl. Fr. 88 und 102.

II. Kein Kreisbogen $\overset{\frown}{DEC}$ (Fig. 75 S. 82) kann mit ſeiner Sehne $\overline{DC}$ zuſammenfallen (I; oder Fr. 83 III. und VII.).

III. Der Kreisbogen $\widehat{DEC}$ iſt auch nicht auf beiden Seiten gleich beſchaffen; er wendet der Sehne DC ſeine hohle oder konkave, der Tangente LK ſeine erhabene oder konvexe Seite zu, er iſt nach der Sehne hin konkav, nach der Tangente hin konvex gekrümmt.

**85. Wie beſtimmt man die Richtung des Kreiſes?**

I. Zwiſchen dem Kreiſe und der Tangente LK (Fig. 75) läßt ſich durch den Berührungspunkt E keine Gerade ziehen, weil ja nach Fr. 83 IX. jede andere durch E gezogene Gerade den Kreis ſchneidet. Demnach giebt die Tangente LK die Richtung des Kreiſes im Berührungspunkte E.

Es ſteht ſomit der Kreis in jedem Punkte E ſenkrecht auf dem nach dieſem Punkte gezogenen Halbmeſſer ME.

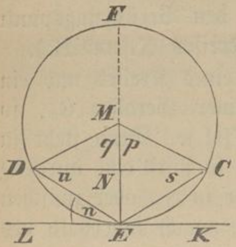

Fig. 75.

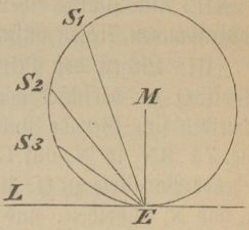

Fig. 76.

II. Der Kreis ändert alſo ſeine Richtung von Punkt zu Punkt.

III. Der Winkel n, welchen eine den Kreis ſchneidende Gerade DE mit der Tangente LK im Punkte E macht, hat zugleich als der Winkel zu gelten, unter dem ſich in E der Kreis und DE ſchneiden.

IV. Die Tangente EL (Fig. 76) läßt ſich als die Lage auffaſſen, der ſich die Secante ES um ſo mehr nähert, je näher deren Schnittpunkt S an ihren zweiten Schnittpunkt E heranrückt. Die Secante würde in dem Augenblicke, in welchem ihre beiden Schnittpunkte zu einem verſchmelzen, zur Tangente werden.

Ein ähnlicher Übergang der Sehne in die Tangente liegt ſchon in Fr. 83 III. und II. angedeutet, inſofern die Secante, je mehr ihre Entfernung vom Mittelpunkte dem Halbmeſſer gleich wird, um ſo näher an die Tangente heranrückt.

Anm. Die in IV. gegebene allgemeinere Erklärung des Begriffs „Berührung“ (vergl. Fr. 83 IV.) läßt ſich für alle krummen Linien beibehalten.

Die ſo beſtimmte Tangente kann aber, wie Fig. 77 zeigt, die Krumme unter Umſtänden an einem anderen Punkte, oder auch an ihrem Berührungspunkte E ſelbſt ſchneiden; im Berührungspunkte E nur, wenn die Krumme in dieſem Berührungspunkte von der konkaven zur konvexen Krümmung gegen dieſelbe Seite der Geraden übergeht, wenn der Berührungspunkt zugleich ein Wendepunkt iſt. Vergl. Fr. 27 III.

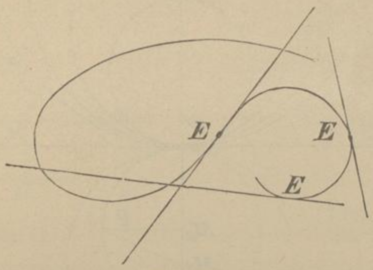

Fig. 77.

## 86. Wovon hängt die Krümmung des Kreiſes ab?

I. Durch denſelben Punkt P einer Geraden G (Fig. 78 S. 84) laſſen ſich beliebig viel Kreiſe legen, welche dieſe Gerade berühren. Die Mittelpunkte dieſer Kreiſe liegen auf der im Punkte P errichteten Senkrechten HY zu G (Fr. 83 X.).

II. Zieht man zwei ſolche Berührungskreiſe von verſchiedenem Halbmeſſer, deren Mittelpunkte $M_1$ und $M_2$ auf derſelben Seite von G liegen, ſo liegt jeder Punkt Q des Kreiſes vom kleineren Halbmeſſer $M_2P = r_2$ innerhalb des Kreiſes mit größerem Halbmeſſer $M_1P = r_1$ (Fr. 82), weil ja

$M_1Q < M_1M_2 + M_2Q$ (Fr. 76 I.)
$M_1Q < M_1M_2 + M_2P$ (Fr. 48 III. und 20 IV.)
$M_1Q < M_1P$ (Fr. 20 II.).

III. Es liegt alſo in der Nähe des Berührungspunktes P (Fig. 78) der größere Kreis zwiſchen der Tangente G und dem kleineren Kreiſe, der kleinere Kreis entfernt ſich raſcher von der Tangente; deshalb iſt der Kreis mit kleinerem Halbmeſſer ſtärker gekrümmt, als der Kreis mit größerem Halbmeſſer.

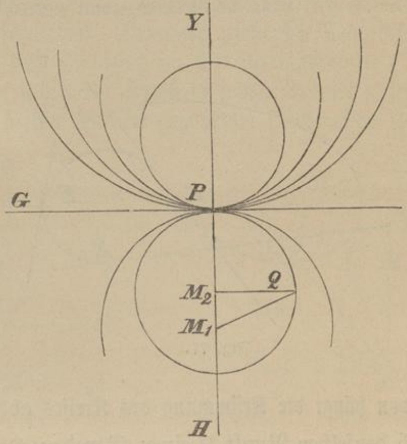

Fig. 78.

IV. Derſelbe Kreis hat an allen Stellen gleich ſtarke Krümmung; man kann ihn in ſeiner Ebene um ſeinen Mittelpunkt drehen. Vergl. Fr. 47 VI.

V. Je größer der Halbmeſſer wird, deſto enger ſchmiegt ſich der Kreis zwar an die Gerade G an, dennoch kann er nie mit der Geraden zuſammenfallen; dazu müßte der Halbmeſſer über alle Grenzen hinaus wachſen, er müßte unendlich groß werden. Vergl. Fr. 148 VII.

**87. Was iſt ein Sektor und ein Segment des Kreiſes?**

I. Zieht man nach den Endpunkten einer Sehne DC (Fig. 79) die Halbmeſſer MD und MC, ſo entſtehen außer dem gleichſchenkeligen Dreieck DMC noch zwei Figuren: der *Ausſchnitt* oder *Sektor* DMCED zwiſchen dem Bogen $\overset{\frown}{DEC}$ und den Halbmeſſern, und der *Abſchnitt* oder das *Segment* DCED zwiſchen dem Bogen $\overset{\frown}{DEC}$ und der Sehne $\overline{DC}$.

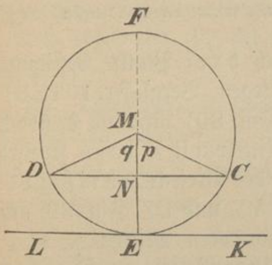

Fig. 79.

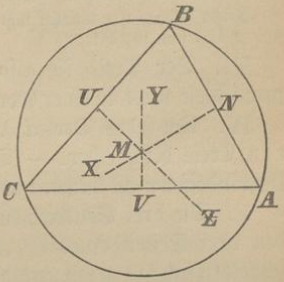

Fig. 80.

II. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei Abſchnitte, von denen derjenige DCFD (Fig. 79), welcher den Mittelpunkt M enthält, einen größeren Bogen DFC und eine größere Fläche hat als der Halbkreis und als der andere DCED. Erſterer heißt ein *größerer*, letzterer ein *kleinerer* Abſchnitt; beide ergänzen ſich zur ganzen Kreisfläche.

III. Je zwei Halbmeſſer MD und MC (Fig. 79) teilen den Kreis in zwei Ausſchnitte; der *größere* derſelben DMCFD und ſein Bogen $\overset{\frown}{DFC}$ iſt größer als der Halbkreis.

IV. Auch die zu Bögen von 90°, 60° und 45° gehörigen Kreisausſchnitte nennt man *Quadrant*, *Sextant*, *Oktant*. Vergl. Fr. 50 III.

**88. Durch wie viel Punkte iſt ein Kreis beſtimmt?**

I. Denkt man ſich die drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte A, B, C (Fig. 80) durch zwei Strecken AB und AC verbunden und errichtet man auf dieſen in deren Mitten N und V die Senkrechten NX und VY, ſo ſchneiden ſich dieſelben in einem Punkte M (Fr. 71 VI.); zugleich iſt BM = AM und CM = AM (Fr. 74 XI.), daher auch BM = AM = CM (Fr. 20 V.). Durch A, B, C läßt ſich alſo ein Kreis legen (Fr. 47 II.).

II. NX und VY ſchneiden ſich aber nur in einem Punkte (Fr. 26); daher giebt es (wegen Fr. 74 XVI.) auch nur einen Kreis, welcher durch A, B und C geht.

Anm. Durch vier Punkte läßt ſich nicht immer ein Kreis legen. Vergl. Fr. 97 III. und 161 III.

III. Der Kreis iſt alſo durch drei Punkte beſtimmt, wenn dieſe nicht in einer Geraden liegen. Vergl. Fr. 104 XIII.

IV. Um jedes Dreieck ABC (Fig. 80) läßt ſich demnach ein Kreis beſchreiben. — Der Mittelpunkt M dieſes Kreiſes liegt indeſſen nicht immer innerhalb des Dreiecks, wie in Fig. 80.

V. Die drei Senkrechten NX, VY und UZ, Fig. 80, auf den drei Seiten eines △ ABC in deren Mitten N, V, U ſchneiden ſich in einem und demſelben Punkte M. Denn aus MB = MC (I.) folgt, daß M zugleich in UZ liegt (Fr. 74 XVII.).

In I. hätte man alſo auch die Senkrechte UZ auf BC in deren Mitte U benutzen können und würde doch nur den einen Kreis gefunden haben.

89. Wie findet man den Mittelpunkt eines Kreiſes?

I. Macht man EF (Fig. 81) ſenkrecht auf der Sehne DC in deren Mitte N, ſo geht EF durch den Mittelpunkt M (Fr. 48 I. und 74 XVII.).

Der Mittelpunkt M liegt alſo in der Mitte des Durchmeſſers EF (Fr. 48 II.).

II. Ein anderes Verfahren ergiebt ſich aus Fr. 88 I.

III. Ein drittes Verfahren wird in Fr. 102 XVIII. angegeben werden.

IV. Eine vierte Löſung kann Fr. 123 bieten.

V. Auch ſchneidet ſich im Mittelpunkte M die Normale EF auf der Tangente LK und die Senkrechte auf der Sehne ED in deren Mitte N.

**90. Was macht die Halbierungslinie eines Centriwinkels?**

I. Halbiert man den Centriwinkel DMC (Fig. 81) eines Ausſchnittes, ſo ſchneidet die Halbierungslinie ME ſowohl den Bogen $\overset{\frown}{DC}$ in E, als die Sehne $\overline{DC}$ in N (Fr. 22 IV. und 52 II.).

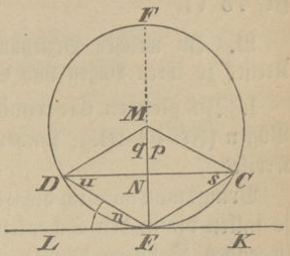

Fig. 81.

II. Jeder Sektor DMCED iſt ſymmetriſch gegen die Halbierungslinie ME ſeines Centriwinkels DMC (Fr. 31, 48 I., 64 IV.).

III. Die Halbierungslinie ME halbiert daher nicht bloß die Sehne $\overline{DC}$ in N und den Bogen $\overset{\frown}{CED}$ in E, ſondern auch den Bogen $\overset{\frown}{DFC}$ in F. Vergl. Fr. 54 III.

IV. Zugleich iſt die Halbierungslinie ME ⊥ DC.

V. Ebenſo halbiert die Verbindungslinie MN des Mittelpunktes M und der Sehnenmitte N den Centriwinkel DMC und in E den Bogen $\overset{\frown}{DC}$; auch iſt MN ⊥ DC. Vergl. Fr. 75 VI.

VI. Daher halbiert die Verbindungslinie ME des Mittelpunktes M und der Bogenmitte E den Centriwinkel DMC und die Sehne $\overline{DC}$ winkelrecht in N (Fr. 57 III.).

VII. Eben deshalb geht auch die Verbindungslinie NE der Sehnenmitte N und der Bogenmitte E durch den Mittelpunkt M; halbiert den Winkel DMC und ſteht ſenkrecht auf DC.

VIII. Die Senkrechte MN ferner vom Mittelpunkte M auf die Sehne $\overline{DC}$ halbiert dieſe in N, den Bogen $\overset{\frown}{DC}$ in E und den Centriwinkel DMC. Vergl. Fr. 75 VI.

IX. Auch die Senkrechte EN von der Bogenmitte E auf die Sehne $\overline{DC}$ halbiert daher DC in N, geht durch den Mittelpunkt M und halbiert den Winkel DMC.

X. Die in der Mitte N der Sehne $\overline{DC}$ errichtete Senkrechte NF geht durch den Mittelpunkt M, halbiert den Winkel DMC und die Bögen $\overset{\frown}{DEC}$ und $\overset{\frown}{DFC}$ in E und F. Vergl. Fr. 75 VI.

**91. In welchen Beziehungen ſtehen die Sehnen desſelben Kreiſes zu ihren Bögen und Centriwinkeln?**

I. Zu gleichen Centriwinkeln gehören nicht nur gleiche Bögen (Fr. 54 III.), ſondern auch gleiche Sehnen desſelben Kreiſes.

Bringt man nämlich die Centriwinkel zum Decken (Fr. 31), ſo fallen die in den Schenkeln und zugleich auf dem Kreiſe liegenden Sehnenendpunkte auf einander, und die Sehnen decken ſich (Fr. 22 III.).

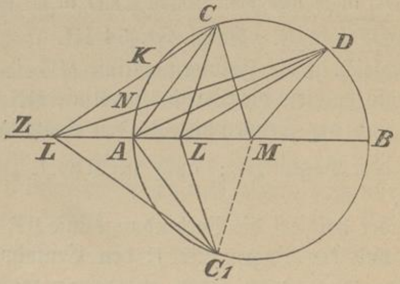

Fig. 82.

II. Zu gleichen Bögen desſelben Kreiſes gehören daher nicht nur gleiche Centriwinkel (Fr. 54 III.), ſondern auch gleiche Sehnen.

III. Legt man zwei gleiche Sehnen DC (Fig. 81) desſelben Kreiſes ſo auf einander (Fr. 22 V.), daß die Mittelpunkte M von den Sehnen DC aus nach derſelben Seite hin liegen, ſo fallen die Mittelpunkte nicht bloß beide in die auf der Sehne DC in deren Mitte N errichtete Senkrechte EF (Fr. 90 X.), ſondern die Mittelpunkte müſſen nach Fr. 74 X. (oder wegen Fr. 77 IX.) auch auf einander fallen.

IV. Daher ſind die zu gleichen Sehnen desſelben Kreiſes gehörigen Bögen, Segmente, Sectoren und Centriwinkel entweder gleich, oder ſie ergänzen ſich zum ganzen Kreis (360°), wie $\overset{\frown}{DEC}$ und $\overset{\frown}{DFC}$.

V. Die zu gleichen Sehnen desſelben Kreiſes gehörenden hohlen Centriwinkel ſind ſtets gleich (IV.).

VI. Zieht man von einem Punkte A (Fig. 82) des Kreiſes zwei Sehnen AC und AD nach zwei Punkten C und D, welche auf derſelben Seite des Durchmeſſers AB liegen, ſo iſt diejenige Sehne AD die größere, welche zum größern Bogen $\overset{\frown}{AD}$, zum größern Centriwinkel DMA gehört, mit der Verlängerung AZ des Durchmeſſers BA den größern Winkel DAZ einſchließt.

Iſt nämlich $\angle DAZ > \angle CAZ$, ſo liegt D zwiſchen C und B, es iſt alſo $\overset{\frown}{AD} > \overset{\frown}{AC}$ und deshalb $\angle DMA > \angle CMA$.

Daher muß aber in den beiden Dreiecken DMA und CMA (nach Fr. 78 II.) $DA > CA$ ſein.

VII. Macht man auf der andern Seite des Durchmeſſers AB den Bogen $\overset{\frown}{AC_1} = \overset{\frown}{AC}$, oder $\angle C_1MA = \angle CMA$, oder $\angle C_1AZ = \angle CAZ$, ſo iſt $\triangle C_1MA \cong \triangle CMA$ (Fr. 80 II.) und daher auch die Sehne $AC_1 = AC$ (Fr. 67 II.).

VIII. Alſo wachſen die von demſelben Punkte A des Kreiſes auslaufenden Sehnen mit den Bögen und Centriwinkeln, bis dieſe 180° betragen; während dann die Bögen und Centriwinkel von 180° bis 360° wachſen, nehmen die Sehnen in derſelben Weiſe wieder ab. Demnach

IX. laſſen ſich von einem Punkte A des Kreiſes aus nicht mehr als zwei unter ſich gleiche Sehnen ziehen, und dieſe liegen auf verſchiedenen Seiten des Durchmeſſers AB. Vergl. XII.

X. Jede Sehne iſt kleiner als der Durchmeſſer (VIII.).

XI. Der zu einer Sehne desſelben Kreiſes gehörige, 180° nicht übertreffende Bogen und Centriwinkel iſt um ſo größer, je größer die Sehne iſt.

XII. Iſt dagegen der Bogen oder Centriwinkel größer als 180°, ſo iſt er um ſo kleiner, je größer die Sehne iſt.

XIII. Zieht man von einem in einem Halbmeſſer AM, oder in deſſen Verlängerung AZ gelegenen Punkte L (Fig. 82) zwei Strecken LC und LD nach zwei auf derſelben Seite des Durchmeſſers AB liegenden Punkten C und D, ſo iſt wiederum (VI.) nach Fr. 78 II. diejenige Strecke LD die größere, welche zu dem größern Bogen $\widehat{AD}$, der größern Sehne $\overline{AD}$, dem größern Centriwinkel DML gehört.

LD wächſt für den innerhalb liegenden Punkt L auch mit dem $\angle DLZ$, für den außerhalb liegenden Punkt L dagegen nicht ſchon von A aus, ſondern erſt von derjenigen Lage ab, in welcher DL den Kreis berührt.

XIV. Macht man auf der andern Seite des Durchmeſſers AB den Bogen $\widehat{AC_1} = \widehat{AC}$, oder die Sehne $\overline{AC_1} = \overline{AC}$, oder $\angle C_1MA = \angle CMA$, oder $\angle C_1LZ = \angle CLZ$, ſo iſt $\triangle C_1ML \cong \triangle CML$ (Fr. 80 II.), und daher auch die Strecke $LC_1 = LC$ (Fr. 67 II.).

XV. Auch die von einem Punkte L (innerhalb, oder außerhalb des Kreiſes) nach Kreispunkten gezogenen Strecken wachſen erſt und nehmen dann wieder ab, wenn der Kreispunkt von A aus den ganzen Kreis durchläuft.

XVI. Dabei iſt LA die kleinſte und LB die größte Strecke für jeden Punkt L; beide Strecken liegen in dem durch L gehenden Durchmeſſer AB.

XVII. Auch von L (Fig. 82) aus laſſen ſich nicht mehr als zwei gleiche Strecken an den Kreis ziehen.

XVIII. Umgekehrt iſt in Fig. 82 $\overline{AD} > \overline{AC}$, $\widehat{AD} > \widehat{AC}$, $\angle DML > \angle CML$ und $\angle DLZ > \angle CLZ$, ſobald $\overline{LD} > \overline{LC}$, wobei jedoch D und C auf derſelben Seite des Durchmeſſers AB liegen müſſen und, falls L außerhalb liegt, zwiſchen B und dem Berührungspunkte der von L ausgezogenen Tangente.

XIX. Von keinem Punkte in der Ebene eines Kreiſes, außer vom Mittelpunkte, laſſen ſich daher (wegen IX. und XVII.) mehr als zwei gleichlange Strecken nach dem Kreiſe ziehen.

**92. Wie hängt die Größe der Sehnen desſelben Kreiſes von deren Entfernung vom Mittelpunkte ab?**

I. Gleichweit vom Mittelpunkte abſtehende Sehnen ſind gleich.

Denn wenn man die durch ihre Mitten gelegten Halbmeſſer aufeinanderlegt (Fr. 22 V.), ſo fallen die Mitten auf einander (Fr. 22 V.), und die Sehnen ſelbſt decken ſich (Fr. 57 III.).

II. Die dem Mittelpunkte nähere Sehne eines Kreiſes iſt größer als die entferntere.

Legt man die beiden Sehnen AB und KS (Fig. 83) mit ihren Mitten N und V auf denſelben Halbmeſſer ME, ſo werden die Sehnen beide auf ME ſenkrecht (Fr. 90 V.), demnach parallel (Fr. 57 II.). Daher liegen die Endpunkte B und A der näheren Sehne von E aus jenſeit der Endpunkte K und S der entfernteren Sehne (Fr. 26), ſo daß

$$\angle BMA > \angle SMK \text{ (Fr. 20 III.)}$$

und

$$BA > SK \text{ (Fr. 91 VI.).}$$

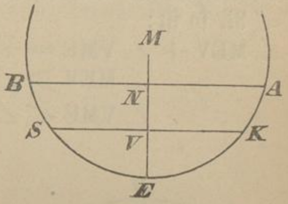

Fig. 83.

III. Auch hier erſcheint wieder (vergl. Fr. 91 X.) der Durchmeſſer, deſſen Entfernung vom Mittelpunkt ja = 0 iſt, als die größte Sehne.

IV. Gleiche Sehnen ſind gleichweit vom Mittelpunkte entfernt; denn ſonſt müßten ſie nach II. ungleich ſein.

V. Die größere Sehne eines Kreiſes iſt dem Mittelpunkte näher als die kleinere. Denn wegen II. kann die entferntere nicht größer und wegen IV. nicht eben ſo groß ſein wie die nähere.

93. **Wenn halbieren ſich zwei Sehnen desſelben Kreiſes?**

Nie; denn zieht man durch die Mitte E (Fig. 84) einer Sehne AB den Durchmeſſer DC und eine Sehne LQ, ſo iſt

$$\overset{\frown}{CA} > \overset{\frown}{CL}; \quad \overset{\frown}{CQ} > \overset{\frown}{CB} \text{ (Fr. 20 III.)}$$

$$EA > EL; \quad EQ > EB \text{ (Fr. 91 XIII.)}$$

$$EA = EB \text{ Konſtr.}$$

$$EQ > EB > EL \text{ (Fr. 20 IV. und VII.).}$$

Wohl aber halbieren ſich alle Durchmeſſer (Fr. 48 II.).

94. **Wie wachſen die durch denſelben Punkt gehenden Sehnen desſelben Kreiſes?**

I. Fällt man vom Mittelpunkte M (Fig. 84) auf zwei durch den Schnittpunkt E einer Sehne BA und des auf BA ſenkrechten Durchmeſſers CD gelegte Sehnen QL und KF die Senkrechten MV und MU, und iſt dabei $\angle DEK < \angle DEQ < R$, ſo iſt:

$$\angle MEV + \angle VME = \angle MEU + \angle UME \text{ (Fr. 71 II.)}$$

$$\angle MEV > \angle MEU \text{ (Fr. 20 III.)}$$

$$\angle VME < \angle UME \text{ (Fr. 20 IX.).}$$

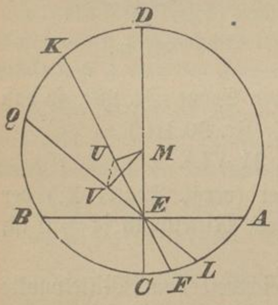

Fig. 84.

Da ſomit EK von MV in einem zwiſchen E und U gelegenen Punkte geſchnitten wird, iſt das Dreieck MUV bei U ſtumpfwinkelig (Fr. 37 II.), daher

$$MV > MU \text{ (Fr. 74 VIII.)}$$

und $FK > LQ$ (Fr. 92 II.).

II. Die durch E gezogenen Sehnen werden um ſo größer, je mehr ſie ſich von der zum Durchmeſſer ſenkrechten Lage AB der Lage des Durchmeſſers CD nähern (I.).

III. Der Durchmeſſer CD iſt die größte, BA die kleinſte Sehne, welche ſich durch E ziehen läßt (II.). Vergl. Fr. 92 III.

IV. Rückt E nach C, ſo führt II. auf Fr. 91 VI. zurück.

V. Daß der Satz II. auch noch gilt, wenn E außerhalb des Kreiſes rückt, läßt ſich entweder auf dieſelbe Weiſe, oder auch aus Fr. 91 XIII. beweiſen, da ja in Fig. 82 $ND = LD - LN > LC - LK = KC$ iſt (Fr. 20 X.).

**95. Was iſt ein Peripherie-, Sehnen- und Secantenwinkel?**

I. Umfangswinkel oder Peripheriewinkel heißt ein Winkel CAB (Fig. 85), deſſen Scheitel A im Umfange liegt und deſſen Schenkel CA und BA Sehnen ſind.

II. Die Schenkel AE und DE eines Sehnenwinkels AED ſind Teile von Sehnen, die Schenkel AF und DF eines Secantenwinkels AFD ſind Secanten, und zwar liegt der Scheitel F des letztern außerhalb, dagegen der Scheitel E des erſtern innerhalb des Kreiſes.

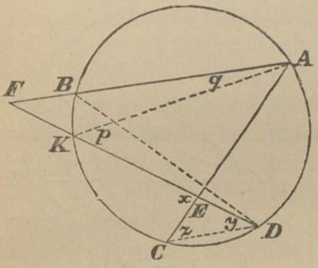

Fig. 85.

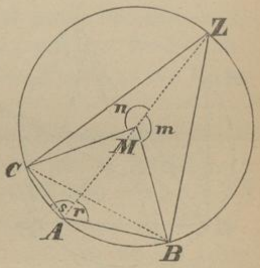

Fig. 86.

**96. Nach welchen Geſetzen hängt die Größe eines Peripheriewinkels von dem zu ihm gehörigen Centriwinkel und Bogen ab?**

I. Jeder Peripheriewinkel iſt halb ſo groß, als der über demſelben Bogen ſtehende Centriwinkel.

1. Iſt zunächſt der Centriwinkel AMZ, Fig. 86, ein flacher, ſo iſt:

$$\left.\begin{array}{l}\angle MBA = \angle MAB \\ \angle MBZ = \angle MZB\end{array}\right\} \text{(Fr. 48 III., 74 I.)}$$

$$\begin{aligned}\angle ABZ &= \angle MBA + \angle MBZ \\ &= \angle MAB + \angle MZB \text{ (Fr. 20 II., VIII.)}\end{aligned}$$

$$\angle ABZ = 90^\circ = \tfrac{1}{2} \angle AMZ \text{ (Fr. 71 III., 39 II.).}$$

2. Iſt ferner der Centriwinkel BMC = m + n überſtumpf, ſo zerlegt der Durchmeſſer AMZ (Fig. 86) ihn und den Peripheriewinkel BAC in zwei Teile, und aus:

$$\left.\begin{array}{l}\angle m = \angle r + \angle MBA = 2 \angle r \\ \angle n = \angle s + \angle MCA = 2 \angle s\end{array}\right\} \text{(Fr. 69 VI., 74 I.)}$$

erhält man dann durch Addition nach Fr. 20 VIII.

$$\angle (m + n) = 2 \angle (r + s).$$

3. Iſt endlich der Centriwinkel BMC (Fig. 87) ein hohler, ſo kann der Mittelpunkt M entweder auf einem Schenkel des Peripheriewinkels, oder zwiſchen deſſen Schenkeln, oder außerhalb derſelben liegen.

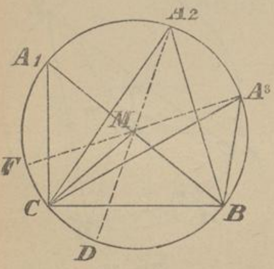

Fig. 87.

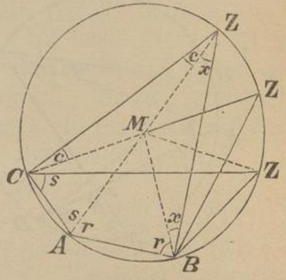

Fig. 88.

a) Im erſtern Falle iſt $\angle BMC = \angle MA_1C + \angle MCA_1$ (Fr. 69 VI.); nun iſt $\angle MA_1C = \angle MCA_1$ (Fr. 48 III., 74 I.) und demnach $\angle BMC = 2 \angle MA_1C$.

b) Zieht man ferner im zweiten Falle den Durchmeſſer $A_2D$, ſo iſt (wie eben bewieſen wurde) $\angle BMD = 2 \angle BA_2D$ und $\angle CMD = 2 \angle CA_2D$, woraus man durch Addition nach

Fr. 20 VIII. erhält: $\angle BMC = 2 \angle BA_2D + 2 \angle CA_2D = 2 \angle (BA_2D + CA_2D) = 2 \angle BA_2C$.

c) Im dritten Falle ziehe man den Durchmeſſer $A_3F$ und findet dann aus 3a): $\angle BMC = \angle BMF - \angle FMC = 2 \angle BA_3F - 2 \angle FA_3C = 2 \angle (BA_3F - FA_3C) = 2 \angle BA_3C$.

II. Alle Peripheriewinkel in demſelben Kreisabſchnitt, oder *über gleichen Bögen* desſelben Kreiſes ſind gleich; denn jeder gleicht ja der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

III. Jeder Peripheriewinkel über oder in dem Halbkreiſe iſt = 90°, da der zugehörige Centriwinkel ein flacher iſt.

IV. Jeder Peripheriewinkel im größern Abſchnitte iſt kleiner, jeder im kleinern Abſchnitte größer als 90°, weil der zugehörige Centriwinkel im erſtern Falle hohl, im andern überſtumpf iſt.

V. Deshalb ſteht jeder Peripheriewinkel von 90° auf einem Halbkreiſe (III. und IV.) oder über einem Durchmeſſer; ferner

VI. muß der Mittelpunkt M eines durch den Scheitel B (Fig. 88) eines *rechten* Winkels ABZ gelegten, die Schenkel dieſes Winkels in A und Z ſchneidenden Kreiſes in der Mitte der Strecke AZ liegen und ebenſo

VII. muß ein über der Hypotenuſe AZ eines rechtwinkligen Dreiecks ABZ aus der Hypotenuſenmitte M geſchlagener Kreis durch den Scheitel B des rechten Winkels gehen. Denn läge B nicht auf dem Kreiſe, ſo müßte (wegen Fr. 77 IV. und 96 IV., aber im Widerſpruch mit Fr. 96 III.) der Winkel im Halbkreiſe über AZ von 90° verſchieden ſein.

VIII. Zwei Peripheriewinkel BAC und BZC (Fig. 88) über derſelben Sehne BC in entgegengeſetzten Abſchnitten desſelben Kreiſes (oder *zwei Gegenwinkel in einem Kreis- oder Sehnenviereck* ABZC) geben nach I. als Summe 180°, weil die Summe der zugehörigen Centriwinkel 360° beträgt. Vergl. Fr. 133 IV.

*Anm.* Man könnte zuerſt auch den Satz VIII. mit Hilfe von Fig. 88 aus Fr. 74 I. und 72 III. beweiſen und daraus dann die Sätze II., III. und I.

IX. Nach III. bis IV. läßt ſich der Kreis als der geometriſche Ort (vergl. Fr. 74 XVII.) des Scheitels eines über der Strecke AZ zu zeichnenden rechten Winkels auffaſſen. Vergl. auch Fr. 98 III.

**97. Welche Beziehungen beſtehen zwiſchen den Sehnen- und Secantenwinkeln und den Peripheriewinkeln?**

I. Jeder Sehnenwinkel x, Fig. 89, iſt größer als der über ſeinem Bogen $\widehat{CK}$ ſtehende Peripheriewinkel y, und zwar gleich der Summe (y + z) der beiden Peripheriewinkel y und z, welche über den zu ihm und zu ſeinem Scheitelwinkel gehörigen Bögen $\widehat{CK}$ und $\widehat{DA}$ ſtehen (Fr. 69 VI. und 96 II.).

II. Jeder Secantenwinkel F iſt kleiner als der über ſeinem Bogen $\widehat{DA}$ ſtehende Peripheriewinkel p, und zwar (nach Fr. 69 VI. und 96 II.) gleich der Differenz (p—q) der Peripheriewinkel p und q, welche über den zwiſchen ſeinen Schenkeln liegenden Bögen $\widehat{DA}$ und $\widehat{BK}$ ſtehen. Nach Fr. 69 VI. iſt nämlich $F + q = p$, und dies geht in $F = p - q$ über, wenn man (nach Fr. 20 VIII.) beiderſeits q ſubtrahiert.

III. Beträgt in einem Viereck ABZC (Fig. 88) die Summe zweier Gegenwinkel A und Z 180°, ſo läßt ſich um das Viereck ein Kreis beſchreiben. Ginge nämlich der nach Fr. 88 I. durch A, B und C gelegte Kreis nicht durch Z, ſo würde ∠ Z als Sehnenwinkel, oder als Secantenwinkel nach Fr. 97 I., bezw. II. entweder größer, oder kleiner als 180° — A ſein müſſen.

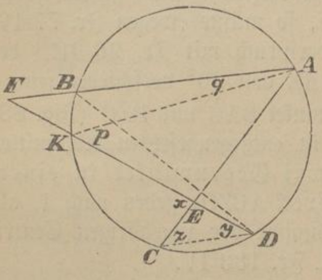

Fig. 89.

IV. Wie beweiſt man aus Fr. 91 II., daß in jedem Sehnentrapez die nicht parallelen Seiten gleich ſein müſſen?

**98. Wie wachſen die Peripheriewinkel mit ihren Sehnen?**

I. Ein ſpitzer Peripheriewinkel in demſelben Kreiſe iſt (wegen Fr. 96 I.) um ſo größer, ein ſtumpfer aber um ſo kleiner, je größer die zugehörige Sehne iſt, weil ja nach Fr. 91 XI. und XII. der zugehörige Centriwinkel im erſteren Falle mit der Sehne wächſt, im zweiten abnimmt.

II. Aus Fr. 91 V. folgt, daß zwei zu gleichen Sehnen desſelben Kreiſes gehörende ſpitze Peripheriewinkel unter ſich gleich ſind, und ebenſo zwei ſtumpfe.

III. Die Scheitel gleicher Winkel über derſelben Strecke CB (Fig. 87) und auf derſelben Seite dieſer Strecke liegen auf einem durch die Endpunkte der Strecke gehenden Kreiſe (Fr. 96 I., 97 I. und II.). Vergl. Fr. 96 VIII. und IX.

IV. Zu gleichen Peripheriewinkeln desſelben Kreiſes gehören (wegen I.) gleiche Sehnen.

V. Sind zwei Peripheriewinkel desſelben Kreiſes ungleich, ſo gehört zu dem größeren eine größere Sehne, falls die beiden Winkel ſpitz ſind, dagegen eine kleinere Sehne, falls die beiden Winkel ſtumpf ſind (II. und I.).

VI. Ein ſpitzer und ein ſtumpfer Peripheriewinkel desſelben Kreiſes beſitzen nach IV. gleiche Sehnen, wenn ſie ſich zu 180° ergänzen. Denn nach Fr. 96 VIII. iſt ja der über der Sehne des ſpitzen Winkels w im kleineren Kreisabſchnitte liegende Peripheriewinkel $w' = 180° - w$.

VII. Will man über einer Strecke CB, Fig. 87 S. 94, einen Kreis beſchreiben, in welchem der Peripheriewinkel über CB eine beſtimmte Größe A beſitzt, ſo kann man zunächſt für Fr. 89 II. einen dritten Punkt A des Kreiſes beſtimmen (Fr. 62 IV.), indem man an CB zwei Winkel BCA und CBA anträgt, deren Summe $= 180° - A$ iſt.

Auch würde die auf CB in deren Mitte errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt M des geſuchten Kreiſes gehen

(Fr. 90 X.) und in M geſchnitten werden von einer Geraden $BA_1$, welche mit CB einen $\angle CBA_1 = 90° - \angle A$ macht; denn dann iſt ja $\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle CMB = 90° - \angle CBA_1 = \angle A$.

### 99. Welche Sätze gelten über parallele Sehnen?

I. Verbindet man die Endpunkte der beiden parallelen Sehnen DC und LK (Fig. 90) durch die vier Sehnen LC, LD, DK und CK, ſo folgt aus der Gleichheit der Winkel u und v (Fr. 62 I. 2.), daß zunächſt $\overline{CK} = \overline{DL}$ (Fr. 98 IV.), und deshalb auch $\widehat{CK} = \widehat{DL}$ iſt (Fr. 91 IV.), weil die Summe dieſer Bögen $< 360°$ iſt.

Dann iſt aber weiter auch $\widehat{CKL} = \widehat{DLK}$ (Fr. 20 VIII.) und $\overline{CL} = \overline{DK}$ (Fr. 91 II.).

II. Die zwiſchen zwei parallelen Sehnen DC und LK liegenden Bögen ſind alſo gleichgroß; ebenſo paarweiſe die vier ihre vier Endpunkte verbindenden Sehnen.

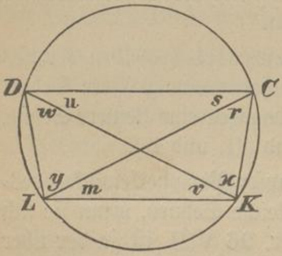

Fig. 90.

III. In Fig. 90 iſt aber nicht bloß $\angle u = \angle m$ und $\angle s = \angle v$ (Fr. 96 II.), ſondern auch $\angle u = \angle v$ und $\angle s = \angle m$ (Fr. 62 I. 2.), und demnach wegen Fr. 20 V.:

$$\angle u = \angle m = \angle s$$

und

$$\angle m = \angle s = \angle v.$$

Da aber weiter $\angle r = \angle w$ und $\angle x = \angle y$ (Fr. 96 II.), ſo iſt nach Fr. 20 VIII. auch:

$$\angle (r + s) = \angle (w + u) \quad \text{und}$$
$$\angle (x + v) = \angle (y + m).$$

IV. Jede der parallelen Sehnen DC und LK macht alſo mit den von ihren beiden Endpunkten auslaufenden Sehnen CL und DK, CK und DL paarweiſe gleiche Winkel (III.).

V. Sind umgekehrt die beiden ſich innerhalb des Kreiſes nicht ſchneidenden Sehnen $\overline{CK}$ und $\overline{DL}$ (Fig. 90) und deshalb (nach Fr. 91 IV.) auch die zu denſelben gehörigen, 180° nicht erreichenden Bögen $\overset{\frown}{CK}$ und $\overset{\frown}{DL}$ gleichgroß, ſo iſt $\angle s = \angle u$ (Fr. 98 II.); da aber auch $\angle s = \angle v$ (Fr. 96 II.), ſo iſt nach Fr. 20 V. auch $\angle u = \angle v$, und daraus folgt, daß DC // LK iſt (Fr. 62 II.).

Anm. Sind die innerhalb des Kreiſes ſich ſchneidenden Sehnen DK und LC gleich, ſo iſt nicht immer DC // LK, ſondern nur, wenn DK und LC ſich im Mittelpunkte ſchneiden, oder wenn $\overset{\frown}{DC} \gtrless \overset{\frown}{LK}$. Nach Fr. 91 VII. laſſen ſich ja, ſofern DK nicht ein Durchmeſſer iſt, von L aus zwei Sehnen $LC_1$ und $LC_2$ ziehen, welche = DK ſind.

VI. Der Satz II. hört nicht auf zu gelten, wenn die eine Sehne LK zur Tangente wird (Fig. 91).

Dann ſteht der Halbmeſſer ME nach dem Berührungspunkte E ſowohl auf der Tangente LK (Fr. 83 X.), als auf der Sehne DC (Fr. 62 V.) ſenkrecht; deshalb iſt $\angle p = \angle q$ (Fr. 90 VII.) und wegen Fr. 54 III. und 91 I. auch:

$$\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{DE} \quad \text{und} \quad \overline{CE} = \overline{DE}.$$

VII. Wäre in Fig. 90 auch noch DL // CK, ſo wäre auch $\angle w = \angle x = \angle y = \angle r$ (III.). Das Viereck DCKL beſäße dann vier rechte Winkel (Fr. 71 III.), es wäre auch $\overline{DC} = \overline{LK}$ und die beiden Diagonalen DK und CL ſchnitten ſich im Mittelpunkte des Kreiſes.

**100. Welche Neigung hat eine Tangente LK gegen eine durch den Berührungspunkt E gehende Sehne ED?**

I. Zieht man in Fig. 91 durch den Endpunkt D der Sehne ED die Sehne DC // LK, ſo wird $\angle u = \angle n$ (Fr. 62 I.); weil aber nach Fr. 99 VI. CE = ED, ſo iſt auch $\angle u = \angle s$ (Fr. 74 I.), und nun weiter $\angle n = \angle s$, d. h.

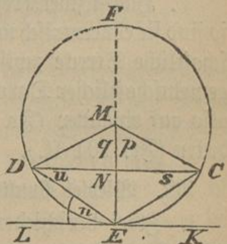

Fig. 91.

der ſpitze Winkel n zwiſchen Tangente KEL und Sehne ED gleicht dem über der Sehne ſtehenden ſpitzen Peripheriewinkel s.

II. Dasſelbe gilt auch von den beiden ſtumpfen Winkeln, weil $\angle$ KED = 180° — n (Fr. 39 IV.), der ſtumpfe Peripheriewinkel im kleineren Abſchnitte über ED aber 180° — s iſt (Fr. 96 VIII.).

### 101. Wenn ſind Kreiſe concentriſch und wenn excentriſch?

I. Haben zwei Kreiſe $K_1$ und $K_2$ (Fig. 92) in derſelben Ebene einen gemeinſchaftlichen Mittelpunkt M, ſo heißen ſie concentriſche Kreiſe.

II. Zwei concentriſche Kreiſe haben entweder alle, oder keinen Punkt gemein, jenachdem ſie gleiche, oder ungleiche Halbmeſſer haben (Fr. 49 I. und III.). Vergl. auch Fr. 82.

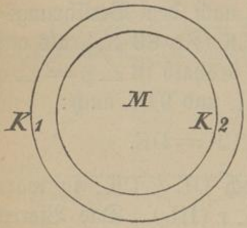

Fig. 92.

III. Zwei Kreiſe in derſelben Ebene, deren Mittelpunkte $M_1$ und $M_2$ nicht zuſammenfallen, heißen excentriſche Kreiſe; die durch die Mittelpunkte gehende Gerade heißt die Centrale, die Verbindungsſtrecke $M_1M_2 = c$ der Mittelpunkte die Centralſtrecke.

IV. Die Centrale ſchneidet jeden Kreis in einem Durchmeſſer.

V. Haben zwei Kreiſe zwei Punkte ihrer Centralen gemein, ſo ſind ſie concentriſch und auch gleich. Denn die ihnen gemeinſchaftliche Strecke zwiſchen dieſen beiden Punkten wäre ein gemeinſchaftlicher Durchmeſſer (IV.), ihre Mittelpunkte fielen alſo auf einander (Fr. 48 II.) und die Kreiſe müßten ſich decken (Fr. 101 II.).

### 102. Wieviel Punkte haben zwei excentriſche Kreiſe gemein?

I. Zwei verſchiedene Kreiſe können nicht mehr als zwei Punkte gemein haben, da ſich nach Fr. 88 III. durch drei Punkte nur ein Kreis legen läßt. Vergl. auch Fr. 91 XIX.

II. Zwei excentriſche Kreiſe können nicht zwei Punkte ihrer Centralen gemein haben (Fr. 101 V.).

III. Haben zwei excentriſche Kreiſe einen Punkt P (Fig. 93) außerhalb der Centralen gemein, ſo haben ſie auch noch einen Punkt Q gemein, welcher auf der anderen Seite der Centralen $M_1M_2$ ſo liegt, daß die Strecke PQ durch die Centrale in E ſenkrecht halbiert wird. Iſt nämlich $PQ \perp M_1M_2$ und $EQ = EP$, ſo iſt nach Fr. 74 XI. auch $M_1Q = M_1P$ und $M_2Q = M_2P$, d. h. Q liegt auf beiden Kreiſen (Fr. 82).

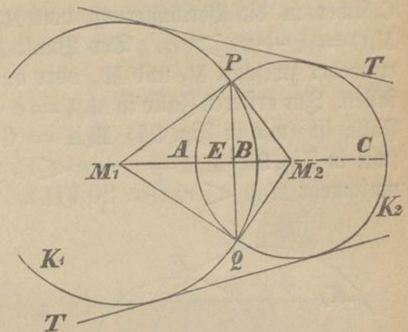

Fig. 93.

IV. Haben zwei excentriſche Kreiſe zwei Punkte gemein, ſo liegen dieſe Punkte außerhalb der Centralen (II.) und zu beiden Seiten derſelben (III.).

V. Haben zwei excentriſche Kreiſe einen Punkt der Centralen gemein, ſo haben ſie überhaupt bloß einen Punkt gemein (I. bis IV.).

VI. Haben zwei Kreiſe in derſelben Ebene bloß einen Punkt gemein, ſo muß dieſer (wegen III.) in der Centralen liegen.

Dann iſt die in jenem Punkte auf der Centralen errichtete Normale eine gemeinſchaftliche Tangente beider Kreiſe (Fr. 83 V.); die Kreiſe haben in jenem Punkte gleiche Richtung (Fr. 85 I.), und man ſagt: ſie berühren ſich.

VII. Iſt die Centralſtrecke $M_1M_2 = c$ größer als die Differenz $r_1 - r_2$, aber kleiner als die Summe $r_1 + r_2$ der beiden Halbmeſſer $M_1P = r_1$ und $M_2P = r_2$, ſo ſchneiden ſich die Kreiſe in zwei Punkten.

Da $r_1 + r_2 > c > r_1 - r_2$ ſein ſoll, wobei $r_1 \geqq r_2$ vorausgeſetzt werde, ſo erhält man durch Addition und durch Subtraktion von $r_2$ nach Fr. 20 IX. $c + r_2 > r_1$ und $r_1 > c - r_2$. Trägt man nun in der Centralen von $M_2$ (Fig. 93 S. 101) aus nach beiden Seiten hin $M_2A = M_2C = r_2$ auf, ſo fällt C ſicher in die Verlängerung von $M_1M_2$, und es iſt auch $M_1C = c + r_2 > r_1$. Der Punkt A dagegen kann dabei entweder zwiſchen $M_1$ und $M_2$, oder auf $M_1$, oder jenſeits $M_1$ fallen. Im erſteren Falle iſt $M_1A = c - r_2 < r_1$; im zweiten Falle iſt (wie in Fig. 94) $M_1A = 0$; im dritten Falle iſt (wie in Fig. 95) $M_1A = r_2 - c < r_2$, und da $r_2 < r_1$, ſo iſt umſomehr $M_1A < r_1$ (Fr. 20 VII.).

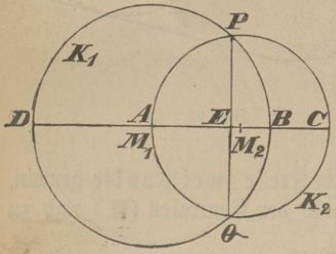

Fig. 94.

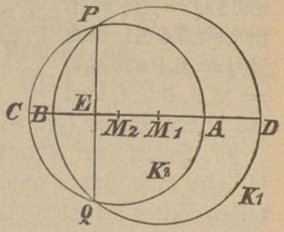

Fig. 95.

Somit liegt von den beiden Punkten A und C, welche $K_2$ mit der Centralen gemein hat, ſtets der eine A innerhalb, der andere C außerhalb $K_1$ (Fr. 82).

Daher muß $K_2$ den Kreis $K_1$ in zwei Punkten P und Q ſchneiden (Fr. 28 IV., 102 I.).

VIII. In VII. wird (wie in III.) die gemeinſchaftliche Sehne PQ, Fig. 93 bis 95, der beiden ſich ſchneidenden Kreiſe von der Centralſtrecke $M_1M_2$ in E ſenkrecht halbiert (Fr. 74 XVII.).

IX. Die Centrale halbiert daher auch die beiden Winkel $PM_1Q$ und $PM_2Q$ (Fr. 90 V.).

X. Die Sätze VIII. und IX. ließen ſich auch aus der Kongruenz der Dreiecke $M_1PM_2$ und $M_1QM_2$, $M_1PE$ und $M_1QE$, $M_2PE$ und $M_2QE$ herleiten.

XI. Sind (wie in Fig. 96) in VII. die beiden Halbmeſſer gleich, $r_1 = r_2$, ſo laſſen ſich auch aus P und Q Kreiſe durch $M_1$ und $M_2$ legen (Fr. 82), und deshalb wird dann auch $M_1M_2$ in E von der gemeinſchaftlichen Sehne PQ halbiert.

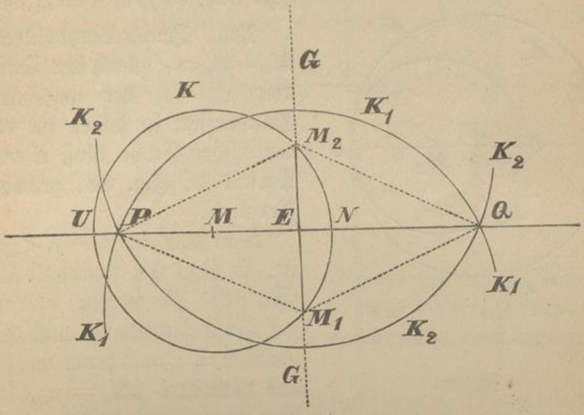

Fig. 96.

XII. Läßt man in Fig. 93 bis 95 den Mittelpunkt $M_2$ des Kreiſes $K_2$ auf den Punkt B des Kreiſes $K_1$ rücken, ſo werden $M_2P$ und $M_2Q$ Sehnen des Kreiſes $K_1$. Die Figur zeigt dann die Löſung der Aufgabe: eine Sehne von beſtimmter Länge in einen Kreis einzutragen. Vergl. IX.

XIII. Iſt die Centralſtrecke $M_1M_2 = c$ gleich der Summe $r_1 + r_2$ der Halbmeſſer, ſo haben die excentriſchen Kreiſe *bloß einen Punkt* A, Fig. 97, gemein. Vergl. V.

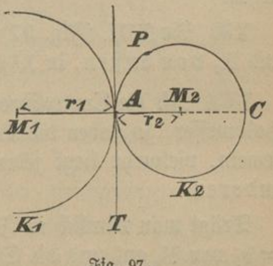

Fig. 97.

Macht man auf der Centralen von $M_1$ nach $M_2$ hin $M_1A = r_1$, ſo wird $AM_2 = M_1M_2 - M_1A = (r_1 + r_2) - r_1 = r_2$. A liegt alſo auf beiden Kreiſen. Da nun aber $c = r_1 + r_2$ iſt (Vor.) und deshalb $M_1$ außerhalb $K_2$ liegt (Fr. 82), ſo iſt nach Fr. 91 XV. und XVI. jeder Punkt P des Kreiſes $K_2$ weiter, als A, von $M_1$ entfernt und liegt demnach außerhalb $K_1$ (Fr. 82), da ja $M_1A = r_1$ war.

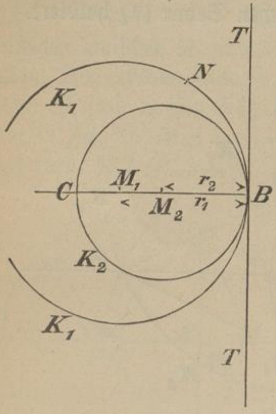

Fig. 98.

XIV. Iſt die Centralſtrecke $M_1 - M_2 = c$ gleich der Differenz $r_1 - r_2$ der ungleichen Halbmeſſer, ſo haben die excentriſchen Kreiſe *bloß einen Punkt* B, Fig. 98, gemein. Vergl. V.

Weil $M_1M_2 = r_1 - r_2 < r_1$ iſt, ſo liegt $M_2$ innerhalb $K_1$ (Fr. 82). Macht man nun in der Centralen von $M_1$ nach $M_2$ hin $M_1B = r_1$ und dann von B aus rückwärts $BM_2 = r_2$, ſo liegt B auf den beiden, aus $M_1$ und $M_2$ mit den Halbmeſſern $r_1$ und $r_2$ geſchlagenen Kreiſen. Unter allen Punkten in $K_1$ liegt aber B am nächſten an $M_2$ (Fr. 91 XV. und XVI.); weil nun B auf $K_2$ liegt, ſo müſſen alle anderen Punkte (z. B. N) des Kreiſes $K_1$ außerhalb $K_2$ liegen.

XV. In XIII. (Fig. 97) *berühren* ſich die Kreiſe $K_1$ und $K_2$ *von außen*, in XIV. (Fig. 98) *von innen*.

XVI. Iſt die Centralſtrecke c größer als die Summe der Halbmeſſer, ſo haben die Kreiſe $K_1$ und $K_2$ *keinen Punkt* gemein, vielmehr liegt jeder Kreis ganz *außerhalb des anderen*.

Trägt man nämlich in Fig. 99 auf $M_1M_2$ die Strecke $M_2A = r_2$ von $M_2$ aus und die Strecke $M_1B = r_1$ von $M_1$ aus auf, ſo liegt der Punkt B von A aus nach $M_1$ hin um das Stück AB entfernt, um welches $M_1M_2 = c$ die Summe $r_1 + r_2$ übertrifft. A liegt alſo außerhalb $K_1$; jeder andere Punkt P von $K_2$ iſt aber noch weiter von $M_1$ entfernt, wie A (Fr. 91 XV. und XVI.), liegt alſo ebenfalls außer $K_1$.

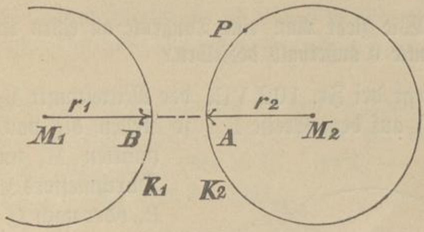

Fig. 99.

XVII. Iſt die Centralſtrecke c kleiner als die Differenz der ungleichen Halbmeſſer $r_1 > r_2$, ſo haben die Kreiſe keinen Punkt gemein, vielmehr liegt der eine Kreis $K_2$ ganz innerhalb des anderen $K_1$.

Da $c = M_1M_2 < r_1 - r_2$ und deshalb $M_1M_2 + r_2 < r_1$ (Fr. 20 IX.) iſt, ſo liegt $M_2$ innerhalb $K_1$ (Fr. 82). Verlängert man nun in Fig. 100 $M_1M_2$ um $M_2C = r_2$, ſo liegt C auf $K_2$; da $M_1C = M_1M_2 + r_2 < r_1$, liegt auch C innerhalb $K_1$; alle anderen Punkte (z. B. N) des Kreiſes $K_2$ liegen aber wegen Fr. 91 XV. und XVI. noch näher an $M_1$, als C, und liegen deshalb ebenfalls innerhalb $K_1$. Ob $K_2$ die Centrale zum zweiten Male zwiſchen $M_2$ und $M_1$, oder jenſeits $M_1$ ſchneidet, iſt dabei gleichgültig.

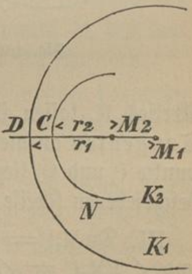

Fig. 100.

XVIII. Aus XI. gelangt man zu noch einer Löſung der in Fr. 89 geſtellten Aufgabe. Schlägt man nämlich aus zwei beliebigen Punkten $M_1$ und $M_2$ des Kreiſes K, Fig. 96, mit demſelben Halbmeſſer $r_1 = M_1Q = M_2Q = r_2$ zwei Kreiſe $K_1$ und $K_2$, welche ſich in zwei Punkten P und Q ſchneiden (VII.), dann halbiert PQ die Sehne $M_1M_2$ von K ſenkrecht in E (XI.); deshalb geht PQ durch den Mittelpunkt M von K (Fr. 90 X.) und M liegt in der Mitte des Durchmeſſers UN (Fr. 48 II.).

**103. Wie zieht man eine Tangente an einen Kreis $K_1$ von einem Punkte C außerhalb desſelben?**

I. Liegt bei Fr. 102 VII. der Mittelpunkt $M_1$ (Fig. 94 und 101) auf dem Kreiſe $K_2$, ſo ſtehen die von den Endpunkten $M_1$ und C des Durchmeſſers $M_1M_2C$ nach P, oder nach Q gezogenen Sehnen auf einander ſenkrecht (Fr. 96 III.); daher ſind CP und CQ Tangenten (Fr. 83 V.) an den Kreis $K_1$ in den Endpunkten P und Q der den beiden Kreiſen gemeinſchaftlichen Sehne PQ.

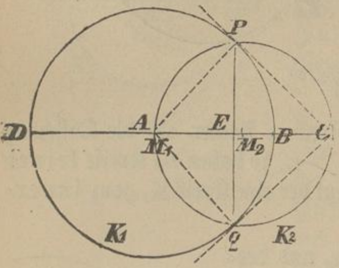

Fig. 101.

II. Von jedem Punkte C außerhalb eines Kreiſes $K_1$ laſſen ſich daher ſtets zwei, aber nur zwei Tangenten an dieſen Kreis ziehen (I.). Die Berührungspunkte P und Q liegen auf dem über $CM_1$ als Durchmeſſer beſchriebenen Kreiſe $K_2$.

III. Da $M_1P = M_1Q$ (Fr. 48 III.), $M_1C = M_1C$ (Fr. 20 I.) und $\angle PM_1C = \angle QM_1C$ (Fr. 102 IX.), ſo iſt $\triangle PM_1C \cong QM_1C$ (Fr. 80 II.), und nach Fr. 54 III. und 67 II. ſind daher nicht nur:

IV. die Bögen $\overset{\frown}{PB}$ und $\overset{\frown}{QB}$, ſowie

V. die Strecken CP und CQ der beiden Tangenten gleichgroß, ſondern letztere machen

VI. auch gleiche Winkel $PCM_1$ und $QCM_1$ mit der Centralen $CM_2M_1$. Daher

VII. liegt der Mittelpunkt $M_1$ eines Kreiſes $K_1$, welcher zwei ſich unter dem hohlen $\angle PCQ$ ſchneidende Gerade PC und QC berührt, in der den $\angle PCQ$ halbierenden Geraden CD, und

VIII. aus jedem Punkte $M_1$ in CD läßt ſich ein Kreis ziehen, welcher CP und CQ berührt (Fr. 74 XVIII. und 83 V.).

IX. Wegen Fr. 71 VI. machen die beiden Tangenten CP und CQ denſelben ſpitzen Winkel mit einander, wie die beiden Halbmeſſer $M_1P$ und $M_1Q$; oder es iſt $\angle PCQ + \angle PM_1Q = 180°$ (Fr. 72 III., oder 96 VIII.).

**104. Welche Sätze gelten von dem Tangentendreieck und dem Tangentenviereck?**

I. Tangentendreieck und Tangentenviereck (Dreieck und Viereck um den Kreis) heißt ein Dreieck, bezw. ein Viereck, deſſen Seiten Tangenten desſelben Kreiſes ſind.

II. Wegen Fr. 103 VI. und VIII. müſſen ſich die drei Halbierungslinien $AM_0$, $BM_0$, $CM_0$ (Fig. 102 S. 108) der Winkel eines Dreiecks ABC in dem Mittelpunkte $M_0$ des dem Dreieck ABC eingeſchriebenen Kreiſes $K_0$ ſchneiden.

III. Es giebt daher zu jedem $\triangle ABC$ einen inneren Berührungskreis $K_0$, welchem das Dreieck umſchrieben iſt. Vergl. XIII.

IV. Es giebt aber zu jedem Dreieck auch noch drei äußere Berührungskreiſe, welche je eine Seite desſelben und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berühren. Die Mittelpunkte $M_1$, $M_2$ und $M_3$ dieſer drei äußeren Berührungskreiſe $K_1$, $K_2$ und $K_3$ (Fig. 102 S. 108) des Dreiecks ABC findet man durch Halbieren der Außenwinkel desſelben (Fr. 103 VII.).

V. Die Centrale von je zwei äußeren Berührungskreiſen läuft deshalb durch einen Eckpunkt des Dreiecks (Fr. 43).

VI. Jeder Eckpunkt des Dreiecks ABC liegt in der Verlängerung einer durch den Mittelpunkt $M_0$ des eingeſchriebenen und den Mittelpunkt eines äußeren Berührungskreiſes gelegten Geraden (Fr. 103 VII.); denn es liegt z. B. ſowohl $M_0$ als $M_2$ auf der den ∠ ABC halbierenden Geraden.

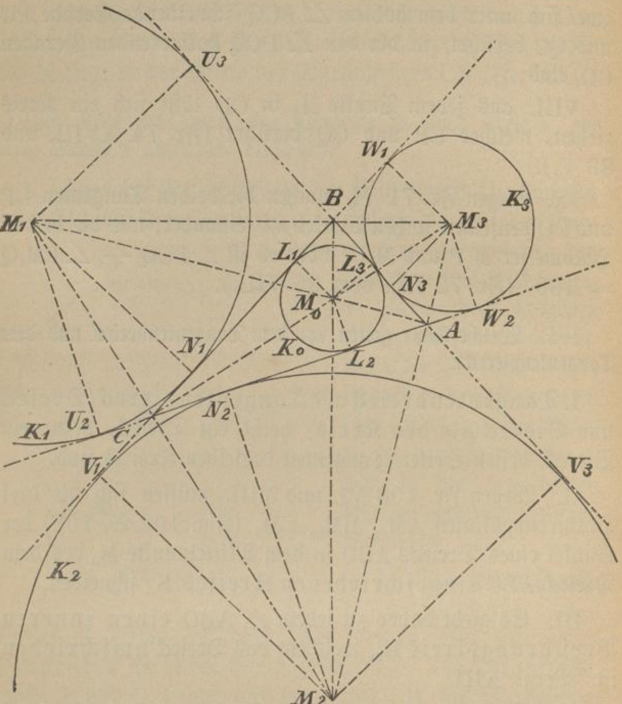

Fig. 102.

VII. Die Seiten des Mittelpunktsdreiecks $M_1 M_2 M_3$ (V.) ſtehen auf den Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks ABC ſenkrecht; denn es iſt z. B. in Fig. 102:

$$\angle M_0AB = \angle M_0AC \text{ (II.)}$$

$$\angle M_3AB = \tfrac{1}{2}\angle W_2AB = \tfrac{1}{2}\angle V_3AC = \angle M_2AC \text{ (IV. und Fr. 42 II.)}$$

$$\angle M_0AM_3 = \angle M_0AB + \angle M_3AB = \angle M_0AC + \angle M_2AC = \angle M_0AM_2 \text{ (Fr. 20 VIII.)}$$

$$M_0A \perp M_3M_2 \text{ (Fr. 37 I. und IV.)}$$

VIII. Mit Hilfe von Fr. 103 V. läßt ſich leicht herausbringen, daß der Eckpunkt B des △ ABC mit den drei Seiten a, b, c von den Berührungspunkten $L_1$, $N_1$, $V_1$, $W_1$ und $L_3$, $U_3$, $V_3$, $N_3$ der Seiten a und c mit den vier Berührungskreiſen abſteht um:

$$BL_1 = b_0 = \tfrac{1}{2}(a - b + c) = BL_3;$$
$$BN_1 = b_1 = \tfrac{1}{2}(a + b - c) = BU_3;$$
$$BV_1 = b_2 = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = BV_3;$$
$$BW_1 = b_3 = \tfrac{1}{2}(-a + b + c) = BN_3.$$

IX. Im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) ſchneiden ſich wegen Fr. 103 VIII. die vier Halbierungslinien der Winkel in dem Mittelpunkte M des Kreiſes, um den es beſchrieben iſt.

X. Im Tangentenviereck ABCD (Fig. 103) iſt die Summe zweier Gegenſeiten gleich der Summe der beiden anderen. Vergl. Fr. 133 V.

Sind nämlich U, V, X u. J die vier Berührungspunkte, ſo iſt:

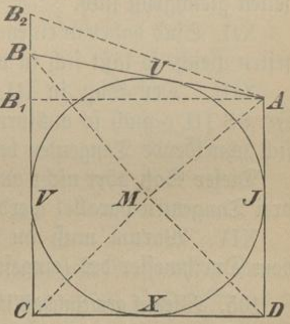

Fig. 103.

$$\left.\begin{aligned} AU &= AJ \\ UB &= BV \\ XC &= VC \\ XD &= JD \end{aligned}\right\} \text{(Fr. 103 V.)}$$

$$\left.\begin{aligned} AU + UB + XC + XD &= AB + CD \\ AJ + JD + BV + VC &= AD + BC \end{aligned}\right\} \text{(Fr. 20 II.)}$$

$$AB + CD = AD + BC \text{ (Fr. 20 VIII. und IV.).}$$

XI. Zieht man im Tangentenvierecke ABCD (Fig. 103) von einem Eckpunkte A die Strecken $AB_1$ und $AB_2$ nach einem Punkte $B_1$ und $B_2$ in einer Gegenſeite BC und in deren Verlängerung, ſo iſt:

$$\begin{aligned} AB_1 &> AB - BB_1 \text{ (Fr. 76 II.)} \\ AB_1 + DC &> AB + DC - BB_1 \text{ (Fr. 20 IX.)} \\ &> AD + CB - BB_1 \text{ (X.)} \\ &> AD + CB_1 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} AB_2 &< AB + BB_2 \\ AB_2 + DC &< AB + DC + BB_2 \\ &< AD + CB + BB_2 \\ &< AD + CB_2. \end{aligned}$$

Die Tangente AB des AD, DC und CB berührenden Kreiſes iſt alſo die einzige Gerade, welche ſich von A nach einem Punkte in CB ziehen läßt und welche zugleich mit AD, DC, CB ein Viereck liefert, worin die Summen der Gegenſeiten gleichgroß ſind.

XII. Sind daher in einem Viereck die Summen der Gegenſeiten gleich, ſo läßt ſich in dasſelbe ein Kreis beſchreiben.

XIII. Der Satz in III. läßt ſich (als Seitenſtück zu Fr. 88 III.) auch ſo ausſprechen: Der Kreis iſt durch drei ſich ſchneidende Tangenten beſtimmt.

Dieſer Satz hört nicht auf zu gelten, wenn zwei von den drei Tangenten parallel werden.

XIV. Warum muß im Tangententrapez die Höhe ſtets dem Durchmeſſer des (eingeſchriebenen) Kreiſes gleichen?

105. **Wieviel gemeinſchaftliche Tangenten beſitzen zwei Kreiſe?**

I. Liegen zwei gleiche Kreiſe außer einander (Fr. 102 XVI.), ſo berühren die zu beiden Seiten der Centralen durch einen im Abſtande eines Halbmeſſers r von der Centralen liegenden Punkt gezogenen Parallelen der Centralen beide Kreiſe (Fr. 74 IX., 72 VII., 83 V.).

II. Liegen zwei ungleiche Kreiſe außer einander (Fr. 102 XVI.), ſo berühren bei $r_1 > r_2$ die beiden Parallelen zu den im Abſtande $r_1 - r_2$ von $M_1$ durch $M_2$ gezogenen Geraden beide Kreiſe.

Iſt nämlich in Fig. 104 $M_1F = r_1 - r_2$ und $\angle M_1LU = \angle M_1FM_2 = 90^\circ$ (Fr. 96 III., Fr. 83 X.), ſo wird die in $M_2$ errichtete Senkrechte auf $M_2F$ auch LU in Z ſenkrecht ſchneiden (Fr. 72 III.) und $M_2Z = FL = r_2$ ſein (Fr. 72 VI.), LU alſo in Z auch den Kreis um $M_2$ berühren (Fr. 83 V.).

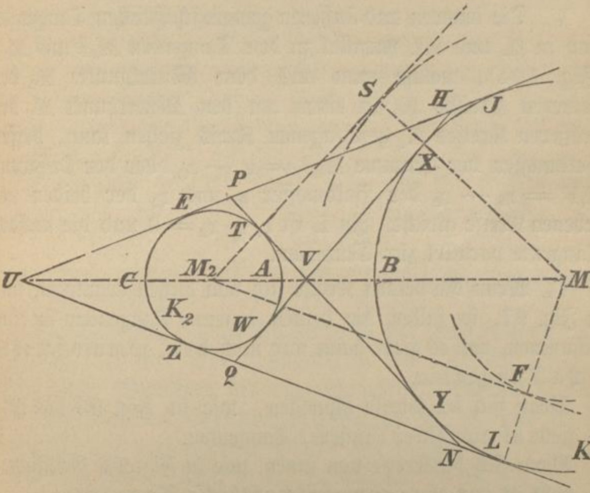

Fig. 104.

III. Liegen zwei gleiche oder ungleiche Kreiſe außer einander (Fr. 102 XVI.), ſo berühren die beiden Parallelen zu den im Abſtande $r_1 + r_2$ von $M_1$ durch $M_2$ gezogenen Geraden beide Kreiſe.

Iſt in Fig. 104 $M_1S = r_1 + r_2$ und $\angle M_2SM_1 = 90^\circ = QXM_1$, ſo wird ganz wie in II. XQ auch in W den Kreis um $M_2$ berühren (Fr. 83 V.).

IV. Bei zwei Kreiſen $K_1$ und $K_2$ (Fig. 104), welche außer einander liegen, giebt es zwei Paar gemeinſchaftliche Tangenten.

Bei ungleichen Halbmeſſern ſchneidet ſich jedes Paar in einem Punkte der Centralen; der eine Schnittpunkt V heißt der *innere*, der andere U der *äußere Ähnlichkeitspunkt* der beiden Kreiſe (vergl. Fr. 151); der kleine Kreis liegt zwiſchen U und dem großen. Bei gleichen Halbmeſſern rückt U in unendliche Entfernung.

V. Die inneren und äußeren gemeinſchaftlichen Tangenten ſind in II. und III. parallel zu den Tangenten $M_2S$ und $M_2F$ (Fig. 104), welche man aus dem Mittelpunkte $M_2$ des kleineren Kreiſes $K_2$ an einen um den Mittelpunkt $M_1$ des größeren Kreiſes $K_1$ geſchlagenen Kreis ziehen kann, deſſen Halbmeſſer der Summe $M_1S = r_1 + r_2$, oder der Differenz $M_1F = r_1 - r_2$ der Halbmeſſer $r_1$ und $r_2$ der beiden gegebenen Kreiſe gleicht. In I. iſt $r_1 - r_2 = 0$ und die äußere Tangente parallel zur Centralen.

VI. Wenn die beiden Kreiſe ſich von außen berühren, wie in Fig. 97, ſo fallen die beiden inneren Tangenten in eine zuſammen, und es giebt dann nur noch *drei gemeinſchaftliche Tangenten*.

Wenn ſich die Kreiſe ſchneiden, wie in Fig. 93 bis 95, ſo giebt es nur *zwei* (äußere) Tangenten.

Wenn ſich die Kreiſe von innen, wie in Fig. 98, berühren, ſo giebt es nur *eine gemeinſchaftliche Tangente*.

Liegt endlich der eine Kreis innerhalb des andern, wie in Fig. 92 und 100, ſo giebt es gar *keine gemeinſchaftliche Tangente*.

VII. Zieht man die vier gemeinſchaftlichen Tangenten, ſo ſind die zwiſchen den Berührungspunkten gelegenen Abſchnitte EK und ZL der äußeren, und ebenſo TY und WX der inneren Tangenten einander gleich. Denn wegen Fr. 103 V. und 20 VIII. iſt:

$$UJ - UE = UL - UZ, \quad \text{d. h.} \quad EJ = ZL$$

und

$$VT + VY = VW + VX, \quad \text{d. h.} \quad TY = WX.$$

VIII. Ebenſo ſind die zwiſchen den äußeren Tangenten gelegenen Stücke PN und QH der inneren Tangenten gleich.

Es iſt ja

$$\left.\begin{array}{ll} & \triangle\,UVP \cong \triangle\,UVQ \\ \text{und} & \triangle\,UVN \cong \triangle\,UVH \end{array}\right\}\text{(Fr. 80 V., Fr. 103 VI.)},$$

und daraus ergiebt ſich:

$$\begin{array}{c} PV + VN = QV + VH \text{ (Fr. 67 II. und 20 VIII.).} \\ \hline PN = QH \text{ (Fr. 20 II.).} \end{array}$$

IX. Weiter iſt nach Fr. 103 V.:

$$\begin{array}{c} NP = NT + TP = NZ + EP \\ NP = NY + YP = NL + PJ \\ \hline 2NP = ZL + EJ = 2ZL \text{ (Fr. 20 VIII.)} \\ \hline QH = PN = ZL = EJ. \end{array}$$

X. Endlich iſt nach Fr. 103 V. noch NT = NZ oder:

$$\begin{array}{c} PN - PT = ZL - LN \text{ (Fr. 20 II.)} \\ PN = ZL \text{ (VI.)} \\ \hline \left.\begin{array}{c} PE = PT = LN = NY \\ WX = TY = PH = QN \end{array}\right\}\text{(Fr. 20 VIII.).} \end{array}$$

XI. Eine wiederholte Anwendung der vorſtehenden Sätze geſtatten die vier Berührungskreiſe des Dreiecks ABC in Fig. 102. Berühren der eingeſchriebene Kreis um $M_0$ und die drei äußeren Berührungskreiſe um $M_1$, $M_2$ und $M_3$ die nach Bedarf verlängerten Seiten $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ des $\triangle\,ABC$ in $L_1$, $L_2$ und $L_3$, in $N_1$, $U_2$ und $U_3$, in $V_1$, $N_2$ und $V_3$, in $W_1$, $W_2$ und $N_3$, iſt ferner die Länge der Strecken:

$$\begin{array}{c} AL_3 = AL_2 = a_0 \\ BL_1 = BL_3 = b_0 \\ CL_2 = CL_1 = c_0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} AN_2 = AV_3 = a_2 & AN_3 = AW_2 = a_3 \\ BN_3 = BW_1 = b_3 & BN_1 = BU_3 = b_1 \\ CN_1 = CU_2 = c_1, & CN_2 = CV_1 = c_2, \end{array}$$

und ſetzt man $s = a_0 + b_0 + c_0 = \frac{1}{2}(a + b + c)$, ſo findet man leicht, daß:

$$\begin{array}{ll} a = b_0 + c_0 = b_1 + c_1; & s - a = a_0 \\ b = c_0 + a_0 = c_2 + a_2; & s - b = b_0 \\ c = a_0 + b_0 = a_3 + b_3; & s - c = c_0 \end{array}$$

iſt; nach VII. iſt aber auch:

$$L_2U_2 = L_3U_3 \quad \text{oder} \quad c_0 + c_1 = b_0 + b_1$$
$$L_3V_3 = L_1V_1 \qquad a_0 + a_2 = c_0 + c_2$$
$$L_1W_1 = L_2W_2 \qquad b_0 + b_3 = a_0 + a_3.$$

Addiert man nun je eine dieſer drei letzteren Gleichungen zu je einer der drei vorhergehenden, ſo erhält man nach Fr. 20 VIII.:

$$c_0 = b_1 = a_2$$
$$a_0 = c_2 = b_3$$
$$b_0 = a_3 = c_1.$$

Da endlich $b_0 = c_1$, ſo liegen die Berührungspunkte $L_1$ und $N_1$ des eingeſchriebenen und des umſchriebenen Berührungskreiſes in gleicher Entfernung von der Mitte der Seite a. Ähnlich iſts bei b und c. — Vergl. Fr. 159 XVI. und XVII.

XII. Für den Punkt C in Fig. 102 iſt nach Fr. 104 VIII.

$$CW_1 = CW_2 = CB + BW_1 = a + b_3 = a + \frac{-a + b + c}{2}$$
$$= \frac{a + b + c}{2} = s.$$

Ebenſo iſt $BV_1 = BV_3 = s$

und $AU_2 = AU_3 = s.$

---

Anfang Frage 65. S. 52

Auch Frage 42

Viertes Kapitel.

# Vier Gerade in derſelben Ebene. Das Viereck. Die Projektion einer Strecke. Die regelmäßigen Vielecke.

**106. Wie viel Fälle laſſen ſich in Bezug auf die Richtung von vier Geraden in einer Ebene unterſcheiden?**

Bezüglich der Richtung der vier Geraden $G_1$, $G_2$, $G_3$ und $G_4$ in derſelben Ebene ſind fünf Fälle möglich:

I. Alle vier Gerade haben dieſelbe Richtung (Fig. 105); dann giebt es keinen Schnittpunkt (Fr. 56 II.).

II. Drei Gerade $G_1$, $G_2$ und $G_3$ (Fig. 106) haben gleiche Richtung, die vierte $G_4$ eine andere; dann giebt es drei Schnittpunkte A, B, C (Fr. 56 III.).

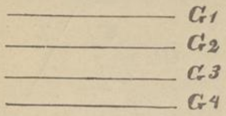

Fig. 105.

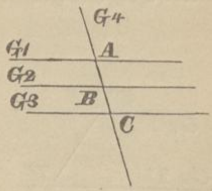

Fig. 106.

III. Zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 107) haben gleiche Richtung, die dritte und vierte $G_3$ und $G_4$ haben ebenfalls gleiche, aber eine andere Richtung, als die beiden erſten.

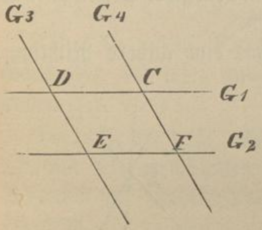

Fig. 107.

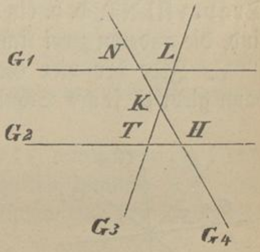

Fig. 108.

Dann giebt es vier Schnittpunkte C, D, E und F (Fr. 56 III.), und das zwiſchen ihnen liegende Viereck CDEF (Fr. 65 II. und I.), in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel ſind, heißt ein Parallelogramm.

IV. Zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 108 bis 110) haben gleiche Richtung, die dritte $G_3$ und die vierte $G_4$ andere und zwar unter ſich verſchiedene Richtungen. Dann giebt es fünf Schnittpunkte H, T, K, L und N, und vier davon liegen in $G_1$ und $G_2$.

Wenn der fünfte K, wie in Fig. 108, zwiſchen $G_1$ und $G_2$ liegt und wenn er mit den beiden in $G_1$ (Fig. 109), oder in $G_2$ zuſammenfällt, ſo entſteht kein neues oder beſonderes geometriſches Gebilde*).

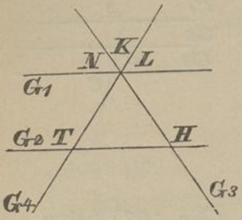

Fig. 109.

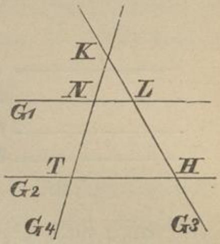

Fig. 110.

Liegt dagegen K außerhalb $G_1$ und $G_2$ (Fig. 110), ſo entſteht zwiſchen den Schnittpunkten H, L, N und T ein Trapez HLNT, d. h. ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel ſind, die anderen zwei ſich ſchneiden.

V. Jede der vier Geraden hat eine andere Richtung; dann giebt es ſechs Schnittpunkte.

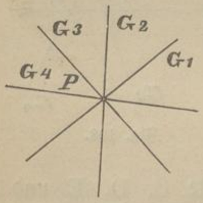

Fig. 111.

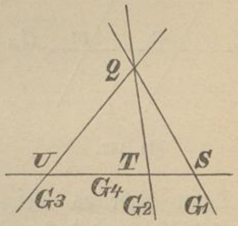

Fig. 112.

Fallen ſämtliche Schnittpunkte in einen P zuſammen, (Fig. 111), oder fallen deren drei in einen Punkt Q zuſammen, wie in Fig. 112, ſo entſteht kein neues geometriſches Gebilde.

---

*) Das Gebilde NLKHTKN iſt ja nach Fr. 65 I. und IV. keine ebene Figur. Die Sätze über ſolche Figuren laſſen ſich entſprechend den Sätzen in Fr. 108 bis 111 leicht aufſtellen.

Fällt dagegen kein Schnitt mit dem andern zuſammen, ſo liegen zwiſchen den ſechs Schnittpunkten zwei Trapezoide XVTY und XSTU (Fig. 113), d. h. zwei Vierecke, in denen keine Seite der andern parallel iſt.

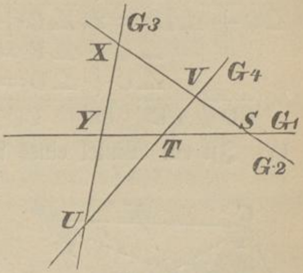

Fig. 113.

VI. Es giebt alſo rückſichtlich des Parallelismus der Seiten bloß drei Arten von Vierecken: Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide (III. bis V.).

Anm. Den Namen „Trapezoid" hat man eigentlich nur zu benutzen, wenn man ausdrücklich hervorheben will, ein Viereck ſei kein Parallelogramm und kein Trapez. Sonſt könnte man ſagen: Unter den Vierecken giebt es zwei beſondere Arten: Parallelogramme und Trapeze.

VII. In jedem Viereck beträgt die Winkelſumme vier rechte (Fr. 72 III.) und laſſen ſich nur zwei Diagonalen ziehen (Fr. 65 VI.).

Die in Fr. 96 VIII., 97 III. und IV. ſowie die in Fr. 104 I., IX. bis XII. erwähnten Eigenſchaften kommen nicht allen Vierecken zu, ſondern nur den Sehnen- und den Tangentenvierecken.

**107. Wie ſind die Winkel der Parallelogramme beſchaffen?**

I. Die Summe von je zwei benachbarten Winkeln C und F (Fig. 114 S. 118) des Parallelogramms beträgt 180° (Fr. 62 I. 3.).

II. Je zwei Gegenwinkel des Parallelogramms ſind gleich.

Da in Fig. 114 $\angle C + \angle F = 180°$ und $\angle F + \angle E = 180°$ iſt (I.), ſo muß $\angle C + \angle F = \angle F + \angle E$, d. h. $\angle C = \angle E$ ſein (Fr. 20 V. und VIII.).

III. Iſt in einem Viereck jeder Winkel ſeinem Gegenwinkel gleich, ſo iſt es ein Parallelogramm.

Iſt nämlich in Fig. 114

$$\begin{array}{c} \angle C = \angle E \quad \text{und} \quad \angle F = \angle D, \text{ ſo iſt:} \\ \angle C + \angle F + \angle E + \angle D = 4\,\mathfrak{R} \text{ (Fr. 106 VII.)} \\ \hline 2(\angle C + \angle D) = 2(\angle C + \angle F) = 4\,\mathfrak{R} \text{ (Fr. 20 IV.)} \\ \left.\begin{array}{l}\angle C + \angle F = 2\,\mathfrak{R} \\ \angle C + \angle D = 2\,\mathfrak{R}\end{array}\right\} \text{(Fr. 20 VIII.);} \\ \hline CD \,//\, FE \quad \text{und} \quad CF \,//\, DE \text{ (Fr. 62 II. 3.).} \end{array}$$

IV. Iſt ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, ſo ſind alle rechte; iſt einer ſchief, ſo ſind alle ſchiefe.

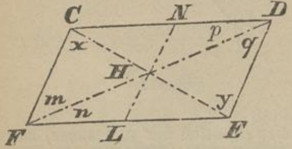

Fig. 114.

Iſt in Fig. 114 $\angle$ F ſpitz, ſo iſt es auch $\angle$ D (II.), während $\angle$ C und $\angle$ E ſtumpf ſind (I.).

Wäre dagegen $\angle$ F ein rechter, ſo müßten auch $\angle$ D (II.) und ebenſo $\angle$ C und $\angle$ E (I.) rechte ſein.

V. Rückſichtlich der Winkel giebt es alſo nur zwei Arten Parallelogramme (IV.):

Ein Parallelogramm mit lauter rechten Winkeln heißt ein rechtwinkeliges, eins mit vier ſchiefen Winkeln heißt ein ſchiefwinkeliges.

**108. Welche Sätze handeln von den Seiten des Parallelogramms?**

I. Jede Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Hälften.

In Fig. 114 iſt nämlich

$$\begin{array}{c} FE \,//\, CD \text{ (Vor. u. Fr. 106 III.)} \\ \hline \angle n = \angle p \text{ (Fr. 62 I. 2.)} \\ \angle E = \angle C \text{ (Fr. 107 II.)} \\ FD = FD \text{ (Fr. 20 I.)} \\ \hline \triangle FDE \cong \triangle DFC \text{ (Fr. 80 V.).} \end{array}$$

II. Daher läßt ſich jedes Dreieck FDE (Fig. 114) als die Hälfte eines Parallelogramms FEDC betrachten, welches man erhält, wenn man durch die Endpunkte derſelben Dreiecksſeite FD die Parallelen FC und DC zu den beiden anderen Seiten zieht.

III. Im Parallelogramm ſind je zwei Gegenſeiten gleich.

Weil nämlich $\triangle FDE \cong \triangle DFC$ (I.), iſt auch $DE = FC$ und $FE = DC$ (Fr. 67 II.).

Dieſer Satz läßt ſich auch ſo ausſprechen: Parallele Strecken zwiſchen Parallelen ſind gleichlang.

IV. Sind in einem ebenen Viereck CDEF (Fig. 114) je zwei Gegenſeiten gleich ($FC = ED$ und $FE = CD$), ſo iſt es ein Parallelogramm. Vergl. VIII.

Da nämlich die beiden $\triangle\triangle$ FDE und DFC nach Fr. 80 I. kongruent ſind, ſo iſt nach Fr. 67 II.:

$$\frac{\angle m = \angle q}{FC \parallel ED} \quad \text{und} \quad \frac{\angle n = \angle p,}{FE \parallel CD \text{ (Fr. 62 II. 2.).}}$$

V. Ein ebenes Viereck CDEF (Fig. 114), in dem ein Paar Gegenſeiten CF und DE parallel und gleich (⋕) ſind, iſt ein Parallelogramm (vergl. Fr. 65 und Anmerkung zu Fr. 106 IV.).

Bew.

$$\begin{array}{c} CF \parallel DE \text{ (Vor.)} \\ \hline \angle m = \angle q \text{ (Fr. 62 I. 2.)} \\ CF = ED \text{ (Vor.)} \\ FD = DF \text{ (Fr. 20 I.)} \\ \hline \triangle CFD \cong \triangle EDF \text{ (Fr. 80 II.)} \\ \hline \angle p = \angle n \text{ (Fr. 67 II.)} \\ \hline FE \parallel CD \text{ (Fr. 62 II. 2.).} \end{array}$$

VI. Wegen III. kann es auch rückſichtlich der Größe der Seiten nur zwei Arten Parallelogramme geben, nämlich gleichſeitige, in denen alle vier Seiten gleichgroß ſind, und ungleichſeitige, in denen bloß die Gegenſeiten paarweiſe gleich ſind.

VII. Daher giebt es (wegen VI. und Fr. 107 V.) überhaupt nur vier Arten von Parallelogrammen; nämlich:

das Quadrat KMZT (Fig. 115) iſt rechtwinkelig und gleichſeitig;

das Rechteck SQUV (Fig. 116) iſt rechtwinkelig und ungleichſeitig;

die Raute oder der Rhombus ABXY (Fig. 117) iſt ſchiefwinkelig und gleichſeitig;

das Rhomboid FCDE (Fig. 118) iſt ſchiefwinkelig und ungleichſeitig.

Anm. Der Name „Rhomboid“ wird entbehrlich, wenn man ſich nicht die Möglichkeit erhalten will, ein Parallelogramm kurz zu nennen, das weder Quadrat, noch Rechteck, noch Rhombus iſt.

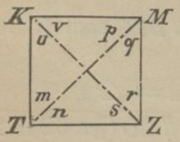

Fig. 115.

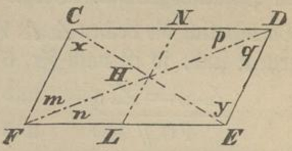

Fig. 118.

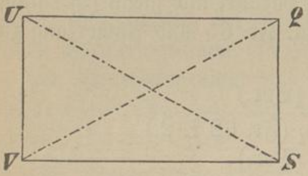

Fig. 116.

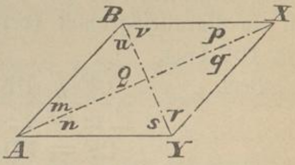

Fig. 117.

VIII. Ein Viereck mit vier gleichen Seiten iſt (nach IV.) ein Parallelogramm und zwar entweder ein Quadrat, oder ein Rhombus (VII.).

IX. Schneidet man in einem Parallelogramm CDEF (Fig. 119), von derſelben Seite FE her, auf zwei Gegenſeiten gleiche Strecken FT und EK ab, ſo iſt die Verbindungsgerade TK den Seiten FE und CD parallel (V.), weil FT ⋕ EK.

X. Verbindet man die Mitten N und L (Fig. 118) zweier Gegenſeiten, ſo iſt die Verbindungsgerade LN den anderen Seiten FC und DE parallel (III. und V.).

XI. Zieht man in einem Parallelogramm FCDE (Fig. 119) eine Parallele TK zu einer Seite FE, ſo iſt TK = FE (III.).

XII. Fällt man von zwei Punkten U und Q (Fig. 120) einer Geraden UQ Senkrechte UV und QS auf eine zu UQ parallele Gerade VS, ſo iſt auch UV // QS (Fr. 57 II.).

Macht man dagegen von Q und V aus QS ⊥ VS und VU ⊥ UQ, ſo iſt wiederum UV // QS (Fr. 62 V. und II. 3.).

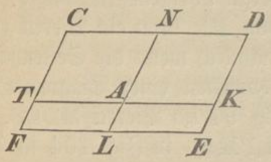

Fig. 119.

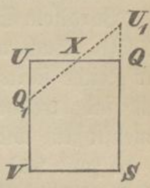

Fig. 120.

XIII. Da demnach (in beiden Fällen in XII.) alle Senkrechten zwiſchen zwei Parallelen parallel ſind, ſo ſind alle Senkrechten zwiſchen zwei Parallelen auch gleichlang (III.; vergl. auch Fr. 72 VI.).

Wegen Fr. 74 IX. ſind alſo alle Punkte der einen Parallelen von der anderen gleichweit entfernt, oder noch kürzer: *zwei Parallele haben überall gleichen Abſtand von einander.*

Den Abſtand zweier Parallelen darf man daher im Parallelogramm und im Trapez als *Höhe* in Bezug auf dieſe Parallelen bezeichnen. Vergl. Fr. 64 III.

Die Parallele $G_2$ zu $G_1$ iſt der *geometriſche Ort* (vergl. Fr. 74 XVII.) eines in einem vorgeſchriebenen Abſtande von $G_1$ liegenden Punktes.

XIV. Zwei Punkte $Q_1$ und $U_1$ einer Geraden $Q_1U_1$, Fig. 120, liegen in ungleicher Entfernung von einer zu $Q_1U_1$ nicht parallelen und $Q_1U_1$ nicht in der Mitte von $Q_1U_1$

ſchneidenden Geraden VS. Zieht man nämlich durch einen Punkt X in $Q_1U_1$ die Gerade UQ // VS, ſo iſt nach XII. und Fr. 20 III.:

$$U_1S > QS = US > Q_1V.$$

XV. Zwei Gerade UQ und VS ſind parallel, wenn ſich zwiſchen ihnen zwei gleiche Senkrechte ziehen laſſen (XIII. und XIV.).

XVI. Mit Fr. 81 läßt ſich leicht beweiſen, daß in XIII. bis XV. anſtatt „Senkrechte“ und „Entfernung“ geſetzt werden darf „Parallele Strecken“. Vergl. übrigens III. bis V.

XVII. Auch abweichend von III. kann ein Viereck zwei Paar gleiche Seiten beſitzen, nämlich wenn die Seitenpaare gleich ſind, welche in den Endpunkten einer Diagonale zuſammenſtoßen, wie z. B. in Fig. 91 im Viereck MDEC, in Fig. 93 (und 95) im Viereck $M_1PM_2Q$, in Fig. 104 in den Vierecken UPVQ und $UEM_2Z$.

Die Eigenſchaften ſolcher Vierecke, welche man gleichſchenkelige Vierecke nennt, ſind in Fr. 102 und 105 ſchon mit erörtert worden.

Ein ſolches Viereck würde nach Fr. 106 VI. zu den Trapezoiden zu rechnen ſein, ſofern die Seiten des einen Paares größer ſind, als die des andern; ſind dagegen alle vier Seiten unter ſich gleich, ſo iſt das Viereck ein Quadrat, oder ein Rhombus (vergl. VI. und VII.).

Anm. Hätte man den Namen „Rhomboid“ noch frei (vergl. VII. Anm.), ſo könnte man ein Viereck, in welchem die an den Enden der einen Diagonale an einander ſtoßenden Seiten gleich, die an denen der andern Diagonale ſich treffenden ungleich ſind, ein Rhomboid nennen.

### 109. Welche Stücke beſtimmen ein Parallelogramm?

I. Aus Fr. 106 III. in Verbindung mit Fr. 57 I. und Fr. 26 folgt, daß ein Parallelogramm durch einen Winkel und die zwei denſelben einſchließenden Seiten beſtimmt iſt.

II. Zur Beſtimmung des Rechtecks und der Raute reichen zwei Stücke aus (I. und Fr. 108 VII.); bei erſterem die beiden Seiten, bei letzterem eine Seite und ein Winkel.

III. Das Quadrat iſt bereits durch eine Seite beſtimmt.

### 110. Was gilt von den Diagonalen des Parallelogramms?

I. Wird ein Winkel B eines Parallelogramms ABXY (Fig. 117) durch die Diagonale BY halbiert, ſo werden auch die drei anderen Winkel durch die Diagonalen BY und AX halbiert, und zugleich iſt das Parallelogramm gleichſeitig.

Iſt $\angle u = \angle v$, ſo muß zunächſt auch $\angle s = < r$ ſein (Fr. 20 IV.), weil ja $\angle s = \angle v$ und $\angle r = \angle u$ iſt (Fr. 62 I.). Dann iſt aber ſofort auch $\angle v = \angle r$ und $\angle u = \angle s$ (Fr. 20 V.), und deswegen weiter:

$$BX = XY = AB = AY \text{ (Fr. 74 VI., 108 III.)}$$
$$\angle m = \angle p = \angle n = \angle q \text{ (Fr. 74 I., 62 I.).}$$

II. In jedem gleichſeitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) halbieren die Diagonalen die Winkel (Fr. 74 I. und 62 I.).

III. Die Diagonalen eines Parallelogramms FCDE (Fig. 118) halbieren ſich gegenſeitig in H (Fr. 67 II.), weil $\triangle CHF \cong \triangle EHD$ (Fr. 80 V.).

IV. Jede durch den Diagonalenſchnittpunkt H, Fig. 118, gelegte Strecke NL iſt in H halbiert und ſchneidet von den Seiten CD und FE nach C und E hin gleiche Stücke NC und LE ab (Fr. 67 II.), da $\triangle CHN \cong \angle EHL$ (Fr. 80 V.). Natürlich iſt auch ND = L~~Y~~F.

Iſt dabei LN // FC, ſo wird $FL = LE = \frac{1}{2} FE$ (Fr. 108 III. und Fr. 20 V.).

V. Ein Viereck, deſſen Diagonalen CE und FD, Fig. 118, ſich gegenſeitig halbieren, iſt ein Parallelogramm. Aus $\triangle CHF \cong \triangle EHD$ (Fr. 80 II., Fr. 42 II.) folgt ja $\angle x = \angle y$ (Fr. 67 II.) und endlich CF // DE (Fr. 62 II.), ſowie aus der Kongruenz der $\triangle\triangle$ CHD und EHF in gleicher Weiſe CD // FE.

VI. In jedem rechtwinkeligen Parallelogramm (im Quadrat TKMZ und im Rechteck SQUV, Fig. 115 und 116) ſind die Diagonalen gleichgroß, weil (nach Fr. 81 I.):

$$\triangle KTZ \cong \triangle MZT \quad \text{und} \quad \triangle QSV \cong \triangle UVS.$$

VII. Ein Parallelogramm mit gleichen Diagonalen $QV = US$, Fig. 116, iſt rechtwinkelig; denn dann iſt noch $VS = SV$, $QS = UV$ (Fr. 108 III.), deshalb $\triangle QVS \cong \triangle USV$ (Fr. 80 I.), dann $\angle QSV = \angle UVS$ (Fr. 67 II.), oder wegen Fr. 107 I. $\angle QSV = 90° = \angle UVS$ (Fr. 20 VIII.).

VIII. In jedem gleichſeitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) ſtehen die Diagonalen auf einander ſenkrecht (Fr. 75 V. und VI.); denn jede Diagonale, z. B. BY in Fig. 117, halbiert in dem von der anderen Diagonale AX abgeſchnittenen gleichſchenkeligen $\triangle ABX$ den Winkel an der Spitze B (II.).

IX. Ein Parallelogramm, deſſen Diagonalen ſenkrecht auf einander ſtehen, iſt gleichſeitig. In Fig. 117 iſt ja dann $AQ = XQ$ (III.) und $BQ = BQ$ (Fr. 20 I.), deshalb $\triangle AQB \cong \triangle XQB$ (Fr. 81 I.) und $AB = BX$ (Fr. 67 II.).

**111. Welche Sätze über das Trapez ſind zu erwähnen?**

I. Die Verbindungsgerade SV (Fig. 121) der Mitten S und V der nicht-parallelen Seiten KL und NM eines Trapezes NKLM iſt parallel zu den Parallelſeiten KL und NM und heißt daher die *mittlere Parallele.*

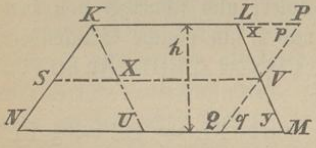

Fig. 121.

Zieht man durch V eine Gerade $PQ \parallel KN$, bis ſie die beiden Parallelſeiten in P und Q ſchneidet, ſo iſt nach Fr. 62 I. $\angle x = \angle y$ und $\angle p = q$, ferner $LV = VM$ (Vor.), folglich $\triangle LVP \cong \angle MVQ$ (Fr. 80 V.) und $PV = VQ$ (Fr. 67 II.). Nun iſt aber nach der Vorausſetzung auch $NS = SK$, folglich:

$$SV \parallel NQ \text{ (Fr. 108 X.).}$$

II. Zieht man durch die Mitte S (Fig. 121) der einen nicht-parallelen Seite NK eine Parallele SV zu den Parallelſeiten NM und KL, ſo halbiert dieſelbe die andere nicht-parallele Seite LM.

Denn ginge SV nicht durch die Mitte von LM, ſo müßte ſich (wegen I.) durch S noch eine zweite Parallele zu NM ziehen laſſen, was nach Fr. 57 I. unmöglich iſt.

III. Die mittlere Parallele SV (Fig. 121) iſt das arithmetiſche Mittel (vergl. Fr. 19 III.) aus den beiden Parallelſeiten KL und NM.

Aus der in I. nachgewieſenen Kongruenz der Dreiecke LVP und MVQ folgt auch, daß $LP = QM$ (Fr. 67 II.); nach Fr. 108 III. iſt ferner $KP = SV = NQ$, folglich:

$$2\,SV = KP + NQ = (KL + LP) + (NM - QM)$$
$$= KL + NM; \qquad SV = \frac{KL + NM}{2}.$$

IV. Die mittlere Parallele SV (Fig. 121) halbiert auch jede durch den Endpunkt K der einen nicht-parallelen Seite KN zu der anderen LM parallel gezogene Strecke KU, weil nach Fr. 108 III. $KX = LV$ und $XU = VM$, und nach I. $LV = VM$ iſt, daher auch $KX = XU$ (Fr. 20 IV.).

V. Wäre in Fig. 121 $\angle N = \angle y$, machen alſo die zwiſchen den Parallelen KL und NM gezogenen Strecken KN und LM nach entgegengeſetzten Seiten gleiche Winkel mit NM, ſo muß $KL = NM$ ſein.

Denn dann iſt auch $\angle K = \angle L$ (Fr. 62 I.) und die aus K und L auf NM gefällten Senkrechten ſchneiden von NKLM kongruente Dreiecke ab (Fr. 108 XIII. und 80 V.).

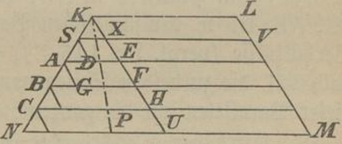

Fig. 122.

Anm. Dieſer Satz läßt ſich als ein Seitenſtück neben Fr. 108 IV. ſtellen und bildet auch eine Ergänzung zu Fr. 108 III. Anderſeits könnten in einem Viereck auch ein Paar benachbarte Seiten gleich ſein (vergl. Fr. 108 XVII.).

VI. Teilt man eine Seite KN (Fig. 122) eines Dreiecks NKU, oder die eine nicht-parallele Seite KN eines Trapezes NKLM in n gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte

Parallelen zu der Dreiecksſeite $NU$, bezw. zu den Parallelſeiten $KL$ und $NM$, ſo teilen dieſe Parallelen auch die dritte Dreiecksſeite $KU$ und die andere nicht-parallele Seite $LM$ in $n$ gleiche Teile.

Da $KS = SA$ und $SV \,//\, KL$, ſo iſt zunächſt $KX = XE$ (IV.). In den Trapezen $BSXF$, $CAEH$ ꝛc. mit den mittleren Parallelen $AE$, $BF$ ꝛc. iſt dann nach II. weiter $XE = EF$, $EF = FH$ ꝛc., daher nach Fr. 20 V. $KX = XE = EF = FH$ ꝛc. Die durch die Parallelen in $LM$ erzeugten Teile $LV$ ꝛc. ſind aber je einem Teil in $KU$ gleich (Fr. 108 III.), daher auch unter ſich ſelbſt (Fr. 20 V.).

VII. Die zwiſchen $KN$ und $KU$ liegenden Abſchnitte $SX$, $AE$, $BF$, $CH$ ꝛc. der Parallelen wachſen wie die ganzen Zahlen; denn jede derſelben beſteht aus einem Stück, welches nach Fr. 108 III. dem vorhergehenden Abſchnitte gleich iſt ($DE = SX$, $GF = AE$ ꝛc.), und einem zweiten Stück von unveränderlicher Größe ($AD$, $BG$). Aus der durch Fr. 80 V. bedingten Kongruenz der Dreiecke $KXS$, $SDA$, $AGB$ ꝛc. folgt nämlich nach Fr. 67 II., daß $SX = AD = BG$ ꝛc. Daher iſt $AE = 2SX$, $BF = 3SX$ ꝛc.

VIII. Zieht man im Dreieck $NKU$ eine Strecke $KP$ von $K$ nach einem Punkte $P$ in $NU$, ſo teilt $KP$ die Abſchnitte $SX$, $AE$, $BF$ ꝛc. der ſämtlichen Parallelen in dem nämlichen Verhältniſſe (vergl. Fr. 145 I.), wie die Seite $NU$, weil nach VII. die zu beiden Seiten von $KP$ liegenden Abſchnitte dieſer Parallelen wie die ganzen Zahlen wachſen.

IX. Iſt daher in VIII. $NP = PU$, ſo halbiert $KP$ auch die ſämtlichen zu $NU$ parallelen Strecken zwiſchen $KN$ und $KU$.

X. Wie weiſt man aus IX. nach, daß der Schnittpunkt der nicht-parallelen Seiten eines Trapezes in der die beiden Parallelſeiten halbierenden Geraden liegt? Vergl. auch Fr. 159 XII.

### 112. Wie projiziert man eine Strecke auf eine Gerade?

I. *Projektion einer Strecke $AB$ (Fig. 123) auf eine Gerade $G$* heißt die Strecke $A_1B_1$, welche zwiſchen den Fuß-punkten $A_1$ und $B_1$ der von den Endpunkten A und B auf die Gerade G herabgefällten Senkrechten $AA_1$ und $BB_1$ enthalten iſt.

Macht AB mit G (oder mit einer zu G parallelen Geraden) den ſpitzen Winkel w, ſo bildet $A_1B_1$ die unter dem Winkel w projizierte Strecke AB.

II. Die Projektionen derſelben Strecke auf parallele Gerade oder unter demſelben Winkel w ſind gleichgroß.

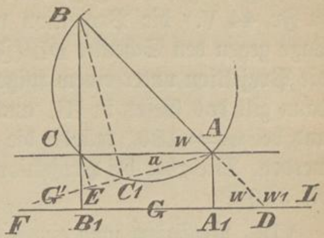

Fig. 123.

In Fig. 123 iſt ja $AC = A_1B_1$ (Fr. 108 XIII.).

III. Projiziert man AB (Fig. 123) auf mehrere durch A gehende Gerade CA, $C_1A$ ꝛc., ſo liegen die Fußpunkte C, $C_1$ ꝛc. auf einem über AB als Durchmeſſer geſchlagenen Kreiſe (Fr. 96 VII.); dabei iſt (wegen Fr. 91 VI.) die Projektion $AC > AC_1$, ſobald $\angle BAC < \angle BAC_1$. Ganz das Nämliche gilt, wenn AB auf eine nicht durch A gehende Gerade projiziert wird (II.).

Die Projektion einer Strecke AB wird demnach um ſo kleiner, unter einem je größeren (ſpitzen) Winkel man AB projiziert.

IV. Umgekehrt: Eine je größere Projektion man bei Projizierung einer und derſelben Strecke AB unter einem ſpitzen Winkel erhält, unter einem um ſo kleineren Winkel hat man die Strecke projiziert.

V. Bei $AB \parallel G$, alſo bei $w = 0$, wird die Projektion $A_1B_1$ der projizierten Strecke AB gleich (Fr. 108 XII.).

VI. Wird der Projektionswinkel = 90°, ſo ſchrumpft die Projektion der Strecke AB zu einem Punkte A zuſammen, wird alſo = 0 (Fr. 57 III.).

VII. Wollte man die Strecke AB unter einem ſtumpfen Winkel $w_1$ projizieren, ſo fiele die Projektion $A_1B_1$ nicht mehr (wie bei der Projektion unter dem ſpitzen Winkel $w$) auf einen Schenkel DL des Projektionswinkels, ſondern auf deſſen Verlängerung DF. Faßt man in dieſem Falle (ähnlich wie in Fr. 44 V.) die Projektion wegen ihrer entgegengeſetzten Lage gegen den Schenkel DL (Fr. 24 II.) als negativ auf, die Projektion unter einem ſpitzen Winkel aber als poſitiv, dann gilt das Geſetz in III. auch noch für ſtumpfe Winkel, und bei $w = 180^\circ$ würde die Projektion $A_1B_1 = -AB$ werden. Wie aber bei Projektionen unter Winkeln über 180° bis 360°?

VIII. Projiziert man eine Strecke AB unter zwei Winkeln $w$ und $w_1$, die ſich zu 180° ergänzen, ſo erhält man gleichgroße Projektionen, von denen aber die eine als poſitiv und die andere als negativ zu gelten hat (VII.).

IX. Projiziert man eine bereits unter dem ſpitzen Winkel $BAC = w$ projizierte Strecke AB noch unter dem ſpitzen Winkel $CAC_1 = u$, ſo iſt letztere Projektion AE größer als die Projektion $AC_1$ derſelben Strecke AB unter der Winkelſumme $BAC_1 = w + u$; denn es iſt ja $BC_1 \parallel CE$ (Fr. 57 II.), $BC_1$ aber fällt von BC aus nach A hin (Fr. 71 II.).

Bei Berückſichtigung von VII. gilt der vorſtehende, bis jetzt nur für $w + u < 90^\circ$ bewieſene Satz auch noch, wenn $w + u = 90^\circ$ oder $w + u > 90^\circ$ iſt.

X. Über das Wachſen der Projektionen der von einem Punkte P nach einer Geraden G gezogenen und auf eben dieſe Gerade G projizierten Strecken giebt Fr. 74 X. Aufſchluß. Vergl. Fr. 78 V.

### 113. Welche Eigenſchaften haben die regelmäßigen Vielecke?

I. Ein ebenes geradliniges Vieleck (vergl. Fr. 65 I.) heißt regelmäßig, wenn alle ſeine Winkel und alle ſeine Seiten unter einander gleich ſind, wie beim gleichſeitigen Dreieck (vergl. Fr. 64 III. und 74 V.) und beim Quadrat (Fr. 108 VII.).

II. Die Winkel jeder regelmäßigen Figur ſind hohl (Fr. 35); denn beim regelmäßigen n-eck beträgt die Summe der n Winkel (n — 2) $2\,\mathfrak{R}$ (Fr. 72 III.), weshalb jeder einzelne Winkel $= \left(\frac{n-2}{n}\right) 2\,\mathfrak{R} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) 2\,\mathfrak{R} < 2\,\mathfrak{R}$ iſt.

III. Jeder Winkel einer regelmäßigen Figur wird um ſo größer, je größer die Seitenzahl n iſt (II.), weil $\frac{2}{n}$ abnimmt, wenn n wächſt.

IV. Halbiert man in einem regelmäßigen Vieleck ABCDEF (Fig. 124) zwei benachbarte Winkel A und B, ſo iſt $\angle z + \angle y < 2\,\mathfrak{R}$ (II.); deshalb ſchneiden ſich (Fr. 62 IV. 3.) die Halbierungslinien in einem Punkte M, welcher nach dem Innern der Figur hin liegen muß (Fr. 69 IX.). Aus der Gleichheit der beiden Winkelhälften z und y folgt ſofort, daß AM = BM (Fr. 74 VI.). Zieht man ferner von M eine Strecke MC nach dem nächſten Eckpunkte C, ſo iſt $\triangle AMB \cong \triangle CMB$ (Fr. 80 II.), weil ja nach I. auch AB = BC und $\angle y = \frac{1}{2}B = \angle x$ iſt. Deshalb muß aber weiter MA = MC (Fr. 67 II.), alſo MA = MB = MC ſein und MC den $\angle C$ halbieren.

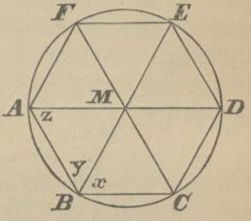

Fig. 124.

Geht man nun zu den folgenden Eckpunkten D, E ꝛc. fort, ſo findet ſich, daß die Halbierungslinien der Winkel eines regelmäßigen Vielecks ſich in einem Punkte M ſchneiden und das Vieleck in ſo viel kongruente gleichſchenkelige Dreiecke teilen, als das Vieleck Seiten hat.

In dieſen Dreiecken iſt jeder Winkel an der Spitze M gleichgroß, nämlich:

$$\angle AMB = BMC = \ldots = 4\,\mathfrak{R} : n \text{ (Fr. 34 IV.)}.$$

Daher iſt $\angle AMB + \angle ABC = 2\,\mathfrak{R}$ (II.).

V. Die aus dem Punkte M auf die Seiten AB, BC ꝛc. gefällten Senkrechten halbieren die Seiten und ſind unter ſich gleich (Fr. 75 V. und VI., Fr. 81).

VI. Aus dem Punkte M läßt ſich alſo nach IV. ein Kreis durch die Eckpunkte und nach V. ein Kreis durch die Seitenmitten (vergl. Fig. 125) ſchlagen; erſterer iſt dem Vieleck umgeſchrieben, letzterer eingeſchrieben.

VII. Teilt man einen Kreis in n gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte A, B, C ꝛc. (Fig. 125) Sehnen oder Tangenten, ſo erhält man ein (eingeſchriebenes oder umgeſchriebenes) regelmäßiges n-eck.

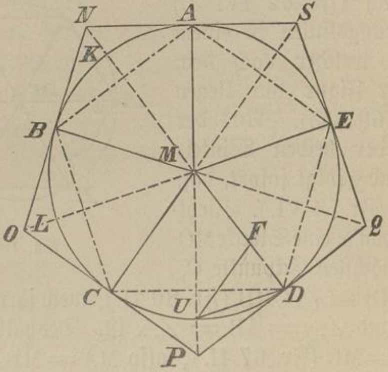

Fig. 125.

Bei dem eingeſchriebenen zunächſt ſind die Seiten nach Fr. 91 II. unter ſich gleich, weil die zwiſchen je zwei Teilpunkten liegenden Bögen gleich ſind; die Winkel aber ſind gleich (Fr. 96 II.), weil jeder als Peripheriewinkel über (n—2) ſolchen gleichen Kreisteilen, z. B. ∠ABC über dem Bogen AEDC, angeſehen werden kann.

Zieht man ferner beim umgeſchriebenen Vieleck NOPQS vom Mittelpunkte M aus Halbmeſſer MA, MB, MC ꝛc. nach allen Teilpunkten, ſo zerfällt das n-eck in n Vierecke, und zieht man dann noch von M Strecken nach allen den Punkten

N, O, P ꝛc., in denen ſich je zwei benachbarte Tangenten ſchneiden, ſo zerfällt jedes Viereck in zwei kongruente (Fr. 81 I.) rechtwinkelige Dreiecke. Die 2n Winkel um M ſind daher ſämtlich gleich, weil die Strecken MN, MO ꝛc. die nach Fr. 54 IV. gleichen Centriwinkel AMB, BMC ꝛc. halbieren. Da deshalb die 2n rechtwinkeligen Dreiecke unter ſich kongruent ſind (Fr. 81 II.), ſo folgert man daraus nach Fr. 67 II. leicht die Gleichheit ſämtlicher (halben und ganzen) Seiten und Winkel des umgeſchriebenen Vielecks.

VIII. Werden durch dieſelben n Teilpunkte A, B, C ꝛc. (Fig. 125) eines Kreiſes ein eingeſchriebenes und ein umgeſchriebenes regelmäßiges Vieleck von n Seiten gezeichnet, ſo halbieren die Strecken MN, MO ꝛc. die Bögen AB, BC ꝛc.

Der Kreis iſt daher nunmehr in 2n gleiche Bögen AK = KB = BL ꝛc. geteilt.

Zeichnet man jetzt die beiden 2n-ecke, ſo zeigt ſich das eingeſchriebene größer, das umgeſchriebene kleiner als das eingeſchriebene, beziehentlich das umgeſchriebene n-eck. Durch fortgeſetzte Verdoppelung der Seitenzahlen erhält man dann Vielecke von 4n, 8n ꝛc. Seiten, und da ſich dieſe Vielecke immer inniger an den Kreis anſchmiegen, je größer ihre Seitenzahl wird, ſo pflegt man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck *von unzählig vielen Seiten* zu betrachten.

---

### Fünftes Kapitel.

## Einige Aufgaben und Übungsſätze.

**114. Wie zeichnet man ein gleichſeitiges Dreieck?** +

Schlägt man aus den Endpunkten A und B der (gegebenen oder willkürlich gewählten) Strecke AB zwei Kreiſe mit AB als Halbmeſſer, ſo ſchneiden ſich die Kreiſe, da die in Fr. 102 VII. geſtellten Bedingungen erfüllt ſind, in zwei Punkten $C_1$ und $C_2$. Die beiden (kongruenten, Fr. 80 I.) Dreiecke $ABC_1$ und $ABC_2$

ſind gleichſeitig (Fr. 20 V.), da $AC = AB$ und $BC = AB$ (Fr. 48 III.).

**115. Wie zeichnet man ein gleichſchenkeliges Dreieck?**

Man verfahre wie in Fr. 114, ſchlage aber die zwei gleichen Kreiſe mit einem der Strecke AB nicht gleichenden Halbmeſſer, der größer als die Hälfte von AB iſt.

**116. Wie zeichnet man ein Dreieck aus den drei Seiten?**

Genügen die drei Seiten a, b und c den in Fr. 76 geſtellten Bedingungen, ſo ſchneiden ſich die aus den Endpunkten von $AB = c$ mit den Halbmeſſern b und a geſchlagenen Kreiſe in zwei Punkten $C_1$ und $C_2$ (Fr. 102 VII.) und Seiten der (kongruenten, Fr. 80 I.) Dreiecke $ABC_1$ und $ABC_2$ ſind a, b und c.

**117. Wie zieht man von einem Punkte P zwei gleiche Strecken nach einer Geraden G?**

Schlägt man aus P, wie in Fig. 96, durch einen jenſeits G gelegenen Punkt N einen Kreis K, ſo ſchneidet dieſer G in 2 Punkten $M_1$ und $M_2$ (Fr. 83 XIII.) und es iſt $M_1P = M_2P$ (Fr. 48 III.).

**118. Wie trägt man an einen Strahl AB in A einen gegebenen Winkel DEF an?**

Man verbinde zwei auf den Schenkeln ED und EF willkürlich gewählte Punkte H und K durch eine Strecke HK und zeichne nach Fr. 116 an AB ein dem Dreieck HEK kongruentes Dreieck $H_1AK_1$, ſo daß $AK_1 = EK$ von A aus in AB liegt, und $AH_1 = EH$ wird. Dann iſt:

$$\angle H_1AK_1 = \angle HEK = \angle DEF \text{ (Fr. 67 II.).}$$

**119. Wie zieht man in einer gegebenen Ebene durch einen gegebenen Punkt C eine Parallele DL zu einer gegebenen Geraden FK?**

Man verbinde C mit einem Punkte E in FK und mache $\angle ECD = \angle CEK$ (Fr. 118), ſo daß D und K auf verſchiedenen Seiten von CE liegen (wie in Fig. 32 auf S. 40); dann iſt $DCL \,//\, FK$ (Fr. 62 II. 2.). Vergl. Fr. 57 I.

**120. Wie fällt man von einem Punkte P auf eine nicht durch P gehende Gerade G eine Senkrechte?**

Zieht man von P nach zwei beliebigen Punkten $M_1$ und $M_2$ in G (wie in Fig. 93 bis 96) Strecken, ſo ſchneiden ſich zwei aus $M_1$ und $M_2$ mit $M_1P$ und $M_2P$ als Halbmeſſern geſchlagene Kreiſe noch in einem Punkte Q und es iſt $PQ \perp G$ (Fr. 102 III.). Nach Fr. 117 könnte man dabei zwei gleiche Kreiſe erhalten.

**121. Wie errichtet man in einem Punkte N einer Geraden G eine Senkrechte?**

In G mache man $ND = NC$ (Fig. 55) und über CD $\triangle DQC$ gleichſchenkelig (Fr. 115), ſo iſt $QN \perp G$ (Fr. 74 XVII.).

**122. Wie errichtet man im Endpunkte B einer Strecke AB eine Senkrechte?**

Man zeichne über AB (Fig. 67) ein gleichſchenkeliges $\triangle AVB$ (Fr. 115), verlängere AV nach F, bis $VF = VB = VA$ wird; dann iſt $FB \perp AB$ (Fr. 71 III.), da $\angle VAB + \angle VFB = \angle ABV + \angle FBV$ (Fr. 74 I.).

**123. Wie ſchlägt man um ein rechtwinkeliges Dreieck einen Kreis?** Vergl. Fr. 88 IV. und 89.

I. Teilt man den rechten Winkel B ſo, daß (wie in Fig. 86) $\angle ABM = \angle BAZ$ wird, dann ſchneidet die Teillinie BM die Hypotenuſe AZ im Mittelpunkte M des geſuchten Kreiſes (Fr. 71 II. und 73 I.).

II. Eine andere Löſung bietet Fr. 96 VII. mit Hilfe von Fr. 127.

**124. Wie legt man einen rechten Winkel ſo, daß ſeine Schenkel durch zwei gegebene Punkte A und Z gehen und ſein Scheitel auf einer gegebenen Geraden G liegt?**

Hat der über $\overline{AZ}$ (Fig. 86) als Durchmeſſer geſchlagene Kreis mit der Geraden G einen, oder zwei Punkte, z. B. B und C, gemein (Fr. 83), ſo ſind ABZ und ACZ eine, bezw. zwei der geſtellten Bedingung genügende Lagen des rechten Winkels (Fr. 96 III.).

**125. Wie halbiert man einen gegebenen Winkel?**

Macht man vom Scheitel $M_1$ des zu halbierenden $\angle PM_1Q$ aus (wie in Fig. 93 und 94) $M_1P = M_1Q$ und beſchreibt man über PQ ein gleichſchenkeliges $\triangle PM_2Q$ (Fr. 115), ſo halbiert $M_1M_2$ den $\angle PM_1Q$ (Fr. 102 IX.); denn aus $M_1$ und $M_2$ laſſen ſich Kreiſe durch P und Q ziehen (Fr. 47 II.).

Am zweckmäßigſten legt man das $\triangle PM_2Q$ nicht auf dieſelbe Seite von PQ, auf welcher $\triangle PM_1Q$ liegt (vergl. Fig. 95).

Iſt der Scheitel C des zu halbierenden $\angle W_1CW_2$, Fig. 102, nicht zugänglich, ſo ziehe man beliebig AB und halbiere durch $AM_0$, $AM_3$, $BM_0$, $BM_3$ die Winkel bei A und B; dann liegen $M_0$ und $M_3$ in der Halbierungslinie $M_3M_0C$ (Fr. 104 II.).

**126. Wie teilt man einen rechten Winkel in drei Teile?**

Man beſchreibe in dem gegebenen rechten Winkel XBY über der in dem einen Schenkel BX liegenden Strecke BA ein gleichſeitiges $\triangle ABC$ (Fr. 114), dann iſt $\angle CBX = \frac{2}{3}\mathfrak{R}$ (Fr. 74 V.), folglich $\angle CBY = \frac{1}{3}\mathfrak{R}$.

**127. Wie halbiert man eine Strecke $\overline{PQ}$ oder einen Bogen $\widehat{PQ}$?**

Zeichnet man über $\overline{PQ}$ (wie in Fig. 93 S. 101 am beſten auf verſchiedenen Seiten von $\overline{PQ}$) zwei gleichſchenkelige Dreiecke $PQM_1$ und $PQM_2$ (Fr. 115), ſo halbiert $M_1M_2$ ſowohl $\overline{PQ}$ (Fr. 102 VIII.), als $\widehat{PQ}$ (Fr. 90 V.).

**128. Wie teilt man eine Strecke KU in n gleiche Teile?**

Man trage in K an KU unter beliebig großem Winkel UKN einen Strahl an, trage (wie in Fig. 122 S. 125) auf dieſem von K aus n gleiche Teile ($KS = SA = AB = \cdots\cdots = CN$) auf, verbinde den letzten Teilpunkt N mit U und ziehe durch die anderen Teilpunkte S, A, B ꝛc. Parallele zu NU; dann teilen dieſe Parallelen die Strecke KU in n gleiche Teile (Fr. 111 VI.).

**129. Wie zeichnet man ein Dreieck mit einer gegebenen Seite a und einem gegebenen Gegenwinkel A dieſer Seite?**

I. Man verfahre, wie in Fr. 79 III. 4. angedeutet wurde; man mache über $CB = a$, z. B. $\angle CBX = \angle BCY = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} A$ und lege durch B, C und den Schnittpunkt A zwiſchen CY und BX einen Kreis (Fr. 88 I.).

II. Wären für ein Dreieck a, A und $CA_2 = b$ (Fig. 72) gegeben, ſo brauchte man in den nach I. geſchlagenen Kreis nur noch die Sehne $CA_2 = b$ einzutragen (Fr. 102 XII.). Bei $b > a$ laſſen ſich wegen Fr. 91 VIII. aus a, A und b zwei verſchiedene Dreiecke zeichnen. Vergl. Fr. 79 VIII.

**130. Wie zeichnet man ein Dreieck, von dem ein Winkel A eine anliegende Seite c und I. die Summe $a + b$, oder II. die Differenz $a - b$ der beiden anderen Seiten gegeben iſt?**

Auf dem einen Schenkel AX des Winkels A trage man die Seite $AB = c$, auf dem andern Schenkel AY die Strecke:

I. $AD = a + b$, oder II. $AE = b - a$

auf; dann:

I. ſchneide man von dem $\angle DBA$ den $\angle DBC = \angle BDA$ (Fr. 118) ab; ſchneiden ſich nun BC und AD in C, ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck (Fr. 74 VI.). Vergl. Fig. 58 S. 70.

II. trage man in B an BE auf der BA entgegengeſetzten Seite den (ſpitzen) $\angle EBC = \angle BEY$ an (Fr. 118); ſchneiden ſich nun BC und AY in C, ſo iſt das Dreieck ABC das geſuchte (Fr. 74 VI.). Vergl. Fig. 59 S. 70.

**131. Wie zeichnet man ein Dreieck aus zwei Winkeln u und v und der Summe der drei Seiten? Vergl. Fr. 79 VII.**

An den Endpunkten N und M der Strecke $NM = a + b + c$ trage man $\angle MNX = \frac{1}{2} \angle u$ und $\angle NMY = \frac{1}{2} \angle v$ an; iſt nun $u + v < 2 \Re$ (Fr. 69 IV.), ſo iſt $\angle MNX + \angle NMY < \Re$ und NX und MY ſchneiden ſich in C (Fr. 62 IV. 3.); ſchneidet man jetzt vom (ſtumpfen) Winkel

NCM die $\angle NCU = \frac{1}{2} u$ und $\angle MCV = \frac{1}{2} v$ ab und verbindet C mit den Punkten A und B, in denen NM von CU und CV geſchnitten wird (Fr. 62 IV. 3.), ſo hat das $\triangle ABC$ die drei Seiten $AB = c$, $AC = AN = b$ und $BC = BM = a$ (Fr. 74 VI.), während $\angle CAB = u$ und $\angle CBA = v$ iſt (Fr. 69 VI.).

**132. Wie teilt man einen Kreis in 4, 8, 16 ꝛc. und in 3, 6, 12, 24 ꝛc. gleiche Teile? und wie zeichnet man ein regelmäßiges Vieleck von dieſer Seitenzahl?**

I. Zeichnet man in einem Kreiſe zwei auf einander ſenkrechte Durchmeſſer AB und CD (Fr. 121), ſo iſt:

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DA} \text{ (Fr. 39 III., 54 III.).}$$

II. Zeichnet man über einem Halbmeſſer MA ein gleichſeitiges $\triangle AMB$, ſo iſt der Centriwinkel $AMB = 60°$ (Fr. 74 V.), alſo $\overset{\frown}{AB}$ der ſechſte Teil vom ganzen Kreiſe (Fr. 54 V. und 50 II.).

Ein aus A mit AM als Halbmeſſer geſchlagener Kreis geht durch B (Fr. 48 III., 64 III.) und ſchneidet auf der anderen Seite von AM einen Bogen $\overset{\frown}{AC}$ ab, der $\overset{\frown}{AB}$ gleicht ꝛc.

III. Zwei benachbarte Bögen von 60° (II.) geben als Summe einen Bogen von 120°, d. h. den dritten Teil des ganzen Kreiſes.

IV. Durch fortgeſetzte Halbierung der Bögen (Fr. 127) erhält man aus I. bezw. II. die Teilung in 8, 16, 32 ꝛc., bezw. 12, 24, 48 ꝛc. gleiche Teile. Vergl. Fr. 113 VIII.

V. Ein regelmäßiges Vieleck mit 3, 6, 12 u. ſ. f. und mit 4, 8, 16 u. ſ. f. Seiten erhält man nach I. bis IV. und Fr. 113 VII.

Anm. Über das Zeichnen des regelmäßigen Vielecks von 5, 10, 20 .... Seiten vergl. Fr. 164 VI. in Verbindung mit Fr. 113 VIII.

**133. Wie beweiſt man die Richtigkeit folgender Sätze?**

I. Ein Viereck, deſſen Winkel ſämtlich rechte ſind, iſt ein Rechteck, oder ein Quadrat (Fr. 62 II. 3., oder 107 III.).

II. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Rechtecks begrenzen ein Quadrat (Fr. 74 VI., 68 II.).

III. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Rhomboids begrenzen ein Rechteck (Fr. 107 I., 68 II.).

IV. In jedem Sehnenvielecke von gerader Seitenzahl iſt die Summe des erſten, dritten, fünften ꝛc. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, ſechsten ꝛc. (Fr. 48 III. und 74 I.). Vergl. Fr. 96 VIII.

V. In jedem Tangentenvielecke von gerader Seitenzahl iſt die Summe der erſten, dritten, fünften ꝛc. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, ſechsten ꝛc. Seite (Fr. 103 V.). Vergl. Fr. 104 X.

VI. Jeder Punkt V innerhalb der Centralſtrecke $M_1M_2$ (Fig. 93) zweier ſich ſchneidenden Kreiſe iſt von der gemeinſchaftlichen Tangente T dieſer Kreiſe weiter entfernt als von jedem der Schnittpunkte P und Q der beiden Kreiſe (Fr. 91 VI., oder XIII., 20 III.).

Jeder Punkt U in der Verlängerung der Centralſtrecke liegt dem nächſten Berührungspunkte und deshalb (Fr. 74 VIII.) auch der gemeinſchaftlichen Tangente näher als dem Schnittpunkte der beiden Kreiſe (Fr. 91 VI., oder XIII., 74 IX.).

Es giebt demnach in der Centralſtrecke und ihren Verlängerungen keinen dritten Punkt, aus dem ſich ein die gemeinſchaftliche Tangente T berührender Kreis durch einen der Schnittpunkte P oder Q der beiden erſten Kreiſe ſchlagen läßt.

VII. Der Umfang eines Vielecks mit lauter hohlen Winkeln iſt kleiner als der Umfang eines dasſelbe umſchließenden Vielecks.

VIII. Der geometriſche Ort für die Endpunkte aller gleich langen Tangenten desſelben Kreiſes iſt ein dem gegebenen concentriſcher Kreis.

**134. Wie laſſen ſich die geometriſchen Aufgaben einteilen und welche Teile umfaßt ihre Auflöſung?**

I. Die in Fr. 114 bis 132 vorgeführten einfachen Aufgaben (vergl. Fr. 136 IV.) aus dem Gebiete der ebenen

Geometrie laſſen erkennen, daß den Gegenſtand derſelben die Auffindung und Zeichnung von Punkten, Geraden, Dreiecken, Vielecken und Kreiſen bildet. Im Grunde genommen kommt es immer auf die Beſtimmung von Punkten hinaus, welche ihrerſeits (vergl. z. B. Fr. 9 I., 88 III. ꝛc.) für die Beſtimmung der andern Gebilde beſtimmend ſind.

Die geometriſchen Aufgaben laſſen ſich in örtliche und nichtörtliche einteilen. Bei erſteren iſt der Ort, wo die Löſung der Aufgabe vorgenommen werden ſoll, im voraus beſtimmt, wie z. B. in Fr. 123 und 132 I. bis IV.; bei den letzteren, z. B. in Fr. 129, 130, 132 V., iſt dieſer Ort nicht beſtimmt.

In der Aufgabe laſſen ſich ferner die gegebenen Stücke von den geſuchten, aus jenen zu findenden Stücken unterſcheiden.

II. Zur Auffindung der Löſung iſt es meiſt ſehr förderlich und deshalb zu empfehlen, daß man eine der Aufgabe entſprechende Figur zeichne, welche man als die zu findende und bereits gefundene anſieht, und daß man aus dieſer Figur, beſonders aus den in ihr enthaltenen Dreiecken, maßgebende Beziehungen zwiſchen den gegebenen und geſuchten Stücken herzuleiten trachtet. Dies iſt der Zweck der Analyſis der Aufgabe.

So gelangt man zur Konſtruktion, welche angiebt, wie die Aufgabe gelöſt wird. Dann folgt der Beweis, welcher aus der Konſtruktion und aus bekannten Sätzen nachweiſt, daß die Löſung richtig iſt und wirklich die geſuchten Stücke aus den gegebenen liefert.

Dann hat endlich noch die Determination zu folgen, welche darthut: 1. ob die Löſung immer und allgemein, oder nur unter gewiſſen Bedingungen möglich iſt, und 2. ob die Aufgabe eindeutig, zweideutig, oder mehrdeutig iſt, d. h. eine, zwei, oder mehrere Figuren den Forderungen der Aufgabe genügen. Hierbei iſt namentlich die Größe der gegebenen Stücke und ihre gegenſeitige Lage ins Auge zu faſſen und als veränderlich zu behandeln.

III. Eine Aufgabe iſt beſtimmt, wenn die gegebenen Stücke nur eine endliche Anzahl, unbeſtimmt, wenn ſie unendlich viele Löſungen zulaſſen, überſtimmt, wenn mehr Stücke gegeben ſind, als zur Beſtimmtheit erforderlich ſind.

IV. Fehlt zur Beſtimmtheit einer Aufgabe nur ein Stück, oder nur eine Bedingung, ſo kann man doch häufig aus bekannten Sätzen ſagen, daß der einzige, nicht völlig beſtimmte Punkt auf einer beſtimmten Geraden, oder auf einem beſtimmten Kreiſe liegen muß (vergl. z. B. Fr. 74 XVII.). Man nennt dann die Gerade und den Kreis den geometriſchen Ort dieſes Punktes.

Unter dem geometriſchen Orte eines nicht völlig beſtimmten Punktes (oder eines andern Raumgebildes; vergl. Fr. 166 X. und XI.) verſteht man im allgemeinen eine Linie, oder eine Fläche, welche ſo beſchaffen iſt, daß alle ihre Punkte und nur ihre Punkte allein eine beſtimmte Bedingung für die Lage jenes Punktes (oder jenes Raumgebildes) erfüllen.

Bei völlig beſtimmten Aufgaben können ſich für einen noch unbekannten Punkt mehrere geometriſche Örter angeben laſſen, welche jedoch dann nur einen gemeinſchaftlichen Punkt haben werden.

V. Iſt die Löſung einer Aufgabe ſo einfach und von ſelbſt einleuchtend, daß eine beſondere Konſtruktion gar nicht erſt angegeben zu werden pflegt, Analyſis, Beweis und Determination daher auch wegfallen, ſo nennt man ſie eine Forderung (ein Poſtulat). Vergl. z. B. Fr. 15 V. und Fr. 47 VII.

**135. Wie zeichnet man ein Dreieck aus einer Seite $a$, der Projektion $p$ derſelben auf die Seite $c$ und der Mittellinie $m_a$?**

I. An dieſer Aufgabe möge der Inhalt von Fr. 134 erläutert werden.

Analyſis. Man zeichne irgend ein Dreieck $A_0B_0C_0$ hin, mache $C_0D_0 \perp A_0B_0$ und ziehe $A_0E_0$ nach der Mitte $N_0$ von $B_0C_0$. Man ſieht dann, daß das $\triangle B_0C_0D_0$ aus $a_0$, $p_0$ und $\angle D_0$ beſtimmt iſt (Fr. 81 I.), und erkennt, daß der Punkt $A_0$

in $B_0D_0$, oder in ſeiner Verlängerung liegt, und zwar in der Entfernung $N_0A_0$ von $N_0$ liegt.

Konſtruktion. Man ziehe die Gerade BY und nehme $BD = p$, mache $\angle BDZ = 90°$ und ſchneide in C die Senkrechte DZ mit einem Kreiſe aus B vom Halbmeſſer a; dann halbiere man CB in N und ſchlage um N einen Kreis vom Halbmeſſer $m_a$, welcher BY in A ſchneidet. ABC (vergl. Fig. 126) iſt das geſuchte Dreieck.

Beweis. $BC = a$ (Konſtr.); $CD \perp BY$ und $BD = p$, alſo p Projektion von a auf c (Fr. 112 I.); $CN = NB$, alſo NA Mittellinie und $= m_a$ (Konſtr.).

Determination. Die Aufgabe iſt unlösbar, wenn $a \leqq p$ (Fr. 74 VIII.); ebenſo wenn $m_a$ kleiner iſt als die von N auf BA gefällte Normale (Fr. 83 I.). Die Aufgabe iſt eindeutig, wenn $m_a$ der von N auf AB gefällten Senkrechten gleicht (Fr. 83 II.). Es giebt ferner zwei Löſungen (Fr. 83 III.), wenn dieſe Senkrechte $< m_a$ und $m_a \gtrless \frac{a}{2}$ iſt; dabei ſind die beiden gefundenen Dreiecke beide ſpitzwinkelig bei B, wenn $m_a < \frac{a}{2}$, bei $m_a > \frac{a}{2}$ dagegen eins ſpitzwinkelig und eins ſtumpfwinkelig. Bei $m_a = \frac{a}{2}$ endlich iſt die Aufgabe wieder eindeutig und das Dreieck rechtwinkelig (Fr. 83 IX.). Vergl. auch Fr. 79 VIII.

II. Aus I. erkennt man zugleich, daß das Dreieck, wenn eine Höhe $h_c$ gegeben iſt, ſowohl als Summe, wie als Differenz der beiden durch dieſe Höhe und die Seiten a und b erzeugten Dreiecke erſcheinen kann.

**136. Was verſteht man unter einem Datum?**

I. Von den Fr. 80 I. bis III. und V. entſprechenden vier Grundaufgaben über das Dreieck iſt unter den vorhergehenden Aufgaben nur die eine in Fr. 116 geſtellt worden, eine zweite in Fr. 129 II.; die Löſung der beiden andern folgt unmittelbar aus Fr. 118.

II. In den vorausgegangenen Aufgaben konnten die gegebenen Stücke ſelbſt und ohne weiteres zur Löſung benutzt werden. Es kann aber auch ſein, daß einige der gegebenen Stücke zwar ſich nicht unmittelbar zur Löſung verwenden laſſen, daß man aber wohl durch ſie ein nicht unmittelbar gegebenes Stück zu finden vermag, welches dann an Stelle eines unmittelbar gegebenen treten und ſo die urſprüngliche Aufgabe in eine andere, womöglich leichter zu löſende umwandeln kann.

Stehen eine Anzahl von Beſtimmungsſtücken in einem ſolchen Zuſammenhange mit einander, daß man jedes einzelne derſelben finden kann, wenn die übrigen bekannt ſind, ſo nennt man die Geſamtheit ein Datum.

III. Der Inhalt von II. mag an einem Beiſpiele erläutert werden.

Iſt in einem Dreiecke ABC die Winkelhalbierende $CJ = w_c$ gegeben und ſchneidet dieſelbe die Seite c in J, ſo iſt bei $A > B$ nach Fr. 69 VI. und 68 II. der ſpitze Winkel $AJC = B + \frac{1}{2} C = B + \frac{1}{2}(180^\circ - A - B) = 90^\circ - \frac{1}{2}(A - B)$. Die zugehörige Höhe $CD = h_c$ hat aber ihren Fußpunkt zwiſchen A und J (Fr. 71 V.), und deshalb iſt der Winkel AJC auch $= 90^\circ - \angle JCD$ (Fr. 71 II.); alſo iſt nach Fr. 20 VIII.

$$\begin{aligned} \angle JCD = \angle(w_c, h_c) &= \tfrac{1}{2}(A - B), \quad \text{wenn } A > B, \\ &= \tfrac{1}{2}(B - A), \quad \text{wenn } B > A. \end{aligned}$$

Somit bilden die Winkelhalbierende $w_c$, die Höhe $h_c$ und die Winkeldifferenz $(A - B)$ ein Datum, d. h. je zwei dieſer drei Stücke beſtimmen das dritte, ſie genügen indeſſen natürlich noch nicht zur Beſtimmung des Dreiecks.

IV. Außer den Winkeln und Seiten (Fr. 79) giebt es für das Dreieck und für die Vielecke auch noch andere Beſtimmungsſtücke. Unter dieſe wird aber für jetzt der Flächeninhalt noch nicht mit aufzunehmen ſein, vielmehr ſollen einige darauf bezügliche Aufgaben ſpäter (im ſiebenten Kapitel, Fr. 180) nachgetragen werden. In Fr. 139 bis 143 dagegen folgen einige Aufgaben, deren Löſung einen beſondern Kunſtgriff nötig macht; auf ſie können verſchiedene andere Aufgaben mit Vorteil zurückgeführt werden.

**137. Welche Data für das Dreieck ſind hier zu nennen?**

I. Die drei Winkel A, B, C. Vergl. Fr. 68 II.

II. Die beiden Winkel an der Hypotenuſe eines rechtwinkeligen Dreiecks. Vergl. Fr. 71 II.

III. Im ſymmetriſchen Dreiecke der Winkel an der Spitze und die Winkel an der Grundſeite. Vergl. Fr. 75 III.

IV. Die Winkelhalbierende, die Höhe und die Winkeldifferenz. Vergl. Fr. 136 III.

V. Die Höhe und Mittellinie für eine Seite und die Differenz der Projektionen der beiden andern Seiten auf jene Seite.

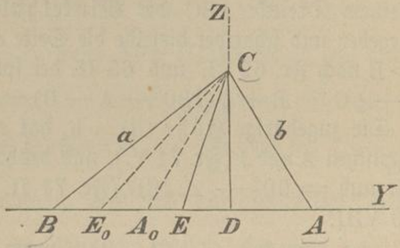

Fig. 126.

Es ſei $\angle A > \angle B$; dann iſt die Projektion $BD = p$, Fig. 126, der Seite a auf c größer als die Projektion $AD = q$ von b auf c (Fr. 112 X.). Nun iſt $ED = EA - DA = \frac{1}{2} c - q = \frac{1}{2}(p + q) - q = \frac{1}{2}(p - q)$. Das rechtwinkelige Dreieck CDE läßt ſich aber konſtruieren (Fr. 81 I.), wenn von ſeinen drei Seiten $CD = h_c$, $CE = m_c$ und ED zwei gegeben ſind; alſo läßt ſich aus zweien die dritte finden.

Wäre das Dreieck $A_0BC$ ſtumpfwinkelig, ſo wäre $E_0D = BD - BE_0 = p - \frac{1}{2} c = p - \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2}(p + q)$. Nach Fr. 112 VII. wäre ja q als negativ aufzufaſſen.

VI. Der Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes, eine Seite c und ihr Gegenwinkel C.

Wäre r und c bekannt, ſo trage man c in den Kreis vom Halbmeſſer r ein (Fr. 102 XII.); dann iſt nach 98 II. zugleich der Winkel C zweideutig beſtimmt.

Wäre r und C bekannt, ſo mache man im Kreiſe vom Halbmeſſer r an der Tangente LK, Fig. 91 S. 99, in E den $\angle n = C$ und der Schnittpunkt D liefert dann $ED = c$ (Fr. 100 I. und 98 IV.).

Wäre c und C bekannt, ſo trage man $ED = c$, Fig. 91 S. 99, auf dem einen Schenkel des Winkels $n = C$ auf; der Kreis berührt dann den andern Schenkel LK in E und beſitzt ED als Sehne (Fr. 100 I.); ſein Mittelpunkt M iſt alſo auf verſchiedene Weiſe leicht zu finden, z. B. nach Fr. 89 V.

In allen Fällen iſt die Lage des Punktes C auf dem Kreiſe und daher auch das Dreieck ſelbſt noch nicht beſtimmt.

VII. Der Halbmeſſer $r_0$ des eingeſchriebenen Kreiſes um $M_0$, ein Winkel C und die um deſſen Gegenſeite c verminderte Summe $a + b$ der beiden anliegenden Seiten.

In Fig. 102 S. 108 iſt in dem rechtwinkeligen Dreieck $CM_0L_1$ der $\angle M_0CL_1 = \frac{1}{2}C$ und $M_0L_1 = r_0$, nach Fr. 105 XI. und 104 VIII. aber auch $CL_1 = c_0 = b_1 = \frac{a + b - c}{2}$.

Das $\triangle CM_0L_1$ iſt aber durch je zwei der genannten Stücke beſtimmt (Fr. 81) und ſomit läßt ſich aus den letzteren das dritte Stück finden.

VIII. Der Halbmeſſer $r_3$ des einer Seite c angeſchriebenen Kreiſes um $M_3$, der Gegenwinkel C dieſer Seite und die Summe $s = a + b + c$ der drei Seiten (Fr. 81).

In Fig. 102 S. 108 iſt ja im rechtwinkeligen $\triangle CM_3W_1$ der $\angle M_3CW_1 = \frac{1}{2}C$ und $M_3W_1 = r_3$, nach Fr. 105 XII. aber $CW_1 = \frac{a + b + c}{2}$.

**138. Welche Data für die Vierecke ſind hier aufzuführen?**

I. Die vier Winkel. Vergl. Fr. 72 III.

II. Bei Parallelogrammen zwei parallele Seiten, die Höhe (Fr. 108 XIII.) für das zweite Seitenpaar und die Winkel. Vergl. Fr. 81.

Anſtatt eines Winkels könnte auch der Winkel zwiſchen den beiden Höhen gewählt werden; vergl. Fr. 71 VI.

III. Beim Parallelogramm eine Diagonale, eine der beiden Höhen und der Winkel, welchen ſie mit jener Diagonale macht. Vergl. Fr. 81.

IV. Bei Trapezen eine der nichtparallelen Seiten, der an dieſer liegende Winkel und die Höhe (Fr. 108 XIII.). Vergl. Fr. 81.

V. Bei Trapezen zwei benachbarte Seiten, der von ihnen eingeſchloſſene Winkel und die ihre freien Enden verbindende Diagonale. Vergl. Fr. 80 I. und II.

VI. Bei Trapezen eine Diagonale, der Winkel zwiſchen ihr und einer parallelen Seite und die Höhe. Vergl. Fr. 81.

VII. Bei Trapezen die Verbindungsſtrecke der Mitten der beiden parallelen Seiten, die Höhe und die Differenz der Projektionen der nichtparallelen Seiten auf die parallelen. Vergl. Fr. 137 V.

**139. Ein Dreieck zu konſtruieren aus der Höhe $h_c$, dem Winkel $C$ an der Spitze und der Differenz $p-q$ der Projektionen der beiden andern Seiten $a$ und $b$ auf die Grundſeite $c$.**

Anleitung zur Löſung. Errichtet man beim $\triangle ABC$, Fig. 126, im Endpunkte $A_0$ der Projektionendifferenz $BA_0 = p-q$ eine Normale $A_0Z_0$, verlängert man $AC$, bis ſie $A_0Z_0$ in $N$ ſchneidet, und macht man noch $CK \perp A_0Z_0$, ſo iſt

$$\begin{array}{c} \triangle CA_0K \cong \triangle A_0CD \text{ (Fr. 108 XII. und I.)} \\ \hline CK = A_0D = AD \text{ (Fr. 67 II., 75 III.)} \\ \hline \triangle CKN \cong \triangle ADC \text{ (Fr. 81 II., 62 I.)} \\ \hline NK = CD = A_0K \text{ (Fr. 67 II., 108 XIII.);} \end{array}$$

es iſt alſo $A_0N = 2\,DC = 2\,h_c$ und außerdem $\angle NCB = 180^\circ - C$.

Löſung. Man konſtruiere $\triangle BA_0N$ aus $BA_0 = p - q$, $\angle A_0 = 90°$ und $A_0N = 2\,DC$. Der Eckpunkt C des geſuchten Dreiecks liegt dann zugleich in einer Parallelen zu $BA_0$ im Abſtande $A_0K = h_c$ und auf einem Kreiſe mit dem Peripheriewinkel $(180° - C)$ über der Sehne BN (Fr. 98 VII.). Der Eckpunkt A findet ſich ſchließlich am bequemſten aus $CA = CA_0$, oder auch durch Verlängerung von NC.

Von den beiden Schnittpunkten zwiſchen dem Kreiſe und KC iſt nur der von BN aus nach $A_0Z$ hin liegende zu gebrauchen; der andere liefert ~~k~~ein unbrauchbares Dreieck, welches nicht alle gegebenen Stücke enthält.

Wäre $h_c$ nicht gegeben, ſo wäre die Aufgabe unbeſtimmt; jedes andere $h_c$ liefert ein anderes $A_0N$ und BN, ſowie einen anderen Kreisbogen, aber doch ein Dreieck mit $A_0B = p - q$ und C.

**140. Wie konſtruiert man ein Dreieck aus der Grundſeite c, der Höhe $h_c$ und der Differenz A—B der Grundſeitenwinkel?**

Anleitung zur Löſung. Iſt im $\triangle ABC$, Fig. 126, $BA_0 = BD - DA_0 = BD - DA = p - q$ die Differenz der Projektionen der Seiten a und b auf c, ſo iſt $\angle A_0CB = \angle CA_0A - \angle B$ (Fr. 69 VI.) $= \angle CAA_0 - \angle B$ (Fr. 75 VII.) $= \angle A - \angle B$. Ferner iſt $A_0E_0 = E_0B$ und $DE_0 = DA_0 + A_0E_0 = DA + E_0B = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$.

Löſung. Man mache $DE_0 = \frac{1}{2} c$, $\angle E_0DZ = 90°$ und $DC = h_c$, ſodann verlängere man $CE_0$ um $E_0X = E_0C$ und zeichne über CX ein Parallelogramm $CBXA_0$, worin der $\angle CBX = 180° - \angle A_0CB = 180° - \angle (A - B)$. Dazu hätte man einen Kreis zu ſchlagen, in welchem der Peripheriewinkel über der Sehne CX die Größe $180° - (A - B)$ hat (Fr. 98 VII.), und dieſen mit der Verlängerung von $DE_0$ in B zu ſchneiden. A findet ſich endlich aus $BA = c$.

Der Punkt B (und ähnlich C in Fr. 139) erſcheint beſtimmt durch zwei geometriſche Örter (Fr. 74 XVII.), nämlich: den Kreis und die Gerade $DE_0$.

**141. Ein Dreieck ABC zu zeichnen aus dem Halbmeſſer r des umſchriebenen Kreiſes, der Grundſeite AB = c und der Winkelhalbierenden CJ = $w_c$.**

I. Anleitung zur Löſung. Iſt in Fig. 127 der Kreis K um das $\triangle ABC$ geſchlagen und ſchneidet ihn die Winkelhalbierende CJ in $J_o$, ſo entſtehen nach Fr. 69 I. zwei gleichwinkelige Dreiecke $J_oJA$ und $J_oAC$, wenn man $J_oA$ zieht. Denn es iſt ja

$\angle J_oCA = \angle J_oCB = \angle J_oAB$ (Vor. und Fr. 96 II.)
$\angle AJ_oC = \angle JJ_oA$ (Fr. 20 I.).

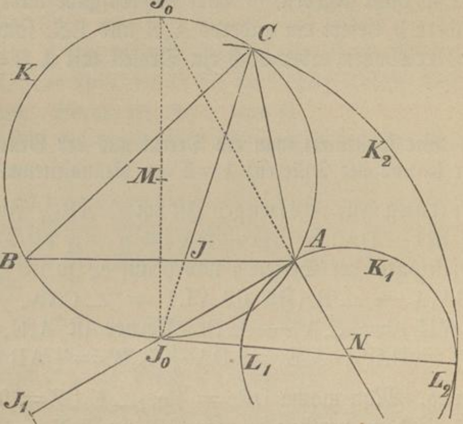

Fig. 127.

Löſung*). Man ſchlage einen Kreis K um M mit dem Halbmeſſer MA = r, trage in ihn die Sehne AB = c ein (Fr. 102 XII.; vergl. auch Fr. 98 VII.) und mache $\widehat{AJ_o} = \widehat{J_oB}$ (Fr. 90 III.); dann geht die Winkelhalbierende durch $J_o$ (Fr. 98 IV.). Ferner mache man $AN \perp AJ_o$ und $AN = \frac{1}{2}w_c$,

---

*) Allgemeiner (aber etwas umſtändlicher) lautete die Löſung: Man trage in den um M geſchlagenen Kreis K vom Halbmeſſer r die Sehne AB = c ein,

ſchlage aus N den Kreis $K_1$ durch A, ſchneide ihn durch die Gerade $J_oNL_2$ und ſchlage aus $J_o$ den Kreis $K_2$ durch $L_2$; dann ſchneidet $K_2$ den Kreis K im geſuchten Punkte C des Dreiecks ABC. — Der zweite Schnittpunkt zwiſchen K und $K_2$ liefert nichts Neues.

Natürlich muß auch $J_oJ = J_oL_1$ ſein und man könnte damit den Punkt J in BA beſtimmen; wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeiten im Zeichnen iſt es aber für die Praxis im allgemeinen vorzuziehen, $J_oC$ durch die weiter von einander entfernten Punkte $J_o$ und C zu beſtimmen.

Der **Beweis** folgt in Fr. 161 VIII. Ein anderer Beweis liegt in Fr. 160 IV.

In gleicher Weiſe wäre die Aufgabe zu löſen, wenn ſtatt CJ die Halbierungslinie $CJ' = w_c'$ des Außenwinkels bei C gegeben wäre; nur würde dann der Bogen $\overparen{AJ_o'B}$ in $J_o'$ zu halbieren und die Normale $AN' = \frac{1}{2}w_c'$ auf $AJ_o'$ zu errichten ſein. Wie $J_o'$ in der Verlängerung von NA liegt, ſo liegt N' in der Verlängerung von $J_oA$; CJ' liegt in Fig. 127 rechts von CA und $K_2'$ iſt um $J_o'$ durch $L_1'$ zu ziehen.

II. Eine andere Löſung folgt in Fr. 161 X.

**142. Wie findet man das Dreieck ABC aus der Grundſeite c, dem Gegenwinkel C und der Winkelhalbierenden $w_c$?**

I. Beſchreibt man über $AB = c$ einen Kreis K, in welchem der Peripheriewinkel über $c = C$ iſt (Fr. 98 VII.), ſo kann man aus deſſen Halbmeſſer r nebſt c und $w_c$ nach Fr. 141 das $\triangle$ ABC finden.

II. Zwei andere Löſungen folgen in Fr. 161 IX. und X.

---

mache $\overparen{AJ_0} = \overparen{BJ_0}$, $AZ \perp J_0A$, ſchlage um einen beliebigen Punkt P in AZ einen Kreis $K_3$ durch A, über $J_0P$ einen Halbkreis $K_4$, trage in dieſen von P aus eine Sehne PQ ein, welche der Entfernung einer $w_c$ gleichenden Sehne des Kreiſes $K_3$ vom Mittelpunkte P an Länge gleicht, und ziehe $J_0Q$. Dann ſchneidet $J_0Q$ den Kreis $K_3$ in zwei Punkten $U_1$ und $U_2$ und es iſt nach Fr. 92 I. $U_1U_2 = w_c$, ebenſo (wie in Fr. 161 IV.) $J_0U_1 \cdot J_0U_2 = \overline{J_0A}^2$, deshalb ebenfalls $J_0C = J_0U_2$ und $J_0J = J_0U_1$.

**143. Wie findet man in einer gegebenen Geraden G einen Punkt M, deſſen Entfernungen MA und MB von zwei gegebenen Punkten A und B eine vorgeſchriebene Summe s (oder Differenz d) liefern?** Vergl. Fr. 148 I.

I. Anleitung zur Löſung. Der geſuchte Punkt M läßt ſich auch auffaſſen als Mittelpunkt eines Kreiſes $K_1$ (Fig. 128) vom Halbmeſſer MB = MU und letzterer berührt den um A mit dem Halbmeſſer AU = s = MA + MB (oder d = MA — MB) geſchlagenen Kreis $K_2$ von innen (oder von außen) in U. Wird ferner um irgend einen Punkt N in G mit dem Halbmeſſer NB ein dritter Kreis $K_3$ geſchlagen, ſo

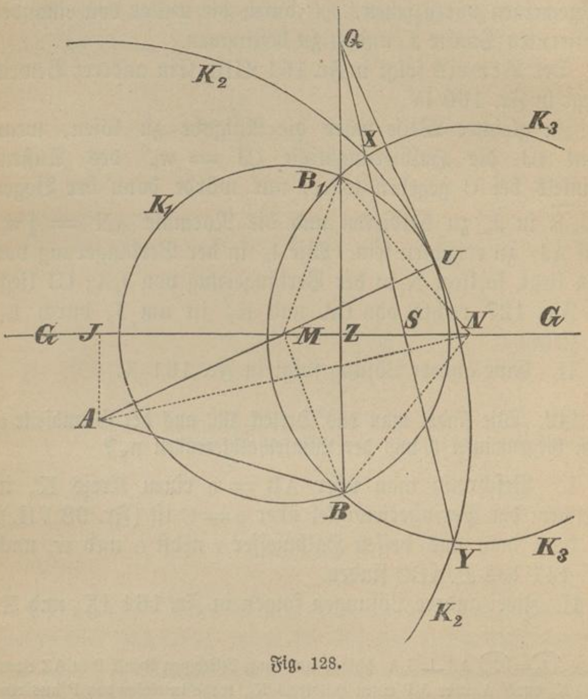

Fig. 128.

ſchneiden ſich $K_3$ und $K_1$ in B und $B_1$ (Fr. 102 III.), $K_3$ und $K_2$ in Y und X (Fr. 102 VII. und Fr. 76), weil $AN > AU - NU > AU - NB_1$ und $AN < AU + NU < AU + NB_1$ (Fr. 91 XIII.). $BB_1$ und XY ſchneiden ſich in einem Punkte Q, und es muß die nach dem Berührungspunkte U zwiſchen $K_1$ und $K_2$ gezogene Strecke QU die beiden Kreiſe $K_1$ und $K_2$ zugleich berühren.

Löſung. Man mache $BZ \perp G$ und $B_1Z = BZ$, ſchlage aus A den Kreis $K_2$ mit dem Halbmeſſer $AU = s$ (oder d), aus einem Punkte N in G den Kreis $K_3$ durch B und $B_1$, welcher $K_2$ in Y und X ſchneidet, und ziehe vom Schnittpunkte Q zwiſchen $BB_1$ und YX die Tangente QU an $K_2$ (Fr. 103 I.); dann ſchneidet UA die Gerade G in M. — Nach Fr. 103 II. giebt es zwei Tangenten QU an $K_2$, zwei Berührungspunkte U und zwei Punkte M in G.

Der Beweis folgt in Fr. 161 XI.

Dürfen A und B auf verſchiedenen Seiten von G liegen? Darf G durch A, durch B, oder durch beide gehen? Wie geſtaltet ſich dann die Löſung?

II. Wie ließe ſich die Aufgabe mittels eines biegſamen Fadens von der Länge s (oder d) löſen, deſſen Enden in A und B feſtzumachen wären?

III. Über eine dritte Löſung vergl. 170 VIII.

## Sechſtes Kapitel.

# Die Ähnlichkeit ebener Figuren.

**144. Wenn ſind zwei Strecken kommenſurabel? wenn inkommenſurabel?**

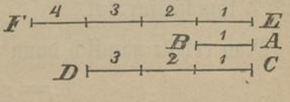

Fig. 129.

I. Iſt eine Strecke $CD = a$ (Fig. 129) genau 2, 3, 4 .... x mal ſo groß als eine andere Strecke $AB = m$, ſo heißt a ein ganzes

Vielfaches von m, während m ein Maß von a genannt wird. Vergl. Fr. 23 III.

Dabei iſt $a = xm$, oder $a : m = x$, und m geht alſo in a auf. Die ganze Zahl x, welche angiebt, wieviel mal m in a enthalten iſt, heißt die Maßzahl von a.

II. Geht dieſelbe Strecke $AB = m$ ſowohl in der Strecke $CD = a$, als in der Strecke $EF = b$ auf, ſo iſt m ein gemeinſchaftliches Maß von a und b, und die beiden Strecken a und b heißen dann kommenſurabel.

Zwei Strecken, welche kein gemeinſchaftliches Maß haben, werden inkommenſurabel genannt.

III. Sind u und v ganze Zahlen, alſo ua und vb ganze Vielfache von a und b, dann geht das gemeinſchaftliche Maß m von a und b auch in der Summe und dem Unterſchiede von ua und vb auf. Iſt nämlich $a = xm$ und $b = ym$, wobei x und y ganze Zahlen ſind, ſo iſt (Fr. 20 XIII.):

$$ua \pm vb = uxm \pm vym = (ux \pm vy)\, m,$$

und hier iſt $(ux \pm vy)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

IV. Nimmt man die kleinere a von zwei Strecken a und b ſo oft als möglich ($z_0$ mal) von der größeren b hinweg, ſo bleibt, wenn a nicht in b aufgeht, ein Reſt $r_0$, welcher kleiner als a iſt; es iſt dann $b = z_0 a + r_0$.

Nimmt man nun $r_0$ ſo oft als möglich ($z_1$ mal) von a weg und bleibt dabei ein weiterer Reſt $r_1$, ſo iſt dieſer kleiner als $r_0$, und es iſt $a = z_1 r_0 + r_1$. Bei Fortſetzung dieſes Verfahrens erhalte man der Reihe nach die ferneren Reſte $r_2, r_3 \dots$

Wird dabei endlich einmal ein Reſt = 0, dann ſind a und b kommenſurabel.

Man erhält nämlich dann zu:

$$b = z_0 a + r_0$$
$$a = z_1 r_0 + r_1$$

weiter:

$$r_o = z_2 r_1 + r_2$$
$$r_1 = z_3 r_2 + r_3$$
$$r_2 = z_4 r_3 + r_4$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$r_{n-2} = z_n r_{n-1} + r_n$$
$$r_{n-1} = z_{n+1} r_n.$$

Demnach iſt alſo zunächſt $r_{n-1}$ ein Vielfaches von $r_n$; Gleiches gilt wegen III. auch von $r_{n-2}$ und allen vorhergehenden Reſten, und endlich ebenſo von a und b.

V. Sind die Strecken a und b kommenſurabel, iſt z. B. $a = xm$ und $b = ym$, ſo geht m nach III. auch in $r_o = b - z_o a$ auf, daher ferner noch in $r_1 = a - z_1 r_o$, dann in $r_2 = r_o - z_2 r_1$ und in allen folgenden Reſten $r_3$, $r_4$ 2c.

Da ferner nach IV. jeder folgende Reſt kleiner iſt als der vorhergehende, ſo werden auch die Maßzahlen der ſpäteren Reſte immer kleiner und kleiner; zudem ſind alle Maßzahlen x, y . . . . ganze Zahlen (I.), daher muß, wenn man das in IV. beſchriebene Verfahren lange genug fortſetzt, endlich eine Maßzahl = 0, alſo der zugehörige Reſt ebenfalls = 0 werden.

VI. Aus IV. und V. folgt ſofort, daß kein Reſt = 0 werden kann, falls die Strecken a und b inkommenſurabel ſind, und daß letztere

VII. inkommenſurabel ſind, ſobald kein Reſt verſchwindet.

VIII. Etwas umſtändlicher läßt ſich nachweiſen, daß in IV. der letzte nicht verſchwindende Reſt $r_n$ das größte gemeinſchaftliche Maß*) für a und b iſt.

### 145. Wie verhalten ſich zwei Strecken?

I. Das (geometriſche) Verhältnis zweier Strecken findet man nach Fr. 23 IV. durch Diviſion der einen durch die andere. (Vergl. Katech. d. prakt. Arithmetik, S. 135 bis 157; desgl. ebenda Fr. 45.)

---

*) Vergl. Katechismus der praktiſchen Arithmetik. 3. Aufl. Leipzig 1889. S. 64.

Der hierbei auftretende Quotient iſt eine unbenannte Zahl, und jenachdem dieſe Zahl rational, oder irrational iſt (d. h. jenachdem dieſe Zahl zur Zahl 1 kommenſurabel, oder inkommenſurabel iſt), heißt das Verhältnis ſelbſt ein rationales, oder ein irrationales Verhältnis.

Auf einfache rationale Verhältniſſe in Dreiecken ſind wir bereits in Fr. 111 VI. bis VIII. geſtoßen.

II. Zwei kommenſurable Strecken a und b verhalten ſich wie ihre Maßzahlen und ſtehen in einem rationalen Verhältnis zu einander; denn ihre Maßzahlen ſind ganze Zahlen, weshalb ihr Quotient rational ſein muß. Iſt nämlich $a = xm$ und $b = ym$, ſo iſt (nach Fr. 20 IV.):

$$\frac{a}{b} = \frac{xm}{ym} = \frac{x}{y}.$$

III. Sind die Strecken a und b inkommenſurabel, ſo geht ein Maß m von $b = ym$ nicht in a auf, vielmehr iſt jedes Vielfache von m entweder größer, oder kleiner als a.

Iſt nun xm das größte unter den Vielfachen von m, welche kleiner als a ſind, ſo wird das nächſte Vielfache, nämlich $(x+1)m$, ſchon größer ſein als a; a liegt alſo zwiſchen dieſen beiden Vielfachen, oder es iſt (nach Fr. 20 VIII. und IV.):

$$xm < a < (x+1)\,m$$
$$\frac{xm}{b} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)\,m}{b}$$
$$\frac{xm}{ym} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)\,m}{ym}$$
$$\frac{x}{y} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{y}.$$

Alſo läßt ſich das Verhältnis der inkommenſurabeln Strecken a und b zwiſchen zwei rationale Verhältniſſe $\frac{x}{y}$ und $\frac{x+1}{y}$ einſchließen. Der Unterſchied dieſer beiden

Verhältniſſe iſt $\frac{x+1}{y} - \frac{x}{y} = \frac{1}{y}$ und wird um ſo kleiner, je größer der Nenner $y$ wird; $y = b:m$ aber kann man beliebig groß machen, wenn man nur das Maß $m$ immer kleiner und kleiner wählt. Wenn nun $y$ wächſt, ſo wächſt zugleich auch $x$, ſowohl $xm$, als $(x+1)m$ nähert ſich $a$, und es rücken ſich die beiden Grenzverhältniſſe einander immer näher und näher, denn der Unterſchied zwiſchen beiden vermindert ſich dadurch, daß $\frac{xm}{b} = \frac{x}{y}$ bei wachſendem $y$ nach und nach größer, $\frac{(x+1)m}{b} = \frac{x+1}{y}$ nach und nach kleiner wird. Je näher aber dieſe beiden Grenzverhältniſſe an einander gerückt ſind, deſto geringer iſt der Fehler, welchen man begeht, wenn man das zwiſchen ihnen liegende Verhältnis $\frac{a}{b}$ der einen, oder anderen Grenze, z. B. $\frac{x}{y}$, gleichſetzt.

Genau jedoch läßt ſich das Verhältnis der beiden inkommenſurabeln Strecken $a$ und $b$ nie durch das Verhältnis zweier ganzen Zahlen ausdrücken, wie groß man auch $y$ wählen mag; das Verhältnis $\frac{a}{b}$ iſt vielmehr irrational, und als genaues Verhältnis hätte die Zahl zu gelten, welcher ſich die beiden Grenzenverhältniſſe $\frac{x}{y}$ und $\frac{x+1}{y}$ immer mehr und mehr nähern, je mehr ſie ſich bei Vergrößerung von $y$ einander ſelbſt nähern, indem das eine immer größer, das andere immer kleiner wird.

**146. Was verſteht man unter Längeneinheit und Längenzahl?**

I. Da man nach Fr. 145 III. das Verhältnis zweier inkommenſurabeln Strecken mit beliebig großer Genauigkeit durch ein rationales Verhältnis erſetzen kann, ſo darf man eine Strecke $m$ als Maß für alle anderen Strecken wählen und nennt dieſes Maß dann die Längeneinheit (Maßſtab).

II. Die Maßzahl $x$ einer anderen Strecke $a = xm$ heiße die Längenzahl dieſer Strecke.

Zwei Strecken verhalten ſich dann wie ihre Längenzahlen. Geht zwar nicht die Längeneinheit, wohl aber ein Teil derſelben in einer Strecke auf, ſo iſt die Längenzahl der letzteren ein Bruch.

III. Wegen ſeiner großen Verbreitung benutzen wir als Längeneinheit das Meter oder den Stab ($1^m$).

Tabellen über die Unterabteilungen und Vielfachen des Meters und ſein Verhältnis zu anderen Längeneinheiten, namentlich den verſchiedenen Fußmaßen und deren Unterabteilungen, folgen am Schluß dieſes Katechismus.

**147. Wenn bilden vier Strecken eine Proportion?**

I. Vier Strecken $a$, $b$, $c$ und $d$ ſind einander proportional oder bilden eine (geometriſche) Proportion

$$a : b = c : d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

wenn $a$ und $b$ dasſelbe Zahlenverhältnis haben, wie $c$ und $d$; ſind dagegen $a$ und $b$ inkommenſurabel, ſo ſtehen $a$, $b$, $c$ und $d$ in Proportion, wenn $a$ und $b$ bei jeder beliebigen Annäherung immer dieſelben Grenzverhältniſſe haben, wie $c$ und $d$.

II. In jeder richtigen Proportion $a : b = c : d$ gleicht wegen Fr. 20 VIII. das Produkt $ad$ der äußern Glieder dem Produkte $bc$ der innern Glieder.

III. In der ſtetigen Proportion $a : b = b : d$ heißt $b = \sqrt{ad}$ das geometriſche Mittel oder die mittlere Proportionale zu $a$ und $d$. Vergl. Fr. 19 V. und VI.

IV. Iſt eine Strecke $a$ in ſtetiger Proportion (III.), d. h. ſo geteilt, daß ihr größerer Abſchnitt $x$ das geometriſche Mittel zwiſchen $a$ und ihrem kleinern Abſchnitte $(a - x)$ iſt, ſo heißt der $x$ liefernde Schnitt der Strecke der goldene Schnitt. Vergl. Fr. 164 V.

Aus $a : x = x : (a - x)$ findet ſich: $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

V. In jeder richtigen Proportion darf man wegen II. die innern Glieder mit einander vertauſchen und ebenſo die äußern; denn dadurch ändern ſich die Produkte nicht.

VI. Über die Prüfung der Richtigkeit einer Proportion und über das Rechnen mit Proportionen vergl. Katechismus der prakt. Arithm. Fr. 129 bis 131 und Fr. 132 ff.

Die geometriſche Löſung der Proportionsaufgaben wird in Fr. 164 gezeigt werden.

**148. Wie erhält man an einem Dreieck, oder allgemeiner zwiſchen zwei Geraden proportionale Strecken?**

I. Zieht man in einem Dreieck ABC (Fig. 130) eine Parallele $A_1C_1$ zu einer Seite AC, ſo werden die Seiten AB und BC durch die Parallele in je zwei Abſchnitte geteilt; dabei ſind die oberen Abſchnitte $BA_1$ und $BC_1$ den Seiten BA und BC, die Parallele $A_1C_1$ aber der dritten Seite AC proportional.

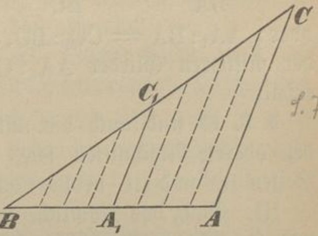

Fig. 130.

f. 73 V

Vor. $A_1C_1 \,//\, AC$.

Beh. $BA_1 : BA = BC_1 : BC = A_1C_1 : AC$.

Bew. Sind $BA_1$ und BA kommenſurabel, wäre alſo etwa $BA_1 = xm_3$ und $BA = ym_3$, ſo trage man das gemeinſchaftliche Maß $m_3$ auf ihnen ab und ziehe durch die Teilpunkte (deren einer mit $A_1$ zuſammenfällt) Parallelen zu AC; dann werden $BC_1$ und BC beziehungsweiſe auch in x und y gleiche Teile $m_1$ geteilt (Fr. 111 VI.); daher ſteht:

$$BA_1 : BA = xm_3 : ym_3 = x : y = xm_1 : ym_1 = BC_1 : BC.$$

Nach Fr. 111 VII. verhält ſich ferner auch $A_1C_1 : AC = xm_2 : ym_2 = x : y = BA_1 : BA$. Verbindet man aber die gleichen Verhältniſſe (nach Fr. 20 V.), ſo ergiebt ſich (wie auch ſchon in Fr. 111 VI. bis VII.):

$$A_1C_1 : AC = BA_1 : BA = BC_1 : BC.$$

Wären dagegen $BA_1$ und $BA$ inkommenſurabel, ſo ſind auch $BC_1$ und $BC$ inkommenſurabel; ſind $m_3$ und $m_1$ wieder Maße von $BA_1$ und $BC_1$, ſo fällt zwar ein Teilpunkt auf $A_1$ und auf $C_1$, nicht aber auf $A$ und auf $C$, $AC$ liegt vielmehr zwiſchen der $y^{ten}$ und $(y+1)^{ten}$ Parallelen, und deshalb liegt das Verhältnis $BC_1 : BC$, ebenfalls nach Fr. 111 VI., zwiſchen denſelben Grenzen (Fr. 145 III.), wie das Verhältnis $BA_1 : BA$. Daher gilt (nach Fr. 147 I.) der ausgeſprochene Satz auch jetzt noch.

II. Subtrahiert man die gleichen Verhältniſſe $BA_1 : BA$ und $BC_1 : BC$ von 1 (Fr. 20 VIII.) und macht die Reſte gleichnamig, ſo wird:

$$1 - \frac{BA_1}{BA} = 1 - \frac{BC_1}{BC}; \qquad \frac{BA - BA_1}{BA} = \frac{BC - BC_1}{BC},$$

oder: $AA_1 : BA = CC_1 : BC$, wofür man bei Vertauſchung der mittleren Glieder $AA_1 : CC_1 = BA : BC = BA_1 : BC_1$ erhält,

d. h. es ſind auch die unteren Abſchnitte $AA_1$ und $CC_1$ den oberen Abſchnitten $BA_1$ und $BC_1$, ſowie den ganzen Seiten $BA$ und $BC$ proportional.

III. Ganz das Nämliche tritt auf, wenn die Punkte $A_1$ und $C_1$ nicht in den Schenkeln $AB$ und $CB$, ſondern auf deren Verlängerungen jenſeits $B$ liegen.

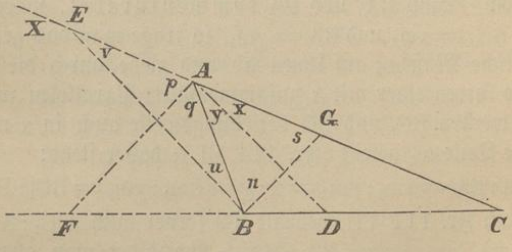

Fig. 131.

IV. Die Halbierungslinie $AD$ (Fig. 131) eines Winkels $A$ des Dreiecks $ABC$ teilt die Gegenſeite $BC$ in zwei Abſchnitte

BD und DC, welche den anliegenden Seiten AB und AC proportional ſind. Vergl. Fr. 73 V.

Zieht man durch B eine Parallele BE zu DA, bis ſie in E von der verlängerten CA getroffen wird, dann iſt $\angle u = \angle y$ und $\angle v = \angle x$ (Fr. 62 I.); da nun AD den Winkel A halbiert, alſo $\angle x = \angle y = \frac{1}{2} \angle BAC$ iſt, ſo muß nach Fr. 20 IV. auch $\angle u = \angle v$, und weiter nach Fr. 74 VI. noch $AE = AB$ ſein. Aus $AD \,//\, EB$ folgt nun nach II., daß $BD : DC = EA : AC$ und daher (wegen Fr. 20 IV.) auch $BD : DC = BA : AC$ iſt.

V. Halbiert AF in Fig. 131 den Außenwinkel BAX des $\triangle ABC$ und iſt $BG \,//\, AF$, ſo läßt ſich ganz ſo wie in IV. nachweiſen, daß $\angle n = \angle q = \angle p = \angle s$, alſo $AG = AB$ iſt, woraus dann nach II. folgt, daß $BF : CF = GA : CA$, oder $BF : CF = AB : AC$ iſt, daß alſo auch

die Halbierungslinie AF des Außenwinkels BAX die Gegenſeite BC den beiden anderen Seiten proportional ſchneidet.

VI. Weil in Fig. 131 nach Fr. 20 VIII. auch $\angle q + \angle y = \angle p + \angle x$ iſt, ſo ſtehen die beiden Halbierungslinien AD und AF auf einander ſenkrecht (Fr. 34 III. und 39 II.).

Der Scheitel A liegt demnach im Halbkreiſe über FD.

VII. Alſo iſt der *geometriſche Ort* (Fr. 74 XVII.) eines Punktes A einer Ebene, deſſen Entfernungen AB und AC von zwei gegebenen Punkten B und C dieſer Ebene in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen (vergl. Fr. 144), ein *Kreis* vom Halbmeſſer $r = \frac{1}{2} DF$. Dieſer Kreis heißt der *apolloniſche Kreis*.

Für $AB : AC = 1$ fällt D in die Mitte der Seite BC (Fr. 80 II.), DA wird ſenkrecht BC und F rückt unendlich weit fort, indem $\angle p = \angle C$ und $\angle q + \angle y = \angle D = 90^\circ$ werden, und r wächſt ins Unendliche: *der Kreis wird zur Geraden*. Vergl. Fr. 86 V.

VIII. Auch BG ſteht auf BE ſenkrecht (Fr. 71 III.), da:

$$\angle n + \angle u = \angle s + \angle v.$$

IX. Eine Erweiterung von I. und von Fr. 111 VI. bis VIII. bezw. Fr. 108 III. bildet der Satz: Werden zwei Gerade $G_1$ und $G_2$, Fig. 132, von drei Parallelen $P_1$, $P_2$ und $P_3$ geſchnitten, ſo verhalten ſich die Abſchnitte $H_1J_1$, $J_1K_1$ und $H_1K_1$ auf der einen zu einander, wie die entſprechenden Abſchnitte $H_2J_2$, $J_2K_2$ und $H_2K_2$ auf der andern.

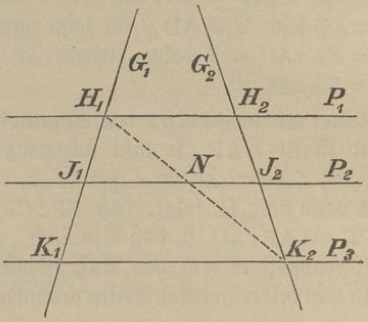

Fig. 132.

Beweis. Man ziehe $H_1K_2$, ſo iſt nach I. und Fr. 20 V.

$$H_1J_1 : J_1K_1 : H_1K_1 = H_1N : NK_2 : H_1K_2 = H_2J_2 : J_2K_2 : H_2K_2.$$

X. Für die Abſchnitte der Parallelen gilt in Fig. 132 die Gleichung*):

$$J_1J_2 \,.\, H_1K_1 = H_1H_2 \,.\, J_1K_1 + K_1K_2 \,.\, H_1J_1.$$

Beweis. Nach I. und Fr. 147 II. iſt:

$$J_1N = \frac{K_1K_2 \,.\, H_1J_1}{H_1K_1} \text{ und}$$

$$J_2N = \frac{H_1H_2 \,.\, K_2J_2}{K_2H_2} = \frac{H_1H_2 \,.\, K_1J_1}{K_1H_1}, \text{ folglich}$$

$$\begin{aligned} J_1J_2 \,.\, H_1K_1 &= (J_1N + J_2N)\, H_1K_1 \\ &= H_1J_1 \,.\, K_1K_2 + K_1J_1 \,.\, H_1H_2. \end{aligned}$$

Bei $H_1J_1 = K_1J_1 = \frac{1}{2} H_1K_1$ wird (wie in Fr. 111 III.):

$$J_1J_2 = \tfrac{1}{2}\,(K_1K_2 + H_1H_2).$$

---

*) Über die Bedeutung der Produkte in dieſer Gleichung vergl. die Anmerkung zu Fr. 159 II.

XI. Aus IV. und V. fließt wegen Fr. 20 V. auch noch:

$$CD : BD = CF : BF,$$

die Gegenſeite CB wird alſo von den beiden Winkelhalbierenden AD und AF innerlich und äußerlich in gleichem Verhältniſſe (harmoniſch) geſchnitten.

**149. Laſſen ſich die Sätze in Fr. 148 umkehren?**

I. Schneidet die Strecke $A_1C_1$ (Fig. 133) die beiden Seiten BA und BC des Dreiecks ABC ſo, daß die oberen Abſchnitte $BA_1$ und $BC_1$ den ganzen Seiten BA und BC, oder den unteren Abſchnitten $A_1A$ und $C_1C$ proportional ſind, ſo iſt die Strecke $A_1C_1$ der dritten Seite AC parallel.

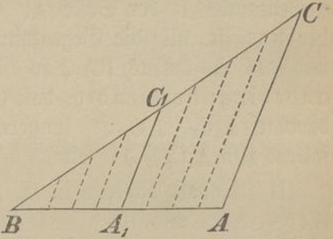

Fig. 133.

Sind $BA_1$ und $BC_1$ den ganzen Seiten BA und AC proportional, ſo ſind ſie auch den Abſchnitten $A_1A$ und $C_1C$ proportional (vergl. Fr. 148 II.) und umgekehrt. Beide Vorausſetzungen fallen alſo weſentlich zuſammen und der Satz braucht bloß noch für die erſtere Vorausſetzung ($BA_1 : BC_1 = BA : BC$) bewieſen zu werden.

Zieht man nun durch $A_1$ eine Parallele zu AC, ſo muß dieſelbe die Seite BC in einem zwiſchen B und C gelegenen Punkte $C_2$ ſchneiden, und es wäre dann:

$$\frac{BC_2}{BC} = \frac{BA_1}{BA} \quad \text{(Fr. 148 I.)}$$

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} \quad \text{(Vor.)}$$

$$\frac{BC_2}{BC} = \frac{BC_1}{BC} \quad \text{(Fr. 20 V.)}$$

$$BC_2 = BC_1 \quad \text{(Fr. 20 VIII.).}$$

Es fällt alſo der Punkt $C_2$ auf $C_1$, d. h. die Strecke $A_1C_2$ fällt mit $A_1C_1$ zuſammen, und es iſt demnach $A_1C_1 // AC$.

II. Verſucht man in gleicher Weiſe wie in I. den Parallelismus zwiſchen $A_1C_1$ und $AC$ für den Fall nachzuweiſen, wo $BA_1 : A_1C_1 = BA : AC$ iſt, ſo findet man, daß dann $A_1C_2 = A_1C_1$ ſein müſſe. Da es nun aber in $BC$ (und ſeiner Verlängerung) im allgemeinen zwei Punkte $C_1$ und $C_3$ giebt, welche von $A_1$ um die Strecke $A_1C_2 = A_1C_1$ entfernt ſind (Fr. 74 XI. und XII.), und da dieſe zwei Punkte in $BC$ von $B$ aus nach $C$ hin liegen (Fr. 69 VII.), ſobald der Gegenwinkel $B$ der Seite $AC$ und der Schneidenden $A_1C_1$ kleiner iſt, als die Gegenwinkel $C$ und $C_1$ der Seite $BA$ und des Abſchnitts $BA_1$, ſo iſt es in dieſem Falle nicht unbedingt notwendig, daß $C_2$ mit $C_1$ zuſammenfällt und demnach $A_1C_1 // AC$ iſt, ſondern es könnte $C_2$ auch auf $C_3$ fallen, alſo $A_1C_3 // AC$ ſein.

III. Sobald dagegen in II. $\angle C_1 \leqq \angle B \geqq \angle C$ oder $BA_1 \leqq A_1C_1$ und $BA \leqq AC$ iſt, fällt $B$ zwiſchen jene zwei Punkte $C_1$ und $C_3$, und in der Seite $BC$ ſelbſt liegt deshalb nur der eine dieſer Punkte, nämlich $C_1$ (während der andere $C_3$ in der Verlängerung von $CB$ liegt).

Daher muß jetzt der ebenfalls zwiſchen $B$ und $C$ liegende Punkt $C_2$ mit $C_1$ zuſammenfallen, oder es muß $A_1C_1 // AC$ ſein.

IV. Fallen die in II. und III. erwähnten beiden Punkte $C_1$ und $C_3$, welche von $A_1$ um $A_1C_1$ entfernt ſind, von $B$ aus beide nach $C$ hin, ſo iſt von den beiden Winkeln $A_1C_1B$ und $A_1C_3B$ der eine ſpitz, der andere ſtumpf (Fr. 74 III.).

Verhält ſich daher die ſchneidende Strecke $A_1C_1$ zur dritten Seite $AC$ wie der obere Abſchnitt $BA_1$ zu ſeiner Seite $BA$, ſo iſt die Strecke $A_1C_1$ der Seite $AC$ parallel, ſobald die Gegenwinkel des Abſchnitts $BA_1$ und ſeiner Seite $BA$ entweder beide ſpitz oder beide ſtumpf ſind.

V. Teilt man eine Dreiecksſeite $BC$ (Fig. 131) in $D$ proportional den beiden anderen Seiten $AB$ und $AC$, ſo halbiert $AD$ den Gegenwinkel $A$ der erſteren Seite $BC$.

Verlängert man nämlich CA nach E, ſodaß $AE = AB$ wird, dann iſt (nach der Vor.) $AB : BD = AC : DC$, alſo auch $EA : BD = AC : DC$ (Fr. 20 IV.), folglich $AD // EB$ (nach I.), und deshalb $\angle x = \angle v$ und $\angle y = \angle u$ (Fr. 62 I.); da nun (nach Fr. 74 I.) $\angle v = \angle u$ iſt, ſo muß (nach Fr. 20 IV.) auch $\angle x = \angle y$ ſein.

**150. Welche Grundſätze folgen aus dem Begriffe der Ähnlichkeit?**

Da zwei ebene Figuren ähnlich genannt werden (Fr. 66 III.), ſobald ſie gleiche Geſtalt haben, ſo muß man:

I. ähnliche Figuren $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ (Fig. 134) erhalten, wenn man ähnliche Figuren, z. B. Dreiecke, in gleicher Weiſe aneinanderſetzt; und

II. ähnliche Figuren in gleicher Weiſe in ähnliche Teile, z. B. in ähnliche Dreiecke, zerlegen können.

**151. Wenn heißen zwei Punkte oder Strecken ähnlichliegend?**

I. Laſſen ſich zwei ähnliche Figuren, wie $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_1D_2E_2$ in Fig. 134, von zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ aus in ähnliche Figuren, z. B. in Dreiecke, zerlegen, ſo heißen jene zwei Punkte ähnlichliegende (homologe).

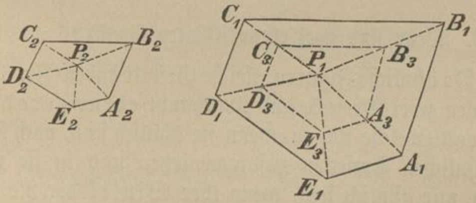

Fig. 134.

II. Haben zwei ähnliche Figuren, wie $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_3B_3C_3D_3E_3$ in Fig. 134, einen gemeinſchaftlichen ähnlichliegenden Punkt $P_1$, ſo heißt dieſer, wenn die entſprechenden Seiten paarweis parallel ſind, Ähnlichkeitspunkt. (Vergl. Fr. 105 IV.)

III. Ähnlichliegende Strecken verbinden ähnlichliegende Punkte.

**152. Wovon hängt die Geſtalt eines Dreiecks ab?**

I. Aus Fr. 78 II. und V. (vergl. Fig. 66) folgt: daß die Änderung eines Winkels A in einem Dreieck ABC auch die Änderung der Gegenſeite CB nach ſich zieht, alſo auch die der Geſtalt.

II. Vergrößert man eine Seite BC (vergl. Fig. 66) eines Dreiecks ABC, ohne die beiden anderen Seiten zu ändern, ſo ändert ſich nach Fr. 78 III. auch der Gegenwinkel A der erſteren Seite, mithin auch die Geſtalt.

III. Vergrößert man (vergl. Fig. 69) eine Seite, ohne die anliegende Seite und den zwiſchen dieſen beiden Seiten liegenden Winkel des Dreiecks zu ändern, ſo ändert ſich ebenfalls die Geſtalt.

IV. Soll ſich alſo die Geſtalt eines Dreiecks nicht ändern, ſo darf weder die Größe eines Winkels, noch das Verhältnis zweier Seiten geändert werden. Die Geſtalt eines Dreiecks wird demnach durch die Größe ſeiner drei Winkel und durch das Verhältnis ſeiner drei Seiten bedingt.

**153. Wenn ſind zwei ebene Figuren ähnlich?**

I. Da ähnliche Figuren gleiche Geſtalt haben (Fr. 66 III.), ſo können zwei Dreiecke und überhaupt ebene geradlinige Figuren (welche ſich ja, wenn ſie ähnlich ſind, nach Fr. 150 aus ähnlichen Dreiecken zuſammenſetzen und in ſie zerlegen laſſen), nur ähnlich ſein, wenn ihre Winkel der Reihe nach einander gleich und ihre Seiten der Reihe nach einander proportional ſind, alſo in demſelben geometriſchen Verhältniſſe zu einander ſtehen.

II. Zwei krummlinige bezw. gemiſchtlinige ebene Figuren ſind ähnlich, wenn ſich in jeder von einem Punkte aus nach allen Punkten proportionale Strecken ziehen laſſen.

### 154. Welche Sätze über die Ähnlichkeit folgen weiter hieraus?

I. Zwei ebene Figuren, welche einer dritten ähnlich ſind, ſind ſelbſt ähnlich, weil ihre Winkel der Reihe nach den Winkeln der dritten Figur (Fr. 153 I.) und deshalb unter ſich gleich ſind (Fr. 20 V.), und weil die Seiten beider Figuren der Reihe nach in demſelben Verhältnis zu einander ſtehen (Fr. 20 V.), nämlich in demſelben Verhältniſſe, in welchem die Seiten der dritten Figur zu einander ſtehen.

II. In ähnlichen ebenen Figuren verhalten ſich ähnlichliegende Strecken (Fr. 151 III., I.) wie zwei ähnlichliegende Seiten.

III. In ähnlichen Figuren verhalten ſich die Umfänge wie zwei ähnlichliegende Seiten oder Strecken.

Sind $u_1$ und $u_2$ die Umfänge der beiden Figuren, $a_1$, $b_1$, $c_1$ . . . die Seiten der einen, $a_2$, $b_2$, $c_2$ . . . die Seiten der anderen, ſo iſt nach Fr. 153 I. und 20 VIII.)

$$\frac{a_1}{a_1} = \frac{a_2}{a_2}, \qquad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \qquad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} + \frac{c_1}{a_1} + \cdots = \frac{a_2}{a_2} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{c_2}{a_2} + \cdots$$

$$\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{a_1} = \frac{a_2 + b_2 + c_2 + \cdots}{a_2}$$

$$\frac{u_1}{a_1} = \frac{u_2}{a_2}.$$

IV. Regelmäßige Figuren (Fr. 113 I.) von gleicher Seitenzahl ſind ähnlich, und ihre Umfänge verhalten ſich wie die Halbmeſſer der eingeſchriebenen und wie jene der umgeſchriebenen Kreiſe.

V. Alle Kreisflächen, alle Ausſchnitte und Abſchnitte von gleichen Centriwinkeln ſind unter ſich ähnlich (Fr. 153 II.), und ihre Mittelpunkte ſind ähnlichliegende Punkte.

**155. Wie kann man von einem Dreieck ABC ein dieſem ähnliches Dreieck abſchneiden?**

I. Da in Fr. 148 I., wo $A_1C_1 // AC$ war, nicht bloß $\angle A_1 = \angle A$ und $\angle C_1 = \angle C$ (Fr. 62 I.), ſondern auch $BA_1 : BA = BC_1 : BC = A_1C_1 : AC$ war, ſo iſt dort $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ (Fr. 153 I.).

II. Jede Strecke $A_1C_1$ alſo, welche einer Seite AC des $\triangle ABC$ parallel iſt, ſchneidet von dieſem Dreiecke ein ihm ähnliches $\triangle A_1BC_1$ ab.

III. Verbindet man die Mitten der drei Seiten eines Dreiecks ABC geradlinig unter einander, ſo ſind die drei Verbindungslinien den drei Seiten des Dreiecks ABC parallel (Fr. 149 I.) und zerlegen das Dreieck ABC in vier unter ſich kongruente (Fr. 108 I.) und dem ganzen $\triangle ABC$ ähnliche Dreiecke (II.).

IV. Verbindet man die vier Seitenmitten eines Vierecks geradlinig, ſo begrenzen die vier Verbindungslinien ein Parallelogramm (Fr. 59 II.), weil je zwei derſelben einer Diagonale parallel ſind (Fr. 149 I.). Iſt das Viereck ein Rechteck, oder ein Rhombus, ſo erhält man einen Rhombus (Fr. 81 I.), oder ein Rechteck (Fr. 110 VIII.).

**156. Wenn ſind zwei Dreiecke ähnlich?**

Um nachzuweiſen, daß zwei Dreiecke ähnlich ſind, braucht man nicht darzuthun, daß die drei Winkel der Reihe nach einander gleich und die drei Seiten einander proportional ſind; vielmehr ſind zwei Dreiecke*) $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ſchon ähnlich:

I. wenn ſie in *zwei Winkeln* übereinſtimmen;

II. wenn ſie in *einem Winkel und dem Verhältnis der dieſen Winkel einſchließenden Seiten* übereinſtimmen;

---

*) Auch bei zwei ähnlichen Dreiecken verfährt man, wie in Fr. 67 VII.*) angegeben wurde; iſt $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, ſo iſt dann auch:

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2,$$

oder kürzer: $$c_1 : a_1 : b_1 = c_2 : a_2 : b_2.$$

III. wenn ſie im Verhältnis zweier Seiten und in dem Gegenwinkel der größeren dieſer Seiten übereinſtimmen;

IV. wenn ſie im Verhältnis zweier Seiten übereinſtimmen, und wenn außerdem das eine Paar der Gegenwinkel gleich iſt und die beiden Winkel des anderen Paares zugleich ſpitz, oder zugleich ſtumpf ſind;

V. wenn ſie in zwei Seitenverhältniſſen übereinſtimmen, oder wenn die drei Seiten des einen der Reihe nach den drei Seiten des anderen proportional ſind.

Beweis zu I. Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen Winkeln $B_1 = B_2$ auf einander (Fr. 31), ſo folgt aus der in I. vorausgeſetzten Gleichheit der Winkel $A_1 = A_2$, daß $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ (Fr. 62 II.) iſt; deshalb iſt:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \text{ (Fr. 155 II.).}$$

Beweis zu II. Legt man die beiden Dreiecke mit den beiden gleichen Winkeln $B_1 = B_2$ auf einander (Fr. 31), ſo daß die proportionalen Seiten $B_1A_1 = c_1$ und $B_2A_2 = c_2$, ſowie $B_1C_1 = a_1$ und $B_2C_2 = a_2$ auf einander zu liegen kommen, dann iſt $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ (Fr. 149 I.); deshalb iſt

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \text{ (Fr. 155 II.).}$$

Beweis zu III. und IV. Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen Winkeln $B_1$ und $B_2$ (vergl. Fig. 133) und den einander proportionalen anliegenden Seiten $B_1A_1$ und $B_2A_2$ auf einander (Fr. 31 und 22 V.), ſo werden die Gegenſeiten $A_1C_1$ und $A_2C_2$ parallel (Fr. 149 III., oder IV.) und deshalb wiederum $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (Fr. 155 II.).

Beweis zu V. Dieſer Fall, in welchem $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ iſt, geht in II. über, ſobald ein Winkelpaar gleichgroß iſt, z. B. $A_1 = A_2$.

Zeichnete man nun ein Dreieck $A_3B_3C_3$, in welchem $\angle A_3 = \angle A_2$, $b_3 = b_1$ und $c_3 = c_1$ wäre, alſo (wegen der Vor.) auch $b_3 : c_3 = b_1 : c_1 = b_2 : c_2$; dann wäre $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (II.) und $b_3 : a_3 = b_2 : a_2$ (Fr. 153 I.); da aber auch $b_1 : a_1 = b_2 : a_2$ vorausgeſetzt wurde, ſo müßte auch

$b_3 : a_3 = b_1 : a_1$, und weil $b_3 = b_1$ gemacht wurde, ſo müßte weiter $b_1 : a_3 = b_1 : a_1$, d. h. $a_3 = a_1$ ſein. Dann wären aber die in allen drei Seiten übereinſtimmenden Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_1B_1C_1$ kongruent (Fr. 80 I.) und demgemäß $\angle A_3 = \angle A_1$ (Fr. 67 II.). Da nun $\angle A_3 = \angle A_2$ gemacht wurde, ſo iſt auch $\angle A_1 = \angle A_2$ (Fr. 20 V.) und $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (II.).

VI. Zum Schluß möge auf die große Verwandtſchaft zwiſchen den vorſtehenden Ähnlichkeitsſätzen und den Kongruenzſätzen (Fr. 80) aufmerkſam gemacht werden.

### 157. Wie findet man in ähnlichen Figuren ähnlichliegende Punkte?

Iſt $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$ (Fig. 135) und will man in letzterer den Punkt $P_2$ ſuchen, welcher $P_1$ in erſterer ähnlich liegt, ſo ziehe man $P_1A_1$ und $P_1E_1$ und mache $\angle E_2A_2P_2 = \angle E_1A_1P_1$ und $\angle A_2E_2P_2 = \angle A_1E_1P_1$; dann iſt der Schnittpunkt $P_2$ zwiſchen $A_2P_2$ und $E_2P_2$ der geſuchte Punkt, weil zunächſt $\triangle A_2P_2E_2 \sim \triangle A_1P_1E_1$ (Fr. 156 I.), dann aber $\angle P_2A_2B_2 = \angle P_1A_1B_1$ und $P_2A_2 : P_1A_1 = A_2E_2 : A_1E_1 = A_2B_2 = A_1B_1$ (Fr. 153 I.), daher auch:

$$\triangle A_2P_2B_2 \sim \triangle A_1P_1B_1 \text{ (Fr. 156 II.) ꝛc.}$$

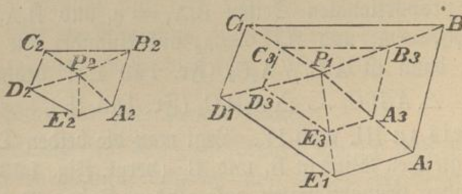

Fig. 135.

### 158. Wie zeichnet man über einer gegebenen Strecke $A_2B_2$ eine Figur, welche einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich iſt?

I. Man lege $B_2A_2$ (Fig. 135) parallel zu der ihr ähnlichliegenden Seite $B_1A_1$ der gegebenen Figur $A_1B_1C_1D_1E_1$, zerlege letztere (durch Diagonalen, oder ſonſtwie) in Dreiecke $A_1B_1P_1$, $B_1C_1P_1$ ꝛc. und ziehe $A_2P_2 // A_1P_1$, $B_2P_2 // B_1P_1$, $C_2P_2 // C_1P_1$, $B_2C_2 // B_1C_1$ ꝛc.; dann iſt (nach Fr. 156 I.) $\triangle A_2P_2B_2 \sim \triangle A_1P_1B_1$, $\triangle B_2P_2C_2 \sim \triangle B_1P_1C_1$ ꝛc., alſo auch $A_2B_2C_2D_2E_2 \sim A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fr. 150 I.).

II. Noch einfacher wird die Löſung, wenn man $P_1$ zu einem Ähnlichkeitspunkte (Fr. 151 II.) der beiden Figuren macht; ſo wird $A_3B_3C_3D_3E_3 \sim A_1B_1C_1D_1E_1$, wenn man zwiſchen den Geraden $P_1A_1$, $P_1B_1$ ꝛc. die Strecken $A_3B_3 // A_1B_1$, $B_3C_3 // B_1C_1$ ꝛc. zieht und dafür ſorgt, daß $A_3B_3 = A_2B_2$ wird.

Ob dabei $P_1$ innerhalb $A_1B_1C_1D_1E_1$, oder in einer Seite, in einem Eckpunkte, oder außerhalb dieſer Figur liegt, iſt ganz gleichgültig. Man könnte daher auch $A_3B_3 = A_2B_2$ auf einer Parallelen zu $B_1A_1$ auftragen und $P_1$ als Schnittpunkt zwiſchen $B_1B_3$ und $A_1A_3$ beſtimmen.

III. Soll von einem mit der Kette, oder dem Meßtiſche vermeſſenen Feldſtück nach einem *verjüngten* (*Transverſal*-) *Maßſtabe* eine Karte angefertigt werden, ſo iſt eine dem Feldſtück ähnliche Figur zu zeichnen. Vergl. darüber Katech. d. Feldmeßkunſt (fünfte Aufl. Leipzig 1891) Fr. 97 bis 107.

**159. Welche proportionale Strecken in Dreiecken ſind noch hervorzuheben?**

I. Nach Fr. 108 XIII. und Fr. 64 III. heißt in einem Parallelogramm und Trapez die Entfernung der Parallelſeiten von einander, im Dreieck die Entfernung einer Spitze von deren Gegenſeite die *Höhe*.

Die auf der Höhe ſenkrechte Seite des Dreiecks und des Parallelogramms heißt *Grundſeite*.

II. Das Produkt*) zweier Seiten $AC = b$ und $BC = a$ (Fig. 136 S. 168) eines $\triangle ABC$ iſt gleich dem Produkt

---

*) Da man zwei Strecken ebenſowenig wie zwei benannte Zahlen mit einander multiplizieren kann, ſo denke man ſich unter dieſen Produkten die Produkte der (unbenannten) Längenzahlen (Fr. 146 II.). Eine andere Deutung dieſer Produkte wird ſich, im Anſchluß an Fr. 169 und 170, ſpäter (Fr. 177 V.) finden.

aus der Höhe $CE = h_c$ für die dritte Seite $AB = c$ und dem Durchmeſſer $DA = 2r$ des umgeſchriebenen Kreiſes.

Zieht man nämlich DC, ſo iſt

$$\begin{array}{l} \angle B = \angle D \text{ (Fr. 96 II.)} \\ \angle E = \mathfrak{R} = \angle ACD \text{ (Fr. 96 III.)} \\ \hline \triangle BEC \sim \triangle DCA \text{ (Fr. 156 I.)} \\ \hline BC : CE = DA : AC \text{ (Fr. 153 I.)} \\ BC . AC = CE . DA \text{ (Fr. 147 II.).} \end{array}$$

III. Das Produkt der drei Seiten eines Dreiecks dividiert durch den Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt gleich dem Produkt aus Grundſeite und Höhe.

Da nämlich (nach II.) $ab = 2rh_c$ war, ſo wird nach Fr. 20 VIII. weiter $abc = 2rh_c c$, oder $abc : 2r = h_c c$.

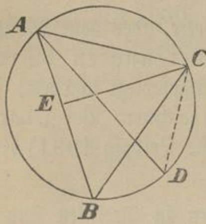

Fig. 136.

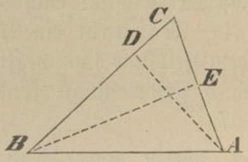

Fig. 137.

IV. Zwei Höhen AD und BE (Fig. 137) eines Dreiecks ABC verhalten ſich umgekehrt wie die zugehörigen Grundſeiten BC und AC. Weil nämlich $\angle C = \angle C$ und $\angle E = \mathfrak{R} = \angle D$, ſo iſt $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (Fr. 156 I.), alſo:

$$\begin{array}{l} AD : AC = BE : BC \text{ (Fr. 153 I.)} \\ AD : BE = AC : BC \text{ (Fr. 147 V.).} \end{array}$$

V. Gleiches gilt von den zwei Höhen eines Parallelogramms.

VI. Zieht man durch die drei Spitzen eines Dreiecks ABC (Fig. 138) drei Gerade parallel zu den drei Seiten, bis ſie ſich in $A_1$, $B_1$ und $C_1$ ſchneiden, ſo erhält man drei Parallelogramme $ABCB_1$, $AC_1BC$ und $ABA_1C$; daher iſt $AB_1 = AC_1 = BC$, $BC_1 = BA_1 = AC$ und $CA_1 = CB_1 = AB$ (Fr. 108 III.).

Die auf den Seiten des $\triangle A_1B_1C_1$ in deren Mitten A, B und C errichteten Senkrechten $AA_2$, $BB_2$ und $CC_2$, welche ſich nach Fr. 88 V. in einem Punkte H ſchneiden, ſind zugleich (wegen Fr. 62 V.) die drei Höhen des $\triangle ABC$ und demnach ſchneiden ſich die drei Höhen jedes Dreiecks in einem Punkte H. Dieſer Punkt kann innerhalb, oder außerhalb des Dreiecks, oder in einer Spitze desſelben liegen.

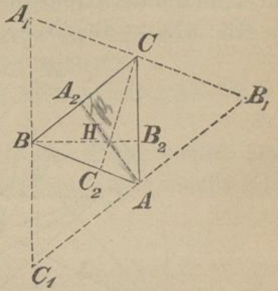

Fig. 138.

VII. Verbindet man die drei Höhen-Fußpunkte $A_2$, $B_2$ und $C_2$ geradlinig, ſo halbieren die drei Höhen $AA_2$, $BB_2$ und $CC_2$ die drei Winkel des Fußpunktendreiecks $A_2B_2C_2$.

Da nämlich $\angle HC_2B = \angle HA_2B = \mathfrak{R}$, ſo läßt ſich durch die vier Punkte B, $C_2$, H, $A_2$ und in gleicher Weiſe auch durch die vier Punkte C, $B_2$, H, $A_2$ ein Kreis legen (Fr. 97 III.); daher iſt $\angle HA_2C_2 = \angle HBC_2$ und $\angle HA_2B_2 = \angle HCB_2$ (Fr. 96 II.). Nun iſt aber $\angle BHC_2 = \angle CHB_2$ (Fr. 42 II., oder 20 I.) und $\angle BC_2H = \mathfrak{R} = CB_2H$, daher weiter $\angle HBC_2 = \angle HCB_2$ (Fr. 69 I.). Deshalb iſt endlich $\angle HA_2C_2 = \angle HA_2B_2$ (Fr. 20 IV.). Ebenſo findet man, daß $\angle HB_2A_2 = \angle HB_2C_2$ und $\angle HC_2A_2 = \angle HC_2B_2$ iſt.

VIII. Der Höhenſchnittpunkt H iſt daher, jenachdem er innerhalb, oder außerhalb des Dreiecks ABC liegt, der Mittelpunkt des eingeſchriebenen, oder des einen der drei äußeren Berührungskreiſe des Fußpunktendreiecks $A_2B_2C_2$, und die drei Eckpunkte A, B, C ſind die Mittelpunkte der drei anderen dieſer Kreiſe. — Vergl. auch Fig. 102 auf S. 108.

IX. Verbindet man den Höhenſchnittpunkt H (Fig. 139) mit den Endpunkten B und C der einen Seite BC, den Mittelpunkt M des umgeſchriebenen Kreiſes (Fr. 88 IV.) mit den Mitten $N_2$ und $N_3$ der beiden anderen Seiten AC und AB, ſo erhält man zwei Dreiecke BHC und $N_2MN_3$, deren Seiten paarweiſe parallel ſind (Fr. 57 II., 149 I.). Da dieſe Dreiecke ähnlich ſind (Fr. 63 I., 156 I.), ſo verhält ſich

$HB : MN_2 = BC : N_2N_3 = 2 : 1$ (Fr. 148 I.), d. h.

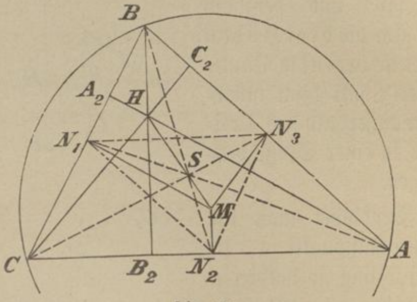

Fig. 139.

der Höhenſchnittpunkt H iſt von einem Eckpunkte B doppelt ſo weit entfernt, als jener Mittelpunkt M von der Gegenſeite AC.

X. Zieht man in einem △ ABC (Fig. 140) eine *Schwerpunkts-Transverſale*, d. h. eine Strecke AN von einer Spitze A nach der Mitte N der Gegenſeite BC (die Mittellinie $m_a$, Fr. 64 III.), ſo halbiert dieſe jede Parallele DE zur Gegenſeite.

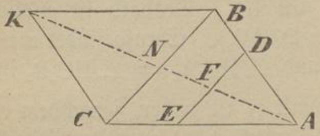

Fig. 140.

Nach Fr. 148 I. verhält ſich nämlich:

$$\frac{DF}{BN} = \frac{AF}{AN} = \frac{FE}{NC},$$

und weil $BN = NC$ iſt, ſo muß auch $DF = FE$ ſein (Fr. 20 VIII.). Vergl. Fr. 111 IX.

XI. Jede Diagonale AK (Fig. 140) eines Parallelogramms ABKC halbiert jede zur anderen Diagonale BC parallele Strecke DE (X.); denn im △ ABC iſt BN = NC (Fr. 110 III.), und zugleich ſoll DE // BC ſein.

XII. Aus X. ergiebt ſich leicht, daß die durch die Mitten F und N der Parallelſeiten DE und BC eines Trapezes EDBC gelegte Gerade durch den Schnittpunkt A der nicht-parallelen Seiten BD und CE geht (vergl. Fr. 111 X.) und alle Parallelen zu den Parallelſeiten halbiert.

Denn verbindet man A mit N, ſo ſchneidet AN die Seite DE in ihrer Mitte F.

XIII. Die drei Mittellinien oder Schwerpunkts-Transverſalen des △ ABC ſchneiden ſich in einem Punkte S (dem Schwerpunkte des △ ABC).

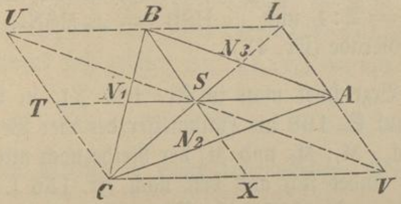

Fig. 141.

Zieht man durch die Spitzen des Dreiecks ABC je zwei Parallelen UL und CV, UC und LV (Fig. 141), zu den (bis T und X verlängerten) Transverſalen $AN_1$ und $BN_2$, ſo iſt nach Fr. 148 II. CT = TU und CX = XV, weil ja bez. $CN_1 = N_1B$ und $CN_2 = N_2A$ iſt (X.). Daher iſt der Schnittpunkt S zwiſchen $AN_1$ und $BN_2$ zugleich der Schnittpunkt der Diagonalen VU und CL (Fr. 110 IV.), und es iſt CS = SL (Fr. 110 III.). Da nun weiter AS // LB und AL // SB (nach der Konſtruktion), ſo iſt der Punkt $N_3$, worin AB von der Diagonale CL geſchnitten wird, die Mitte von AB (Fr. 110 III.), d. h. die dritte Transverſale $CN_3$ geht ebenfalls durch S.

XIV. Da ferner in Fig. 141 im Parallelogramm ASBL wegen Fr. 110 III. noch $SN_3 = N_3L$ ſein muß, ſo iſt $N_3S = \frac{1}{2}LS = \frac{1}{2}SC$, alſo $SC = 2\,N_3S$ und $N_3C = 3\,N_3S$, d. h. die drei Mittellinien oder Schwerpunkts-Transverſalen ſchneiden ſich gegenſeitig im Verhältnis 1 : 2.

XV. Von den vier*) merkwürdigen Punkten des Dreiecks (XIII., VI., Fr. 88 V., Fr. 104 II.) liegen der Schwerpunkt S, der Höhenſchnittpunkt H und der Mittelpunkt M des umgeſchriebenen Kreiſes in einer Geraden HSM, und es verhält ſich $MS : SH = 1 : 2$.

In den beiden $\triangle\triangle$ BHS und $N_2MS$ (Fig. 139) iſt nämlich $\angle HBS = \angle MN_2S$ (Fr. 62 I.) und $BH : N_2M = 2 : 1 = BS : N_2S$ (IX. und XIV.), alſo $\triangle BHS \sim \triangle N_2MS$ (Fr. 156 II.), und deshalb nach Fr. 153 I. $HS : MS = BH : N_2M = 2 : 1$ und $\angle HSB = \angle MSN_2$, alſo auch HSM eine Gerade (Fr. 43).

XVI. Bezeichnet man in Fr. 105 XI. in Bezug auf Fig. 102 auf S. 108 die Halbmeſſer der vier Berührungskreiſe um $M_0$, $M_1$, $M_2$ und $M_3$ der Reihe nach mit $r_0$, $r_1$, $r_2$ und $r_3$, ſo findet ſich aus den nach Fr. 156 I. ähnlichen $\triangle\triangle$ $AM_1U_2$ und $AM_0L_2$ die Proportion $M_1U_2 : M_0L_2 = AU_2 : AL_2$; da aber $AU_2 = AN_2 + N_2C + CU_2 = a_2 + c_2 + c_1 = c_0 + a_0 + b_0 = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$ iſt, ſo wird:

$$r_1 : r_0 = s : a_0, \quad r_2 : r_0 = s : b_0, \quad r_3 : r_0 = s : c_0.$$

Daher verhält ſich

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{1}{a_0} : \frac{1}{b_0} : \frac{1}{c_0}.$$

---

*) Auch die drei von den Spitzen A, B und C nach den Berührungspunkten ($N_1$, $N_2$ und $N_3$ in Fig. 102 auf S. 108) der drei äußeren Berührungskreiſe gezogenen drei Transverſalen ſchneiden ſich in einem Punkte P. Dieſer fünfte merkwürdige Punkt des Dreiecks liegt mit $M_0$ und dem Schwerpunkte S des Dreiecks in einer Geraden, wobei letzterer die Strecke $PM_0$ auch im Verhältnis 1 : 2 teilt.

Auch iſt

$$\frac{r_0}{r_1}+\frac{r_0}{r_2}+\frac{r_0}{r_3}=\frac{a_0+b_0+c_0}{s}=1,$$

oder

$$\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_0}.$$

XVII. Weil aber in Fig. 102 $M_0C \perp CM_1$ und $M_0L_1 \perp CB \perp N_1M_1$, ſo ſind die nach Fr. 71 VI. gleichwinkeligen Dreiecke $M_0L_1C$ und $CN_1M_1$ ähnlich (Fr. 156 I.), und es verhält ſich $r_0 : c_0 = c_1 : r_1$. Da nun nach XVI. $r_0s = a_0r_1$ und nach Fr. 105 XI. $c_1 = b_0$ iſt, ſo ergiebt ſich weiter:

$$r_0r_1 = c_0c_1 = c_0b_0 \quad \text{und} \quad r_0r_1 \,.\, r_0s = c_0b_0 \,.\, a_0r_1$$

oder

$$r_0^2s = a_0b_0c_0 = (s-a)\,(s-b)\,(s-c).$$

Ebenſo iſt

$$r_0r_2 = a_0c_0$$
$$r_0r_3 = b_0a_0,$$

daher

$$r_0^3r_1r_2r_3 = a_0^2b_0^2c_0^2 = (r_0^2s)^2 = r_0^4s^2$$
$$r_0r_1r_2r_3 = r_0^2s^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c).$$

Endlich findet ſich weiter $r_0r_1 \,.\, (r_1 : r_0) = c_0b_0 \,.\, (s : a)$ und hieraus

$$r_1^2 = sb_0c_0 : a_0.$$

Ebenſo $r_2^2 = sc_0a_0 : b_0$ und $r_3^2 = sa_0b_0 : c_0$.

### 160. Welche Strecken in einem rechtwinkeligen Dreiecke ſind proportional?

I. Die von der Spitze C (Fig. 142) des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks ABC auf die Hypotenuſe AB = h gefällte Senkrechte CN = p werde entſprechend Fr. 112 als die Projizierende, die Hypotenuſenabſchnitte AN = x und BN = y als die Projektionen der Katheten AC = a und BC = b bezeichnet.

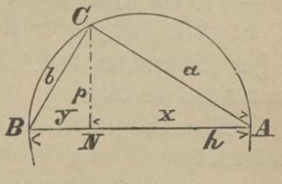

Fig. 142.

Nun ſtimmen die △△ ANC und CNB mit dem △ ACB in je zwei Winkeln überein, ſind alſo nach Fr. 156 I. unter ſich und mit dem △ ACB ähnlich.

Aus den Proportionen $x:p = p:y$, $x:a = a:h$ und $y:b = b:h$ (Fr. 153 I.) findet ſich daher (unter Berückſichtigung der Anmerkung zu Fr. 159 II.) weiter:

$$p^2 = xy, \qquad a^2 = xh, \qquad b^2 = yh,$$

d. h. die Projizierende $p$ iſt die mittlere Proportionale zu den beiden Hypotenuſenabſchnitten $x$ und $y$,

jede Kathete aber iſt die mittlere Proportionale zu ihrer Projektion und der Hypotenuſe $h$. Vergl. Fr. 147.

II. Weiter folgt hieraus $ab = ph$ (Fr. 19 VI.). Nach Fr. 159 II. wäre $ab = 2rp$; alſo iſt $h = 2r$. Vergl. Fr. 96 V.

III. Durch Addition ergiebt ſich weiter:

$$a^2 + b^2 = xh + yh = (x + y)\,h = h\,.\,h = h^2,$$

d. h. das Quadrat der Hypotenuſe iſt gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. Vergl. Fr. 19 V.

IV. Da $h = x + y$, ſo kann man nach I. auch ſchreiben:

$$a^2 = x\,(y + x) \qquad \text{und} \qquad b^2 = y\,(y + x).$$

Trägt man nun auf $CB$ von $C$ aus das Stück $CU = \frac{1}{2}\,y$ auf, ſo iſt nach III. und Fr. 20 V.

$$\overline{AU}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CU}^2 = a^2 + (\tfrac{1}{2}\,y)^2 = x\,(y + x) + (\tfrac{1}{2}\,y)^2$$
$$= x^2 + 2x\,(\tfrac{1}{2}\,y) + (\tfrac{1}{2}\,y)^2 = (x + \tfrac{1}{2}\,y)^2$$
$$AU = x + \tfrac{1}{2}\,y.$$

Man kann demnach aus $a$ und $y$ ſowohl $AN = x = AU - \frac{1}{2}\,y$, wie $AB = x + y = h$ finden, indem man von $AU$ die Hälfte von $y$ ſubtrahiert, bezw. ſie zu ihm addiert.

Zur Konſtruktion des $\triangle ABC$ aus $a$ und $y$ bieten ſich nun verſchiedene Wege:

1. Man ſchlage über $AC = a$ einen Halbkreis, trage in ihn die Sehne $AN = x$ ein und verlängere ſie um $NB = y$;

2. man verlängere $BN = y$ um $AN = x$, ſchlage über $AB$ einen Halbkreis und trage in ihn die Sehne $AC$ ein;

3. man mache von $A$ aus $AN = x$, $NC \perp AN$ und ſchneide $NC$ mit einem Kreiſe aus $A$ vom Halbmeſſer $a$.

V. In gleicher Weiſe hätte man nach I. auch

$$a^2 = h\,(h-y) \qquad \text{und} \qquad b^2 = h\,(h-x),$$

und könnte h (und x) aus a und y durch Vermittelung von $AU = h - \frac{1}{2}y$ ganz wie in IV. finden.

**161. Welche Proportionen beſtehen zwiſchen den Sehnen und den Tangenten eines Kreiſes?**

Unter Bezugnahme auf die Anmerkung zu Fr. 159 II. laſſen ſich folgende Sätze ausſprechen:

I. Die Produkte aus den Abſchnitten zweier ſich innerhalb des Kreiſes in E, oder außerhalb des Kreiſes in F (Fig. 143) ſchneidenden Sehnen desſelben Kreiſes ſind gleich.

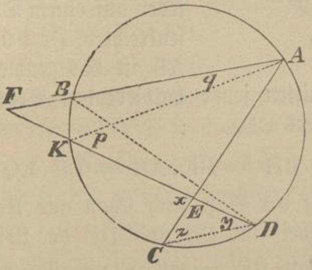

Fig. 143.

Bew. 1. $\angle E = \angle E$ (Fr. 42 II.)

$\angle KAE = \angle CDE$ (Fr. 96 II.)

$\triangle KAE \sim \triangle CDE$ (Fr. 156 I.)

$KE : AE = CE : DE$ (Fr. 153 I.)

$KE \,.\, DE = AE \,.\, CE.$

Bew. 2. $\angle F = \angle F$ (Fr. 20 I.)

$\angle FAK = \angle FDB$ (Fr. 96 II.)

$\triangle FAK \sim \triangle FDB$ (Fr. 156 I.)

$KF : AF = BF : DF$ (Fr. 153 I.)

$KF \,.\, DF = AF \,.\, BF.$

Das Produkt FA . FB (bez. EA . EC) heißt die Potenz des Punktes F (bez. E) in Bezug auf den Kreis.

II. Da nach Fr 94 III. in Fig. 144 die durch E gelegte, auf ME ſenkrechte Sehne BA die kleinſte Sehne iſt, welche ſich durch E ziehen läßt, und da nach Fr. 81 I. zugleich EB = EA iſt, ſo gleicht die Potenz des Punktes E in Bezug auf den Kreis dem Quadrate der Hälfte der kleinſten durch E gehenden Sehne. Oder:

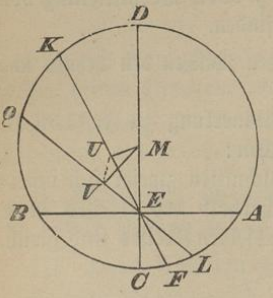

Fig. 144.

Die Hälfte BE = EA (Fig. 144) einer von einer zweiten Sehne LQ halbierten (alſo auch jeder auf einem Durchmeſſer CD ſenkrechten, Fr. 90 VIII.) Sehne AB iſt das geometriſche Mittel aus den Abſchnitten jener halbierenden Sehne LQ (oder jenes Durchmeſſers CD).

Nach I. iſt ja $\overline{BE}^2 = BE.AE = LE.EQ = CE.ED$.

Für CD folgt der Satz auch ſchon aus Fr. 160 I. und Fr. 96 III. Dabei ſind CE und DE der kleinſte und der größte der dem Satze $\overline{BE}^2 = CE.ED$ genügenden Abſchnitte, welche der Kreis zu liefern vermag. Verlangt man den einen Faktor noch größer als ED, ſo muß man einen Kreis von größerem Halbmeſſer nehmen, oder ſich auf IV. einlaſſen.

III. Schneiden ſich in Fig. 144 die Strecken LQ und FK in E ſo, daß $FE.EK = LE.EQ$, dann liegen die vier Endpunkte L, F, Q und K auf demſelben Kreiſe.

Bezeichnet man nämlich den Punkt, worin der durch L, F und Q gelegte Kreis FK zum zweiten Male ſchneidet (Fr. 83 VIII.) mit $K_1$, ſo iſt (nach I.) $FE.EK_1 = LE.EQ$, daher nach unſerer Vorausſetzung ($FE.EK = LE.EQ$) und Fr. 20 V. auch $FE.EK_1 = FE.EK$, oder $EK_1 = EK$, d. h. $K_1$ fällt mit K zuſammen.

Ähnliches gilt für B, A, D, K (Fig. 143) in Bezug auf F.

IV. Schneiden ſich eine Tangente FT (Fig. 145) und eine Sehne AB desſelben Kreiſes, ſo iſt die Strecke FN zwiſchen dem Schnittpunkte F und dem Berührungspunkte N die mittlere Proportionale zwiſchen den Abſchnitten der Secante.

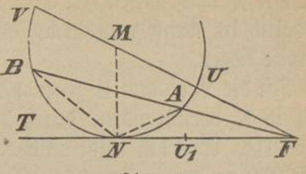

Fig. 145.

Bew.

$$\begin{array}{c} \angle F = \angle F \text{ (Fr. 20 I.)} \\ \angle FBN = \angle FNA \text{ (Fr. 100 I.)} \\ \hline \triangle FNB \sim \triangle FAN \text{ (Fr. 156 I.)} \\ \hline FN:FB = FA:FN \text{ (Fr. 153 I.)} \\ \hline \overline{FN}^2 = FA.FB. \end{array}$$

Denkt man ſich in Fig. 143 die Secante FD ſo weit verſchoben, bis die beiden Schnittpunkte D und K in einen (N) zuſammenfallen (Fr. 85 IV.), ſo findet man aus I. ebenfalls:

$$FN.FN = FA.FB.$$

V. Wird die Sehne zum Durchmeſſer $UV = 2r$, ſo wird $\overline{FN}^2 = FU.FV = (FM - r)(FM + r) = \overline{FM}^2 - r^2$, was man auch aus Fr. 160 III. hätte finden können, weil wegen Fr. 83 X. doch $r = MN \perp TF$ iſt.

VI. Iſt umgekehrt $\overline{FN}^2 = FA.FB$, ſo berührt FN in N den Kreis durch A, B und N.

Trifft nämlich eine von F an dieſen Kreis gelegte Tangente (Fr. 103 I.) den Kreis in $N_1$, ſo iſt $\overline{FN_1}^2 = FA.FB$ (IV.), daher $\overline{FN}^2 = \overline{FN_1}^2$ (Vor. und Fr. 20 V.), oder $FN = FN_1$; deshalb muß nach Fr. 91 XVII. entweder N auf $N_1$ fallen, oder $FN_1$ iſt die zweite Tangente, welche ſich von F an den Kreis ziehen läßt (Fr. 103 II., V.).

VII. Iſt ferner $\overline{FN}^2 = FA.FB$ und FN Tangente des um M geſchlagenen Kreiſes in N, ſo liegen B und A entweder auf dem Kreiſe um M, *oder* auf einem anderen Kreiſe, welcher FT in N berührt. Denn weil $FN : FB = FA : FN$, und $\angle F = \angle F$, iſt $\triangle FNB \sim \triangle FAN$ und $\angle FBN = \angle FNA$, was wegen Fr. 100 I. und Fr. 97 I. und II. nur möglich iſt, wenn A und B auf einem von FT in N berührten Kreiſe liegen.

Iſt die Lage von B gegen FT gegeben, ſo muß A auf dem FT in N berührenden, durch B geſchlagenen Kreiſe liegen.

VIII. Aus IV. folgt auch der Beweis für die Richtigkeit der Löſung der in Fr. 141 geſtellten Aufgabe. In Fig. 127 ſoll nach der dort angeſtellten Betrachtung

$$\underline{\triangle J_0JA \sim \triangle J_0AC \text{ (Fr. 156 I.)}}$$

$$J_0J : J_0A = J_0A : J_0C \text{ (Fr. 153 I.)}$$

$$\overline{J_0A}^2 = J_0J \,.\, J_0C = (J_0C - CJ)\, J_0C = (J_0C - w_c)\, J_0C \,,$$

ſein; nach der gegebenen Löſung und IV. iſt aber:

$$\overline{J_0A}^2 = J_0L_1 \,.\, J_0L_2 = (J_0L_2 - w_c)\, J_0L_2 = (J_0C - w_c)\, J_0C.$$

IX. Die in VIII. gegebene Weiterbildung der in Fr. 141 angefangenen Betrachtung liefert noch eine andere Löſung für die in Fr. 142 geſtellte Aufgabe.

Macht man in Fig. 127 $\angle BAJ_0 = \frac{1}{2} C$ und $J_0{}'J_0 \perp BA$ in deren Mitte, ſo iſt wieder (und zwar für jeden Punkt C des Kreiſes K): $\underline{\triangle J_0JA \sim \triangle J_0AC \text{ (Fr. 156 I.)}}$

$$\overline{J_0A}^2 = J_0J \,.\, J_0C = J_0J\, (J_0J + JC).$$

Die Löſung der in Fr. 142 geſtellten Aufgabe fordert aber, daß $JC = w_c$ ſei, und dazu hätte man noch $J_0J$ zu finden aus der Gleichung:
$$\overline{J_0A}^2 = J_0J\, (J_0J + w_c).$$

Auch hier liefert der zweite Punkt in BA, welcher dieſer Gleichung genügt (Fr. 74 XIII.), nichts Neues.

Man könnte nun die Aufgabe ſo löſen, daß man an $BA = c$ in A und in B den Winkel $BAJ_0 = ABJ_0 = \frac{1}{2} C$ anträgt und ſo zunächſt mittels des gleichſchenkeligen $\triangle ABJ_0$ den Punkt $J_0$ und die Strecke $J_0A$ beſtimmt, ohne den Kreis K zu ſchlagen, daß man dann $AN \perp J_0A$ und $AN = \frac{1}{2} w_c$ macht, von N aus auf $J_0N$ die Strecken $NL_1 = NL_2 = \frac{1}{2} w_c$ abſchneidet, BA in J mit einem Kreiſe um $J_0$ vom Halbmeſſer $J_0J = J_0L_1$ ſchneidet und $J_0J$ um $JC = w_c$ verlängert. Nach Fr. 160 IV. (oder Fr. 161 IV.) iſt dann $\overline{J_0A}^2 = J_0L_1$ $(J_0L_1$

$+ L_1L_2) = J_0L_1 (J_0L_1 + w_c) = J_0J (J_0J + w_c) = J_0J \,.\, J_0C$. Der gefundene Punkt C liegt demnach auf dem Kreiſe K durch B, $J_0$ und A und $\angle BCA = 180° - \angle BJ_0A$ (Fr. 96 VIII.) $= 2 \angle BAJ_0$ hat die vorgeſchriebene Größe C, wird auch von JC halbiert.

X. Eine andere Löſung für die in Fr. 141 geſtellte Aufgabe (und eine dritte Löſung für die Aufgabe in Fr. 142) giebt Fr. 161 II. an die Hand. Nach Beſtimmung der Sehne $AJ_0$ mache man $AJ_1 = 2\, AJ_0$, ſchlage über $AJ_1$ aus $M_0$ einen Kreis $K_0$ von ausreichend großem Halbmeſſer und ziehe in letzterem eine Sehne $HJ_0H_0$, deren Mitte um $\frac{1}{2} w_c$ von $J_0$ abſteht (Fr. 90 V., 96 VII.); dann iſt nach Fr. 161 II. $\overline{AJ_0}^2 = J_0H \,.\, J_0H_0$, ferner $J_0H = J_0H_0 + w_c$ und deshalb $J_0H_0 = J_0J$, ſowie $J_0H = J_0C$. — Am einfachſten macht man $J_0M_0 = \frac{1}{2} w_c$.

XI. Aus IV. in Verbindung mit I. folgt ferner der Beweis für die Richtigkeit der in Fr. 143 gegebenen Löſung der dort vorgeführten Aufgabe. In Fig. 128 waren B, $B_1$, X und Y Punkte des Kreiſes $K_3$, und deshalb iſt

$$BQ \,.\, B_1Q = YQ \,.\, XQ \quad (I.);$$

zugleich war QU Tangente des Kreiſes $K_2$, auf welchem ebenfalls X und Y liegen, und demnach iſt auch

$$\overline{QU}^2 = YQ \,.\, XQ \; (IV.);$$

daher iſt auch $\overline{QU}^2 = BQ \,.\, B_1Q$ (Fr. 20 V.) und QU Tangente an den nach Fr. 88 durch B, $B_1$ und U zu ſchlagenden Kreis $K_1$ (VI.). Der Mittelpunkt von $K_1$ muß aber M ſein, denn der Mittelpunkt von $K_1$ muß in UA liegen (wegen Fr. 83 X.) und zugleich auf G (Fr. 74 XVII.), weil ja $BB_1 \perp G$ und $B_1Z = BZ$ gemacht wurde.

Man könnte den Beweis auch mit VII. führen; denn QU war ja Tangente an $K_2$, alſo $QU \perp UA$, und deshalb müſſen, weil $\overline{QU}^2 = BQ \,.\, BQ_1$ ſein ſoll, B aber nicht auf $K_2$ liegen kann (Fr. 76 I.), B und $B_1$ auf einem andern QU in U berührenden Kreiſe liegen, nach der Beſtimmung des Punktes $B_1$ kann aber der Mittelpunkt dieſes Kreiſes nur in G, alſo in M liegen.

**162. Wie lautet der Ptolemäiſche Lehrſatz über das Sehnenviereck?**

Macht man in dem Sehnenvierecke ABCZ, Fig. 146 (vergl. 96 VIII. und 97 III.), den $\angle ZCY = \angle ACB$ und ſchneidet CY die Diagonale AZ in Q, ſo folgt aus der Gleichheit der Winkel ACQ und BCZ (Fr. 20 VIII.), CAZ und CBZ, CBA und CZA, ABC und AZC (Fr. 96 II.), daß

$$\triangle ACQ \sim \triangle BCZ \quad \text{und} \quad \triangle ACB \sim \triangle QCZ \ (\text{Fr. } 156 \text{ I.})$$

$$AQ : AC = BZ : BC \qquad CB : AB = CZ : QZ \ (\text{Fr. } 153 \text{ I.})$$

$$AQ = \frac{AC \,.\, BZ}{BC} = AZ - QZ \qquad QZ = \frac{AB \,.\, CZ}{BC} \ (\text{Fr. } 147 \text{ II.})$$

$$BC \,.\, AZ = BZ \,.\, AC + BA \,.\, ZC,$$

d. h. in jedem Sehnenvierecke iſt das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den beiden Gegenſeitenpaaren.

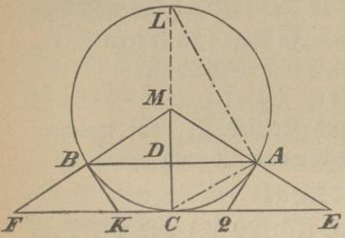

Fig. 147.

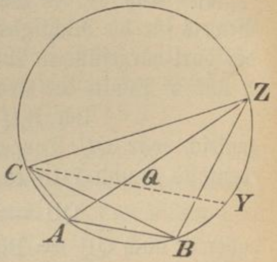

Fig. 146.

**163. Wie findet man aus der Seite eines eingeſchriebenen regelmäßigen Vielecks die Seite und den Umfang des umgeſchriebenen von eben ſo viel, ſowie des ein- und umgeſchriebenen von doppelt ſo viel Seiten?**

I. Zwiſchen der Sehne BA = s (Fig. 147), deren Abſtand MD = e vom Mittelpunkte M, und dem Halbmeſſer MC = r beſtehen, nach Fr. 160 III. und Fr. 161 II., die gleichbedeutenden Gleichungen:

$$r^2 = e^2 + (\tfrac{1}{2}s)^2 = e^2 + \tfrac{1}{4}s^2$$

und $$\tfrac{1}{4}s^2 = CD \,.\, DL = (r - e)\,(r + e).$$

II. Verlängert man die nach den Endpunkten der Sehne BA = s gezogenen Halbmeſſer MA = MB = r, bis ſie die der Sehne BA parallele Tangente FE in E und F ſchneiden, ſo beſtehen nach Fr. 148 I. zwiſchen den Entfernungen dieſer Punkte von einander (FE = t) und vom Mittelpunkte (EM = $r_1$), dem Halbmeſſer r, der Sehne s und ihrer Entfernung e vom Mittelpunkte die drei Gleichungen:

$$s:t = r:r_1$$
$$s:t = e:r$$
$$e:r = r:r_1.$$

III. Iſt die Sehne s die Seite eines in den Kreis vom Halbmeſſer r eingeſchriebenen regelmäßigen Vielecks (n-ecks), ſo iſt t die Seite des demſelben Kreiſe umgeſchriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl; wegen II. iſt auch da $t = \frac{rs}{e} = \frac{r_1 s}{r}$.

IV. Aus der Seite BA = s, Fig. 147, eines eingeſchriebenen regelmäßigen Vielecks (n-ecks) kann man (Fr. 113 VIII.) die Seite AC = $s_2$ des in denſelben Kreis eingeſchriebenen Vielecks von doppelt ſo viel (2n) Seiten (Fr. 90 VIII.) und deren Entfernung $e_2$ vom Mittelpunkte finden, weil nach Fr. 160 I., 96 III. und nach Fr. 163 I.:

$$s_2^2 = \overline{AC}^2 = CL.DC = 2r(r-e),$$
$$e_2^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}s_2^2 = r^2 - \tfrac{1}{2}r(r-e)$$
$$= r^2 - \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{2}re = \tfrac{1}{2}r(r+e).$$

V. Aus der Seite EF = t, Fig. 147, eines umgeſchriebenen regelmäßigen Vielecks (n-ecks) läßt ſich die Seite QK = $t_2$ des demſelben Kreiſe umgeſchriebenen regelmäßigen Vielecks von doppelt ſo viel (2n) Seiten finden. Macht man nämlich AQ ⊥ EM und BK ⊥ FM, ſo iſt nach Fr. 90 VIII., 103 IV. QK eine ganze, AQ und BK aber zwei halbe Seiten des 2n-ecks.

Da nun $\triangle EAQ \sim \triangle ECM \sim \triangle ADM$ (Fr. 156 I.), ſo ſteht:

$$AQ : EA = CM : EC = DM : AD$$
$$AQ : EQ = CM : EM,$$

oder $\frac{1}{2}t_2 : (r_1 - r) = r : \frac{1}{2}t = e : \frac{1}{2}s$

$$t_2 = \frac{4r(r_1 - r)}{t} = \frac{4e(r_1 - r)}{s}.$$

Da nun nach II. $r_1 = r^2 : e$ und demnach eben ſowohl $e(r + r_1) = r(e + r)$, als auch $4e(r_1 - r) = 4(r^2 - re) = 4r(r - e) = [4r(r - e)(r + e)] : (r + e)$ iſt, ſo wird wegen I.: $4e(r_1 - r) = rs^2 : (r + e)$

und $$t_2 = \frac{rs}{r+e} = \frac{te}{r+e} = \frac{tr}{r+r_1}.$$

VI. Die Umfänge $u_n$ und $u_{2n}$ des in einen Kreis vom Halbmeſſer r eingeſchriebenen regelmäßigen n-ecks und 2n-ecks ſind (wegen I. und IV.):

$$u_n = ns = 2n\sqrt{r^2 - e^2} = 2n\sqrt{(r+e)(r-e)}$$
$$u_{2n} = 2ns_2 = 2n\sqrt{2r(r-e)}.$$

VII. Die Umfänge $U_n$ und $U_{2n}$ des einem Kreiſe vom Halbmeſſer r umgeſchriebenen regelmäßigen n-ecks oder 2n-ecks ſind (wegen III. und V.):

$$U_n = nt = \frac{nrs}{e} = \frac{r}{e}u_n,$$

$$U_{2n} = 2nt_2 = \frac{2nte}{r+e} = \frac{2e}{r+e}U_n.$$

VIII. Weil nun $2r > r + e$, ſo iſt $u_{2n} > u_n$, d. h. der Umfang eines eingeſchriebenen regelmäßigen Vielecks iſt kleiner als der Umfang eines demſelben Kreiſe eingeſchriebenen Vielecks von doppelt, viermal, achtmal ꝛc. ſo viel Seiten;

$$u_n < u_{2n} < u_{4n} < \ldots .$$

IX. Weil ferner $2e < r + e$, ſo iſt $U_n > U_{2n}$, d. h der Umfang eines umgeſchriebenen regelmäßigen Vielecks iſt größer als der Umfang des demſelben Kreiſe umgeſchriebenen Vielecks von doppelt, viermal, achtmal ꝛc. ſo viel Seiten;

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > \cdots$$

X. Weil endlich $r > e$, ſo iſt

$$U_n > u_n,$$

d. h. der Umfang des eingeſchriebenen regelmäßigen Vielecks iſt kleiner, als der Umfang des demſelben Kreiſe umgeſchriebenen Vielecks von ebenſoviel Seiten.

XI. Da nun aber $e = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$ iſt, und da s um ſo kleiner wird, je größer die Seitenzahl n wird (Fr. 91 VI.), ſo nähert ſich e um ſo mehr dem Halbmeſſer r, je größer n wird. Daher wird das Verhältnis $U_n : u_n$ (VII.) zugleich mit dem Verhältnis $r : e$ um ſo mehr $= 1$ (d. h. die beiden Umfänge $U_n$ und $u_n$ unterſcheiden ſich um ſo weniger von einander), je größer die Seitenzahl n wird.

Obwohl alſo bei wiederholter Verdoppelung der Seitenzahl der Umfang U immer kleiner, der Umfang u aber immer größer wird, ſo geht doch jene Verkleinerung und dieſe Vergrößerung nicht über alle Grenzen hinaus fort, vielmehr nähern ſich (weil ja nach X. ſtets $U_n > u_n$ iſt) hierbei U und u einem gemeinſchaftlichen Grenzwerte W, es iſt alſo:

$$U_n > U_{2n} > U_{4n} > \cdots > W > \cdots > u_{4n} > u_{2n} > u_n.$$

XII. Die gemeinſchaftliche Grenze, der ſich die beiden Verhältniſſe $u_n : 2r$ und $U_n : 2r$ nähern, iſt (vergl. Fr. 178 IV.):

$$\pi = 3{,}141\,592\,65\ \ldots\,;$$

Annäherungswerte von $\pi$, ferner die häufig gebrauchten Zahlenwerte von $1 : \pi$, $\sqrt{\pi}$ und $1 : \sqrt{\pi}$ folgen in Fr. 178 V.

**164. Wie löſt man die Aufgaben der Proportionslehre geometriſch?**

I. Die vierte Proportionale $BC_1$ (vergl. Fig. 130) zu drei gegebenen BA, BC und $BA_1$ findet man, indem man BA und BC auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels ABC aufträgt, auf BA noch $BA_1$ abſchneidet und $A_1C_1 \parallel AC$ macht. Dann iſt nach Fr. 148 I.:

$$BA : BC = BA_1 : BC_1.$$

II. Macht man in I. $BA_1 = BC$, ſo findet man zu zwei Strecken BA und BC die dritte Proportionale $BC_1$, da dann $BA : BC = BC : BC_1$ iſt.

III. Zu zwei gegebenen Strecken $AN = x$ und $NB = y$ (vergl. Fig. 142) findet man die mittlere Proportionale, indem man über $AB = x + y$ als Durchmeſſer einen Kreis ſchlägt und dieſen durch eine in N auf AB errichtete Senkrechte $NC = p$ in C ſchneidet. Weil dann $\angle ACB = 90^\circ$ (Fr. 96 III.), ſo iſt $x : p = p : y$ (Fr. 160 I.).

Eine andere Löſung mit Hilfe von Fr. 103 II. giebt Fr. 161 IV. (oder V.) an die Hand.

IV. Da in III. $p^2 = xy$, alſo $p = \sqrt{xy}$, ſo ließe ſich dieſes Verfahren auch zum Ausziehen der Quadratwurzel benutzen.

In ähnlicher Weiſe könnte man die Auffindung der Strecke $BC_1$ nach I., bez. nach II. als die geometriſche Konſtruktion des arithmetiſchen (algebraiſchen) Ausdrucks $\frac{BC \,.\, BA_1}{BA}$ und $\frac{\overline{BC}^2}{BA}$ betrachten.

V. Will man eine Strecke $FN = a$ (vergl. Fig. 145) nach ſtetiger Proportion ſchneiden (goldener Schnitt, vergl. Fr. 147 IV.), d. h. ſo, daß der größere Abſchnitt $FU_1 = x$ die mittlere Proportionale zwiſchen der Strecke FN und dem kleineren Abſchnitt $NU_1$ iſt, ſo errichte man in N eine Senkrechte $NM = \frac{1}{2}FN$, ſchlage aus M einen Kreis mit dem Halbmeſſer MN, ziehe aus F den Durchmeſſer FUMV und mache $FU_1 = FU$.

Denn dann iſt $UV = 2MN = FN$ und nach Fr. 161 V.

$$\begin{aligned} \overline{FN}^2 &= FV \,.\, FU = (FU + UV)\, FU \\ &= (FU + FN)\, FU = \overline{FU}^2 + FN \,.\, FU, \end{aligned}$$

alſo weiter:

$$\begin{aligned} \overline{FU_1}^2 = \overline{FU}^2 &= \overline{FN}^2 - FN \,.\, FU = FN\,(FN - FU) \\ &= FN\,(FN - FU_1) = FN \,.\, NU_1, \end{aligned}$$

oder:

$$FN : FU_1 = FU_1 : NU_1.$$

Man könnte aber im Einklang mit Fr. 147 IV. auch die Größe von $FU = x$ nach Fr. 160 III. finden:

$$\overline{MF}^2 = \overline{FN}^2 + \overline{MN}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$x = MF - MU = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

VI. Iſt in Fig. 125 DMU eines der zehn kongruenten gleichſchenkeligen Dreiecke eines regelmäßigen Zehnecks (Fr. 113 IV.), ſo iſt $\angle DMU = \frac{4}{10}\mathfrak{R} = \frac{2}{5}\mathfrak{R}$ (Fr. 34 IV.);
daher $\angle DUM = \angle UDM = \frac{1}{2}(2\mathfrak{R} - \angle DMU)$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5}\mathfrak{R} = \frac{4}{5}\mathfrak{R} = 2\angle DMU$
(Fr. 68 II.).

Halbiert nun UF den Winkel DUM, ſo wird $\angle DUF = DMU$, daher $\triangle DUF \sim \triangle DMU$ (Fr. 156 I.), folglich $DF : DU = DU : DM$ und $DU : UF = DM : MU = 1$, d. h. $DU = UF$ (Fr. 153 I.).

Weil aber auch $\angle FUM = \frac{1}{2}\angle DUM = \angle DMU$ iſt, ſo folgt aus $UF = FM$ (Fr. 74 VI.) weiter:

$$DU = FM \text{ (Fr. 20 V.)},$$

und endlich wird aus $DF : DU = DU : DM$ nach Fr. 20 IV. jetzt

$$DF : FM = FM : DM.$$

Schneidet man alſo den Halbmeſſer DM eines Kreiſes nach ſtetiger Proportion (V.), ſo gleicht der größere Abſchnitt FM der Seite DU des eingeſchriebenen regelmäßigen Zehnecks. Die Seite DC des regelmäßigen Fünfecks erhält man, wenn man $UC = UD$ macht.

**165. Wie findet man einen Kreis, von welchem zwei Punkte und eine Tangente, oder ein Punkt und zwei Tangenten gegeben ſind?**

I. Sind zwei Tangenten $T_1S$ und $T_2S$ und ein im $\angle T_1ST_2$ gelegener Punkt $P_1$ gegeben, ſo muß der Mittelpunkt M des geſuchten Kreiſes (wegen Fr. 103 VII.) auf der Geraden SX liegen, welche den $\angle T_1ST_2$ halbiert.

Liegt nun $P_1$ außerhalb SX, ſo fälle man von $P_1$ eine Senkrechte $P_1E$ auf SX herab und verlängere dieſelbe jenſeits

SX um das Stück $EP_2 = P_1E$; dann iſt $P_2$ auch ein Punkt des geſuchten Kreiſes (Fr. 74 XI.), und ſomit wäre die zweite Aufgabe auf die erſte zurückgeführt.

Liegt dagegen $P_1$ in SX, ſo tangiert auch die in $P_1$ auf SX errichtete Senkrechte den geſuchten Kreis (Fr. 83 II.), und die Aufgabe iſt nach Fr. 104 II. und IV. zu löſen.

II. Sind zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ und eine Tangente TS gegeben und wird letztere von der verlängerten Sehne $P_1P_2$ in F, von der auf $P_1P_2$ in deren Mitte E errichteten (durch den Mittelpunkt M gehenden) Senkrechten XES aber in S geſchnitten, ſo iſt die Entfernung FN des Berührungspunktes N des geſuchten Kreiſes von dem Schnittpunkte F nach Fr. 161 IV. zu finden aus $\overline{FN}^2 = FP_1 . FP_2$. Trägt man die nach Fr. 164 III. konſtruierte Strecke FN von F aus in TS auf, ſo hat man jetzt drei Punkte: $P_1$, $P_2$ und N des Kreiſes und kann dieſen nach Fr. 89 II. zeichnen.

Da man aber FN auf ST von F ebenſowohl nach S hin als nach der entgegengeſetzten Seite hin auftragen kann, ſo giebt es im allgemeinen zwei Löſungen.

Anm. S iſt der äußere Ähnlichkeitspunkt (Fr. 105 IV.) nicht bloß für die beiden bei Löſung der geſtellten Aufgabe ſich ergebenden Kreiſe $K_1$ und $K_2$ um $M_1$ und $M_2$, ſondern auch für alle Kreiſe $K_0$, welche aus einem Punkte $M_0$ in SEX als Mittelpunkt geſchlagen werden und TS berühren. Jeder dieſer Kreiſe wird von $P_1S$ in zwei Punkten P' und P'' geſchnitten und dabei iſt ſtets $P'M_0 \parallel P_1M_1$ und $P''M_0 \parallel P_1M_2$ (Fr. 153 I. und 156 IV.). Dieſe Bemerkung führt zu einer andern ſehr bequemen Löſung für I. und II. durch Ziehen zweier Parallelen durch $P_1$.

III. Iſt in II. $P_1P_2 \parallel ST$, ſo wird $EMS \perp ST$, und weil auch $MN \perp ST$, ſo rückt der Berührungspunkt N nach S; es giebt alſo jetzt bloß eine Löſung. Der Schnittpunkt F iſt jetzt unendlich weit von N entfernt (Fr. 77 IV. Anm.).

IV. Wenn $P_1$ (oder $P_2$) in ST liegt, d. h. mit N zuſammenfällt, haben I. und II. ebenfalls bloß eine Löſung. NF iſt dabei = 0.

V. Liegen $P_1$ und $P_2$ in II. auf verſchiedenen Seiten von ST, ſo giebt es keine Löſung (Fr. 83 VI.).

VI. Iſt in I. $\angle T_1ST_2 = 180°$, ſo giebt es unzählige Löſungen, weil die Lage von S und von SE nicht beſtimmt iſt.

Vergl. Fr. 88 IV. und Fr. 104 II. bis IV.

---

### Siebentes Kapitel.

## Gleichheit, Proportionalität und Ausmeſſung des Flächeninhaltes ebener Figuren.

**166. Wenn ſind Parallelogramme und Dreiecke inhaltsgleich?**

I. Dreiecke EFK und HGK (Fig. 148), ebenſo Parallelogramme EFGH und KGNL, welche zwiſchen Parallelen AB und CD liegen, haben gleiche Höhe (Fr. 159 I., 108 XIII.).

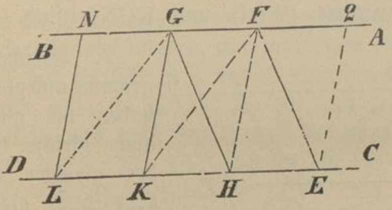

Fig. 148.

II. Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Höhe laſſen ſich zwiſchen Parallelen legen (Fr. 108 XIII.).

III. Parallelogramme EFGH und KGNL (Fig 148) über gleichen Grundſeiten (GF = NG) und von gleicher Höhe ſind inhaltsgleich (vergl. Fr. 66 IV.).

Bew. Legt man die Parallelogramme zwiſchen Parallellinien AB und CD ſo, daß GF an NG ſtößt und die Parallelogramme außer einander liegen, ſo iſt:

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathrm{EK} = \mathrm{EH} + \mathrm{HK} \\
 & \quad = \mathrm{KL} + \mathrm{HK} = \mathrm{HL} \text{ (Fr. 20 VIII., 108 III.)} \\
 & \mathrm{EF} = \mathrm{HG} \text{ (Fr. 108 III.)} \\
 & \angle \mathrm{FEK} = \angle \mathrm{GHL} \text{ (Fr. 62 I.)} \\
\hline
 & \triangle \mathrm{FEK} \cong \triangle \mathrm{GHL} \text{ (Fr. 80 II.);} \\
\text{ferner:} & \mathrm{FG} = \mathrm{GN} \text{ (Vor.)} \\
 & \mathrm{GK} = \mathrm{NL} \text{ (Fr. 108 III.)} \\
 & \angle \mathrm{FGK} = \angle \mathrm{FNL} \text{ (Fr. 62 I.)} \\
\hline
 & \triangle \mathrm{FGK} \cong \triangle \mathrm{GNL} \text{ (Fr. 80 II.)} \\
\hline
 & \triangle \mathrm{FEK} + \triangle \mathrm{FGK} = \triangle \mathrm{GHL} + \triangle \mathrm{GNL} \text{ (Fr. 20 VIII.)} \\
\hline
 & \mathrm{EFGK} = \mathrm{HGNL} \text{ (Fr. 20 II.)} \\
\hline
 & \mathrm{EFGK} - \triangle \mathrm{HGK} = \mathrm{HGNL} - \triangle \mathrm{HGK} \text{ (Fr. 20 VIII.)} \\
\hline
 & \mathrm{EFGH} = \mathrm{KGNL} \text{ (Fr. 20 II.).}
\end{array}
$$

IV. Dreiecke FGH und GNL (Fig. 148) von gleicher Grundſeite (FG = GN) und gleicher Höhe ſind inhaltsgleich, da ſie nach Fr. 108 II. die Hälfte der gleichen Parallelogramme EFGH und KGNL ſind.

V. Gleiche Parallelogramme und gleiche Dreiecke haben bei gleicher Höhe auch gleiche Grundſeiten, bei gleichen Grundſeiten aber auch gleiche Höhen (III., IV.).

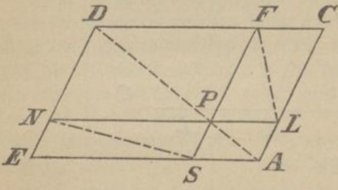

Fig. 149.

VI. Zieht man durch einen Punkt P der Diagonale AD eines Parallelogramms ACDE (Fig. 149) zwei Parallele LN und SF zu den Seiten, ſo zerfällt das Parallelogramm in vier mit dem Ganzen gleichwinkelige Parallelogramme, von denen die zwei um die Diagonale liegenden ALPS und PFDN ähnlich ſind; die beiden anderen LPFC und SPNE heißen die Ergänzungen (Komplemente) der erſteren und ſind inhaltsgleich.

Da nämlich $\angle LPA = \angle FDP$ und $\angle LAP = \angle FPD$ (Fr. 62 I.), ſo iſt $\triangle ALP \sim \triangle PFD$ (Fr. 156 I.) und $ALPS \sim PFDN$ (Fr. 108 I. und 150 I.).

Zieht man ferner von den nach Fr. 108 I. kongruenten $\triangle\triangle$ ACD und DEA die ebenfalls kongruenten $\triangle\triangle$ ALP und PSA, PFD und DNP ab, ſo bleiben die (wenn auch nicht ſtets kongruenten, ſo doch ſicher) gleichen Parallelogramme LPFC und SPNE übrig (Fr. 20 VIII.).

VII. Weil in VI. $\triangle ALP \sim \triangle PFD$, ſo iſt $LP : LA = FD : FP$, oder auch $LP : PS = PN : FP$ (Fr. 108 III.) und $LP . FP = PS . PN$, d. h. es ſind die Produkte der auf derſelben Seite der Diagonale DA gelegenen Abſchnitte der Parallelen LN und SF gleichgroß. — Vergl. Fr. 161 I.

VIII. Zwei Parallelogramme LPFC und SPNE (Fig. 149) (oder zwei Dreiecke LPF und SPN, Fr. 108 II.), welche in einem Winkel P übereinſtimmen (alſo zwei Rechtecke ſtets), ſind inhaltsgleich, wenn die Produkte aus ihren jenen Winkel P einſchließenden Seiten gleich ſind.

Legt man die Parallelogramme ſo an einander, daß die Winkel P Scheitelwinkel werden, und verlängert CL und ES, CF und EN, bis ſie ſich in A und D ſchneiden, und zieht man PA und PD, ſo iſt $AL = SP$ und $DF = NP$ (Fr. 108 III.), und man erhält aus der vorausgeſetzten Gleichung $SP . NP = PL . PF$, nach Fr. 20 IV. $AL . DF = PL . PF$, alſo $AL : PL = PF : DF$. Da außerdem $\angle ALP = \angle PFD$ (Fr. 63 I.), ſo iſt $\triangle ALP \sim \triangle PFD$ (Fr. 156 II.) und $\angle LAP = \angle FPD$ (Fr. 153 I.). Weil aber auch $\angle LAP = \angle SPA$ (Fr. 62 I.), ſo iſt weiter $\angle SPA = \angle FPD$ (Fr. 20 V.) und deshalb muß APD eine Gerade ſein (Fr. 43.), nämlich die Diagonale des Parallelogramms ACDE; demnach iſt endlich:

$$LPFC = SPNE \text{ (VI.)}.$$

IX. Zwei Parallelogramme (deshalb auch zwei Dreiecke, Fr. 108 II.) ſind inhaltsgleich, wenn die Produkte aus Höhe und Grundſeite gleich ſind (Fr. 20 IV.); denn jedes der beiden Parallelogramme gleicht dann nach III. dem Rechtecke, welches dieſelben Höhen und Grundſeiten hat, die beiden Rechtecke aber ſind nach VIII. inhaltsgleich.

X. Die der Grundſeite gegenüber liegenden Seiten ſolcher Parallelogramme, welche gleichen Flächeninhalt und eine gemeinſchaftliche Grundſeite haben, liegen in einer zur Grundſeite parallelen Geraden.

XI. Die Spitzen aller Dreiecke von gleichem Flächeninhalte, welche ſich über der nämlichen Grundſeite zeichnen laſſen, liegen in einer zu dieſer Grundſeite parallelen Geraden.

**167. Wenn laſſen ſich zwei Parallelogramme unmittelbar addieren und ſubtrahieren?**

I. Stimmen zwei Parallelogramme ABEF und ABCD in einer Seite AB = a (Fig. 150 und 151) und einem Winkel w überein, ſo laſſen ſich dieſelben mit dieſer gleichen Seite AB ſo an einander legen, daß (entweder wegen Fr. 107 I. und 40, oder wegen Fr. 31) die anſtoßenden Seiten AF und AD in eine Gerade fallen. Daher iſt ihre Summe und ihre Differenz ein Parallelogramm von dem nämlichen Winkel w und der nämlichen Seite a, deſſen zweite Seite DF aber in Fig. 150 die Summe AF + AD, in Fig. 151 dagegen die Differenz AF—AD der anderen Seiten AF und AD der beiden Parallelogramme ABEF und ABCD iſt.

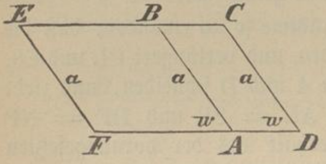

Fig. 150.

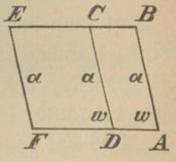

Fig. 151.

II. Bezeichnen wir der Kürze halber ein aus den Seiten AB = a und AD = b konſtruiertes Rechteck ABCD mit $\boxed{AB, AD}$ oder $\boxed{a, b}$, dann läßt ſich der auf zwei Rechtecke angewendete Satz I. kurz ſo ſchreiben:

$$\boxed{a, b} + \boxed{a, c} = \boxed{a, (b + c)}$$

und

$$\boxed{a, b} - \boxed{a, c} = \boxed{a, (b - c)}.$$

III. Umgekehrt iſt auch

$$\boxed{a, (b + c)} = \boxed{a, b} + \boxed{a, c}$$

und

$$\boxed{a, (b - c)} = \boxed{a, b} - \boxed{a, c}.$$

IV. Ein über der Seite a konſtruiertes Quadrat wäre nach II. durch $\boxed{a, a}$ zu bezeichnen, möge aber kürzer durch $\boxed{a}$ bezeichnet werden.

**168. Welchen Inhalt beſitzt die von einer Strecke bei ihrer Parallelverſchiebung in einer Ebene erzeugte Figur?**

Bewegt ſich eine Strecke AB = a, Fig. 152, von unveränderlicher Länge (wie in Fr. 55 II.) parallel zu ſich ſelbſt in einer Ebene an einer krummen Linie BCD hin, ohne denſelben Teil der Ebene wiederholt zu überſtreichen, ſo erzeugt ſie eine gemiſchtlinige Figur ABCDKL, deren Inhalt dem des Rechtecks aus der Strecke AB und dem von ihr in der zur Strecke AB ſenkrechten Richtung zurückgelegten Wege SQ = q gleicht.

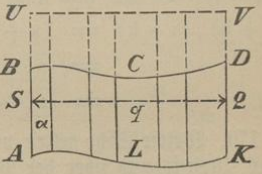

Fig. 152.

Von der Richtigkeit dieſes Satzes überzeugt man ſich ſofort, wenn man die Figur ASQKL abſchneidet und auf der andern Seite als BUVDC anſetzt (Fr. 62 V., 108 XIII.).

**169. Wie groß ſind die Quadrate über der Summe und Differenz zweier Strecken, ferner die Differenz zweier Quadrate?**

I. Das Quadrat über der Summe (a + b) zweier Strecken a und b beſteht aus der Summe der Quadrate über den beiden Strecken und dem doppelten Rechteck aus den beiden Strecken*). Nach Fr. 167 III. und IV., ſowie Fr. 20 XI. iſt nämlich:

$$\begin{aligned}\boxed{a+b} &= \boxed{(a+b),(a+b)}\\ &= \boxed{(a+b),a} + \boxed{(a+b),b}\\ &= \left\{\boxed{a,a} + \boxed{b,a}\right\} + \left\{\boxed{a,b} + \boxed{b,b}\right\}\\ &= \boxed{a} + 2\boxed{a,b} + \boxed{b}.\end{aligned}$$

II. Das Quadrat über der Differenz a—b zweier Strecken a und b iſt gleich der Differenz zwiſchen der Summe der Quadrate über beiden Strecken und dem doppelten Rechteck aus ihnen. Aus Fr. 167 III. und IV. nebſt 20 XI. folgt ja:

$$\begin{aligned}\boxed{a-b} &= \boxed{(a-b),(a-b)}\\ &= \boxed{(a-b),a} - \boxed{(a-b),b}\\ &= \left\{\boxed{a,a} - \boxed{b,a}\right\} - \left\{\boxed{a,b} - \boxed{b,b}\right\}\\ &= \boxed{a} + \boxed{b} - 2\boxed{a,b}.\end{aligned}$$

III. Die Differenz zweier Quadrate iſt gleich dem Rechteck aus der Summe und der Differenz ihrer Seiten**). Denn wegen Fr. 20 XI. und nach Fr. 167 III. und IV. ergiebt ſich:

$$\begin{aligned}\boxed{(a+b),(a-b)} &= \boxed{(a+b),a} - \boxed{(a+b),b}\\ &= \left\{\boxed{a,a} + \boxed{a,b}\right\} - \left\{\boxed{a,b} + \boxed{b,b}\right\}\\ &= \boxed{a} - \boxed{b}.\end{aligned}$$

**170. Welche Sätze gelten von den Quadraten über den Seiten eines Dreiecks und über der Projizierenden?**

I. Im rechtwinkeligen Dreieck iſt das Quadrat über der Hypotenuſe AB = h gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten AC = a und BC = b (vergl. Fr. 160 III.).

---

*) Die drei Sätze I. bis III., welche ſich mit einer Fig. 149 ähnelnden Figur auch leicht rein geometriſch beweiſen laſſen, ſind die Seitenſtücke zu den drei arithmetiſchen Sätzen: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und
$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$.

Ähnliches gilt von den Sätzen in Fr. 170 in Bezug auf die Sätze in Fr. 160. Vergl. auch Fr. 177 V.

**) Der Satz läßt ſich auch unmittelbar beweiſen, durch Ineinanderlegen der Quadrate.

Beſchreibt man über AB das Quadrat AEFB (Fig. 153), fällt man von E und F Senkrechte EK und FD auf die verlängerte CB, darauf von A und F Senkrechte AM und FL auf EK, ſo ſind die Winkel v, m, u und n gleich (Fr. 71 VI.), weil ihre Schenkel der Reihe nach auf einander ſenkrecht ſtehen. Die rechtwinkeligen △△ ABC, AEM, EFL und BFD, welche außerdem noch in den Hypotenuſen AB = AE = EF = BF übereinſtimmen (Fr. 108 VII.), ſind deshalb kongruent (Fr. 81 II.); daher iſt AM = AC und FL = FD = BC (Fr. 67 II.), oder es ſind AMKC und LFDK die Quadrate über AC und FL = BC (Fr. 108 VII.). Schneiden wir nun die beiden Dreiecke AEM und EFL von AEFB ab und ſetzen ſie als ABC und BFD an den Reſt AMLFB wieder an, ſo wird: AEFB = AMKC + LFDK (Fr. 20 II.), oder

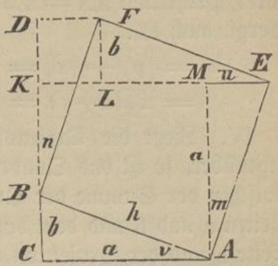

Fig. 153.

$$\boxed{h} = \boxed{a} + \boxed{b}.$$

Dieſer Satz heißt der **Pythagoräiſche Lehrſatz**.

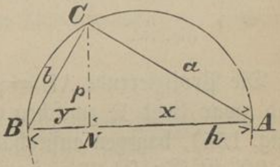

Fig. 154.

II. Im rechtwinkeligen Dreieck iſt das Quadrat über der Projizierenden CN = p (vergl. Fig. 154) gleich dem Rechtecke aus den Projektionen AN = x und NB = y der Katheten:

$$\boxed{h} = \boxed{x+y} = \boxed{x} + \boxed{y} + 2\,\boxed{x,y} \quad \text{(Fr. 169 I.)}$$

$$\boxed{h} = \boxed{a} + \boxed{b} = \left\{\boxed{x} + \boxed{p}\right\} + \left\{\boxed{y} + \boxed{p}\right\} \text{(I.)}$$

$$\boxed{x,y} = \tfrac{1}{2}\left\{\boxed{h} - \boxed{x} - \boxed{y}\right\} = \boxed{p} \quad \text{(Fr. 20 VIII.)}.$$

III. Im rechtwinkeligen Dreieck iſt das Quadrat über einer Kathete AC = a (Fig. 154) gleich dem Rechtecke aus ihrer Projektion AN = x und der Hypotenuſe AB = h. — Vergl. auch IX.

$$\boxed{a} = \boxed{p} + \boxed{x} = \boxed{x,y} + \boxed{x,x}$$

$$= \boxed{x,(x+y)} = \boxed{x,h} \quad \text{(I., II.; Fr. 167 II.).}$$

IV. Liegt die Dreiecksſeite c einem ſpitzen Winkel C gegenüber, ſo iſt das Quadrat über ihr gleich der Differenz zwiſchen der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten a und b und dem doppelten Rechteck aus der zweiten Seite a und der Projektion CE = q der dritten Seite b auf die zweite a.

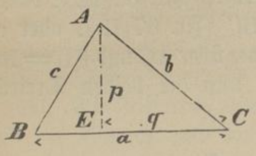

Fig. 155.

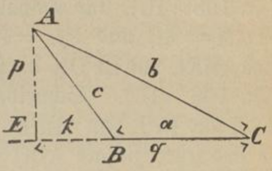

Fig. 156.

Die Projizierende AE = p trifft die Seite CB = a in E und zwar liegt E zwiſchen C und B, wenn ∠B < 90° (Fig. 155), dagegen außerhalb BC (Fig. 156), wenn ∠B > 90° iſt (Fr. 71 V.); im erſteren Falle iſt BE = a − q, im anderen BE = q — a.

Nun iſt nach I. und Fr. 169 II.:

$$\boxed{a-q} = \boxed{a} + \boxed{q} - 2\boxed{a,q} = \boxed{q-a}.$$

$$\boxed{c} = \boxed{BE} + \boxed{p} = \left\{\boxed{a} + \boxed{q} - 2\boxed{a,q}\right\} + \left\{\boxed{b} - \boxed{q}\right\}$$

$$= \boxed{a} + \boxed{b} - 2\boxed{a,q}.$$

Bei ∠B = 90° endlich iſt q = a, alſo BE = 0 und $\boxed{c} = \boxed{a} + \boxed{b} - 2\boxed{a,a} = \boxed{b} - \boxed{a}$, wie es I. verlangt.

V. Liegt die Dreiecksſeite b (Fig. 156) einem ſtumpfen Winkel B gegenüber, ſo iſt das Quadrat über ihr gleich der

Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten und dem doppelten Rechteck aus der zweiten Seite a und der Projektion BE = k der dritten Seite c auf die zweite a.

Die Projizierende AE = p trifft CB in E außerhalb CB (Fr. 71 V.); daher iſt CE = k + a und nach I. und Fr. 169 I.:

$$\boxed{b} = \boxed{p} + \boxed{k+a} = \boxed{p} + \boxed{k} + \boxed{a} + 2\boxed{a\,,k}$$
$$= \boxed{c} + \boxed{a} + 2\boxed{a\,,k}\,.$$

VI. In I., IV. und V. liegt eine weitere Entwickelung von Fr. 78 II.

VII. Iſt das Quadrat der Seite h eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten a und b, ſo iſt der h gegenüberliegende Winkel C ein rechter, weil ſonſt nach IV., oder nach V. $\boxed{h} \gtrless \boxed{a} + \boxed{b}$ ſein müßte.

VIII. Aus I. findet ſich in Berückſichtigung der Anmerkungen zu 159 I. und 169 I. eine weitere Löſung der Aufgabe in Fr. 143. Fällt man von A und B, Fig. 128, die Senkrechten AJ = $p_a$ und BZ = $p_b$ auf G und ſtehen deren Fußpunkte um ZJ = g von einander ab, während M von $p_a$ um JM = x, von $p_b$ um ZM = y = g — x entfernt iſt, dann hat man

$$\overline{AM}^2 = a^2 = p_a{}^2 + x^2 \quad \text{und}$$
$$\overline{BM}^2 = b^2 = [s-a]^2 = p_b{}^2 + y^2 = p_b{}^2 + [g-x]^2;$$
$$\left[s - \sqrt{p_a{}^2 + x^2}\right]^2 = p_b{}^2 + [g-x]^2,$$

woraus ſich x durch Rechnung finden läßt.

IX. Wie III. mit Fr. 160 IV. bezügl. der Werte $a^2$ und $b^2$ übereinſtimmt, ſo folgt aus III. auch ferner, daß in Übereinſtimmung mit Fr. 160 V. (vergl. auch Fr. 161 VIII.):

$$\boxed{a} = \boxed{h\,,x} = \boxed{h\,,(h-y)} \quad \text{und}$$
$$\boxed{b} = \boxed{h\,,y} = \boxed{h\,,(h-x)}\,.$$

Ebenſo findet ſich aus I. und Fr. 169 III. noch:

$$\boxed{a} = \boxed{h} - \boxed{b} = \boxed{h+b\,,h-b}\,,$$

was ſchon in Fr. 160 IV. liegt und in Fr. 167 IX. benutzt worden iſt.

X. In jedem Dreieck ABC, Fig. 126 S. 142, iſt die Summe $\boxed{a} + \boxed{b}$ der Quadrate über zwei Seiten gleich der Summe aus dem halben Quadrate der dritten Seite $AB = c$ und aus dem doppelten Quadrate der zu c gehörigen Mittellinie $CE = m$.

Wäre $b < a$ (wie in Fig. 126 S. 142), ſo wäre $\angle B < \angle A$ (Nr. 73 III.), ſomit $\angle B < 90^\circ$ (Nr. 71 I.). Deshalb liegt der zufolge Nr. 71 V. von B aus nach A hin fallende Fußpunkt D der Höhe $h_c = CD$ von B aus noch jenſeits der Mitte E der Seite c, weil doch nach Nr. 112 X. $DA < DB$, alſo $DA < \tfrac{1}{2}AB$ ſein muß. Mag daher CA von CB aus jenſeits CE liegen, oder zwiſchen CB und CD, immer iſt $\angle BEC > 90^\circ$ (Nr. 69 VII.) und $\angle AEC < 90^\circ$ (Nr. 39 IV.). Für die Projektion $DE = e$ der Mittellinie m, die Seiten c und a und die Strecke m des Dreiecks BEC beſteht daher nach V. die Gleichung:

$$\boxed{a} = \boxed{\tfrac{1}{2}c} + \boxed{m} + 2\,\boxed{\tfrac{1}{2}c, e};$$

ebenſo für die Seiten des Dreiecks AEC nach IV. die Gleichung:

$$\boxed{b} = \boxed{\tfrac{1}{2}c} + \boxed{m} - 2\,\boxed{\tfrac{1}{2}c, e}.$$

Deshalb iſt nach Nr. 20 VIII., und weil $\boxed{\tfrac{1}{2}c} = \tfrac{1}{4}\boxed{c}$

$$\boxed{a} + \boxed{b} = \tfrac{1}{2}\boxed{c} + 2\,\boxed{m}.$$

Wäre dagegen $b = a$, ſo fiele E auf D, und es wäre $DE = e = o$, $CE = CD$ und in Übereinſtimmung mit I. immer wieder:

$$\boxed{a} + \boxed{b} = 2\left\{\boxed{\tfrac{1}{2}c} + \boxed{m}\right\}.$$

XI. Sind in X. die Punkte A und B und ſomit auch $AB = c$ gegeben und liegt C auf einem um E mit dem Halbmeſſer m geſchlagenen Kreiſe, ſo iſt die rechte Seite der in X. gefundenen Gleichung bekannt und demnach die Summe $\boxed{a} + \boxed{b}$ unveränderlich, wenn C auf dem Kreiſe fortrückt.

Nach I. darf dieſe Summe $= \boxed{f}$ geſetzt werden. Demnach muß

der geometriſche Ort (Nr. 74 XVII.) eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate der Abſtände a und b von zwei gegebenen Punkten A und B einem gegebenen Quadrate $\boxed{f}$ gleicht, ein *Kreis* ſein, welcher um die Mitte E von $AB = c$ mit dem Halbmeſſer m zu ſchlagen iſt, für welchen $\boxed{m} = \frac{1}{2}\boxed{f} - \frac{1}{4}\boxed{c}$ ſein müßte.

Nach Fr. 20 VI. und nach Berückſichtigung von Fr. 177 V. ließe ſich der Halbmeſſer m aus

$$m = \sqrt{\tfrac{1}{2}f^2 + \tfrac{1}{4}c^2}$$

ausrechnen.

Wäre in einem beſonderen Falle $m = \frac{1}{2}c$, ſo erhielte man man $\boxed{c} = \boxed{f} = \boxed{a} + \boxed{b}$ und käme ſomit auf I. zurück.

## 171. Wie verwandelt man eine Figur in eine inhaltsgleiche?

I. Zieht man in einem ebenen Vieleck ABCDE (Fig. 157) eine Diagonale AC und zu dieſer durch B eine Parallele $BB_1$, bis ſie die verlängerte DC in $B_1$ ſchneidet, dann iſt $\triangle AB_1C = \triangle ABC$ (Fr. 166 IV.), daher auch $AB_1DE = ABCDE$, $AB_1DE$ hat jedoch eine *Seite weniger* als ABCDE.

II. Durch Wiederholung des in I. beſchriebenen Verfahrens läßt ſich jedes Vieleck endlich in ein inhaltsgleiches *Dreieck* verwandeln.

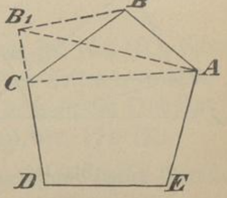

Fig. 157.

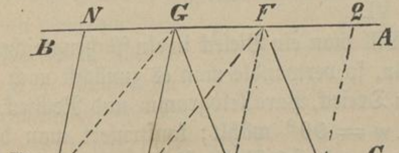

Fig. 158.

III. Will man ein Dreieck KEF (Fig. 158) in ein flächengleiches *Parallelogramm* verwandeln, ſo halbiere man eine Dreiecksſeite KE in H und ziehe FQ // KE, EQ // FH. Dann iſt nach Fr. 108 I. und 166 IV.:

$$EQFH = 2 \triangle EFH = \triangle EFK.$$

IV. Um ein Parallelogramm EFGH (Fig. 158) in ein anderes flächengleiches zu verwandeln, welches einen vorgeſchriebenen Winkel w enthält, ziehe man durch F und G die Geraden FK und GL, ſo daß $\angle BFK = \angle BGL = \angle w$ wird, und verlängere EH, bis ſie FK und GL in K und L ſchneidet. Dann iſt EFGH = KFGL (Fr. 166 I. u. III.).

In ähnlicher Weiſe läßt ſich die Aufgabe bei einem Dreieck löſen.

V. Ein Parallelogramm LPFC (Fig. 159) verwandelt man in ein anderes flächengleiches mit einer vorgeſchriebenen Seite PN, indem man PN als Verlängerung von LP anträgt, durch N zu FP eine Parallele END zieht, bis dieſe die verlängerte CF in D ſchneidet, darauf CL verlängert, bis ſie die verlängerte DP in A ſchneidet, und endlich durch A zu CF eine Parallele legt, welche die verlängerten FP und DN in S und E ſchneidet. Dann iſt LPFC = SPNE (Fr. 166 VI.).

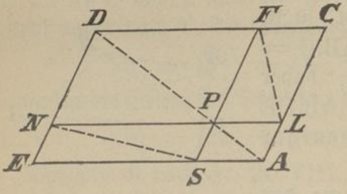

Fig. 159.

VI. Will man ein Vieleck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln, ſo verwandle man es zunächſt nach II., III. und IV. in ein Dreieck, Parallelogramm und Rechteck, indem man in IV. $\angle w = 90°$ wählt; konſtruiert man dann zu den Seiten x und y dieſes Rechtecks die mittlere Proportionale p (Fr. 164 III.), ſo iſt nach Fr. 170 II. $\boxed{p} = \boxed{x, y}$.

### 172. Wie addiert und ſubtrahiert man Vielecke?

I. Verwandelt man die Vielecke nach Fr. 171 II. bis V. in Parallelogramme von derſelben Seite a und demſelben

Winkel w, ſo laſſen ſie ſich nach Fr. 167 I. addieren und ſubtrahieren.

II. Soll die Summe, oder die Differenz der Vielecke ein Quadrat ſein, ſo muß man die Vielecke nach Fr. 171 VI. in Quadrate verwandeln.

Trägt man dann die Seiten CA = a und CB = b (Fig. 154 S. 193) zweier Quadrate auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitel C aus auf, ſo erhält man eine Hypotenuſe AB = h, für welche nach Fr. 170 I.

$$\boxed{h} = \boxed{a} + \boxed{b} \text{ iſt.}$$

Zu $\boxed{h}$ addiert man in gleicher Weiſe das dritte Quadrat $\boxed{c}$ ꝛc.

Schlägt man dagegen über der Seite AB = h des erſten Quadrats als Durchmeſſer einen Halbkreis und ſchneidet denſelben in C mit einem aus A mit dem der Seite AB = a des zweiten Quadrates gleichenden Halbmeſſer geſchlagenen Kreiſe, ſo iſt (Fr. 170 I.)

$$\boxed{b} = \boxed{h} - \boxed{a}.$$

Zu demſelben Ziele würde es (nach Fr. 169 III.) führen, wenn man zunächſt ein Rechteck mit den Seiten u = (h + a) und v = (h — a) bildete und dieſes noch in ein Quadrat $\boxed{b}$ (Fr. 171 VI.) verwandelte. — Vergl. Fr. 170 IX.

**173. Wie verhalten ſich die Flächeninhalte zweier Parallelogramme?**

I. Teilt man die Grundſeite AD eines Parallelogramms P = ABCD (Fig. 160) in n gleiche Teile AN = NQ = ⋯, und zieht man durch die Teilpunkte Parallelen zu AB, ſo zerfällt P in n kongruente Parallelogramme ABSN = NSUQ = ⋯ = p (Fr. 108 XIII. und 109 I.). Es iſt alſo:

P = np oder p = P : n.

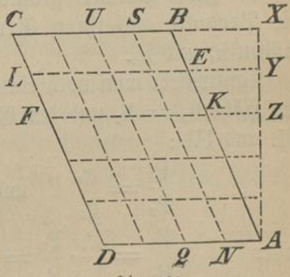

Fig. 160.

II. Teilt man die Höhe AX eines Parallelogramms

$P = ABCD$ (Fig. 160) in $n$ gleiche Teile $XY = YZ = \ldots$, und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zur Grundſeite $AD$, ſo zerfällt $P$ in $n$ kongruente Parallelogramme $EBCL = KELF = \cdots = p'$ (Nr. 111 VI., 109 I.). Es iſt alſo $P = np'$ oder $p' = P : n$.

III. Zwei Parallelogramme $P_1$ und $P_2$ von gleicher Höhe $h$ verhalten ſich wie ihre Grundſeiten $g_1$ und $g_2$.

Sind die Grundſeiten kommenſurabel (Nr. 144 II.), iſt z. B. $g_1 = xm$ und $g_2 = ym$, ſo kann man nach I. $P_1$ in $x$ Parallelogramme $p_1$ von der Höhe $h$ und der Grundſeite $m$, $P_2$ aber in $y$ Parallelogramme $p_2$ von der Höhe $h$ und der Grundſeite $m$ zerlegen; daher iſt $p_1 = p_2$ (Nr. 166 III.) und

$$P_1 : P_2 = xp_1 : yp_2 = x : y = xm : ym = g_1 : g_2 .$$

Sind die Grundſeiten inkommenſurabel und etwa $g_1 = xm$, dann iſt $ym < g_2 < (y+1)m$, aber wegen Nr. 166 III. auch $P_1 = xp$ und $yp < P_2 < (y+1)p$, alſo:

$$\frac{y}{x} < \frac{g_2}{g_1} < \frac{y+1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x} < \frac{P_2}{P_1} < \frac{y+1}{x},$$

d. h. $g_2 : g_1$ und $P_2 : P_1$ haben immer dieſelben Grenzverhältniſſe; daher iſt (ähnlich wie in Nr. 148 I.) auch hier $P_1 : P_2 = g_1 : g_2$.

IV. Zwei Parallelogramme $P_1$ und $P_2$ von gleicher Grundlinie $g$ verhalten ſich wie ihre Höhen $h_1$ und $h_2$.

Der Beweis iſt genau ſo wie in III. zu führen, nur hat man anſtatt I. den Satz in II. zu benutzen.

V. Zwei Parallelogramme $P_1$ und $P_2$ verhalten ſich wie die Produkte aus ihren Grundlinien $g_1$ und $g_2$ und ihren Höhen $h_1$ und $h_2$.

Konſtruiert man noch ein drittes Parallelogramm $P_3$ mit der Höhe $h_3 = h_1$ und der Grundlinie $g_3 = g_2$, ſo iſt nach III. und IV.:

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{g_1}{g_3} \quad \text{und} \quad \frac{P_3}{P_2} = \frac{h_3}{h_2},$$

daher

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1}{P_3} \cdot \frac{P_3}{P_2} = \frac{g_1}{g_3} \cdot \frac{h_3}{h_2} = \frac{g_1 h_1}{g_2 h_2}.$$

VI. Zwei Parallelogramme FLAT und KAND (Fig. 161), welche in einem Winkel A übereinſtimmen, verhalten ſich wie Produkte aus den dieſen Winkel einſchließenden Seiten. Legt man nämlich die Parallelogramme ſo an einander, daß die $\angle\angle$ A Scheitelwinkel werden, und verlängert FT und DN, bis ſie ſich in C ſchneiden, ſo iſt nach III.:

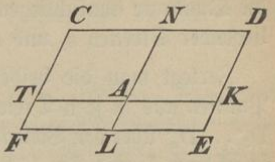

Fig. 161.

$$\frac{FLAT}{TANC}=\frac{LA}{AN}, \quad \frac{TANC}{KAND}=\frac{TA}{AK},$$

folglich wegen Fr. 20 VIII.:

$$\frac{FLAT}{KAND}=\frac{LA}{AN}\cdot\frac{TA}{AK}=\frac{LA\,.\,TA}{AN\,.\,AK}.$$

**174. Wie verhalten ſich die Flächeninhalte zweier Dreiecke?**

Da jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms iſt (Fr. 108 II.), ſo verhalten ſich zwei Dreiecke:

I. bei gleicher Höhe wie ihre Grundlinien (Fr. 173 III.);
II. bei gleicher Grundlinie wie ihre Höhen (Fr. 173 IV.);
III. bei verſchiedenen Höhen und Grundlinien wie die Produkte aus den Höhen und Grundlinien (Fr. 173 V.);
IV. bei Übereinſtimmung in einem Winkel A wie die Produkte aus den dieſen Winkel einſchließenden Seiten (Fr. 173 VI.).

**175. Wie verhalten ſich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren?**

I. Ähnliche Dreiecke D und D' verhalten ſich wie die Quadrate (vergl. Fr. 19 V.) ähnlich liegender Seiten b und b' (c und c'), oder ähnlich liegender Strecken s und s'.

Weil $\angle A = \angle A'$ und $b:b' = c:c' = s:s'$ (Fr. 153 I., 154 II.), ſo iſt nach Fr. 174 IV.:

$$\frac{D}{D'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{b}{b'}=\left(\frac{b}{b'}\right)^2=\left(\frac{s}{s'}\right)^2=\frac{b^2}{(b')^2}=\frac{s^2}{(s')^2}.$$

II. Ähnliche Vielecke $V_1$ und $V_2$ (und ebenſo krummlinige ſowie gemiſchtlinige Figuren, Fr. 153 II.) verhalten ſich wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten $a_1$ und $a_2$, oder ähnlichliegender Strecken $s_1$ und $s_2$.

Zerlegt man die beiden n-ecke von zwei ähnlichliegenden Punkten aus in je n Dreiecke $D_1, D_2, D_3 \ldots D_n$ und $D_1', D_2', D_3' \ldots D_n'$ über den Vielecksſeiten $a_1, b_1, c_1$ ꝛc. und $a_2, b_2, c_2$ ꝛc., ſo iſt nach I. und Fr. 153 I.:

$$\begin{aligned} V_1 &= D_1 + D_2 + D_3 + \cdots D_n \\ &= D_1 \left(1 + \frac{D_2}{D_1} + \frac{D_3}{D_1} + \cdots + \frac{D_n}{D_1}\right); \\ V_2 &= D_1' + D_2' + D_3' + \cdots + D_n' \\ &= D_1' \left(1 + \frac{D_2'}{D_1'} + \frac{D_3'}{D_1'} + \cdots + \frac{D_n'}{D_1'}\right). \end{aligned}$$

Nun iſt: $b_2 : b_1 = a_2 : a_1$ (Fr. 153 I.)

$$\frac{b_2^2}{b_1^2} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = \frac{a_2^2}{a_1^2} \quad \text{(Fr. 19 V. und 20 VIII.)}$$

$$b_1^2 : b_2^2 = D_2 : D_2', \qquad D_1 : D_1' = a_1^2 : a_2^2 \text{ (I.)}$$

$$D_2 : D_2' = D_1 : D_1' \quad \text{(Fr. 20 IV.)}$$

$$D_2 : D_1 = D_2' : D_1' \quad \text{(Fr. 147 V.)}.$$

Ebenſo iſt: $D_3 : D_1 = D_3' : D_1'$ ꝛc.,

daher nach Fr. 20 VIII. auch

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{D_1}{D_1'} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

III. Werden über den Seiten a, b, h eines rechtwinkeligen Dreiecks ähnliche Figuren $F_a$, $F_b$ und $F_h$ beſchrieben, ſo iſt die über der Hypotenuſe h beſchriebene $F_h$ gleich der Summe der Figuren $F_a$ und $F_b$ über den Katheten a und b.

$$F_a : F_h = a^2 : h^2, \qquad F_b : F_h = b^2 : h^2 \text{ (II.)}$$

---

$$(F_a + F_b) : F_h = (a^2 + b^2) : h^2 = 1 \text{ (Fr. 160 III.)}$$

$$F_a + F_b = F_h.$$

IV. Um ſowohl, wie in einen Kreis beſchriebene ähnliche Figuren verhalten ſich wie die Quadrate der Halbmeſſer ihrer Kreiſe (II.), weil dieſe Halbmeſſer ähnlichliegende Strecken ſind.

V. Regelmäßige Figuren von gleicher Seitenzahl (Fr. 154 IV.) verhalten ſich wie die Quadrate der (ähnlichliegenden) Halbmeſſer der eingeſchriebenen oder umgeſchriebenen Kreiſe.

VI. Für das demſelben Kreiſe eingeſchriebene und umgeſchriebene n-eck $f_n$ und $F_n$ hat man nach II. und Fr. 163 III.:

$$f_n : F_n = s^2 : t^2 = e^2 : r^2 = r^2 : r_1^2.$$

**176. Welche Figur benutzt man als Maß für die Figuren?**

I. Als Flächeneinheit, d. h. als Maß für die Figuren, wählt man das Quadrat über der Längeneinheit (1 Meter oder Stab, Fr. 146 III.) und nennt dasſelbe ein Quadratmeter oder einen Quadratſtab ($1\square^{m} = 1^{qm}$).

II. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Quadratmeter eine Figur enthält, heißt die Flächenzahl derſelben.

Damit die nachfolgenden Formeln den Flächeninhalt in Quadratmetern liefern, ſind die in ihnen vorkommmenden Maße in Metern einzuſetzen.

III. Wollte man nicht das Meter als Längeneinheit benutzen, ſondern z. B. das Centimeter, ſo würde die Flächenzahl auch den Inhalt in Quadratcentimetern (vergl. die Tabellen I und II im Anhange) angeben.

Stets aber müſſen die in Fr. 177 bis 179 für die Ausmeſſung verwerteten Strecken in einer und derſelben Längeneinheit ausgedrückt ſein, dürfen alſo nie mehrfach benannte Zahlen ſein.

**177. Wie findet man den Flächeninhalt eines Dreiecks und eines Vierecks*).**

I. Die Flächenzahl eines Quadrates iſt das Quadrat (vergl. Fr. 19 V.) der Längenzahl a ſeiner Seite a, weil nach Fr. 175 II. $\boxed{a} : 1\square^{m} = a^2 : 1^2 = a^2$ iſt, alſo:

$$\boxed{a} = a^2 . 1\square^{m} = a^2\square^{m}.$$

II. Iſt die Seite des Quadrates $10^{m}$, $100^{m}$ ꝛc., ſo enthält das Quadrat $(10^2 =)\ 100\square^{m}$, $(100^2 =)\ 10\,000\square$ ꝛc.

III. Iſt die Seite des Quadrates $0{,}1^{m}$, $0{,}01^{m}$ ꝛc., ſo enthält das Quadrat $(0{,}1^2 =)\ 0{,}01\square^{m}$, $(0{,}01^2 =)\ 0{,}0001\square$ ꝛc.

IV. Die Flächenzahl eines Rechtecks iſt das Produkt aus den Längenzahlen a und b von zwei nicht-parallelen Seiten a und b; weil nach Fr. 173 VI. $\boxed{a, b} : 1\square^{m} = ab : 1 . 1 = ab$ iſt, ſo wird:

$$\boxed{a, b} = ab\square^{m}.$$

V. Kürzer ſagt man: der Flächeninhalt eines Rechtecks iſt das Produkt aus deſſen beiden Seiten a und b.

In ähnlicher Weiſe pflegt man auch die Sätze über den Inhalt des Quadrates (I.) und anderer Figuren (VI. bis IX., Fr. 178 und 179) kurz auszuſprechen. Vergl. die Anm. zu Fr. 159 II. und zu Fr. 169 I.

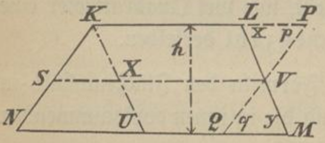

Fig. 162.

VI. Die Flächenzahl eines Parallelogramms NKPQ, Fig. 162, iſt das Produkt gh aus den Längenzahlen g und h der Grundſeite NQ = g und der Höhe h (IV.); denn das Parallelogramm gleicht dem Rechteck $\boxed{g, h}$ (Fr. 166 III.).

VII. Die Flächenzahl D des Dreiecks NKU = D, Fig. 162, iſt das halbe Produkt aus den Längenzahlen g

---

*) Weiteres hierüber und Beiſpiele hierzu enthält der „Katechismus der Raumberechnung“ (3. Aufl. Leipzig 1888, Fr. 61 bis 128) und der „Katechismus der Feldmeßkunſt“ (5. Aufl. Leipzig 1891, Fr. 108 bis 121).

und $\mathfrak{h}$ der Grundſeite NU = g und Höhe h (VI.). Da nämlich D die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundſeite und Höhe iſt (Fr. 108 II.), ſo iſt:

$$D = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g}\mathfrak{h}\,\square^{m}.$$

VIII. Das Dreieck D mit den drei Seiten a, b, c läßt ſich aber auch vom Mittelpunkte $M_0$ (vergl. Fig. 102 auf S. 108) des eingeſchriebenen Kreiſes in drei Dreiecke zerlegen, deren gemeinſchaftliche Höhe der Halbmeſſer $r_0$ jenes Kreiſes iſt, deren Grundlinien aber a, b, c ſind; daher findet man mit Fr. 159 XVII., wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}_0$ die Längenzahlen von a, b, c, s und $r_0$ bedeuten:

$$\begin{aligned}D &= \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{a}\mathfrak{r}_0 + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{b}\mathfrak{r} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{c}\mathfrak{r}_0 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{r}_0(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\\ &= \mathfrak{r}_0\mathfrak{s} = \sqrt{\mathfrak{r}_0^{\,2}\mathfrak{s}^2}\\ &= \sqrt{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}-\mathfrak{a})(\mathfrak{s}-\mathfrak{b})(\mathfrak{s}-\mathfrak{c})}\\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c})}\;\square^{m}.\end{aligned}$$

IX. Die Flächenzahl $\mathfrak{T}$ des Trapezes T = NKLM, Fig. 162, iſt das halbe Produkt aus den Längenzahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{h}$ der mittleren Parallelen p = SV = ½ (KL + MN) und der Höhe h.

Man kann nämlich das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke von der Höhe h und den Grundlinien KL = $\mathfrak{a}^{m}$ und NM = $\mathfrak{b}^{m}$ zerlegen; daher iſt nach VII.:

$$T = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{h}\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{h}\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}\,\mathfrak{h} = \mathfrak{p}\mathfrak{h}\,\square^{m}.$$

X. Die Flächenzahl $\mathfrak{Z}$ des Trapezoids Z (vergl. Fr. 106 V. und Fig. 165 in Fr. 180) iſt das Produkt aus der Längenzahl $\mathfrak{d}$ einer Diagonale X~~D~~T = d und dem arithmetiſchen Mittel der Längenzahlen $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ der Entfernungen $h_1$ und $h_2$ jener Diagonale d von den beiden anderen, auf verſchiedenen Seiten von d liegenden Eckpunkten Y und V, bezw. U und S.

Denn dieſe Diagonale d teilt Z in zwei Dreiecke von der Grundlinie d und den Höhen $h_1$ und $h_2$; daher iſt nach VII.:

$$Z = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}\mathfrak{h}_1 + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}\mathfrak{h}_2 = \frac{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}{2}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{h}_0\mathfrak{d}\,\square^m,$$

wenn $\mathfrak{h}_0 = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)$ dem arithmetiſchen Mittel aus $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ iſt. Vergl. Fr. 180 VI.

### 178. Wie findet man den Flächeninhalt*) eines Vielecks?

I. Das Vieleck läßt ſich behufs ſeiner Ausmeſſung oder der Berechnung ſeines Flächeninhaltes auf verſchiedene Weiſe in Dreiecke, Trapeze, Trapezoide zerlegen. (Vergl. Katech. der Raumberechnung, 3. Aufl. Fr. 78 bis 81 und Katech. der Feldmeßkunſt, 5. Aufl. Fr. 122 bis 131.)

II. Für die Inhalte $f_n$ und $F_n$ der demſelben Kreiſe vom Halbmeſſer r eingeſchriebenen und umgeſchriebenen regelmäßigen n-ecke findet man wegen Fr. 113 IV. nach Fr. 177 VII., 163 VI. und VII.:

$$f_n = \tfrac{1}{2}\,es\,.\,n = \tfrac{1}{2}\,u_n e \quad \text{und} \quad F_n = \tfrac{1}{2}\,rt\,.\,n = \tfrac{1}{2}\,U_n r.$$

Während alſo bei demſelben Kreiſe das Verhältnis $F_n : U_n$ von n unabhängig und unveränderlich $= \tfrac{1}{2}\,r$ iſt, wird das Verhältnis $f_n : u_n = \tfrac{1}{2}\,e$ um ſo größer, je größer e, d. h. je größer n wird, doch bleibt $f_n : u_n$ ſtets kleiner als $\tfrac{1}{2}\,r$, weil $e = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,s^2}$ (Fr. 163 I.).

III. Dividiert man die nach II. beſtimmten beiden Inhalte $f_m$ und $F_m$ mit $r^2$, ſo erhält man die beiden Quotienten $f_m : r^2 = (u_m : 2r)(e' : r)$ und $F_m : r^2 = U_m : 2r$, worin e' den Abſtand der Seite des m-ecks vom Mittelpunkte bedeutet.

Ferner würde man aus II. nach Fr. 163 IV., I. und VI. finden:

---

*) Will man in Fr. 178 und 179 die Flächenzahlen, ſo muß man anſtatt der in den Formeln vorkommenden Strecken deren Längenzahlen einſetzen, wie in Fr. 177.

$$f_{2n} = \tfrac{1}{2} u_{2n} . e_2 = \tfrac{1}{2} 2n . s_2 e_2 = n \sqrt{2r(r-e)} . \sqrt{\tfrac{1}{2} r(r+e)}$$
$$= nr \sqrt{(r-e)(r+e)} \quad = \tfrac{1}{2} nrs = \tfrac{1}{2} ru_n, \text{ und}$$
$$f_{2n} : r^2 = u_n : 2r.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen und $F_{2n} = \frac{1}{2} rU_{2n}$ erkennt man, daß ſich die beiden Verhältniſſe $f_{2n} : r^2$ und $F_{2n} : r^2$ derſelben Grenze (Fr. 163 XI.) nähern, wie die Verhältniſſe $u_n : 2r$ und $U_{2n} : 2r$.

IV. Bei Aufſuchung der in III. erwähnten Grenze kann man davon ausgehen, daß beim regelmäßigen Sechseck $s = r$ iſt (Fr. 132 II.); mit Benutzung von Fr. 163 I. bis XII. findet man daraus:

| Seitenzahl | $u_n : 2r$ | $U_n : 2r$ | $f_n : r^2$ | $F_n : r^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $n =$ 6 | 3 | 3,464 1016 | 2,598 0762 | 3,464 1016 |
| 12 | 3,105 8285 | 3,215 3903 | 3 | 3,215 3903 |
| 24 | 3,132 6286 | 3,159 6599 | 3,105 8285 | 3,159 6599 |
| 48 | 3,139 3502 | 3,146 0862 | ꝛc. | ꝛc. |
| 96 | 3,141 0319 | 3,142 7146 | | |
| 192 | 3,141 4524 | 3,141 8730 | | |
| 384 | 3,141 5576 | 3,141 6627 | | |
| 768 | 3,141 5838 | 3,141 6101 | | |
| 1536 | 3,141 5904 | 3,141 5970 | | |

V. Nach Fr. 163 XII. iſt die in III. erwähnte Grenze die Zahl $\pi = 3{,}141\,592\,65\ldots;$
angenähert darf für $\pi$ die Zahl

$$\frac{22}{7}, \quad \text{oder } \frac{311}{99}, \quad \text{oder } \frac{333}{106}, \quad \text{oder } \frac{355}{113}$$

geſetzt werden. Aus dem genauen Werte von $\pi$ ergiebt ſich weiter: $1 : \pi = 0{,}318\,31\ldots$

$$\sqrt{\pi} = 1{,}772\,45\ldots \quad \text{und} \quad 1 : \sqrt{\pi} = 0{,}564\,19\ldots$$

**179. Welche Formeln findet man für den Umfang und Inhalt des Kreiſes*) und ſeiner Teile?**

I. Die Kreisfläche K liegt ſtets zwiſchen $f_n$ und $F_n$ (Fr. 113 VIII.), oder es iſt

$$f_n < K < F_n.$$

II. Je mehr mit wachſendem n ſich $f_n$ und $F_n$ einander nähern (Fr. 178 III.), deſto mehr nähern ſie ſich auch dem ſtets zwiſchen ihnen liegenden K; daher iſt nach Fr. 178 V. auch $K : r^2 = \pi$, oder:

$$K = \pi r^2 = \tfrac{1}{4} \pi d^2.$$

III. Rückwärts wäre

$$r = \tfrac{1}{2} d = \sqrt{K} : \sqrt{\pi},$$

alſo: $$r = \tfrac{1}{2} d = 0{,}56419 \sqrt{K}.$$

IV. Betrachtet man den Kreis K als ein regelmäßiges Vieleck von unzählig viel Seiten (Fr. 113 VIII.), ſo muß ſich aus Fr. 163 XII. auch für den Kreisumfang u ergeben

$$u : 2r = \pi = K : r^2;$$

daher iſt nicht nur $K = \tfrac{1}{2} ur$, ſondern auch:

$u = 2\pi r = \pi d$ und $d = 2r = u : \pi = 0{,}31831\,u$.

V. Gehört in einem Kreiſe vom Halbmeſſer r zu einem Centriwinkel von w Graden der Bogen b, ſo hat man (Fr. 54 V.):

$$b : 2r\pi = w^\circ : 360^\circ; \qquad b = \pi r w^\circ : 180^\circ.$$

VI. Beim Kreiſe vom Halbmeſſer $r = 1$ läßt ſich der zu einem Centriwinkel w gehörige Bogen $\overset{\frown}{w}$ leicht finden; nach V. iſt bei

$w = 1^\circ$ der Bogen $\overset{\frown}{1^\circ} = \pi : 180^\circ = 0{,}0174532925;$

$w = 1'$ „ „ $\overset{\frown}{1'} = \overset{\frown}{1^\circ} : 60 = 0{,}0002908882;$

$w = 1''$ „ „ $\overset{\frown}{1''} = \overset{\frown}{1'} : 60 = 0{,}0000048481.$

---

*) Vergl. Anm. zu Fr. 178. — Beiſpiele hierzu enthält der Katech. der Raumberechnung Fr. 82 bis 119.

VII. Der dem Halbmeſſer r gleiche Bogen gehört zu einem Centriwinkel $w^\circ = 57^\circ\,17'\,44{,}806'' = 206264{,}806''$.

VIII. Der Kreisausſchnitt S = CMDEC, Fig. 163 (vergl. Fr. 87 I.), wächſt ebenfalls proportional dem Bogen CED = b und dem Centriwinkel CMD = w°. Daher verhält ſich $S : K = w^\circ : 360^\circ = b : u$, und es iſt:

$$S = \pi r^2 w^\circ : 360^\circ = \tfrac{1}{2}\,rb.$$

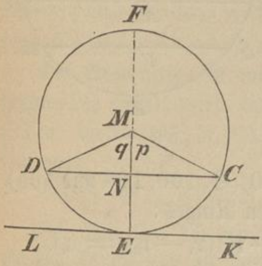

Fig. 163.

Der Ausſchnitt S läßt ſich wie ein Dreieck (Fr. 177 VII.) berechnen; ebenſo wegen IV. der Kreis. Die Höhe iſt in beiden Fällen = r, die Grundſeite gleicht im erſtern Falle dem Bogen b, im andern dem Umfange u.

IX. Die Kreisabſchnitte $A = CDEC$ und $A_1 = CDFC$ (Fig. 163) werden erhalten, wenn man das △ CDM vom Ausſchnitt S = CMDEC ſubtrahiert, bezieh. zum Ausſchnitt $S_1 = CMDFC$ addiert. Ihre Inhalte ſind demnach:

$$A = \tfrac{1}{2}(br - se) \quad \text{und} \quad A_1 = \tfrac{1}{2}(b_1 r + se),$$

wobei $b = \overset{\frown}{CED}$, $b_1 = \overset{\frown}{CFD}$, $e = \overline{MN}$, $s = \overline{CD}$.

Eine Tabelle zur Berechnung der Abſchnitte enthält der Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. S. 52.

Wäre bloß die Sehne CD = s und die Pfeilhöhe NE = k = r — e des Abſchnittes A gegeben, ſo hätte man (Fr. 163 I.):

$$s^2 = 4(r - e)(r + e) = 4k(2r - k) = 8kr - 4k^2,$$

alſo $8kr = s^2 + 4k^2$, woraus ſich $r = (s^2 + 4k^2) : 8k$ berechnen läßt. — Ähnlich iſt es beim größeren Abſchnitt $A_1$.

X. Ein zwiſchen zwei parallelen Sehnen AB und KS (Fig. 164) gelegenes Stück ABSKA der Kreisfläche heißt eine Kreiszone und läßt ſich als Differenz der beiden Abſchnitte AEBA und KESK berechnen.

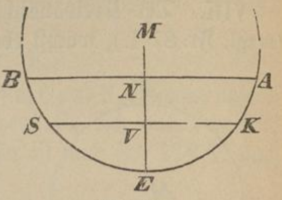

Fig. 164.

XI. Die Fläche eines Kreisringes bleibt übrig, wenn aus einem Kreiſe $K_1$ vom Halbmeſſer $r_1$ ein anderer $K_2$ vom Halbmeſſer $r_2$ herausgeſchnitten wird, wie in Fig. 92, 98 und 100 (S. 100, 104 und 105). Daher iſt die Fläche B eines ſolchen Ringes:

$$B = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = u_0 i,$$

wenn $i = r_1 - r_2$ die Breite eines gleichgroßen concentriſchen Kreisringes und $u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = 2\pi r_0$ den mittleren Umfang bedeutet, d. h. den durch die Mitte von i gehenden Kreis $K_0$ vom Halbmeſſer $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = r_2 + \frac{1}{2}i$.

XII. Für einen concentriſchen Ringausſchnitt, deſſen Centriwinkel $w^\circ$, deſſen Halbmeſſer $r_1$ und $r_2$ und deſſen Bögen $b_1$ und $b_2$ ſind, hätte man nach VIII. und V.:

$$\begin{aligned} S_0 &= \tfrac{1}{2}(b_1 r_1 - b_2 r_2) = (r_1^2 - r_2^2)\pi w^\circ : 360^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)\pi w^\circ : 180^\circ \\ &= \tfrac{1}{2} i (b_1 + b_2) = i b_0, \end{aligned}$$

wenn wieder $i = (r_1 - r_2)$ die Breite und $b_0 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = r_0 \pi w^\circ : 180^\circ$ den mittleren Bogen bedeutet.

XIII. Wenn zwei Kreiſe vom Halbmeſſer $r_1$ und $r_2$ und der Centralen $M_1M_2 = e$ ſich ſchneiden, wie in Fig. 93 bis 95, ſo teilen ſie ſich in drei Teile: eine (konvex-konvexe) Linſe $L = QAPBQ$ und zwei Monde $N_1 = DPAQD$ und $N_2 = CPBQC$ (konvex-konkave Linſen). Die Linſe läßt ſich als Summe, jeder Mond als Differenz zweier Kreisabſchnitte anſehen.

Setzt man nun die Bögen $PBQ = b_1$ und $PDQ = b_3$, $PAQ = b_2$ und $PCQ = b_4$, ferner $M_1PM_2QM_1 = \triangle M_1PQ$

$\mp \triangle M_2PQ = 2 \triangle M_1PM_2 = v$, im $\triangle M_1PM_2$ aber $s = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + e)$, ſo iſt nach Fr. 177 VIII.

$$v = 2\sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-e)}$$

$$b_1 + b_3 = 2\pi r_1, \quad \text{und} \quad b_2 + b_4 = 2\pi r_2;$$

deshalb nach IX. weiter:

$$N_1 = \frac{1}{2}(b_3r_1 - b_2r_2) + v \qquad L = \frac{1}{2}(b_1r_1 + b_2r_2) - v$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(b_4r_2 - b_1r_1) + v \quad 2L + N_1 + N_2 = K_1 + K_2.$$

Die Abſchnitte, in welche e durch die gemeinſchaftliche Sehne PQ geteilt wird, laſſen ſich nach Fr. 170 IV. bequem finden, weil im $\triangle M_1PM_2$ einer der Winkel $M_1$ und $M_2$ ſpitz ſein muß.

Bei $r_1 = r_2$ wird $N_1 = N_2$.

**180. Wie läßt ſich der Flächeninhalt bei Aufſtellung der Data für das Dreieck und die Vierecke verwerten?**

I. Da nach Fr. 177 VIII. für den Inhalt des Dreiecks D die Gleichungen

$D = r_0 s$ und

$D = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

gelten, ſo laſſen ſich auch noch

$$D, r_0, s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad \text{und} \quad D, a, b, c$$

als Data für das Dreieck den in Fr. 137 aufgeführten anreihen.

II. Ebenſo bilden wegen Fr. 177 VII. die drei Größen D, g und h ein Datum für das Dreieck.

III. Nach 174 IV. verhalten ſich die Inhalte zweier Dreiecke, welche einen Winkel A gemein haben, wie die Produkte aus ihren dieſen Winkel einſchließenden Seiten b und c. Deshalb müſſen für zwei in einem Winkel A übereinſtimmende flächengleiche Dreiecke die Produkte $b_1c_1$ und $b_2c_2$ gleich groß ſein. Man kann daher, wenn von den drei Stücken D, A und bc zwei gegeben ſind, durch Verwandelung des Dreiecks das dritte finden.

IV. Für das Parallelogramm (vergl. Fr. 138 II. und III.) bilden wegen Fr. 177 VI. auch noch der Inhalt P, die Grundſeite g und die Höhe h ein Datum.

V. Für das Trapez (vergl. Fr. 138 IV. bis VII.) markiert die in Fr. 177 IX. gegebene Gleichung noch den Inhalt T, die Höhe h und die mittlere Parallele $p = \frac{a+b}{2}$ als drei zu einem Datum zuſammengehörige Größen.

VI. Für das Trapezoid würde Fr. 177 X. als ein Datum Z, d und die Summe $(h_1 + h_2)$ der Höhen liefern. Außerdem beſitzt man in den beiden Diagonalen $d_1$ und $d_2$, dem von dieſen eingeſchloſſenen Winkel w und dem Flächeninhalte Z ein Datum.

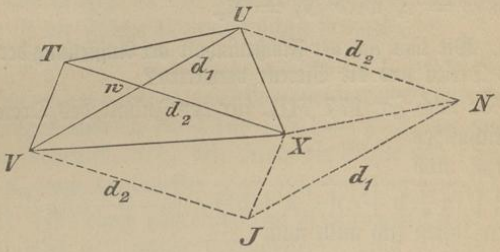

Fig. 165.

Zeichnet man nämlich in Fig. 165 über $UV = d_1$ mit dem Winkel w und der zweiten Seite $UN = TX = d_2$ das Parallelogramm $P = JNUV$ (Fr. 109 I.) und zieht NX, ſowie JX, ſo iſt

$$UN \mathrel{\#} TX \mathrel{\#} VJ \text{ (n. d. Konſtr.)}$$

$$\left.\begin{aligned} TU &= XN \\ TV &= XJ \\ UV &= NJ \end{aligned}\right\} \text{(Fr. 108 V. und III.)}$$

$$\triangle VTU \cong \triangle JXN \text{ (Fr. 80 I.)}$$

$$\begin{aligned} JNUV &= JXNUTV \text{ (Fr. 20 VIII.)} \\ P &= JXTV + XTUV \text{ (Fr. 20 II.)} \\ &= 2(\triangle VXT + \triangle TXU \text{ (Fr. 108 II.)} \\ &= 2(VXUT) = 2Z. \end{aligned}$$

Aus dreien der oben genannten Stücke kann man daher das vierte finden. Indeſſen iſt natürlich (vergl. Fr. 136 II. und III.) durch drei dieſer Stücke das Trapezoid VXUT nicht beſtimmt, da ja z. B. nur die Neigung der beiden Diagonalen gegen einander durch w gegeben iſt, nicht aber ihr Schnittpunkt; es läßt ſich ſomit nicht nur der Anfangspunkt T mit TX ſelber auf TX verſchieben, wobei T auch (wie in Fig. 113 S. 117) über $d_1$ hinüber auf die Seite von X rücken kann, ſondern es läßt ſich auch $d_2$ parallel zu TX auf $d_1$ verſchieben.

Z und P ſind übrigens — ähnlich wie in Fr. 177 X. — proportional dem Produkte $d_1d_2$ aus den beiden Diagonalen; denn entſpricht im rechtwinkeligen Dreieck mit dem $\angle$ w der Hypotenuſe 1 die w gegenüberliegende Kathete k, ſo gehört zu der Hypotenuſe $d_2$ die Kathete $h_1 + h_2 = 2h_0$, und es iſt $1 : k = d_2 : 2h_0$ und $Z = h_0d_1 = \frac{1}{2} k d_1 d_2$. Man könnte alſo mit Z und w auch $(d_1d_2)$, oder $(h_0d_1)$ mit w, $d_1$ und $d_2$ zu einem Datum vereinen.

VII. Im Tangentenviereck ABCD, Fig. 103 (S. 109), gehören als Datum zuſammen: der Flächeninhalt F, der Umfang U (oder wegen Fr. 133 V. die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten) und der Halbmeſſer r des eingeſchriebenen Kreiſes.

Da man ſich das Viereck in die vier Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM von der Höhe r (Fr. 83 X.) zerlegen kann, von denen jedes eine Seite des Viereckes als Grundſeite hat, ſo iſt nach Fr. 177 VII. auch $F = \frac{1}{2}Ur = (AB + CD)r$.

VIII. Es mag hier noch hervorgehoben werden, daß in Fr. 141 und 142, bezw. Fr. 161 IX. und X. nebenbei die Aufgabe: „ein Quadrat (oder auch ein Rechteck) in ein Rechteck zu verwandeln, deſſen Seiten einen gegebenen Längenunterſchied beſitzen“ auf Grund von Fr. 161 II., IV., V., Fr. 160 IV. und Fr. 170 IX. mit gelöst worden iſt.

## Zweiter Abſchnitt.

# Die Geometrie des Raumes.

## Achtes Kapitel.

### Gerade und Ebenen im Raum.

**181. Wenn ſteht eine Gerade normal auf einer Ebene?**

I. Macht man (Fr. 120) in einem ebenen $\triangle$ ABC (Fig. 166) $AF \perp BC$, errichtet man in F auf BC eine (außerhalb der Ebene des $\triangle$ ABC liegende, Fr. 57 III.) zweite Senkrechte FJ (Fr. 121), und macht in der Ebene AFJ endlich $AU \perp AF$ in A, ſo werden ſich AU und FJ in K ſchneiden, ſofern nur nicht etwa $\angle JFA = 90°$ genommen wurde (Fr. 62 IV.). Dann ſteht $AK = p$ zugleich auch auf den beiden Seiten $AB = c$ und $AC = b$ ſenkrecht.

Bew. Man ziehe $KB = e$, $KC = d$; zugleich ſei $AF = f$, $KF = k$, $FC = q$, $FB = n$.

Fällt F zwiſchen B und C, ſo iſt (nach Fr. 170 I.):

$$k^2 = p^2 + f^2; \quad q^2 = b^2 - f^2; \quad n^2 = c^2 - f^2$$
$$d^2 = k^2 + q^2 = \{p^2 + f^2\} + \{b^2 - f^2\} = p^2 + b^2$$
$$e^2 = k^2 + n^2 = \{p^2 + f^2\} + \{c^2 - f^2\} = p^2 + c^2$$

---

$$\angle KAC = \mathfrak{R} = \angle KAB \text{ (Fr. 170 VII.)}.$$

Fällt AF auf eine Seite AC, ſo vereinfacht ſich der vorſtehende Beweis, inſofern nur $\angle KAB$ als $\mathfrak{R}$ nachzuweiſen iſt.

Fällt endlich AC zwiſchen AF und AB z. B. auf AL, ſo ändert ſich in der Beweisführung nichts weſentliches.

II. Nach I. kann man im Eckpunkte A eines △ ABC ſtets eine Gerade AU ziehen, welche auf den Seiten AB und AC zugleich ſenkrecht ſteht.

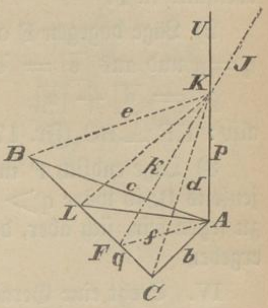

Fig. 166.

III. Steht eine Gerade AU (Fig. 166) im Eckpunkte A eines △ ABC auf den Dreiecksſeiten AB = c und AC = b zugleich ſenkrecht, und trifft eine von A auf die Seite BC = a gefällte Senkrechte AF = f die Seite BC in F, ſo ſteht BC auch ſenkrecht auf jeder Strecke FK = k, welche ſich von F nach einem Punkte K in AU ziehen läßt.

Bew. 1) Es liege zunächſt F zwiſchen B und C; zieht man noch die Strecken KC = d und KB = e, und bezeichnet man AK mit p, CF mit q, BF mit n = a — q, ſo iſt (zufolge Fr. 170 I. und 169 II.):

$$\boxed{d} = \boxed{p} + \boxed{b} = \boxed{p} + \boxed{f} + \boxed{q}$$
$$\boxed{e} = \boxed{p} + \boxed{c} = \boxed{p} + \boxed{f} + \boxed{a-q}$$
$$= \boxed{p} + \boxed{f} + \left\{ \boxed{q} + \boxed{a} - 2\,\boxed{a,q} \right\}$$
$$= \boxed{d} + \boxed{a} - 2\,\boxed{a,q}.$$

Fiele nun der Fußpunkt F′ der in dem ebenen (Fr. 14 II.) Dreiecke BKC von K auf BC gefällten Senkrechten auf C, oder auf einen, etwa um x von C entfernten Punkt in der über C hinaus liegenden Verlängerung von BC, ſo wäre bez.

$$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} \text{ (Fr. 170 I.), oder}$$
$$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} + 2\,\boxed{a,x} \text{ (Fr. 170 V.).}$$

Beides widerſtreitet dem für $\boxed{e}$ eben gefundenen Werte, und deshalb muß F′ von C aus nach B hin liegen; iſt aber dabei CF′ = q′, ſo iſt weiter noch:

$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q'}$ (Fr. 170 IV.),
$\boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q'} = \boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q}$ (Fr. 20 V.),
alſo $\boxed{a, q} = \boxed{a, q'}$ (Fr. 20 VIII.) oder $q = q'$ (Fr. 166 V.), d. h. die Senkrechte von K auf CB hat ihren Fußpunkt (F') ebenfalls in F.

2) Läge dagegen F auf C, oder B, ſo wäre $q = o$, oder $q = a$ und aus $\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a} - 2\boxed{a, q}$ würde
$\boxed{e} = \boxed{d} + \boxed{a}$, oder $\boxed{e} = \boxed{d} - \boxed{a}$,
alſo: $KF \perp BC$ (Fr. 170 VII.).

3) Läge endlich F in der Verlängerung von BC, z. B. jenſeits B, ſo wäre $q > a$, alſo würde zwar $BF = q - a$ zu ſetzen ſein, ſich aber, da C wieder ſpitz iſt, wieder $q' = q$ ergeben.

IV. Steht eine Gerade UA (Fig. 166) im Eckpunkte A eines △ ABC auf den Dreiecksſeiten $AB = c$ und $AC = b$ zugleich ſenkrecht, ſo ſteht UA auch auf der von A auf BC gefällten Normalen $AF = f$ ſenkrecht.

Bew. Nach III. ſteht $KF = k$ auf BC ſenkrecht, nach Fr. 170 I. iſt alſo:

$$\boxed{k} = \boxed{d} - \boxed{q}$$
$$= \{\boxed{b} + \boxed{p}\} - \{\boxed{b} - \boxed{f}\} = \boxed{p} + \boxed{f},$$

und deshalb $\angle KAF = 90°$ (Fr. 170 VII.).

V. Steht eine Gerade UA (Fig. 166) im Eckpunkte A eines Dreiecks ABC auf den Dreiecksſeiten $AB = c$ und $AC = b$ zugleich ſenkrecht, ſo ſteht ſie auch auf jeder Strecke AL ſenkrecht, welche von A nach einem beliebigen Punkte L in BC (oder deren Verlängerung) gezogen wird.

Bew. Nach III. und IV. iſt

$$\overline{KL}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{FL}^2$$
$$= \{\overline{AF}^2 + \overline{AK}^2\} + \{\overline{AL}^2 - \overline{AF}^2\}$$
$$= \overline{AK}^2 + \overline{AL}^2$$

$\angle KAL = 90°$ (Fr. 170 VII.).

VI. Steht eine Gerade UA (Fig. 167) im Durchſchnittspunkte A zweier ſich ſchneidenden Geraden XT und YV auf dieſen beiden Geraden zugleich ſenkrecht, ſo ſteht ſie auch auf jeder Geraden NL ſenkrecht, welche man in der (nach Fr. 14 II.) durch XT und YV gelegten Ebene E durch den Schnittpunkt A ziehen kann.

Bew. Verbindet man zwei beliebige Punkte B und C der Strahlen AT und AV, zwiſchen denen AL liegt, durch eine Gerade BC, ſo ſchneidet dieſe auch AL, und nach V. iſt:

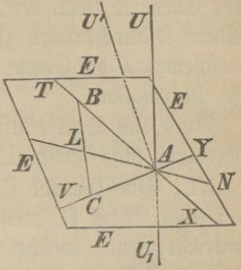

Fig. 167.

$$\angle \mathrm{UAL} = 90^{\circ}.$$

VII. Weder der Strahl UA, noch ſeine Verlängerung $AU_1$ kann wegen Fr. 57 III., oder 12 II. in der Ebene E liegen.

VIII. Ebenſowenig kann aber auch die Verlängerung $AU_1$ von UA auf der nämlichen Seite der Ebene E liegen, wie UA ſelbſt. Denn wenn AU' die Verlängerung von UA wäre und man durch UAU' und durch NAL eine Ebene legte (Fr. 14 II.), ſo müßte dann die Gerade UAU' ganz auf der einen Seite der Geraden NAL liegen*), was nach Fr. 27 II. unmöglich iſt.

IX. Daher hat $UAU_1$ (in VI.) mit der Ebene bloß den Punkt A gemein und durchdringt in dieſem Punkte die Ebene E (vergl. auch Fr. 184 II.).

---

*) Dabei iſt allerdings ſtillſchweigend angenommen, daß von der durch UAU' und NAL gelegten Ebene nur die eine Halbebene (Fr. 15 IV.) oberhalb E liegt, was doch erſt in Fr. 185 bewieſen wird. Daß indeſſen in Fig. 170 (S. 220) nicht KLN und VLN zwei zuſammengehörige, E in Fig. 167 entſprechende Halbebenen ſein können, während ULN und U'LN die beiden durch LN und UAU' gelegten Halbebenen wären, geht daraus hervor, daß bei Drehung der letzteren um LN ſich ULN von VLN entfernt, wenn U'LN ſich KLN nähert, und daß deshalb die beiden Ebenen ULNU' und VLNK nicht zum Decken gebracht werden können, im Widerſpruch mit Frage 14 IV. Vergl. auch die Anm. zu Fr. 27 II.

X. Eine Gerade UA nennt man normal (ſenkrecht, perpendikular) zu einer Ebene E (Fig. 167), wenn ſie rechte Winkel mit allen den Geraden macht, welche ſich in der Ebene E durch den Punkt A, worin die Gerade UA die Ebene E durchdringt, ziehen laſſen (VI.). Der Punkt A, in welchem DA die Ebene E durchdringt, heißt der Fußpunkt der Normalen.

Auch das Senkrechtſtehen einer Geraden auf einer Ebene bezeichnet man durch $\perp$.

XI. Eine Gerade UA ſteht (wegen VI.) ſchon normal auf einer Ebene E, wenn ſie auf zwei Geraden XT und YV ſenkrecht ſteht, welche in der Ebene E durch den Punkt A gezogen ſind, in welchem die Gerade DA die Ebene E durchdringt.

XII. Denkt man ſich in Fig. 167 durch AU und die willkürliche Gerade AL eine Ebene $E_1$ gelegt, ſo muß jede Gerade $AL_1$, welche noch in $E_1$ durch A gezogen wird, nach Fr. 57 III. mit AU ſchiefe Winkel machen. Dreht ſich AL in der Ebene E um A um 360°, ſo überſtreicht die Ebene $E_1$ dabei den ganzen Raum um die Gerade $UAU_1$.

Daher machen alle durch A gehende Gerade, welche nicht in der Ebene E liegen, mit UA ſchiefe Winkel.

XIII. Alle Gerade, welche in demſelben Punkte A auf einer Geraden UA normal ſtehen, liegen (wegen XII.) in einer Ebene.

XIV. Dreht ſich ein rechter Winkel UAC um ſeinen feſtgehaltenen Schenkel UA, ſo beſchreibt der andere Schenkel AC nach XIII. eine Ebene E. Iſt der Schenkel AC begrenzt, ſo beſchreibt deſſen Endpunkt C einen Kreis.

182. **Wodurch iſt die Lage einer Ebene beſtimmt?**

Die Lage einer Ebene iſt beſtimmt, ſobald man von ihr kennt:

I. drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen;
II. eine Gerade und einen Punkt außer dieſer Geraden;

III. zwei ſich ſchneidende Gerade;

IV. zwei parallele Gerade;

V. ihre Normale und einen ihrer Punkte, mag dieſer letztere in oder außerhalb der Normalen liegen.

Für die Fälle I. bis III. liegt der Beweis in Fr. 14 II. bis IV., für den Fall IV. in II. und Fr. 26. Im V. Falle kann man, wenn der gegebene Punkt P außerhalb der Normalen UA liegt, durch ihn und die Normale eine Ebene legen (II.), und dann läßt ſich von ihm nur eine Senkrechte auf die Normale fällen (Fr. 57 IV.), daher auch nur eine Ebene durch P und normal zu UA legen (Fr. 181 XIII.). Liegt dagegen im V. Falle der gegebene Punkt P in der Normalen UA, ſo kann ebenfalls bloß eine auf UA normale Ebene durch den gegebenen Punkt P gelegt werden, weil dieſe (nach Fr. 181 XIII.) alle Normalen enthält, welche in P auf UA errichtet werden können.

VI. Über andere Beſtimmungsweiſen der Ebene vergl. Fr. 198 V. und Fr. 203 II.

**183. Wenn fallen zwei Ebenen zuſammen?**

Zwei Ebenen fallen zuſammen, wenn ſie die in Fr. 182 I. bis V. aufgeführten Stücke gemein haben.

**184. Welche Lagen kann eine Gerade gegen eine Ebene haben?**

I. Eine Gerade $G_1$ (Fig. 168) liegt in einer Ebene E, d. h. alle ihre Punkte ſind zugleich Punkte der Ebene E, ſobald ſie mit dieſer Ebene zwei Punkte A und B gemein hat (Fr. 11 II., oder 12 II.). Vergl. Fr. 186 XV.

II. Hat eine Gerade G (Fig. 169 S. 220) bloß einen Punkt A mit einer Ebene E gemein, ſo liegen ihre anderen Punkte zu beiden Seiten der

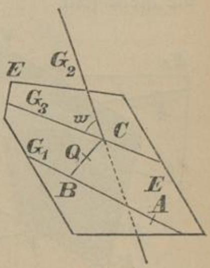

Fig. 168.

Ebene E, alſo in den beiden halbbegrenzten Räumen, in welche die Ebene E den unbegrenzten Raum teilt.

Der Beweis lautet wörtlich wie in Fr. 181 VIII., nur iſt überall D ſtatt U zu ſetzen.

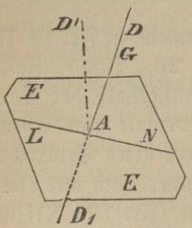

Fig. 169.

III. Eine Gerade G, welche bloß einen Punkt A mit einer Ebene E gemein hat, (kann die Ebene nicht berühren, ſondern) muß die Ebene E durchdringen oder ſchneiden (II.).

Der Punkt A, in welchem die Gerade G die Ebene E durchdringt, heißt die Spur der Geraden G in der Ebene E.

IV. Eine Gerade ſchneidet eine Ebene nur in einem Punkte (I.).

V. Eine Gerade ſchneidet eine Ebene, wenn einer ihrer Punkte in der Ebene, ein anderer außerhalb der Ebene liegt (I.).

VI. Eine Gerade ſchneidet eine Ebene, wenn ſie durch zwei zu verſchiedenen Seiten der Ebene liegende Punkte gelegt iſt.

VII. Es bleibt nun noch ein dritter Fall denkbar, nämlich daß eine unbegrenzte Gerade G ganz auf der einen Seite einer Ebene E läge, alſo mit der Ebene E gar keinen Punkt gemein hätte; eine ſolche Gerade ſoll parallel (//) zur Ebene E genannt werden. In Fr. 196 ff. wird davon weiter die Rede ſein.

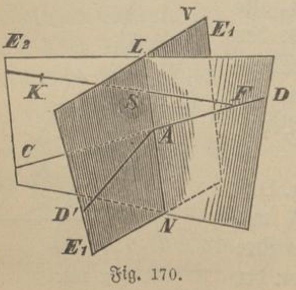

Fig. 170.

**185. Welche Lagen einer Ebene gegen eine Ebene ſind denkbar?**

I. Eine Ebene $E_1$ kann mit einer andern Ebene $E_2$ nicht bloß einen Punkt A (Fig. 170) gemein haben. Da nämlich $E_1$ und $E_2$ nicht zuſammenfallen (Fr. 183) ſollen, ſo kann man durch A höchſtens eine Gerade ziehen, welche beiden

Ebenen gemein iſt; ſicher läßt ſich alſo in $E_2$ durch A eine Gerade, z. B. DC, ziehen, welche nicht in $E_1$ liegt; da nun DC doch mit $E_1$ den Punkt A gemein hat, ſo muß ſie $E_1$ ſchneiden (Fr. 184 V.), d. h. die Punkte von DC liegen teils auf der einen, teils auf der andern Seite von $E_1$ (Fr. 184 II.). Verbindet man nun irgend einen in der Ebene $E_2$ und zwar etwa jenſeits $E_1$ gelegenen Punkt K mit einem in der Geraden DC, aber dieſſeits der Ebene $E_1$ liegenden Punkte F, ſo muß die Strecke KF die Ebene $E_1$ in einem Punkte S durchdringen (Fr. 184 VI.), und die durch dieſen Punkt S und den Punkt A gelegte Gerade LN liegt nicht bloß (wie KF) in $E_2$, ſondern zugleich auch in $E_1$ (Fr. 184 I.), weil S und A auch in $E_1$ liegen.

II. Der Durchſchnitt zweier (unbegrenzten) Ebenen iſt alſo eine (unbegrenzte) Gerade.

Die Gerade LN, in welcher die Ebene $E_1$ die Ebene $E_2$ ſchneidet, heißt die Spur der Ebene $E_1$ in der Ebene $E_2$.

III. Wenn zwei Ebenen zuſammenfallen, ſagt Fr. 183.

IV. Als dritter Fall der Lage zweier Ebenen gegen einander wäre nur noch denkbar, daß eine unbegrenzte Ebene $E_1$ ganz auf der einen Seite einer andern unbegrenzten Ebene $E_2$ liegt, alſo mit der Ebene $E_2$ gar keinen Punkt gemein hat. Eine ſolche Ebene $E_1$ ſoll der Ebene $E_2$ parallel (//) heißen. In Fr. 205 werden weitere Unterſuchungen darüber folgen.

**186. Welche Lagen gegen einander können bei zwei Geraden im Raum vorkommen?**

I. Liegt die Gerade $G_1$ (Fig. 171) in der Ebene E, während die Gerade $G_2$ dieſe Ebene in dem außerhalb $G_1$ liegenden Punkte C ſchneidet, ſo kann $G_2$ die Gerade $G_1$ nicht ſchneiden, weil alle Punkte von $G_1$ in E liegen (Fr. 184 I.), von $G_2$ hingegen nur der Punkt C.

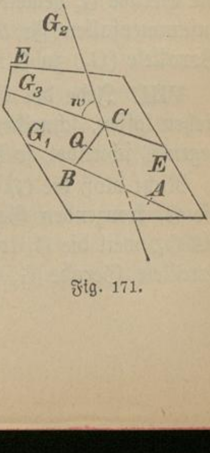

Fig. 171.

II. Gäbe es ferner eine Ebene $E_1$, in welcher $G_1$ und $G_2$ zugleich enthalten wären, ſo müßte der in $G_2$ liegende Punkt C ſowohl als auch $G_1$ in dieſer Ebene $E_1$ liegen; C und $G_1$ lagen aber auch in E, und deshalb müßte $E_1$ mit E zuſammenfallen (Fr. 183, 182 II.), könnte jedoch dann ſicher nicht $G_1$ und $G_2$ zugleich enthalten, weil ja E von $G_2$ geſchnitten wurde.

III. Wenn alſo $G_2$ eine Ebene E, welche $G_1$ enthält, in einem außerhalb $G_1$ liegenden Punkte C ſchneidet, ſo läßt ſich keine Ebene durch $G_1$ und $G_2$ zugleich legen.

IV. Zwei Gerade, durch welche man eine Ebene legen kann, ſind entweder parallel, oder ſie ſchneiden ſich (Fr. 56 V.).

V. Zwei Gerade kreuzen ſich, wenn es nicht möglich iſt, eine Ebene durch beide zugleich zu legen (III.).

VI. Durch zwei parallele und ebenſo durch zwei ſich ſchneidende Gerade kann man ſtets eine Ebene legen (Fr. 26; 182 III. und IV.).

VII. Auch im Raum kann man durch einen gegebenen Punkt C nur eine Parallele $G_3$ zu einer gegebenen (nicht durch C gehenden) Geraden $G_1$ ziehen (vergl. Fr. 119, 57 I.).

$G_3$ liegt nämlich in der Ebene E (Fig. 171), welche man durch C und $G_1$ legen kann. Wäre nun auch die durch C gehende Gerade $G_2$ zu $G_1$ parallel, ſo würde die durch $G_2$ und $G_1$ gelegte Ebene $E_1$ (VI.) mit E zuſammenfallen (Fr. 183 und 182 II.), weil ſie mit E den Punkt C und die Gerade $G_1$ gemein hat; dann müßte aber $G_2$ auch mit $G_3$ zuſammenfallen (Fr. 57 I.); es giebt daher durch C nur eine Parallele ($G_3$) zu $G_1$.

VIII. Jede der Geraden, welche ſich außer $G_3$ durch C ziehen laſſen, ſchneidet $G_1$, wenn ſie in E liegt, wenn ſie dagegen E ſchneidet, ſo kreuzt ſie $G_1$.

Nicht bloß die $G_1$ ſchneidenden (Fr. 56 I.), ſondern auch die $G_1$ kreuzenden Geraden haben eine andere Richtung als $G_1$, weil die $G_1$ kreuzenden Geraden, z. B. $G_2$, die zu $G_1$ parallele Gerade $G_3$ in C ſchneiden (Fr. 26), daher eine andere Richtung als $G_3$ und die mit ihr gleichgerichtete (Fr. 56 IV.) $G_1$ haben.

IX. Zwei ſich kreuzende Gerade haben weder einen Punkt mit einander gemein (V. und I.; vergl. VI., oder Fr. 13), noch haben ſie gleiche Richtung (VIII.). Vergl. XII.

X. Es läßt ſich alſo durch einen gegebenen Punkt C auch im Raume nur eine Gerade $G_3$ ziehen, welche mit $G_1$ in der Richtung übereinſtimmt (VIII.). Vergl. Fr. 57 I.

XI. Zwei Gerade von gleicher Richtung ſind (auch im Raume) parallel (X. und Fr. 56 II.), liegen alſo ſtets in einer Ebene (VI.).

XII. Die Richtungsverſchiedenheit zweier ſich kreuzenden Geraden $G_1$ und $G_2$, Fig. 171, mißt man durch den Winkel w, welchen zwei durch denſelben Punkt C gehende Parallele zu $G_1$ und $G_2$ einſchließen; dieſen Winkel nennt man kurzweg den Winkel zwiſchen den beiden ſich kreuzenden Geraden.

XIII. Haben zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ (Fig. 171) von verſchiedener Richtung keinen Punkt gemein, ſo muß jede durch die eine Gerade $G_1$ und einen Punkt C von $G_2$ gelegte Ebene E von $G_2$ geſchnitten werden (d. h. $G_1$ und $G_2$ kreuzen ſich), weil ſonſt $G_1$ und $G_2$ ſich ſchneiden müßten (Fr. 56 III.).

XIV. Bei zwei Geraden im Raum können alſo nur die in IV. und V. aufgeführten Fälle vorkommen; denn die beiden Geraden haben:

- entweder einen Punkt gemein (ſchneiden ſich),
- oder keinen Punkt gemein und dabei:
    - gleiche Richtung (ſind parallel),
    - ungleiche Richtung (kreuzen ſich).

XV. Nach VI. (oder VII.) iſt Fr. 184 I. zu ergänzen: Die Gerade $G_1$ liegt in der Ebene E, wenn ſie durch einen Punkt A in E hindurchgeht und zu einer in E liegenden Geraden parallel iſt. Vergl. Fr. 198 III.

XVI. Durch einen gegebenen Punkt Q läßt ſich höchſtens eine Gerade CB, Fig. 171, legen, welche zwei ſich kreuzende (nicht durch Q gehende) Gerade $G_1$ und $G_2$ zugleich ſchneidet.

Eine durch Q und $G_1$ gelegte Ebene E muß (nach V.) entweder $G_2$ ſchneiden (wie in III.), oder $G_2$ parallel ſein (Fr. 184 VII.). Jede durch Q und einen Punkt von $G_1$ gelegte Gerade liegt in E (Fr. 184 I.); iſt demnach $G_2 // E$, d. h. hat $G_2$ keinen Punkt mit E gemein, ſo kann auch $G_2$ von keiner durch Q und einen Punkt in $G_1$ gelegten Geraden geſchnitten werden; wenn dagegen $G_2$ die Ebene E in C ſchneidet, ſo kann (weil ja $G_2$ nur den Punkt C mit E gemein hat) nur die durch C und Q gelegte Gerade CQ die beiden Geraden $G_1$ und $G_2$ zugleich ſchneiden, und CQ ſchneidet beide wirklich, ſofern nicht $CQ // G_1$ iſt.

**187. Wie zieht man durch einen gegebenen Punkt eine Normale zu einer gegebenen Ebene?**

I. Will man von einem Punkte K (Fig. 172) außerhalb einer Ebene E auf dieſe Ebene eine Normale fällen, ſo fälle man von K auf eine in der Ebene E liegende Gerade BC eine Senkrechte KF (Fr. 120), errichte darauf in der Ebene E eine durch den Fußpunkt F der erſten Senkrechten KF gehende zweite Senkrechte FQ auf der Geraden BC (Fr. 121) und fälle endlich von dem Punkte K auf die zweite Senkrechte FQ eine dritte Senkrechte KA (Fr. 120); dann ſteht KA (auch wenn ſie mit KF zuſammenfällt) auf der Ebene E normal.

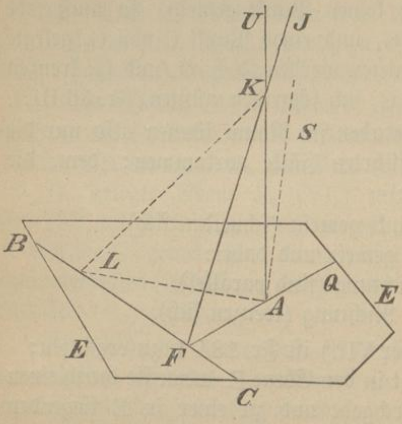

Fig. 172.

Bew. Zieht man noch KL und AL nach einem in BC gelegenen Punkte L, ſo iſt:

$$\mathrm{KF} \perp \mathrm{FL} \ \text{(Konſtr.)}$$

$$\overline{\mathrm{KL}}^2 = \overline{\mathrm{KF}}^2 + \overline{\mathrm{FL}}^2 \ \text{(Fr. 160 III.)}$$

$$\mathrm{KA} \perp \mathrm{FA} \qquad \mathrm{AF} \perp \mathrm{FL} \ \text{(Konſtr.)}$$

$$\overline{\mathrm{KF}}^2 = \overline{\mathrm{FA}}^2 + \overline{\mathrm{AK}}^2 \qquad \overline{\mathrm{FL}}^2 = \overline{\mathrm{AL}}^2 - \overline{\mathrm{FA}}^2 \ \text{(Fr. 160 III.)}$$

$$\overline{\mathrm{KL}}^2 = \left\{\overline{\mathrm{FA}}^2 + \overline{\mathrm{AK}}^2\right\} + \left\{\overline{\mathrm{AL}}^2 - \overline{\mathrm{FA}}^2\right\} \ \text{(Fr. 20 IV.)}$$

$$\overline{\mathrm{KL}}^2 = \overline{\mathrm{AK}}^2 + \overline{\mathrm{AL}}^2$$

$$\mathrm{KA} \perp \mathrm{AL} \ \text{(Fr. 170 VII.)}$$

$$\mathrm{KA} \perp \mathrm{QF} \ \text{(Konſtr.)}$$

$$\mathrm{KA} \perp \mathrm{E} \ \text{(Fr. 181 XI.).}$$

Fiele KA mit KF zuſammen, ſo wäre KF ebenfalls auf E normal (Fr. 181 XI.), weil dann KF ⊥ BC und KF ⊥ FQ.

II. Will man in einem Punkte A einer Ebene E (Fig. 172) auf dieſer Ebene eine Normale errichten, ſo fälle man von A auf eine in E liegende, nicht durch A gehende Gerade BC eine Senkrechte AF (Fr. 120), dann ziehe man in einer andern durch BC gelegten Ebene $E_1$ in F eine Senkrechte FJ auf BC, und errichte endlich in der durch AF und FJ beſtimmten Ebene $E_2$ im Punkte A eine Senkrechte AU auf AF (Fr. 121); dann ſteht UA auf E normal.

Bew. Schneiden ſich AU und FJ in K, ſo iſt der Beweis gleichlautend mit dem in I. (oder Fr. 181 I.).

Wäre AU // FJ, ſo brauchte man in $E_2$ bloß eine AU ſchneidende Gerade $FK_1$ zu ziehen; dann wäre, weil BC ⊥ $E_2$ (Fr. 181 XI.), auch $FK_1$ ⊥ BC (Fr. 181 X.), und man könnte den Beweis wieder wie in I. führen.

**188. Wie viele Normale zu einer gegebenen Ebene laſſen ſich durch einen gegebenen Punkt ziehen?**

I. Von einem Punkte K kann auf eine Ebene E nur eine Normale herabgefällt werden; denn wäre in Fig. 172 KA ⊥ E und auch KF ⊥ E, ſo hätte das nach Fr. 186 VI.

ebene Dreieck KAF zwei rechte Winkel (Fr. 181 X.), was Fr. 69 IV. widerſpräche.

II. In einem Punkte A (Fig. 172) einer Ebene E läßt ſich auf E nur eine Normale AU errichten; denn wäre AS auch normal zu E, und würde E in der Geraden AF von der durch AU und AS beſtimmten (Fr. 182 III.) Ebene E′ geſchnitten (Fr. 185 II.), ſo müßte nach Fr. 181 X. $\angle UAF = 90^\circ = \angle SAF$ ſein, was nach Fr. 20 III. unmöglich iſt.

III. Durch einen gegebenen Punkt läßt ſich alſo nur eine Gerade normal zu einer gegebenen Ebene ziehen.

**189. Welche Sätze über die Normalen ſind noch zu erwähnen?**

I. Zieht man in einer Ebene E (Fig. 172) vom Fußpunkte A der Normalen UA die Gerade AF ſenkrecht zu einer in E liegenden Geraden BC, ſo ſteht die letztere Gerade BC auch ſenkrecht auf jeder Geraden KF, welche einen Punkt K der Normalen mit dem Schnittpunkte F zwiſchen AF und BC verbindet.

Der vorſtehende Satz iſt von jenem in Fr. 181 III. nicht verſchieden, weil dort UA normal zur Ebene E des △ABC iſt (Fr. 181 XI.).

II. Fällt man auf eine in der Ebene E liegende Gerade BC (Fig. 172) eine Senkrechte KF von einem Punkte K der Normalen UA auf E, ſo ſteht die Gerade AF, welche die Fußpunkte F und A der Senkrechten KF und der Normalen UA verbindet, auch auf der Geraden BC ſenkrecht.

Träfe die von A auf BC gefällte Senkrechte die Gerade BC in $F_1$, dann wäre $KF_1 \perp BC$ (I.); da ſich aber von K nur eine Senkrechte auf BC ziehen läßt (Fr. 57 IV.), ſo muß $KF_1$ mit KF, d. h. $F_1$ mit F zuſammenfallen, und es iſt:

$$AF \perp BC.$$

III. BC ſteht auch ſenkrecht auf der durch die Normale UA und die Gerade AF, oder KF gelegten Ebene (Fr. 181 XI.).

IV. Zwei Normalen KA und YF (Fig. 173) auf derſelben Ebene E ſind parallel.

Um zunächſt zu beweiſen, daß ſich — was wegen Fr. 26 erforderlich iſt — durch KA und YF eine Ebene legen läßt, ziehe man auf der ihre Fußpunkte A und F verbindenden Strecke AF in F eine in E liegende Senkrechte BC; dann ſteht BC normal auf der Ebene KFA (III.); weil ferner YF $\perp$ E vorausgeſetzt wurde, ſo iſt auch $\angle YFC = 90^\circ$ (Fr. 181 X.), und YF liegt ebenfalls in der Ebene KFA (Fr. 181 XIII.); ſomit liegen KA und YF in derſelben Ebene.

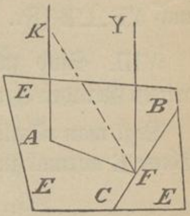

Fig. 173.

Da nun nach Fr. 181 X. $\angle KAF = 90^\circ = \angle YFA$, ſo iſt UF // KA (Fr. 62 II. 3.).

V. Steht eine Gerade G auf der Ebene E normal, ſo iſt dadurch die Richtung der Geraden beſtimmt (IV.); denn alle parallele Gerade haben ja gleiche Richtung (Fr. 56 IV.). Vergl. auch Fr. 188 III. und Fr. 25 II.

VI. Wird eine Ebene E von der einen KA von zwei parallelen Geraden in A geſchnitten, ſo wird ſie auch von der anderen YF geſchnitten. Denn die durch KA und YF gelegte Ebene (Fr. 186 VI.) ſchneidet (Fr. 185 II.) E in einer Geraden AF, welche (nach Fr. 60 II.) YF in F ſchneidet. YF hat demnach mit der in E liegenden AF, alſo auch mit E ſelbſt den Punkt F gemein, außerdem aber keinen Punkt, weil ſonſt YF ganz in E läge (Fr. 184 I.) und KA kreuzen müßte (Fr. 186 III., V.), während doch KA // YF ſein ſollte.

VII. Steht die eine KA (Fig. 173) von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene E normal, ſo ſteht auch die andere YF auf E normal.

Da nämlich E von KA in A geſchnitten wird (Fr. 181 X.), ſo wird E auch von YF geſchnitten (VI.). Zieht man nun durch den Schnittpunkt F zwiſchen E und YF erſt in der durch KA und YF gelegten (Fr. 186 VI.) Ebene $E_1$ die Geraden FA und FK nach den Punkten A und K in KA, darauf in E die Gerade BFC $\perp$ FA, ſo iſt BC normal zu der durch

FK, KA und YF gehenden Ebene $E_1$ (I. und III.), alſo $BC \perp YF$ (Fr. 181 X.). Da aber $YF \parallel KA$ vorausgeſetzt wurde und demnach $YF \perp FA$ (Fr. 62 V.) ſein muß, ſo iſt auch $YF \perp E$ (Fr. 181 XI.).

VIII. Sind zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ (im Raum) einer dritten Geraden $G_3$ parallel, ſo ſind ſie auch unter ſich parallel.

Legt man nämlich durch irgend einen Punkt von $G_3$ eine Ebene E normal zu $G_3$ (Fr. 181 XI.), ſo iſt nach VII.:

$$\frac{G_1 \perp E \qquad \text{und} \qquad G_2 \perp E}{G_1 \parallel G_2 \ (\text{IV.})}$$

IX. Sind die Schenkel zweier nicht in derſelben Ebene liegender Winkel BAC und FDK (Fig. 174) paarweiſe gleichſinnig parallel, ſo ſind die Winkel gleich. Vergl. Fr. 63 I.

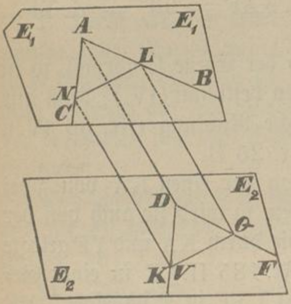

Fig. 174.

Vor. $AB \parallel DF$,
$AC \parallel DK$.

Beh. $\angle BAC = \angle FDK$.

Konſtr. Man mache $AL = DQ$, $AN = DV$ und ziehe die Strecken AD, LQ, NV.

Bew.
$$\begin{array}{ll}
\underline{AL \# DQ} & \underline{AN \# DV} \ (\text{Vor. und Konſtr.}) \\
DA \# LQ & DA \# NV \ (\text{Fr. 108 V., III.}) \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\quad LQ \# NV \ (\text{VIII. und Fr. 20 V.})} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\quad LN = QV \ (\text{Fr. 108 V., III.})} \\
AL = DQ, & AN = DV \ (\text{Konſtr.}) \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\quad \angle LAN = \angle QDA \ (\text{Fr. 80 I., 67 II.}).}
\end{array}$$

X. In gleicher Weiſe läßt ſich zeigen, daß auch der Satz Fr. 63 II. noch für in verſchiedenen Ebenen liegende Winkel gilt.

### 190. Was iſt die Projektion eines Punktes auf eine Ebene?

I. Den Fußpunkt N (Fig. 175) der vom Punkte P auf die Ebene E gefällten Normalen PN nennt man die (rechtwinkelige, orthogonale oder normale) Projektion des Punktes P auf die als Projektionsebene gewählte Ebene E.

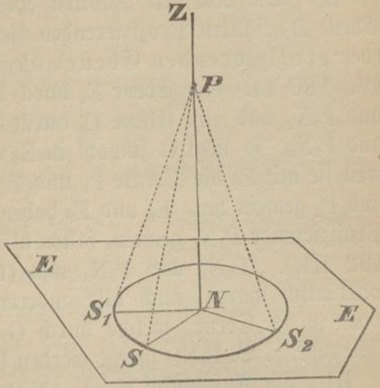

Fig. 175.

Die Normale PN heißt die Projizierende.

II. Jeder Punkt P hat nur eine Projektion N auf dieſelbe Ebene E (Fr. 188 I.).

III. Der Punkt N iſt zugleich die Projektion aller in der durch P auf E gefällten Normalen ZN gelegenen Punkte oder die Projektion der ganzen Normalen ZN.

IV. Die Projizierende PN iſt kleiner als jede andere von dem Punkte P nach einem Punkte S in der Projektionsebene E gezogene Gerade PS (Fr. 181 X., 74 VIII.).

Die Projizierende PN mißt den Abſtand oder die Entfernung des Punktes P von der Ebene E.

V. Nach Fr. 160 III. iſt $\overline{PN}^2 + \overline{NS}^2 = \overline{PS}^2$.

VI. Iſt $NS = NS_1 = NS_2 = \cdots$, ſo iſt auch $PS = PS_1 = PS_2 = \cdots$ (V.), d. h. alle Punkte in E, welche im Kreiſe um N liegen, haben gleiche Entfernung von demſelben Punkte P der Projizierenden NZ. Vergl. Fr. 47 II.

VII. Iſt umgekehrt $SP = S_1P = S_2P = \cdots$, ſo iſt nach V. auch $NS = NS_1 = NS_2 = \cdots$, d. h. alle Punkte der Ebene E, welche von dem Punkte P gleichweit entfernt ſind, liegen im Kreiſe um N (Fr. 47 II.).

**191. Was iſt die Projektion einer Geraden auf eine Ebene?**

I. Die Projektionen ſämtlicher Punkte einer Geraden G auf eine Ebene E (Fr. 190) bilden die Projektion G' der Geraden G auf die Ebene E.

II. Die von den Punkten einer Geraden G auf eine Ebene E gefällten Projizierenden liegen in derſelben Ebene (der projizierenden Ebene). Legt man nämlich (Fr. 189 IV., 186 VI.) eine Ebene $E_2$ durch die Projizierenden $P_1N_1$ und $P_2N_2$ und eine Ebene $E_3$ durch die Projizierenden $P_1N_1$ und $P_3N_3$, ſo liegt G ſowohl in $E_2$ als in $E_3$ (Fr. 184 I.), weil ſie mit $E_2$ die Punkte $P_1$ und $P_2$, mit $E_3$ die Punkte $P_1$ und $P_3$ gemein hat. $E_2$ und $E_3$ haben außer G auch noch die Projizierende $P_1N_1$ gemein, fallen alſo zuſammen (Fr. 183, 182 III.). $P_2N_2$ und $P_3N_3$ und (weil ja $P_2$ und $P_3$ ganz willkürlich waren) auch alle anderen Projizierenden liegen ſomit in der Ebene, welche durch G und irgend eine Projizierende, z. B. $P_1N_1$, gelegt werden kann.

III. Die Fußpunkte $N_1$, $N_2$, $N_3$ ꝛc. der von Punkten $P_1$, $P_2$, $P_3$ ꝛc. einer Geraden G auf eine Ebene E gefällten Normalen liegen ſämtlich in der Geraden G', in welcher nach Fr. 185 I. und II. die Ebene E von der durch die Normalen zu legenden (II.) Ebene geſchnitten wird.

IV. Die Projektion einer Geraden G auf eine Ebene E iſt wegen I. und III. wieder eine Gerade G'. Steht jedoch G auf E ſenkrecht, wie ZN in Fig. 175, ſo beſitzt ſie als Projektion (nach Fr. 190 III.) bloß den Punkt N.

Jede Gerade hat nur eine Projektion auf dieſelbe Ebene.

V. Schneidet die Gerade G (Fig. 176) die Projektionsebene E, ſo liegt die Spur S in der Projektion G'; zur Beſtimmung der letzteren braucht man dann außer S nur noch die Projektion N eines einzigen Punktes P der Geraden G.

**192. Wodurch zeichnet ſich der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene aus?**

I. Der Winkel w (Fig. 176) zwiſchen einer Geraden G und ihrer Projektion G' auf die Ebene E heißt der Neigungswinkel der Geraden G gegen die Ebene E.

II. Der ſpitze Neigungswinkel $w$ der Geraden $G$ negeg die Ebene $E$ und der Winkel $NPS$ zwiſchen $G$ und einer Normalen $NP$ zur Ebene $E$ ergänzen ſich zu 90° (Fr. 71 II.).

III. Der (ſpitze) Neigungswinkel $w$ einer Geraden $G$ gegen eine Ebene $E$ iſt kleiner (ſein Nebenwinkel $w_1$ alſo größer) als jeder Winkel $PSC = v$, welchen die Gerade $G$ mit einer in der Ebene $E$ durch die Spur $S$ gezogenen Geraden $BC$ einſchließt. (Die Betrachtung überſtumpfer Winkel bleibe dabei ausgeſchloſſen. Vergl. Fr. 193 VI.)

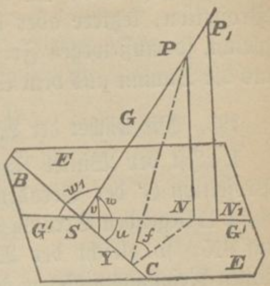

Fig. 176.

Bew. Macht man $SY = SN$, ſo muß, weil $PS = PS$ (Fr. 20 I.) und $PY > PN$ (Fr. 190 IV.) iſt, nach Fr. 78 III. $\angle v > \angle w$ ſein und wegen Fr. 39 IV. weiter $180° - v < 180° - w$ oder $\angle PSB < w_1$.

Ganz dieſelben Schlüſſe gelten für $\angle PSB$; alſo iſt auch $\angle w < \angle PSB$, und daraus folgt nach Fr. 39 IV.:

$$180° - w_1 < 180° - v \quad \text{oder} \quad w_1 > v.$$

IV. Würde $\angle w = 90°$, ſo müßte auch $\angle w_1 = 90°$ und $v = 90°$ werden, weil nach III. $\angle w < \angle v < \angle w_1$ ſein muß. Dann wäre die in der Ebene $PNS$ liegende Gerade $G \perp E$ (Fr. 181 X.). — Vergl. Fr. 189 VII.; denn jetzt iſt $G \parallel PN$.

V. Hätte man in Fig. 176 $NY \perp BC$ gemacht, ſo wäre auch $PY \perp BC$ (Fr. 189 I.). Man kann alſo die Strecke $SY$ aus $PS$ entweder durch einmalige Projektion unter dem Winkel $v$, oder durch zweimalige Projektion: erſt unter dem Neigungswinkel $w$ und dann unter dem in der Ebene $E$ liegenden, von $G'$ und $BC$ gebildeten Winkel $NSC = u$ erhalten.

Da nun nach Fr. 112 IX. die Projektion von PS unter $\angle(u + w)$ kleiner ſein würde, als die durch die zweimalige Projizierung unter $\angle w$ und dann unter $\angle u$ erlangte Projektion, letztere aber der Projektion von PS unter $\angle v$ gleicht, ſo muß wegen Fr. 112 IV. der Winkel $v$ kleiner ſein als die Summe aus dem Winkel $u$ und dem Neigungswinkel $w$.

**193. Wie wächſt der Winkel v mit dem Winkel u?**

I. Iſt der Winkel $NSC = u$ (Fig. 176), welchen die Projektion $G'$ der Geraden $G$ mit dem in der Projektionsebene $E$ liegenden Strahle $SC$ einſchließt, $= 0$, fällt alſo $SC$ auf $SN$, ſo gleicht der Winkel $v$ zwiſchen $G$ und $SC$ dem ſpitzen Neigungswinkel $w$ der Geraden $G$ gegen $E$.

II. Iſt der Winkel $u$ ſpitz ($0 < \angle u < 90°$), ſo fällt der Fußpunkt $Y$ der vom Fußpunkte $N$ der Normalen $PN$ auf $SC$ gefällten Senkrechten $NY$ zwiſchen $S$ und $C$ (Fr. 71 V.), und da $\angle PYS = 90°$ (Fr. 189 I.), ſo iſt auch $\angle v$ ſpitz (Fr. 70 I.). Wegen Fr. 192 III. iſt alſo $\angle w < \angle v < 90°$.

Je größer aber $\angle u$ wird, deſto näher rückt $Y$ an $S$ heran, deſto größer wird alſo auch $\angle v$ (Fr. 112 III. und IV.).

Zugleich iſt ſtets $\angle v > \angle u$; wenn man nämlich das $\triangle PYS$ um $YS$ in die Ebene $E$ niederklappt, ſo kommt $YP$ auf $YN$ zu liegen (Fr. 31 und 39 III.), $P$ fällt aber von $Y$ aus jenſeits $N$ (Fr. 190 IV.), alſo $SP$ jenſeits $SN$.

III. Iſt $\angle u = 90°$, ſo fällt $Y$ mit $S$ zuſammen (Fr. 57 IV.), und es iſt auch $\angle v = 90°$ (Fr. 189 I.).

IV. Iſt der Winkel $u$ ſtumpf ($90° < \angle u < 180°$), ſo fällt $Y$ in die Verlängerung $SB$ (Fig. 177) des Strahls $SC$ (Fr. 71 V.), $\angle PSY$ iſt daher ſpitz (Fr. 70 I.), $v$ ſtumpf (Fr. 39 IV.). Wegen Fr. 192 III. iſt aber

$$90° < \angle v < \angle w_1.$$

Je größer $\angle u$ wird, deſto weiter rückt $Y$ von $S$ gegen $B$ hin, deſto größer wird $v$ (Fr. 39 IV.). Die größte Entfernung von $S$, welche $Y$ erreichen kann, gleicht aber nach Fr. 160 III. der Strecke $SN$. Vergl. V.

Beim Niederklappen des $\triangle PSY$ in die Ebene E fällt jetzt P von Y aus wieder jenſeits N, alſo P und SP in den Winkelraum NSC, d. h. jetzt iſt $\angle v < \angle u$.

V. Iſt $\angle u = 180^\circ$, ſo fällt wieder Y auf N, aber SC in die Verlängerung von SN; daher iſt $\angle v = \angle w_1$.

VI. Wird $\angle u$ überſtumpf, ſo vertauſchen in Fig. 176 und 177 die Strahlen SB und SC ihre Rolle. Während alſo $\angle u$ von 180° bis 360° wächst, wiederholen ſich die ſchon dageweſenen Werte des $\angle v$, d. h. es wird der erſt ſtumpfe Winkel v wieder kleiner, darauf $= 90^\circ$ (bei $u = 270^\circ$), dann ſpitz und endlich wieder $= \angle w$.

VII. Macht man in den beiden Fig. 176 und 177 $SP = SP$ und iſt $\angle NSC$ in Fig. 176 dem $\angle NSB$ in Fig. 177 gleich, ſo iſt $\triangle PNS \cong \triangle PNS$ (Fr. 81 II.), alſo $NS = NS$ (Fr. 67 II.); daher weiter $\triangle NSY \cong \triangle NSY$ (Fr. 81 II.) und $SY = SY$ (Fr. 67 II.); daher endlich $\triangle PSY \cong \triangle PSY$ (Fr. 81 I.) und $\angle PSC$ in Fig. 176 gleicht (Fr. 67 II.) dem $\angle PSB$ in Fig. 177.

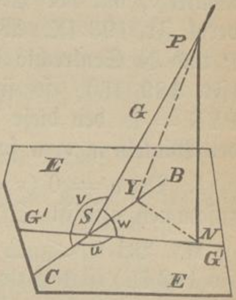

Fig. 177.

Wenn man alſo in E links und rechts von SN einen Strahl unter demſelben Winkel (u) gegen SN anträgt, ſo machen dieſe beiden Strahlen auch gleiche Winkel (v) mit SP.

VIII. Ebenſo müſſen daher auch zwei in E gelegene Strahlen gleiche Winkel mit SP bilden, wenn der eine unter dem $\angle u$, der andere unter dem $\angle (360^\circ - u)$ gegen SN geneigt iſt.

IX. Aus dem Vorhergehenden folgt noch, daß jeder $\angle v$, welcher größer als $\angle w$, aber kleiner als $\angle w_1$ iſt, zweimal vorkommt und zwar bei zwei Strahlen SC und $SC_1$, deren Winkel $C_1SC$ ($= 2u$) von SN halbiert wird.

### 194. Wie wächst der Winkel $f = PYN$ mit dem Winkel $u$?

Iſt $w$ wieder der (ſpitze) Neigungswinkel der Geraden $G$ (Fig. 176 und 177) gegen die Projektionsebene $E$ und $N$ der Fußpunkt der von dem Punkte $P$ in $G$ auf $E$ gefällten Normalen $PN$, legt man in der Ebene $E$ durch die Spur $S$ der Geraden $G$ einen Strahl $SC$, welcher mit $G$ den (hohlen) Winkel $v$, mit der Projektion $G'$ von $G$ aber den (hohlen, vergl. Fr. 193 IX.) Winkel $u$ einſchließt, und fällt man von $P$ und $N$ Senkrechte $PY$ und $NY$ auf die Gerade $BSC$ (Fr. 189 II.), ſo finden zwiſchen dem (ſpitzen) Winkel $PYN = f$, den dieſe beiden Senkrechten einſchließen, und den Winkeln $u$, $v$, $w$ folgende Beziehungen ſtatt:

I. Bei $u = 0$ ($v = w$, Fr. 193 I.) fällt $PY$ mit $PN$ zuſammen, alſo iſt $\angle f = 90°$ (Fr. 181 X.).

II. Bei $0 < \angle u < 90°$ ($\angle w < \angle v < 90°$, Fr. 193 II.) iſt $NY$ zwar ſtets kleiner als $NS$ (Fr. 74 VIII.), wird aber um ſo größer (Fr. 160 III.), je kleiner $SY$, je größer alſo $\angle u$ (und $\angle v$) wird. Klappt man nun das $\triangle PYN$ um $PN$ in die Ebene $PSN$, ſo kommt $Y$ ſtets zwiſchen $N$ und $S$ zu liegen, rückt aber deſto näher an $S$, je größer $\angle u$ wird. Daher iſt ſtets $90° > \angle f > \angle w$ (Fr. 69 VII.), und $\angle f$ nimmt ab, wenn $\angle u$ (und $\angle v$) zunimmt.

III. Bei $\angle u = 90°$ ($\angle v = 90°$, Fr. 193 III.) fällt $PY$ auf $PS$, alſo iſt $\angle f = \angle w$.

IV. Bei $90° < \angle u < 180°$ ($90° < \angle v < \angle w_1$, Fr. 193 IV.) fällt beim Umklappen des $\triangle PYN$ in die Ebene $PSN$ wieder $Y$ ſtets zwiſchen $S$ und $N$, aber um ſo näher an $N$, je größer $\angle u$ wird. Es iſt daher zwar wieder $90° > \angle f > \angle w$ (Fr. 69 VII.), aber $\angle f$ wächst mit $\angle u$ (und $\angle v$) gleichzeitig.

V. Bei $\angle u = 180°$ ($\angle v = \angle w_1$, Fr. 193 V.) wird wieder $\angle f = 90°$.

VI. Bei $\angle u > 180°$ wiederholen ſich dieſelben Werte von $f$, ähnlich wie in Fr. 193 VI.

VII. Zieht man in der Ebene E zwei Strahlen SC und $SC_1$ unter gleichem Winkel ($u = u_1$) gegen SN, ſo iſt wieder $\angle v = \angle v_1$ und $\triangle NSY \cong \triangle NSY_1$ (Fr. 193 VII.), daher $NY = NY_1$ (Fr. 67 II.), $\triangle PNY \cong PNY_1$ (Fr. 81 I.) und wegen Fr. 67 II. endlich $\angle f = \angle f_1$.

VIII. Aus dem Vorhergehenden folgt noch, daß jeder $\angle f$, welcher kleiner als 90°, aber größer als w iſt, zweimal vorkommt, und zwar bei zwei Strahlen SC und $SC_1$, deren Winkel $C_1SC$ von SN halbiert wird ($\angle u = \angle u_1$), welche alſo nach Fr. 193 IX. mit SP gleiche Winkel machen ($\angle v = \angle v_1$).

**195. Wenn ſchneidet eine Gerade eine Ebene?**

Die Gerade G (Fig. 176) ſchneidet die Ebene E, wenn G nicht ihrer Projektion G' auf die Ebene E parallel iſt, oder wenn G nicht auf einer aus einem Punkte P in G auf die Ebene E gefällten Normalen PN ſenkrecht ſteht, oder wenn zwei aus den Punkten P und $P_1$ in G auf E gefällte und auf derſelben Seite von E liegende Normalen PN und $P_1N_1$ ungleich ſind.

In allen drei Fällen liegen die Gerade G und ihre Projektion G' (Fr. 191 II.), alſo auch PN und $P_1N_1$ in derſelben Ebene, zugleich ſchneiden ſich G und G' (nach Fr. 26, oder Fr. 62 IV., oder Fr. 108 XIII. und XIV.), und da G' ganz in E liegt (Fr. 191 I.), ſo iſt der Schnittpunkt zwiſchen G und G' zugleich ein Punkt von E, d. h. G ſchneidet E (Fr. 184 III., V.).

**196. Wie zieht man eine Gerade parallel zu einer Ebene?**

I. Eine Gerade G (Fig. 178) iſt einer Ebene E parallel (Fr. 184 VII.), wenn ſich in E eine zu G parallele Gerade $G_1$ ziehen läßt.

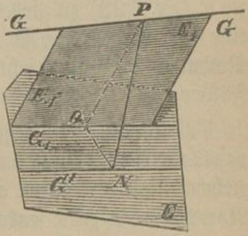

Fig. 178.

Denn dann kann man durch G und $G_1$ eine Ebene $E_1$ legen (Fr. 186 VI.), und wenn es nun einen Punkt, etwa Q, gäbe, welchen G mit E gemein hätte, ſo müßte Q in E und G zugleich und (weil alle Punkte von G in $E_1$ liegen, Fr. 184 I.) auch in $E_1$ liegen, alſo zugleich in E und $E_1$, d. h. in der Geraden $G_1$, welche E und $E_1$ gemein haben (Fr. 185 II.). Da aber $G_1$ und G nach der Vorausſetzung keinen Punkt gemein haben (Fr. 26), ſo hat auch G keinen Punkt mit E gemein, und es iſt $G \parallel E$.

II. Eine Gerade G iſt daher auch einer Ebene E parallel, wenn ſie ihrer Projektion G′ auf die Ebene E parallel iſt (I.).

III. Steht eine Gerade G (Fig. 178) auf der Normalen PN einer Ebene E ſenkrecht, ſo iſt ſie der Ebene E parallel. Denn G liegt mit ihrer Projektion G′ in einer Ebene (Fr. 191 II. und III.); zugleich iſt $\angle NPG = 90°$ (nach d. Vor.) und $\angle PNG' = 90°$ (Fr. 181 X.), daher $G \parallel G'$ (Fr. 62 II.) und $G \parallel E$ (II.).

IV. Sind die Projizierenden $P_1N_1$ und $P_2N_2$ (Fig. 179) zweier auf derſelben Seite der Projektionsebene E gelegenen Punkte $P_1$ und $P_2$ einer Geraden G gleichlang, ſo iſt dieſe Gerade G der Ebene E parallel. In der Ebene $N_1P_1P_2N_2$ (Fr. 191 II.) iſt ja $P_1N_1 = P_2N_2$ (Vor.), daher $N_1 N_2 \parallel P_1P_2$ (Fr. 108 XV.), folglich $G \parallel E$ (II.).

V. Will man nun durch einen gegebenen, oder durch einen willkürlich gewählten Punkt P, Fig. 178, eine Gerade G parallel zur Ebene E ziehen, ſo braucht man nur durch P eine Parallele G zu einer in E gezogenen Geraden $G_1$ (Fr. 119), oder eine Senkrechte G auf der Normalen PN zu E (Fr. 122) zu ziehen; oder man errichtet auf E noch eine Normale $N_2P_2$ (Fr. 187 II.) von gleicher Länge wie die Normale NP und zieht G durch P und $P_2$. In allen drei Fällen iſt $G \parallel E$ (I. bis IV.).

VI. Durch einen gegebenen Punkt P laſſen ſich unzählige parallele Gerade zu einer nicht durch P gehenden Ebene E ziehen; dieſelben ſtehen aber wegen Fr. 195 ſämtlich auf der Normalen PN zu E ſenkrecht, liegen alſo nach Fr. 181 XIII. ſämtlich in einer Ebene.

**197. Was folgt noch aus Fr. 195 und 196 über eine Gerade, welche eine Ebene ſchneidet, oder dieſer parallel iſt?**

I. Iſt die Gerade G (Fig. 178) der Ebene E parallel, ſo iſt ſie ihrer Projektion G' auf die Ebene E parallel, weil ſie ſonſt nach Fr. 195 die Ebene ſchneiden müßte.

II. Iſt die Gerade G der Ebene E parallel, ſo ſchneidet eine durch G und einen Punkt Q in E gelegte Ebene $E_1$ (Fr. 182 II.) die Ebene E in einer Parallelen $G_1$ zu G. Wäre nämlich $G_1$ nicht parallel zu G, ſo müßte ſie G ſchneiden (Fr. 26), und G ſchnitte dann auch E, was der Vorausſetzung widerſpricht.

III. Iſt die Gerade G der Ebene E parallel, ſo ſteht ſie ſenkrecht auf jeder aus einem ihrer Punkte P auf die Ebene E gefällten Normalen PN. Sonſt müßten ſich ja G und E nach Fr. 195 ſchneiden.

IV. Alle aus einer zur Ebene E (Fig. 179) parallelen Geraden G nach dieſer Ebene E gezogenen parallelen Strecken ſind gleichlang. Legt man durch die Parallelen $P_1S_1$ und $P_2S_2$, welche die Ebene E in $S_1$ und $S_2$ ſchneiden, eine Ebene $E_1$ (Fr. 186 VI.), und ſchneidet letztere die Ebene E in $S_1S_2$, ſo iſt:

$S_1S_2 // P_1P_2$ (II.)
$P_1S_1 // P_2S_2$ (Vor.)
$P_1S_1 = P_2S_2$ (Fr. 108 III.).

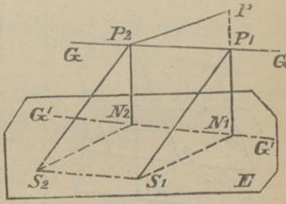

Fig. 179.

V. Iſt die Gerade G der Ebene E parallel, ſo ſind alle ihre Punkte, z. B. $P_1$ und $P_2$ (Fig. 179), gleichweit von E entfernt (Fr. 190 IV., 189 IV., 197 IV.).

Die *Entfernung* oder den *Abſtand der zur Ebene E parallelen Geraden G von E* mißt eine aus G auf E gefällte Senkrechte PN.

VI. Laſſen ſich von zwei auf der nämlichen Seite der Ebene E gelegenen Punkten $P_1$ und $P_2$ einer Geraden G zwei gleiche Parallelen $P_1S_1$ und $P_2S_2$ nach dieſer Ebene E ziehen, ſo iſt $G // E$.

Bew. In der Ebene (Fr. 186 VI.) $P_1S_1S_2P_2$ iſt $P_1S_1 \# P_2S_2$ (Vor.), folglich $S_1S_2 // P_1P_2$ (Fr. 108 V.), folglich $G // E$ (Fr. 196 I.).

VII. Schneidet die Gerade G die Ebene E, ſo ſchneidet G auch ihre Projektion G' auf E; dann ſteht ferner G ſchief auf jeder aus ihr auf E gefällten Normalen PN, endlich liegen die Punkte von G in ungleicher Entfernung von E. Sonſt müßte ja $G // E$ ſein (Fr. 196 I. bis IV.).

VIII. Während eine Ebene und eine ihr parallele Gerade *unzählige gemeinſchaftliche Normalen* beſitzen (III.), haben eine Ebene und eine ſie ſchneidende Gerade *keine einzige* gemeinſchaftliche Normale (VII.).

**198. Wie legt man eine Ebene parallel zu einer Geraden?**

I. Will man eine Ebene E (Fig. 180) durch einen gegebenen, oder einen willkürlich gewählten Punkt Q parallel zu einer gegebenen Geraden G legen, ſo darf man nur (in der durch Q und G beſtimmten Ebene $E_1$) durch Q eine Parallele $G_1$ zu G ziehen (Fr. 119); jede durch $G_1$ gehende Ebene E iſt dann zu G parallel (Fr. 196 I.).

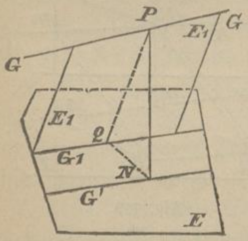

Fig. 180.

II. Sind zwei Gerade G und $G_1$ parallel, ſo kann man durch jede dieſer beiden Geraden unzählige Ebenen parallel zur anderen Geraden legen (I.).

III. Iſt die Gerade G parallel zur Ebene E, ſo liegt eine zu G parallele Gerade $G_1$ in der Ebene E, ſobald ſie mit dieſer einen Punkt Q gemein hat. Vergl. 186 XV. — Nach Fr. 185 II. wird E von einer durch Q und G gelegten Ebene $E_1$ in einer Geraden $G_2$ geſchnitten, nach Fr. 197 II. aber muß $G_2 // G$ ſein; nun gehen $G_1$ und die in E liegende

$G_2$ durch Q, ſind beide // G und müſſen deshalb wegen Fr. 186 VII. zuſammenfallen.

IV. Durch einen gegebenen Punkt Q läßt ſich nur eine Ebene E legen, welche zugleich zu zwei ſich ſchneidenden, oder ſich kreuzenden Geraden $G_1$ und $G_2$ parallel iſt.

Um nämlich eine Ebene E zu erhalten, welche zu $G_1$ und $G_2$ zugleich parallel iſt, müßte man nach I. durch Q eine Gerade $G_3 // G_1$ und eine andere Gerade $G_4 // G_2$ ziehen, und E muß dann ſowohl durch $G_3$ als durch $G_4$ gehen; durch $G_3$ und $G_4$ läßt ſich aber nur eine einzige Ebene legen (Fr. 182 III.).

V. Die Lage einer Ebene E läßt ſich alſo auch durch einen ihrer Punkte Q und zwei Gerade $G_1$ und $G_2$ beſtimmen, zu denen E parallel iſt.

Aus einer Nebeneinanderſtellung dieſes Satzes mit Fr. 25 II. kann man eine Beſtätigung dafür ſchöpfen, daß die Ebene zwei Ausdehnungen hat (Fr. 5 III.).

### 199. Wie verhält ſich eine Strecke zu ihrer Projektion auf eine Ebene E?

I. Die Projektion $N_1N_2$ (Fig. 181) einer zur Projektionsebene E parallelen Strecke $P_1P_2$ iſt dieſer Strecke gleich.

Weil $P_1N_1 \# P_2N_2$ (Fr. 189 IV. und 197 V.), ſo iſt auch: $N_1N_2 = P_1P_2$ (Fr. 108 V., III.).

II. Die Projektion $N_1N_2$ (Fig. 181) einer gegen die Projektionsebene E geneigten Strecke $PP_2$ iſt kleiner als dieſe Strecke.

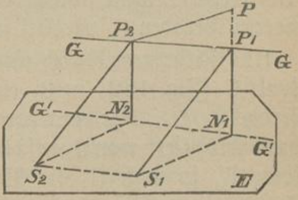

Fig. 181.

Da $PP_2$ nicht parallel zu $N_1N_2$ iſt (Fr. 197 VII.), ſo kann man $P_2P_1 // N_2N_1$ machen und hat dann: $N_1N_2 = P_1P_2$ (I.) und $PP_2 > P_1P_2$ (Fr. 74 VIII.), daher auch $PP_2 > N_1N_2$.

(Dieſer Beweis hört nicht auf zu gelten, wenn $PP_2$ die Ebene E in einem zwiſchen P und $P_2$ gelegenen Punkte ſchneidet.)

III. Eine Strecke $P_1P_2$, welche ihrer Projektion $N_1N_2$ gleicht, iſt der Projektionsebene E parallel; denn ſonſt müßte nach II. die Projektion kleiner ſein als die Strecke.

IV. Eine Strecke $P_1P_2$, welche größer iſt als ihre Projektion $N_1N_2$, ſchneidet die Projektionsebene E; denn ſonſt müßte ſie nach I. ihrer Projektion gleichen.

V. Ähnlich wie in I. läßt ſich auch beweiſen, daß $S_1S_2 ⋕ P_1P_2$, wenn $G // E$ und $P_1S_1 // P_2S_2$. Vergl. Fr. 197 IV.

**200. Wie zieht man eine Gerade G ſenkrecht zu zwei ſich kreuzenden Geraden $G_1$ und $G_2$?**

I. Zieht man durch einen Punkt U in der einen $G_2$ (Fig. 182) von zwei ſich kreuzenden Geraden $G_1$ und $G_2$ eine Gerade $G_3 // G_1$ und legt durch $G_2$ und $G_3$ eine Ebene E (Fr. 182 III.), ſo iſt $E // G_1$ (Fr. 196 I.).

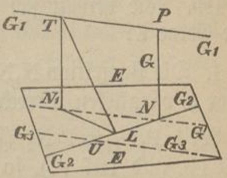

Fig. 182.

II. Nach Fr. 198 III. enthält E in I. zugleich alle Gerade, welche durch irgend einen Punkt in $G_2$ parallel zu $G_1$ gezogen werden können.

Daher läßt ſich durch $G_2$ nur eine Ebene E legen, welche der anderen Geraden $G_1$ parallel iſt.

III. Zieht man durch einen Punkt U (Fig. 182) in $G_2$ eine Gerade $G_3 // G_1$, legt man dann durch $G_2$ und $G_3$ eine Ebene E und projiziert man $G_1$ auf dieſe (zu $G_1$ parallele, Fr. 196 I.) Ebene E, ſo muß $G_2$ die Projektion G' von $G_1$ ſchneiden (Fr. 60 II., weil ja $G' // G_1 // G_3$ (Fr. 197 I. und Fr. 189 VIII.). Iſt nun der Schnittpunkt N zwiſchen G' und $G_2$ die Projektion des Punktes P in der Geraden $G_1$, ſo iſt $PN \perp E$ (Fr. 190 I.), daher $PN \perp G_2$ (Fr. 181 X.), zugleich aber auch $PN \perp G_1$ (Fr. 197 III.).

Fällt man alſo von N eine Senkrechte NP auf $G_1$, ſo iſt NP die geſuchte gemeinſchaftliche Normale G zu $G_1$ und $G_2$.

IV. Die Lage der in I. durch $G_2$ und $G_3$ gelegten, zu $G_1$ parallelen Ebene E iſt wegen Fr. 200 II. nicht abhängig von der Lage des Punktes U; daher ändert ſich auch weder die Lage der Projektion G' (Fr. 191 IV.), noch des Schnittpunktes N, wenn man auch einen anderen Punkt U in $G_2$ wählen wollte; endlich läßt ſich in N nur eine einzige Normale NP auf E (Fr. 188 II.) errichten.

Daher giebt es nur *eine einzige* Gerade G, welche auf den ſich kreuzenden Geraden $G_1$ und $G_2$ zugleich ſenkrecht ſteht.

V. Die auf den ſich kreuzenden Geraden $G_1$ und $G_2$ zugleich ſenkrechte Strecke NP iſt *kürzer* als jede andere Strecke TL, welche zwei Punkte T und L in $G_1$ und $G_2$ verbindet.

Macht man nämlich $TN_1 \perp E$ (Fr. 187 I.), und zieht man in der durch $G_2$ gelegten, zu $G_1$ parallelen (Fr. 200 II.) Ebene E noch $N_1L$, ſo iſt $\angle TN_1L = 90°$ (Fr. 181 X.), daher $TL > TN_1$ (Fr. 74 VIII.); weil nun $G_1 \mathbin{//} G'$ (Fr. 197 I.), ſo iſt $TN_1 = PN$ (Fr. 108 XIII.) und $TL > PN$ (Fr. 20 IX.).

VI. Die *kürzeſte* Entfernung zweier ſich kreuzenden Geraden $G_1$ und $G_2$ (III.) gleicht der Entfernung der einen Geraden $G_1$ von der (nach Fr. 200 II.) durch die andere Gerade $G_2$ gelegten, zu $G_1$ parallelen Ebene E und ſteht zugleich ſenkrecht auf den beiden Geraden und der Ebene E.

**201. Welche Beziehungen beſtehen zwiſchen einer Ebene und zwei parallelen Geraden?**

I. Iſt die eine von zwei parallelen Geraden einer Ebene E parallel, ſo kann auch die andere dieſe Ebene nicht ſchneiden; denn ſonſt müßte E nach Fr. 189 VI. von beiden Geraden geſchnitten werden. Die zweite Gerade liegt alſo entweder in E (Fr. 198 III.), oder ſie iſt // E (Fr. 184 VII.).

II. Sind G' und G'' die Projektionen zweier Geraden $G_1$ und $G_2$ auf dieſelbe Ebene und ſchneiden ſich G' und G'' in einem Punkte A', ſo iſt A' zugleich die Projektion eines Punktes

$A_1$ in $G_1$ und eines Punktes $A_2$ in $G_2$ (Fr. 191 I.); wegen Fr. 190 I. ſchneidet daher die in A' auf der gemeinſchaftlichen Projektionsebene E errichtete Normale (Fr. 188 II.) beide Gerade $G_1$ und $G_2$; deswegen brauchen jedoch $A_1$ und $A_2$ nicht zuſammenzufallen.

III. Werden zwei parallele Gerade $G_1$ und $G_2$ auf dieſelbe Ebene E projiziert, ſo ſind ihre Projektionen G' und G'' entweder parallel, oder ſie fallen zuſammen; letzteres tritt ein, ſobald G' und G'' einen Punkt gemein haben.

Haben nämlich G' und G'' einen Punkt A' gemein, ſo ſchneidet die in A' auf E errichtete Normale die Gerade $G_1$ in einem Punkte $A_1$, die Gerade $G_2$ in einem Punkte $A_2$ (II.); da nun die durch die Parallelen $G_1$ und $G_2$ gelegte Ebene $E_3$ (Fr. 186 VI.) mit der durch $G_1$ und G' gelegten projizierenden Ebene $E_1$ (Fr. 191 II.) den Punkt $A_2$ und die Gerade $G_1$ gemein hat, und da $E_3$ mit der durch $G_2$ und G'' gelegten projizierenden Ebene $E_2$ den Punkt $A_1$ und die Gerade $G_2$ gemein hat, ſo fallen die drei Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ zuſammen (Fr. 182 II.), und deshalb fallen auch ihre Schnitte G' und G'' in E zuſammen (Fr. 185 II.).

Fallen dagegen die projizierenden Ebenen $E_1$ und $E_2$ der beiden Geraden $G_1$ und $G_2$ nicht zuſammen, ſo können die in E liegenden Projektionen G' und G'' von $G_1$ und $G_2$ auch keinen Punkt gemein haben, ſondern es iſt:

$$G' \parallel G'' \text{ (Fr. 186 IV.).}$$

IV. Zwei parallele, die Ebene E ſchneidende Gerade $G_1$ und $G_2$ (vergl. Fr. 189 VI.) machen mit E gleiche Winkel $w_1$ und $w_2$ nach derſelben Seite hin. Sind nämlich G' und G'' die Projektionen von $G_1$ und $G_2$, ſo iſt:

$$\frac{G_1 \parallel G_2 \text{ (Vor.)} \qquad G' \parallel G'' \text{ (III.)}}{\angle w_1 = \angle w_2 \text{ (Fr. 192 I. und Fr. 189 IX.).}}$$

Der Fall, wo G'' und G' zuſammenfallen (III.), iſt hier nicht weiter zu berückſichtigen, vielmehr ſchon in Fr. 62 I. 1. erledigt.

V. Die Projektionen $N_1L_1$ und $N_2L_2$ gleichlanger Strecken $P_1Q_1$ und $P_2Q_2$ in zwei parallelen Geraden $G_1$ und $G_2$ auf dieſelbe Ebene $E$ ſind gleichlang.

Bew. 1) Sind $G_1$ und $G_2$ parallel zur gemeinſchaftlichen Projektionsebene $E$, ſo iſt:

$$N_1L_1 = P_1Q_1 \quad \text{und} \quad N_2L_2 = P_2Q_2 \text{ (Fr. 199 I.)}$$
$$\underline{P_1Q_1 = P_2Q_2 \text{ (Vor.)}}$$
$$N_1L_1 = N_2L_2 \text{ (Fr. 20 IV.).}$$

2) Wird dagegen $E$ von $G_1$ und $G_2$ geſchnitten, ſo ziehe man (ähnlich wie in Fig. 181) durch $Q_1$ und $Q_2$ parallel zu $L_1N_1$ und $L_2N_2$ die Strecken $Q_1V_1$ und $Q_2V_2$, bis ſie die Projizierenden $P_1N_1$ und $P_2N_2$ in $V_1$ und $V_2$ treffen; dann ſind die Winkel $P_1V_1Q_1$ und $P_2V_2Q_2$ rechte (Fr. 62 V.), da ja $\angle P_1N_1L_1 = \mathfrak{R} = P_2N_2L_2$ (Fr. 190 I.); ferner iſt $\angle P_1Q_1V_1 = \angle P_2Q_2V_2$ (Fr. 20 IV.), denn dieſe Winkel gleichen den zugehörigen (nach IV. unter ſich gleichgroßen) Neigungswinkeln $w_1$ und $w_2$ (Fr. 192 I.); da endlich $P_1Q_1 = P_2Q_2$ vorausgeſetzt wurde, ſo iſt $\triangle P_1V_1Q_1 \cong \triangle P_2V_2Q_2$ (Fr. 81 II.) und $V_1Q_1 = V_2Q_2$ (Fr. 67 II.). Nach Fr. 199 I. iſt aber $V_1Q_1 = N_1L_1$ und $V_2Q_2 = N_2L_2$, daher endlich auch $N_1L_1 = N_2L_2$ (Fr. 20 IV.).

VI. Sind die Projektionen $G'$ und $G''$ zweier mit der Projektionsebene $E$ nach derſelben Seite hin gleiche Winkel $w_1$ und $w_2$ machenden Geraden $G_1$ und $G_2$ parallel, ſo ſind die Geraden $G_1$ und $G_2$ ſelbſt parallel.

Wäre $G_2$ nicht parallel zu $G_1$, ſo könnte man durch einen Punkt $P$ in $G_2$ eine Gerade $G_3 // G_1$ ziehen. Die Projektion $P'$ von $P$ liegt dann zugleich in $G''$ und in der Projektion $G'''$ von $G_3$ (Fr. 191 I.), auch fallen $G'''$ und $G'$ entweder zuſammen, oder es iſt $G''' // G'$ (III.). Fiele nun $G'''$ auf $G'$, ſo hätten auch $G'$ und $G''$ den Punkt $P'$ gemein, im Widerſpruch gegen die Vor. $G' // G''$ und Fr. 26. Wäre dagegen $G''' // G'$, ſo müßte $G'''$ mit $G''$ zuſammenfallen, weil $G'' // G'$ vorausgeſetzt wurde, und ſich durch $P'$ nur eine Parallele zu $G'$ ziehen läßt (Fr. 57 I.); da ferner zugleich $G_1 // G_3$, ſo gliche $\angle w_1$ dem Neigungswinkel $w_3$ von $G_3$ gegen $E$ (IV.)

und aus $\angle w_1 = \angle w_2$ (Vor.) folgte weiter $\angle w_3 = \angle w_2$; nun liegen $w_1$ und $w_2$ (Vor.) und ebenſo $w_3$ und $w_1$ (nach IV.) nach derſelben Seite hin, und in $w_3 = w_2$ würde daher ein Widerſpruch gegen Fr. 69 VII. ſtecken, wenn nicht $w_3$ und $w_2$ ſich deckten und demnach (wegen Fr. 46) auch die durch P gelegte $G_3$ und $G_2$; alſo iſt:

$$G_2 // G_1.$$

VII. Zieht man in der einen ($E_1$) von zwei ſich ſchneidenden Ebenen $E_1$ und E eine zur anderen (E) parallele Gerade G, ſo iſt dieſe dem Durchſchnitte $G_1$ beider Ebenen parallel (Fr. 26).

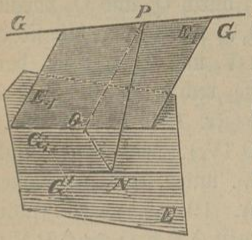

Fig. 183.

G und $G_1$ liegen ja beide in der Ebene $E_1$, Fig. 183, und können ſich nicht ſchneiden, weil ſich ſonſt auch G und E ſchneiden müßten, da jeder Punkt von $G_1$ auch ein Punkt von E iſt. (G und $G_1$ fallen nicht zuſammen, Fr. 184 VII.)

VIII. Iſt eine Gerade G parallel zu zwei ſich ſchneidenden Ebenen $E_1$ und $E_2$, ſo iſt G auch parallel zum Durchſchnitt $G_1$ der beiden Ebenen $E_1$ und $E_2$.

G iſt nämlich zu ihrer Projektion G auf $E_1$ parallel (Fr. 197 I.), zugleich iſt entweder $G' // G_1$, oder $G'$ fällt mit $G_1$ zuſammen (I.); daher iſt — im erſtern Falle nach Fr. 189 VIII., im andern unmittelbar — auch $G // G_1$.

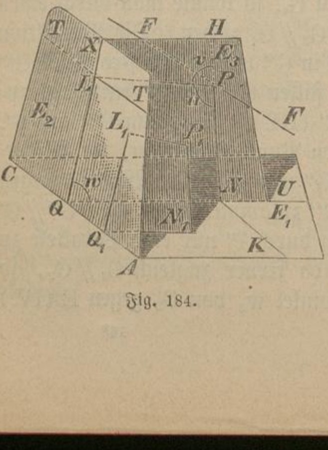

Fig. 184.

202. Was verſteht man unter einem Flächen- oder Keilwinkel und was unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen?

I. Fällt man von einem Punkte P (Fig. 184) zwei Normalen PN und PL auf zwei ſich ſchneidende Ebenen

$E_1$ und $E_2$, ſo ſchließen die beiden Normalen immer den nämlichen Winkel u ein, wo auch P liegen mag. Fällt man nämlich von einem andern Punkte $P_1$ die Normalen $P_1N_1$ und $P_1L_1$ auf $E_1$ und $E_2$, ſo iſt nach Fr. 189 IV. $P_1N_1 \parallel PN$ und $P_1L_1 \parallel PL$, daher auch:

$$\angle N_1P_1L_1 = \angle NPL = \angle u \text{ (Fr. 189 IX.).}$$

II. Legt man durch die beiden Normalen PN und PL eine Ebene $E_3$, ſo ſchneidet $E_3$ die Ebenen $E_1$ und $E_2$ in zwei Geraden UQ und XQ, welche ſich ebenfalls ſtets unter demſelben Winkel w ſchneiden. In dem ebenen Vierecke PNQL iſt nämlich $\angle PNQ = 90° = \angle PLQ$ (Fr. 181 X.), folglich $\angle NPL + \angle NQL = 180°$ (Fr. 72 III.), oder: $\angle w = \angle NQL = 180° - \angle NPL = 180° - \angle u$.

III. Zieht man durch den Punkt P eine Parallele PF zur Schnittlinie AC zwiſchen $E_1$ und $E_2$, ſo iſt nach Fr. 196 I. $PF \parallel E_1$ und $PF \parallel E_2$; daher ſteht PF zugleich ſenkrecht auf den beiden Normalen PN und PL (Fr. 197 III.), alſo iſt $PF \perp E_3$ (Fr. 181 XI.) und, weil ja $PF \parallel AC$ gemacht wurde, ſo ſteht auch die Schnittlinie AC auf $E_3$ normal (Fr. 189 VII.).

IV. Zwiſchen den beiden durch die Schnittlinie AC halbbegrenzten Ebenen $E_1$ und $E_2$ iſt ein halbbegrenzter Raum enthalten, welcher ein Flächen- oder Keilwinkel heißt. $E_1$ und $E_2$ heißen die Seiten, AC die Kante des Flächenwinkels.

Dieſer Raum wird von der Ebene $E_2$ überſtrichen, wenn ſich dieſelbe von der Ebene $E_1$ aus bis in ihre ſchließliche Lage um die Schnittlinie AC dreht. Bei dieſer Drehung bewegt ſich die nach III. und Fr. 181 X. auf AC normale Schnittlinie QX zwiſchen $E_3$ und $E_2$ von der Schnittlinie QU zwiſchen $E_3$ und $E_1$ aus in der Ebene $E_3$ bis in ihre endliche Lage (Fr. 181 XIV.) und beſchreibt dabei den ebenen Winkel $NQL = w$.

V. Dieſer ebene Winkel $NQL = w$, deſſen Schenkel in den Ebenen $E_1$ und $E_2$ liegen und beide auf der Schnittlinie

AC dieſer beiden Ebenen ſenkrecht ſtehen, wird der **Neigungswinkel** der beiden Ebenen $E_1$ und $E_2$ genannt.

Seine Größe iſt zwar von der Größe des Flächenwinkels (IV.), nicht aber von der Lage des Punktes P oder Q abhängig (II.).

VI. Den Flächenwinkel der zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$, welche ſich in AC ſchneiden, bezeichnet man entweder durch $\angle(E_1, E_2)$, oder durch $\angle$ U(AC)X, wobei U und X zwei Punkte in $E_1$ und $E_2$ bedeuten.

**203. Welche Sätze über den Neigungswinkel zweier Ebenen ergeben ſich aus Fr. 202?**

I. Nach Fr. 202 IV. und V. läßt ſich der (ebene) Neigungswinkel w zur Beſtimmung der Größe des Flächenwinkels und der gegenſeitigen Lage der beiden Ebenen $E_1$ und $E_2$ benutzen.

Jede Änderung des Winkels w hat eine Änderung des Flächenwinkels im Gefolge, und umgekehrt.

Wird der eine Winkel 2, 3, ꝛc. mal ſo groß, ſo wird auch der andere 2, 3, ꝛc. mal ſo groß. Neigungswinkel und Flächenwinkel ſind alſo einander proportional.

Wenn man daher für die Flächenwinkel ganz ähnliche Begriffsbeſtimmungen einführt, wie früher für die ebenen Winkel, ſo erhält man ſehr leicht eine ganze Reihe von Sätzen, welche mit früher dageweſenen wörtlich gleichlauten.

II. Zur Beſtimmung der Lage der Ebene $E_2$ braucht man außer der Ebene $E_1$ und der Spur AC nur die Gerade QL, oder den Neigungswinkel NQL = w (Fr. 182 III.).

III. Iſt der Neigungswinkel w zweier Ebenen $E_1$ und $E_2$ ſpitz, recht, ſtumpf, flach oder überſtumpf, ſo iſt es auch ihr Flächenwinkel.

IV. Jeder hohle Flächenwinkel iſt kleiner, jeder überſtumpfe größer als ein flacher.

V. Zu jedem hohlen Flächenwinkel giebt es einen überſtumpfen, welcher mit erſterem zuſammengenommen den ganzen Flächenwinkelraum um die Schnittgerade AC herum erfüllt.

VI. Zwei Flächenwinkel heißen Nebenwinkel und Scheitelwinkel, wenn ihre Neigungswinkel es ſind.

VII. Jeder Flächenwinkel iſt ſeinem Scheitelwinkel gleich.

VIII. Jeder Flächenwinkel ergänzt ſeinen Nebenwinkel zu einem flachen.

IX. Alle rechten Flächenwinkel ſind unter ſich gleich.

X. Eine Ebene $E_2$, deren Neigungswinkel gegen eine andere $E_1$ ein rechter iſt, ſteht normal oder ſenkrecht ($\perp$) auf $E_1$.

XI. Der ſpitze Neigungswinkel w (Fig. 184) zweier Ebenen $E_1$ und $E_2$ iſt gleich dem ſpitzen Winkel HPL = v zwiſchen ihren Normalen NP und LP (Fr. 202 II. und Fr. 39 IV.).

**204. Was iſt über zwei auf einander ſenkrecht ſtehende Ebenen zu bemerken?**

I. Steht eine Gerade PN (Fig. 184) auf einer Ebene $E_1$ ſenkrecht, ſo ſteht jede durch PN gelegte Ebene $E_3$ auch auf $E_1$ ſenkrecht.

Zieht man nämlich in $E_1$ im Fußpunkte N eine Senkrechte NK zu der Schnittgeraden QU zwiſchen $E_3$ und $E_1$, ſo iſt $\angle PNK$ der Neigungswinkel zwiſchen $E_3$ und $E_1$ (Fr. 202 V.); weil nun $\angle PNK = 90^\circ$ (Fr. 181 X.), ſo iſt:

$$E_3 \perp E_1 \quad \text{(Fr. 203 X.).}$$

II. Will man durch zwei gegebene Punkte $P_1$ und $P_2$, oder die durch $P_1$ und $P_2$ gehende Gerade G (Fig. 179 S. 237) eine Ebene $E_3$ ſenkrecht auf eine andere Ebene E fällen, welche auf G, bezw. auf der Strecke $P_1P_2$ nicht normal ſteht, ſo braucht man nur zwei Normalen $P_1N_1$ und $P_2N_2$ auf $E_1$ zu fällen (Fr. 187 I.); durch dieſe beiden Normalen iſt dann die Ebene $E_3$ zu legen (Fr. 191 II.).

Es giebt nur eine ſolche Ebene (Fr. 191 IV.).

III. Will man durch einen gegebenen Punkt P eine Ebene $E_3$ legen, welche zu der Ebene $E_1$ normal und zu einer Geraden G parallel iſt, ſo ziehe man durch P eine Gerade PL // G (Fr. 196 V.), mache $PN \perp E_1$ (Fr. 187 I.) und lege $E_3$ durch PL und PN. Vergl. Fig. 184.

Es giebt nur eine ſolche Ebene (Fr. 186 VII., 188 I.).

IV. Schneiden ſich die beiden auf einander normalen Ebenen $E_3$ und $E_1$ in UQ (Fig. 184), ſo ſteht die in $E_3$ gezogene, auf UQ ſenkrechte Gerade NP auch auf $E_1$ ſenkrecht.

Zieht man in $E_1$ noch $NK \perp UQ$, ſo iſt der Neigungswinkel $PNK = 90°$ (Fr. 202 V. und 203 X.), und da auch $\angle PNQ = 90°$ (Vor.), ſo iſt $PN \perp E_1$ (Fr. 181 XI.).

V. Steht die Ebene $E_1$ auf einer Ebene $E_3$ ſenkrecht, ſo läßt ſich die Schnittgerade UQ dieſer beiden Ebenen als die Projektion von $E_3$ auf $E_1$ anſehen. Denn die durch einen Punkt P in $E_3$ auf UQ gefällte Senkrechte PN ſteht auch auf $E_1$ ſenkrecht (IV.) und N iſt alſo die Projektion von P (Fr. 190 I.).

VI. Fällt man von einem Punkte P einer Ebene $E_3$ eine Normale PN auf eine zu $E_3$ normale Ebene $E_1$, ſo trifft PN nach V. und wegen Fr. 188 I. die Schnittlinie UQ der beiden Ebenen. PN liegt alſo ganz in der Ebene $E_3$.

VII. Errichtet man in einem Punkte N der Schnittlinie UQ zweier auf einander ſenkrechten Ebenen $E_3$ und $E_1$ auf der Ebene $E_1$ eine Normale NP, ſo liegt dieſelbe wegen IV. in der andern Ebene $E_3$, weil ſich in N nur eine Normale auf $E_1$ errichten läßt (Fr. 188 II.).

VIII. Steht eine Ebene $E_3$ zugleich ſenkrecht auf zwei ſich ſchneidenden Ebenen $E_1$ und $E_2$, ſo ſteht jene Ebene $E_3$ auch auf der Schnittlinie AC zwiſchen $E_1$ und $E_2$ ſenkrecht.

Schneiden ſich in Q (Fig. 184) die Schnittlinien NQ zwiſchen $E_3$ und $E_1$ und LQ zwiſchen $E_3$ und $E_2$, ſo liegt eine in Q auf $E_3$ errichtete Normale in $E_2$ und in $E_1$ zugleich (VII.) und fällt deshalb mit AC zuſammen (Fr. 185 II.).

IX. Jeder Punkt P der Ebene $E_4$, welche den Winkel zwiſchen zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ halbiert, iſt von dieſen Ebenen $E_1$ und $E_2$ gleichweit entfernt.

Um die Entfernung des Punktes P von $E_1$ und $E_2$ zu finden, müßte man von P zwei Normalen PN und PL auf $E_1$ und $E_2$ fällen. Die durch PN und PL gelegte Ebene $E_3$ (vergl. Fig. 184) ſtünde dann auf $E_1$ und auf $E_2$ zugleich ſenkrecht (I.), folglich ſtünde $E_3$ in Q auf dem Schnitt AC zwiſchen $E_1$ und $E_2$ ſenkrecht (VIII.) und ebenſo auf $E_4$ (I.). Der Neigungswinkel NQL zwiſchen $E_1$ und $E_2$ ſoll nun durch $E_4$, d. h. durch PQ (Fr. 202 V.) halbiert werden; daher iſt

$$\triangle PQL \cong \triangle PQN \text{ (Fr. 81 II.)}$$

und

$$PL = PN \text{ (Fr. 67 II.).}$$

### 205. Wenn ſind zwei Ebenen parallel?

I. Jede Gerade $G_1$ (Fig. 185), welche in der einen $E_1$ von zwei parallelen Ebenen $E_1$ und $E_2$ liegt, iſt der anderen $E_2$ parallel.

Da nämlich $E_1$ keinen Punkt mit $E_2$ gemein hat (Fr. 185 IV.), ſo kann auch die in $E_1$ liegende (Fr. 184 I.) $G_1$ keinen Punkt mit $E_2$ gemein haben, ſondern es iſt $G_1 // E_2$ (Fr. 184 VII.).

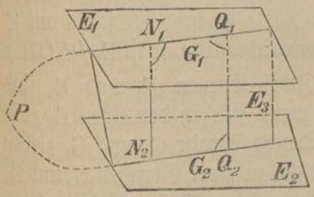

Fig. 185.

II. Werden zwei parallele Ebenen $E_1$ und $E_2$ von einer dritten Ebene $E_3$ geſchnitten, ſo ſind die Schnittlinien $G_1$ und $G_2$ parallel.

Wenn ſich nämlich $G_1$ und $G_2$ in einem Punkte P ſchnitten, ſo läge dieſer Punkt P zugleich in $E_1$ und $E_2$ (Fr. 184 I.); weil nun $E_1 // E_2$ ſein ſoll, ſo können auch $G_1$ und $G_2$ keinen Punkt gemein haben (Fr. 185 IV.), und da $G_1$ und $G_2$ beide in $E_3$ liegen, ſo iſt:

$$G_1 // G_2 \text{ (Fr. 26).}$$

III. Zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ ſind parallel, wenn ſie eine gemeinſchaftliche Normale $N_1N_2$ haben.

Hätten $E_1$ und $E_2$, Fig. 185, einen Punkt P gemein, ſo würde die durch P und $N_1N_2$ gelegte Ebene $E_3$ die Ebenen $E_1$ und $E_2$ in zwei Geraden $G_1$ und $G_2$ ſchneiden, welche parallel wären (II., oder Fr. 181 X. und 62 II.) und doch den Punkt P gemein hätten, was Fr. 26 widerſpricht. Daher iſt

$$E_1 // E_2 \text{ (Fr. 185 IV.).}$$

IV. Zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ ſind parallel, wenn ihre Normalen $N_1N_2$ und $Q_1Q_2$ parallel ſind.

Iſt in Fig. 185 $N_1N_2 \perp E_1$ und $Q_1Q_2 \perp E_2$, ſo muß, wenn $Q_1Q_2 // N_1N_2$ vorausgeſetzt wird, auch $Q_1Q_2 \perp E_1$ ſein (Fr. 189 VII.); $Q_1Q_2$ ſteht demnach ſowohl auf $E_1$ als auf $E_2$ normal, weshalb $E_1 // E_2$ ſein muß (III.).

V. Zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ (Fig. 186) ſind parallel, wenn ſich in $E_1$ zwei ſich ſchneidende Gerade $G_1$ und $G_2$ ziehen laſſen, welche zu $E_2$ parallel ſind.

Fällt man vom Schnittpunkte S der Geraden $G_1$ und $G_2$ eine Normale SN auf $E_2$ (Fr. 187 I.), ſo iſt nach Fr. 197 III. $SN \perp G_1$ und $SN \perp G_2$, folglich $SN \perp E_1$ (Fr. 181 XI.); da nun SN ſchon auf $E_2$ normal gemacht wurde, ſo iſt $E_1 // E_2$ (III.).

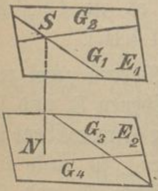

Fig. 186.

VI. Zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ ſind parallel, wenn ſich in der einen $E_1$ zwei ſich ſchneidende Gerade $G_1$ und $G_2$ ziehen laſſen, welche zu zwei Geraden $G_3$ und $G_4$ in der anderen Ebene $E_2$ parallel ſind (V.), weil ja dann auch $G_1 // E_2$ und $G_2 // E_2$ iſt (Fr. 196 I.).

VII. Zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ (Fig. 187) ſind parallel, wenn drei zwiſchen ihnen gezogene, nicht in einer Ebene liegende (vergl. Fr. 182 I.) parallele Strecken AD, LQ, NV gleichlang ſind; wegen Fr. 189 IV. können an Stelle dieſer drei Parallelen auch drei Normale treten.

Legt man durch AD und LQ, desgleichen durch AD und NV eine Ebene (Fr. 186 VI.), ſo iſt:

$$\begin{array}{ll} AD \mathrel{\#} LQ & \text{und}\quad AD \mathrel{\#} NV \text{ (Vor.)} \\ \hline AL \parallel DQ & \quad\ AN \parallel DV \text{ (Fr. 108 V.)} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{E_1 \parallel E_2 \text{ (VI.).}} \end{array}$$

**206. Welche Eigenſchaften haben zwei parallele Ebenen?**

I. Sind zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ parallel, ſo ſteht jede Normale SN der einen Ebene $E_2$ auch auf $E_1$ normal.

Zieht man durch S in $E_1$ zwei Gerade $G_1$ und $G_2$, Fig. 186, ſo iſt $G_1 \parallel E_2$ und $G_2 \parallel E_2$ (Fr. 205 I.), folglich $G_1 \perp SN \perp G_2$ (Fr. 197 III.) und deshalb:

$$SN \perp E_1 \text{ (Fr. 181 XI.).}$$

II. Sind zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ parallel, ſo ſind alle zwiſchen ihnen gezogenen Parallelen gleichlang.

Legt man nämlich durch irgend zwei Parallelen AD und NV, Fig. 187, eine Ebene, ſo ſind die Schnittlinien AN und DV dieſer Ebene mit $E_1$ und $E_2$ auch parallel (Fr. 205 II.) und deshalb $AD = NV$ (Fr. 108 III.).

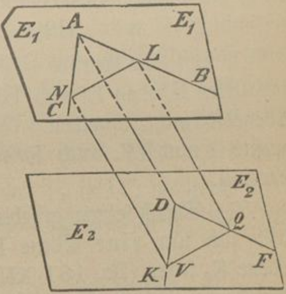

Fig. 187.

III. Alle Normalen zwiſchen zwei parallelen Ebenen $E_1$ und $E_2$ ſind parallel (I. und Fr. 189 IV.) und gleichlang (II.).

Jede dieſer Normalen mißt den *Abſtand* oder die *Entfernung der beiden parallelen Ebenen.*

*Der geometriſche Ort* (vergl. 74 XVII.) eines Punktes, welcher auf der einen Seite einer Ebene $E_1$ in einem gegebenen Abſtande von dieſer liegt, iſt eine zu $E_1$ parallele Ebene $E_2$.

IV. Schneidet eine Gerade G die eine $E_1$ von zwei parallelen Ebenen $E_1$ und $E_2$, ſo ſchneidet G auch die andere Ebene $E_2$.

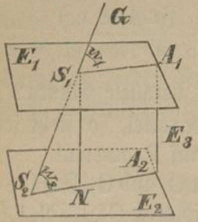

Fig. 188.

Fällt man von dem Punkte $S_1$ (Fig. 188), in dem G die Ebene $E_1$ ſchneidet, eine Normale $S_1N$ auf $E_2$, und legt man dann durch G und $S_1N$ eine Ebene $E_3$, ſo ſind die Schnittlinien $A_1S_1$ und $A_2N$ zwiſchen $E_3$ und den Ebenen $E_1$ und $E_2$ parallel (Fr. 205 II.); daher muß G auch $A_2N$ ſchneiden (Fr. 60 II.) und der Punkt $S_2$, in welchem dies geſchieht, iſt zugleich der Schnitt zwiſchen G und $E_2$, weil ja $A_2N$ ganz in $E_2$ liegt.

V. Zwei parallele Ebenen $E_1$ und $E_2$ machen nach derſelben Seite hin gleiche Winkel $w_1$ und $w_2$ mit der ſie ſchneidenden Geraden G.

Weil $S_1N$ in Fig. 188 nicht bloß auf $E_2$ (IV.), ſondern auch auf $E_1$ normal iſt (I.), ſo ſind $GS_1A_1$ und $GS_2A_2$ die Neigungswinkel zwiſchen G und den Ebenen $E_1$ und $E_2$ (Fr. 192 I. und 191); nach Fr. 62 I. 1. aber iſt:

$$\angle GS_1A_1 = \angle GS_2A_2.$$

VI. Iſt eine Gerade G parallel zu der einen $E_1$ von zwei parallelen Ebenen $E_1$ und $E_2$, ſo kann ſie auch die andere Ebene $E_2$ nicht ſchneiden. Denn ſchnitten ſich G und $E_2$, ſo müßte G nach IV. auch $E_1$ ſchneiden, während doch $G \parallel E_1$ ſein ſoll.

VII. Durch einen gegebenen Punkt S (vergl. Fig. 186) läßt ſich nur eine Ebene $E_1$ parallel zu einer gegebenen Ebene $E_2$ legen (Fr. 181 XIII.); denn nach I. muß $E_1$ alle Geraden enthalten, welche in S ſenkrecht zu der von S auf $E_2$ herabgefällten Normalen SN ſtehen. — Vergl. Fr. 198 IV.

VIII. Daher läßt ſich auch nur eine einzige Ebene $E_1$ parallel zu $E_2$ durch eine zu $E_2$ parallele Gerade $G_1$ legen.

IX. Durch zwei ſich kreuzende Gerade $G_1$ und $G_2$ läßt ſich nach Fr. 200 II. nur ein Paar parallele Ebenen $E_1$ und $E_2$ legen; denn wegen Fr. 205 I. muß z. B. die durch $G_2$ zu legende Ebene $E_2$ auch zu $G_1$ parallel ſein.

Die Entfernung dieſer beiden Ebenen iſt zugleich die kürzeſte Entfernung der beiden Geraden. Vergl. Fr. 200 VI.

**207. Welche Sätze gelten von zwei ſich ſchneidenden Ebenen?**

I. Zwei Ebenen müſſen ſich ſchneiden, ſobald eine auf $E_1$ errichtete Normale nicht auch zugleich auf $E_2$ normal ſteht (Fr. 206 I.).

II. Zwei Ebenen, welche ſich ſchneiden, haben wegen Fr. 205 III. keine gemeinſchaftliche Normale *).

III. Zwei Ebenen ſchneiden ſich, wenn zwei zwiſchen ihnen gezogene parallele Strecken ungleich ſind (Fr. 206 II.).

IV. Wenn zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ ſich ſchneiden, ſo ſind zwei zwiſchen ihnen gezogene Parallelen $P_1$ und $P_2$ ungleich, ſofern die durch dieſe Parallelen gelegte Ebene $E_3$ nicht etwa zur Schnittlinie $G_3$ der Ebenen $E_1$ und $E_2$ parallel iſt.

Bei $E_3 // G_3$ (vergl. Fig. 192 S. 255) ſind nämlich die Geraden $G_1$ und $G_2$, worin $E_2$ und $E_1$ von $E_3$ geſchnitten werden, zunächſt mit $G_3$ (Fr. 197 II.), deshalb auch unter ſich parallel (Fr. 189 VIII.) und $P_1 = P_2$ (Fr. 108 III.). Daher können wegen Fr. 205 VII. $P_1$ und $P_2$ nicht noch einer außer $E_3$ liegenden Parallelen gleich ſein.

V. Wie die Parallelen $P_1$ und $P_2$ in IV. wachſen, wenn ihre Ebene $E_3$ die Gerade $G_3$ in O ſchneidet (Fig. 193), ſagt Fr. 148 I.

VI. Umgekehrt wäre bei $P_1 = P_2$ in Fig. 192 auch $G_1 // E_1$ (Fr. 197 VI.), daher $G_1 // G_3$ (Fr. 197 II.) und $G_3 // E_3$ (Fr. 196 I.).

---

*) Nennt man zwei Ebenen mit einer gemeinſchaftlichen Normalen, oder mit parallelen Normalen Ebenen von gleicher Stellung, ſo lauten I., II., Fr. 206 I. (III.) und 205 III. (IV.) ähnlich, wie die Sätze in Fr. 56. — Vergl. Fr. 182 III.

**208. Welche Lagen können drei Ebenen gegen einander haben?**

I. Drei Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ können nur fünf verſchiedene Lagen gegen einander haben. Es laſſen ſich nämlich zwei Hauptfälle unterſcheiden:

zwei Ebenen ſind parallel;
keine Ebene iſt der anderen parallel.

Beim erſten Hauptfalle kann dann die dritte Ebene der erſten Ebene parallel ſein, oder ſie ſchneiden.

Beim zweiten Hauptfalle kann die dritte Ebene den Durchſchnitt der beiden anderen in ſich enthalten, ihm parallel ſein, oder ihn ſchneiden.

II. Sind zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ einer dritten $E_3$ parallel, ſo ſind ſie unter ſich ſelbſt parallel.

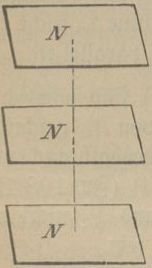

Fig. 189.

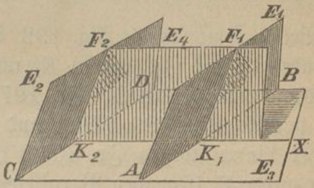

Fig. 190.

Dann ſteht nämlich jede auf $E_3$ errichtete Normale NN (Fig. 189) auch auf $E_1$ und $E_2$ normal (Fr. 206 I.), und daher iſt:

$$E_1 \mathbin{//} E_2$$ (Fr. 205 III.).

III. Schneidet eine Ebene $E_3$ (Fig. 190) die eine $E_1$ von zwei parallelen Ebenen $E_1$ und $E_2$, ſo ſchneidet ſie auch die andere $E_2$. Eine auf $E_1$ errichtete Normale iſt zwar auf $E_2$ normal (Fr. 206 I.), aber nicht auf $E_3$ (Fr. 207 II.); $E_2$ und $E_3$ müſſen ſich daher ſchneiden (Fr. 207 I.).

Dabei ſind die beiden Schnittlinien AB und CD parallel (Fr. 205 II.).

IV. Werden zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$, Fig. 190, von einer dritten Ebene $E_3$ in den parallelen Geraden AB und CD geſchnitten, ſo ſteht jede auf AB normale Ebene $E_4$ auch auf CD normal (Fr. 189 VII.). Schneidet nun $E_4$ die Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ in $F_1K_1$, $F_2K_2$ und $XK_1K_2$, ſo ſind $\angle F_1K_1X$ und $\angle F_2K_2X$ die Neigungswinkel (Fr. 202 V. und 181 X.) von $E_3$ gegen $E_1$ und $E_2$. Demnach gelten von dieſen Neigungswinkeln und daher auch von ihren Flächenwinkeln ganz die nämlichen Sätze, welche in Fr. 62 für zwei Gerade aufgeführt wurden; denn bei $E_1 // E_2$ iſt $F_1K_1 // F_2K_2$ (III.) und umgekehrt aus $F_1K_1 // F_2K_2$ bei AB // CD folgt $E_1 // E_2$ (Fr. 205 VI.).

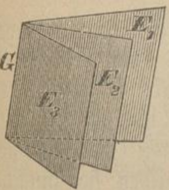

Fig. 191.

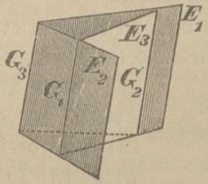

Fig. 192.

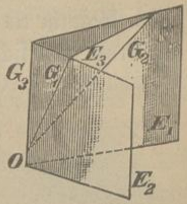

Fig. 193.

V. Liegt der Durchſchnitt G zweier Ebenen $E_1$ und $E_2$ (Fig. 191) in der dritten Ebene $E_3$, ſo haben alle drei Ebenen die Gerade G gemein, ſonſt aber nichts weiter.

Denn die drei Ebenen fielen nach Fr. 182 II. zuſammen, ſobald ſie nur noch einen Punkt außer G gemein hätten.

VI. Iſt der Durchſchnitt $G_3$ (Fig. 192) zweier Ebenen $E_1$ und $E_2$ der dritten Ebene $E_3$ parallel (und iſt keine Ebene der anderen parallel), ſo ſchneiden ſich auch $E_3$ und $E_1$, ſowie $E_3$ und $E_2$, letztere in $G_1$, erſtere in $G_2$.

Hierbei iſt nach Fr. 197 II. $G_1 // G_3$ und $G_2 // G_3$, daher auch $G_1 // G_2 // G_3$ (Fr. 189 VIII.), d. h. die drei Durchſchnitte $G_1$, $G_2$ und $G_3$ ſind einander parallel.

VII. Schneidet die dritte Ebene $E_3$ den Durchſchnitt $G_3$ der beiden Ebenen $E_1$ und $E_2$ in O (Fig. 193), ſo ſchneiden ſich in dem Punkte O die drei Ebenen und auch ihre drei Durchſchnitte $G_1$, $G_2$ und $G_3$.

Die drei Ebenen haben aber außer O keinen Punkt gemein, weil ſonſt auch dieſer Punkt in jedem der drei Durchſchnitte liegen und allen drei Durchſchnitten gemeinſam ſein müßte, da ja nach Fr. 185 II. je zwei Ebenen ſich nur in einer Geraden ſchneiden können.

## Neuntes Kapitel.

# Das Dreikant.

209. Was iſt ein Dreikant?

I. Denkt man ſich die drei nicht in einer Ebene liegenden Durchſchnitte OA, OB und OC (Fig. 194) der drei ſich in bloß einem Punkte O ſchneidenden Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ (Fr. 208 VII.) als drei von O auslaufende Strahlen, ſo bilden ſie zunächſt drei ebene Winkel AOB = c, BOC = a und COA = b.

Zwiſchen dieſen drei ebenen Winkeln iſt aber ein halbbegrenztes Stück des unendlichen Raumes enthalten, welches man eine dreiſeitige Ecke, einen dreiſeitigen körperlichen Winkel oder ein Dreikant nennt und durch O(ABC) bezeichnet.

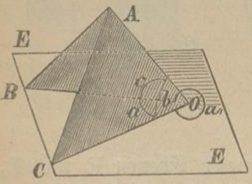

Fig. 194.

II. Nimmt man mehrere von O auslaufende Strahlen und Ebenen, ſo erhält man in gleicher Weiſe ein Vielkant.

III. Der Punkt O iſt der Scheitel oder die Spitze, die drei Strahlen OA, OB und OC ſind die Kanten und die von ihnen gebildeten ebenen Winkel a, b, c die Kantenwinkel, Seitenwinkel oder Seiten des Dreikants. Von den (nicht über die Kanten hinaus erweiterten) drei Seitenebenen werden gegen das Innere des Dreikants hin drei Flächenwinkel A(OB)C

$= B$, $B(OC)A = C$ und $C(OA)B = A$ gebildet (Fr. 202 IV.) und heißen die (inneren) **Winkel** des Dreikants. Die Seiten a, b, c liegen der Reihe nach den Winkeln A, B, C gegenüber.

### 210. Wie vielerlei Dreikante giebt es?

I. Dreikante mit flachen Seiten giebt es nicht; wird nämlich $\angle a = 180°$, ſo fallen die Ebenen AOB und AOC zuſammen (Fr. 182 III.), ihr Flächenwinkel wird zu einem flachen (vgl. Fr. 203 III.), und man hat dann kein Dreikant mehr, ſondern bloß einen Flächenwinkel.

II. Ebenſo wird ein Dreikant zu einem Flächenwinkel, ſobald ein Winkel des Dreikants flach wird.

III. Weil die drei Seiten das Dreikant begrenzen (Fr. 209 I.), ſo darf keine Seite durch das Dreikant hindurchgehen oder zum Teil innerhalb des Dreikants liegen. Da nun die dritte Kante OA mit keiner Geraden in der durch die beiden anderen Kanten OB und OC gelegten Ebene E einen überſtumpfen Winkel macht (Fr. 192 III.), ſo müſſen die Seiten b und c hohl ſein, ſobald man für die Seite a die Möglichkeit, hohl oder überſtumpf zu ſein, zulaſſen will.

Daher giebt es kein Dreikant mit mehr als **einer überſtumpfen** Seite.

IV. Jedes Dreikant hat demnach wenigſtens **zwei hohle Seiten**. Iſt die **dritte Seite** hohl, oder überſtumpf, ſo iſt auch ihr Gegenwinkel kleiner, oder größer als ein flacher Winkel, d. h. hohl, oder überſtumpf (I., Fr. 203 III. und V.).

Iſt umgekehrt der **dritte Winkel** hohl, oder überſtumpf, ſo iſt auch ſeine Gegenſeite hohl, oder überſtumpf.

V. Ein Dreikant mit drei hohlen Winkeln hat auch drei hohle Seiten (IV.).

VI. Zu jedem Dreikant mit **drei hohlen** Seiten und Winkeln giebt es ein Dreikant (**Außendreikant**) mit denſelben Kanten und Seiten, aber mit **drei überſtumpfen**

Winkeln, deren jeder einen Winkel des urſprünglichen Dreikants (des Urdreikants) zu 360° ergänzt*). Vgl. VIII.

VII. Auch zu jedem Dreikant mit zwei hohlen und einer überſtumpfen Seite und Winkel giebt es ein Außendreikant mit denſelben Kanten und Seiten, aber mit zwei überſtumpfen und einem hohlen Winkel, deren jeder einen Winkel des Urdreikants zu 360° ergänzt. Vgl. VIII.

VIII. Sowohl in VI. als in VII. erfüllen die beiden zuſammengehörigen Dreikante den ganzen körperlichen Winkelraum um den Scheitel. Nennt man dieſen ganzen Winkelraum Volldreikant, ſo macht jedes Dreikant mit ſeinem Außendreikant ein Volldreikant aus. (Vgl. Fig. 195.)

IX. Zu jedem Dreikant mit drei hohlen Seiten und Winkeln giebt es drei Dreikante (Gegendreikante) mit denſelben Kanten, aber mit je einer überſtumpfen Seite und Winkel, z. B. $a_1$ und $A_1$ in Fig. 194, welche die betreffende Seite a, bezieh. Winkel A des Urdreikants zu 360° ergänzen; die beiden anderen Seiten in beiden Dreikanten ſind gleich; die beiden anderen Winkel ergänzen die Winkel des Urdreikants zu 180°. Man erhält ein ſolches Gegendreikant durch Erweiterung einer Seitenebene E des Urdreikants.

X. Jedes Dreikant erfüllt mit ſeinem Gegendreikante den Flächenwinkelraum auf der einen Seite einer Ebene E, bildet alſo einen flachen Flächenwinkel oder macht eine flache oder geſtreckte Ecke, ein Flachdreikant, d. h. die Hälfte eines Volldreikants aus.

XI. Wegen VI. bis VIII. braucht man bloß Dreikante, welche kleiner ſind als ein Flachdreikant, und wegen IX. und X. bloß hohle oder konkave Dreikante mit drei hohlen Winkeln und Seiten zu betrachten. Im Folgenden wird daher ſtets von ſolchen die Rede ſein.

---

*) Denkt man ſich das Urdreikant aus einem Stoff gebildet, ſo wird der leere Raum um dasſelbe von dem Außendreikant eingenommen. Wenn man dagegen das Urdreikant (als Modell) in eine Formmaſſe eindrückte und wieder herauszöge, ſo würde die mit einem dem Urdreikante gleichenden Loche verſehene Formmaſſe das Außendreikant ſtofflich darſtellen. Vergl. VIII.

### 211. Wie entſteht ein Neben-, Hinter-, Scheitel-Dreikant?

Erweitert man die drei Kanten und Ebenen eines Dreikants O(ABC) über deſſen Scheitel O (Fig. 195) hinaus, ſo erhält man noch ſieben Dreikante:

I. Die drei Nebendreikante $O(A_1BC)$, $O(AB_1C)$ und $O(ABC_1)$ haben mit dem Urdreikant nur je zwei Kanten und eine Seite gemein, während die anderen Seiten und Winkel die Seiten und Winkel des Urdreikants zu 180° ergänzen.

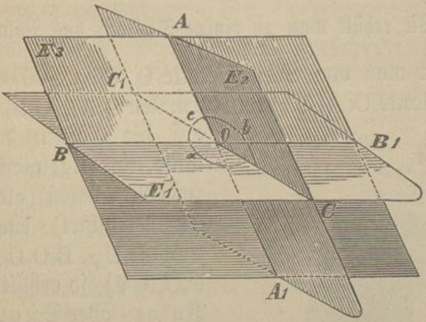

Fig. 195.

Je zwei Nebendreikante liefern als Summe einen Flächenwinkel. Vgl. Fr. 210 I. und II.

II. Die drei Hinterdreikante $O(AB_1C_1)$, $O(A_1BC_1)$ und $O(A_1B_1C)$ haben mit dem Urdreikant nur je eine Kante gemein.

Die Seiten und Winkel an dieſer Kante ſind als Scheitelwinkel gleich (Fr. 42 II.); die anderen Winkel und Seiten ergänzen ſich paarweiſe zu 180°.

III. Das Scheiteldreikant $O(A_1B_1C_1)$ hat keine Kante mit dem Urdreikant gemein; ſeine Seiten und Winkel ſind als Scheitelwinkel denen des Urdreikants gleich.

Dieſe beiden Dreikante können aber trotzdem (weil ihre Seiten und Winkel in umgekehrter Folge*) an einander ſtoßen) im allgemeinen nicht zum Decken gebracht werden, ſondern nur wenn in jedem zwei Winkel gleich ſind.

Man nennt ſolche Dreikante ſymmetriſch-gleich, da ſie ſich mit je einer Seite [durch Drehung von $O(A_1B_1C_1)$ um $OA_1$ z. B. mit $\angle COB$ und $\angle C_1OB_1$] ſo auf einander legen laſſen, daß die beiden dritten Kanten [$OA$ und $OA_1$] ſymmetriſch zu beiden Seiten der durch die anderen beiden Kanten gelegten Ebene [$COB$] liegen.

### 212. Wie erhält man zu einem Dreikant das Polardreikant?

I. Fällt man von einem Punkte $O_1$ (Fig. 196) innerhalb eines Dreikants $O(ABC)$ drei Normalen $O_1A_1$, $O_1B_1$ und $O_1C_1$ auf die Ebenen des Dreikants, und legt man durch je zwei Normalen (als Strahlen betrachtet) eine Ebene [$A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$, oder $C_1O_1A_1V$], ſo erhält man das Polar- oder Supplementardreikant $O_1(A_1B_1C_1)$;

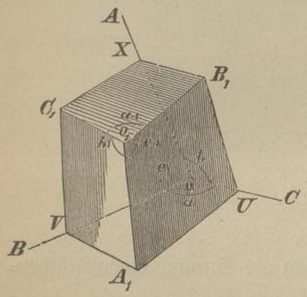

Fig. 196.

II. Die Seiten und Winkel des Polardreikants ergänzen die Winkel und Seiten des Urdreikants zu je 180°.

Es ſtehen nämlich auch die Ebenen $A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$ und $C_1O_1A_1V$ auf den Kanten $OC$, $OA$ und $OB$ normal (Fr. 204 I., VIII.); daher iſt nach Fr. 202 V. und 181 X.:

$$\angle A = \angle B_1XC_1,\ \angle B = \angle C_1VA_1,\ \angle C = \angle A_1UB_1$$
$$\angle A_1 = \angle UA_1V,\ \angle B_1 = \angle XB_1U,\ \angle C_1 = \angle VC_1X.$$

---

*) Ähnlich wie die Finger an der rechten und an der linken Hand; der rechte Handſchuh paßt ja auch nicht an die linke Hand.

In jedem der ſechs Vierecke $A_1O_1B_1U$, $B_1O_1C_1X$, $C_1O_1A_1V$, $A_1VOU$, $B_1UOX$ und $C_1XOV$ ſind aber zwei Winkel rechte (Fr. 181 X.), und deshalb iſt nach Fr. 72 III.:

$$\begin{array}{ll} \angle A + \angle a_1 = 180^\circ & \angle A_1 + \angle a = 180^\circ \\ \angle B + \angle b_1 = 180^\circ & \angle B_1 + \angle b = 180^\circ \\ \angle C + \angle c_1 = 180^\circ & \angle C_1 + \angle c = 180^\circ. \end{array}$$

III. Das Polardreikant vom Polardreikante gleicht in ſeinen Seiten und Winkeln dem Urdreikante (II. oder I.).

**213. Welche Beziehungen beſtehen zwiſchen den Seiten und Winkeln des Dreikants?**

I. Ein (hohles) Dreikant heißt *gleichſchenkelig*, oder *gleichſeitig*, wenn in ihm zwei, oder alle drei Seiten gleichgroß ſind.

II. Fällt man in einem gleichſchenkeligen Dreikante aus einem Punkte P der den beiden gleichen Seiten a und b gemeinſchaftlichen Scheitelkante OC eine Normale PN auf die *Grundſeite* oder *Baſis* c, ſo kann der Fußpunkt N der Normalen nur in der Seite c ſelbſt, oder in ihrem Scheitelwinkel liegen, und zwar halbiert ON dieſe Seite c (Fr. 193 IX.). Vgl. Fig. 198.

III. Daher ſind die Winkel A und B an der Baſis c des gleichſchenkeligen Dreikants gleichgroß (II. u. Fr. 194 VII.).

IV. Alle gleichſchenkeligen Dreikante über derſelben Grundſeite c haben ihre Scheitelkanten OC in der (durch die Normale PN in II. gelegten) Ebene, welche die Grundſeite ſenkrecht halbiert.

V. In einem Dreikant mit zwei gleichen Winkeln A und B muß die Projektion ON der Kante OC auf die Gegenſeite c mit der Halbierungslinie dieſes Winkels c (oder ſeines Scheitelwinkels) zuſammenfallen (Fr. 194 VIII.).

VI. Aus der Gleichheit zweier Winkel A und B ergiebt ſich daher die Gleichheit der Gegenſeiten a und b (Fr. 193 VII.).

VII. Das gleichſeitige Dreikant iſt auch gleichwinkelig (III.), und jedes gleichwinkelige iſt gleichſeitig (VI.).

VIII. In einem hohlen Dreikante ſteht der größeren Seite ($a > b$) auch ein größerer Winkel ($A > B$) gegenüber.

Der Beweis iſt aus Fr. 193 und 194 ohne beſondere Schwierigkeiten zu führen, dabei aber zu unterſcheiden, ob die Projektion ON der Kante OC auf die Seite c innerhalb c ſelbſt, oder in deſſen Scheitelwinkel, oder Nebenwinkel fällt.

IX. In jedem hohlen Dreikante liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber (III. und VIII.).

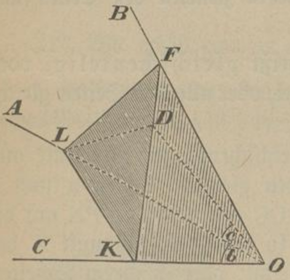

Fig. 197.

X. Die Differenz $a - b$ zweier Seiten a und b eines hohlen Dreikants iſt kleiner als die dritte Seite c.

Macht man in der Ebene BOC (Fig. 197) den $\angle COD = \angle COA = \angle b$ (alſo $\angle BOD = a - b$) und $\overline{OD} = \overline{OL}$; zieht man durch D eine Gerade FDK, welche OB in F und OC in K ſchneidet, und verbindet man K, D und F geradlinig mit L, ſo iſt:

$$\begin{array}{c}
\angle KOD = \angle KOL = b \text{ (Konſtr.)}\\
OD = OL \text{ (Konſtr.)}\\
OK = OK \text{ (Fr. 20 I.)}\\
\hline
\triangle KOD \cong \triangle KOL \text{ (Fr. 80 II.)}\\
\hline
KD = KL \text{ (Fr. 67 II.)}\\
\hline
\angle LDF > 90^\circ \text{ (Fr. 74 III.)}\\
\hline
FL > FD \text{ (Fr. 74 VIII.)}\\
OF = OF \text{ (Fr. 20 I.)}\\
OL = OD \text{ (Konſtr.)}\\
\hline
\angle FOL > \angle FOD \text{ (Fr. 78 III.)}\\
\angle c > \angle a - \angle b.
\end{array}$$

XI. In jedem hohlen Dreikant iſt die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Nach X. iſt $\angle c > \angle a - \angle b$, daher auch (wegen Fr. 20 IX.) $\angle c + \angle b > \{ \angle a - \angle b \} + \angle b$, d. h. $\angle c + \angle b > \angle a$.

XII. Auch im Nebendreikant (Fr. 211 I.), in welchem $a_2 = a$, $b_2 = 180^\circ - b$ und $c_2 = 180^\circ - c$ iſt, wäre nach XI. $b_2 + c_2 > a_2$ oder $(180^\circ - b) + (180^\circ - c) > a$, woraus ſich nach Fr. 20 IX. leicht

$$360^\circ > a + b + c > 0$$

findet, d. h. in jedem hohlen Dreikant liegt die Summe der drei Seiten zwiſchen 0 und 360°.

XIII. Im Polardreikant (Fr. 212) iſt ebenfalls $360^\circ > a_1 + b_1 + c_1 > 0$; daher im Urdreikant $360^\circ > (180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) > 0$, oder $540^\circ - A - B - C > 0$ und $360^\circ > 540^\circ - A - B - C$, woraus durch Addition von $A + B + C$ nach Fr. 20 IX. ſich

$$540^\circ > A + B + C > 180^\circ$$

ergiebt, d. h. in jedem hohlen Dreikant liegt die Winkelſumme zwiſchen 180° und 540°.

### 214. Welche Stücke beſtimmen ein Dreikant?

I. Zwei Dreikante laſſen ſich zum Decken bringen (ſind *kongruent*), wenn ihre drei Winkel und ihre drei Seiten der Reihe nach einander gleich ſind und dabei auch in derſelben Reihenfolge an einander ſtoßen.

Folgen die gleichen Seiten und Winkel in entgegengeſetzter Ordnung auf einander (wie z. B. bei O(APN) und O(BPN) in Fr. 213 II. und V.), ſo ſind die Dreikante *ſymmetriſch-gleich* und laſſen ſich zu Scheiteldreikanten machen (vgl. Fr. 211 III.).

II. In kongruenten (und in ſymmetriſch-gleichen) Dreikanten ſind die Gegenwinkel gleicher Seiten und die Gegenſeiten gleicher Winkel gleich.

III. Ein Dreikant iſt beſtimmt, wenn man von ihm ſo viel Stücke (und deren Reihenfolge) kennt, daß ſich aus dieſen Stücken bloß *ein* Dreikant zeichnen läßt, oder daß alle Dreikante kongruent ſind, welche dieſe Stücke in der nämlichen Reihenfolge beſitzen.

IV. Davon, daß ein, oder zwei Stücke eines Dreikants zur Beſtimmung desſelben nicht ausreichen, kann man ſich (ähnlich wie in Fr. 79 II. und III.) leicht überzeugen.

V. Zwei Dreikante $O_1(A_1B_1C_1)$ und $O_2(A_2B_2C_2)$ ſind kongruent, wenn ihre drei Seiten der Reihe nach gleich ſind und in derſelben Ordnung auf einander folgen.

Trägt man auf den Kanten $O_1C_1$ und $O_2C_2$ (Fig. 198) zwei gleiche Stücke $O_1P_1$ und $O_2P_2$ auf, fällt von $P_1$ und $P_2$ zwei Normalen $P_1N_1$ und $P_2N_2$ auf die Ebenen $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$, dann die Senkrechten $P_1E_1$, $P_1D_1$ und $P_2E_2$, $P_2D_2$ auf $O_1A_1$ und $O_1B_1$, $O_2A_2$ und $O_2B_2$, ſo iſt nach Fr. 189 II. auch $N_1E_1 \perp O_1A_1$, $N_2E_2 \perp O_2A_2$, $N_1D_1 \perp O_1B_1$, $N_2D_2 \perp O_2B_2$. Nun iſt $\triangle P_1O_1E_1 \cong \triangle P_2O_2E_2$ und $\triangle P_1O_1D_1 \cong \triangle P_2O_2D_2$ (Fr. 81 II.), daher $O_1E_1 = O_2E_2$ und $O_1D_1 = O_2D_2$. Legt man alſo die beiden Dreikante $O_1(A_1B_1C_1)$ und $O_2(A_2B_2C_2)$ mit den gleichen Seiten $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$ auf einander, ſo fällt $E_1$ auf $E_2$ und $D_1$ auf $D_2$ (Fr. 22 V.), deshalb fällt $E_1N_1$ auf $E_2N_2$, $D_1N_1$ auf $D_2N_2$ (Fr. 57 III.) und $N_1$ auf $N_2$ (Fr. 26). Weil ſomit $O_1N_1 = O_2N_2$, auch $O_1P_1 = O_2P_2$, ſowie $\angle O_1N_1P_1 = 90^\circ = \angle O_2N_2P_2$ (Fr. 181 X.) iſt, ſo iſt $\triangle O_1N_1P_1 \cong \triangle O_2N_2P_2$ (Fr. 81 I.) und $N_1P_1 = N_2P_2$ (Fr. 67 II.). Demnach fällt auch $P_1$ auf $P_2$ (Fr. 188 II., 22 V.) und das dritte Kantenpaar $O_1P_1$ und $O_2P_2$ der beiden Dreikante auf einander (Fr. 21 II.); es decken ſich alſo auch die drei Seitenebenen (Fr. 182 III.) und die Dreikante ſelbſt.

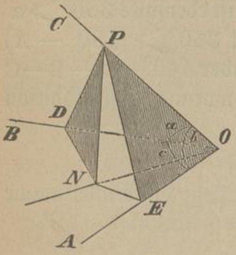

Fig. 198.

VI. Drei Seiten und deren Reihenfolge beſtimmen wegen V. das Dreikant. — Vgl. aber Fr. 213 XII.

VII. Zwei Dreikante ſind kongruent, wenn ſie in ihren drei Winkeln und deren Aufeinanderfolge übereinſtimmen.

Die Polardreikante der beiden Dreikante ſtimmen nach Fr. 212 II. in ihren Seiten und deren Reihenfolge überein, ſind alſo kongruent (V.), haben daher auch gleiche Winkel in gleicher Folge (II.), und deshalb haben die Urdreikante auch gleiche Seiten in gleicher Folge (Fr. 212 II.) und ſind kongruent (V.).

VIII. *Drei Winkel* und deren Reihenfolge beſtimmen nach VII. das Dreikant. — Vgl. aber Fr. 213 XIII.

IX. *Zwei Dreikante ſind kongruent*, wenn ſie in *zwei Seiten* b und c und dem *eingeſchloſſenen Winkel* A und in deren Reihenfolge übereinſtimmen.

Legt man die Kante $O_1A_1$ auf $O_2A_2$, ſo laſſen ſich die Ebenen $A_1O_1B_1$ und $A_2O_2B_2$, $A_1O_1C_1$ und $A_2O_2C_2$ zum Decken bringen (Vor. und Fr. 203 I.); da nun $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ und $\angle A_1O_1C_1 = \angle A_2O_2C_2$ (Vor.), ſo decken ſich dieſe paarweiſe in derſelben Ebene liegenden Winkel (Fr. 31), d. h. $O_1B_1$ fällt auf $O_2B_2$, $O_1C_1$ auf $O_2C_2$ und daher auch die Ebene $B_1O_1C_1$ auf die Ebene $B_2O_2C_2$ (Fr. 182 III.), und es decken ſich wieder die beiden Dreikante.

X. *Zwei Seiten* b und c und der *eingeſchloſſene Winkel* A beſtimmen bei gegebener Reihenfolge das Dreikant (IX.).

XI. Zwei Dreikante ſind kongruent, wenn ſie in *zwei Winkeln* B und C und der von dieſen *eingeſchloſſenen Seite* a und in deren Reihenfolge übereinſtimmen. Der Beweis läßt ſich mit Hilfe der nach IX. kongruenten Polardreikante ähnlich führen wie in VII.

XII. *Zwei Winkel* B und C und die *eingeſchloſſene Seite* a beſtimmen bei gegebener Reihenfolge das Dreikant (XI.).

XIII. *Aus zwei Seiten* b und c und *einem Gegenwinkel* B oder aus *zwei Winkeln* B und C und einer Gegenſeite b nebſt deren Reihenfolge laſſen ſich im allgemeinen *zwei Dreikante* konſtruieren.

Die Unterſuchung darüber, wenn zwei in dieſen drei Stücken übereinſtimmende Dreikante kongruent ſind, läßt ſich mit Fr. 193 und 194 unter Berückſichtigung von Fr. 213 I. bis III. durchführen, iſt aber etwas umſtändlicher.

## Zehntes Kapitel.

# Das Prisma.

### 215. Wie entſteht eine Prismenfläche?

I. Bewegt ſich an dem als *Leitlinie* (Directrix) dienenden Umfang ABCDK (Fig. 199) eines feſtliegenden ebenen n-ſeitigen Vielecks F (der *Grundfläche*) eine unbegrenzte, die Grundfläche ſchneidende Gerade G (die *Erzeugende*) ſo hin, daß ſie ſtets dieſelbe Richtung behält, ſo erzeugt ſie eine *Prismenfläche*.

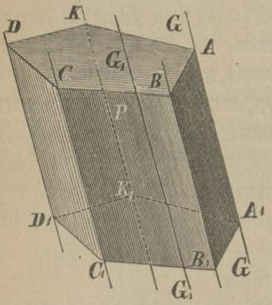

Fig. 199.

Dieſe beſteht aus Teilen von n Ebenen, die ſich in n parallelen *Kanten* (Fr. 186 XIV.) ſchneiden.

Der von der Prismenfläche umſchloſſene *prismatiſche Raum* iſt nur halbbegrenzt.

II. Die Prismenfläche und der prismatiſche Raum können auch durch die Bewegung der Grundfläche F = ABCDK entlang einer die Grundfläche ſchneidenden Geraden G entſtehen. Ändert dabei F weder ſeine Größe, noch ſeine Geſtalt, bleibt ferner jede Seite der Grundfläche F (und wegen Fr. 205 VI. auch die ganze Grundfläche) immer parallel zu ſich ſelbſt, ſo beſchreibt jede Seite eine der n Ebenen, AB z. B. die durch AB und G beſtimmte Ebene (Fr. 182 III.), mit welcher ja alle Ebenen zuſammenfallen (Fr. 182 II.), welche ſich durch AB und eine ihrer ſpäteren Lagen, z. B. $A_1B_1$, nach Fr. 186 VI. legen laſſen. Jeder Eckpunkt von F beſchreibt wegen Fr. 108 V. und 57 I. bei jener Parallelbewegung der Grundfläche eine zu G parallele Gerade, alſo nach I. eine Kante.

III. Bei einer endlichen ſolchen Parallelbewegung der Grundfläche F beſchreibt alſo jede Grundflächenſeite nach II. ein Parallelogramm.

### 216. Welche Eigenſchaften hat die Prismenfläche?

I. Jede durch einen Punkt P der Prismenfläche gelegte Parallele $G_1$ zur Erzeugenden G liegt ganz in der Prismenfläche (Fr. 198 III.).

II. Jede zur Grundfläche F parallele Ebene ſchneidet alle Ebenen der Prismenfläche in Strecken, welche je einer Seite der Grundfläche parallel (Fr. 205 II.) und gleich (Fr. 108 III.) ſind. Wegen Fr. 189 IX. ſind demnach der Schnitt $A_1B_1C_1D_1K_1$ und die Grundfläche F auch gleichwinkelig und daher endlich kongruent (Fr. 66 II.).

III. Gleiches gilt von jedem Paar paralleler Ebenen, welche eine Kante (und dann wegen Fr. 189 VI. auch alle Kanten) ſchneiden.

### 217. Was iſt ein Prisma und ein Parallelepiped?

I. Der zwiſchen zwei parallelen Schnittebenen (Fr. 216 III.) gelegene Teil $ABCDKK_1D_1C_1B_1A_1$ eines prismatiſchen Raumes mit n-eckiger Grundfläche heißt ein n-ſeitiges Prisma.

Dieſes Prisma wird von zwei kongruenten Grundflächen ABCDK und $A_1B_1C_1D_1K_1$ (Fr. 216 II.) und von n in einer Seite übereinſtimmenden Parallelogrammen (Fr. 215 III.) als Seitenflächen begrenzt; es beſitzt 2n Grundkanten AB, BC ꝛc., $A_1B_1$, $B_1C_1$ ꝛc., welche paarweiſe parallel und gleich ſind, n parallele (und gleichlange) Seitenkanten $AA_1$, $BB_1$ ꝛc. und 2n dreiſeitige Ecken A, B ꝛc., $A_1$, $B_1$ ꝛc. Die n Seitenflächen zuſammen bilden den Prismenmantel. Die Entfernung H der beiden Grundflächen (Fr. 206 III.) heißt die Höhe des Prismas.

II. Das Prisma iſt alſo der bei einer endlichen Bewegung der in Fr. 215 II. beſchriebenen Art von der Grundfläche F durchlaufene Raum.

III. Beim geraden Prisma ſtehen die Seitenkanten auf den Grundflächen normal (vergl. Fig. 201) und ſind der Höhe gleich (Fr. 206 III.). Beim ſchiefen Prisma ſind die Seitenkanten gegen die Grundflächen geneigt (Fr. 192) und größer als die Höhe H (Fr. 190 IV.).

IV. Das Parallelepiped ABCDNLKF (Fig. 200) iſt ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche; es wird von drei Paar parallelen und kongruenten Parallelogrammen begrenzt.

Da jedes der drei Paare als Grundflächen gelten kann, ſo ſind je vier der zwölf Kanten parallel und gleich.

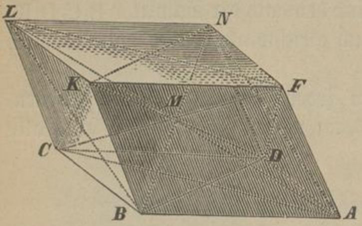

Fig. 200.

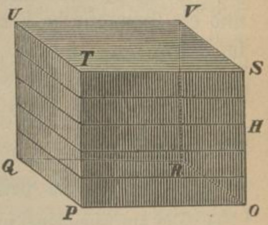

Fig. 201.

V. Im Parallelepiped laſſen ſich drei Paar Diagonalebenen AFLC und BKND, FKCD und NLBA, KLDA und FNCB durch je zwei gegenüberliegende Kanten (I., Fr. 182 IV.), auch vier Diagonalen AL, CF, BN und DK durch je zwei gegenüberliegende Ecken ziehen; erſtere ſchneiden ſich in einem Punkte M, denn letztere ſchneiden und halbieren ſich in M (I. und Fr. 110 III.).

Auch die drei den Kanten parallelen Strecken, in denen ſich die drei Paare der Diagonalebenen ſchneiden, halbieren ſich gegenſeitig in M (Fr. 110 IV.).

VI. Beim dreimalrechtwinkeligen Parallelepiped OPQRVUTS (Fig. 201), einem geraden (Fr. 217 III.) mit rechteckiger Grundfläche, ſind alle ſechs Begrenzungsflächen Rechtecke, weil alle Kanten auf einander ſenkrecht ſtehen.

VII. Sind bei einem dreimalrechtwinkeligen Parallelepiped alle Kanten gleichgroß, ſo wird es von ſechs kongruenten Quadraten begrenzt und heißt ein Würfel (Cubus).

**218. Wie berechnet man die Oberfläche eines Prismas?**

I. Die Oberfläche des Prismas wird nach Fr. 178 I. und 177 VI. berechnet.

II. Beim geraden Prisma (Fr. 217 III.) haben alle Seitenflächen die nämliche Höhe H wie das Prisma ſelbſt; daher iſt die Oberfläche $O = 2F + UH$, wenn F eine Grundfläche und U deren Umfang bedeutet (Fr. 177 IV.).

**219. Wenn ſind zwei Prismen kongruent?**

I. Zwei gerade Prismen von kongruenter Grundfläche und von gleicher Höhe laſſen ſich zum Decken bringen, ſind kongruent.

Denn bringt man ein Paar ihrer Grundflächen zum Decken, ſo decken ſich auch die Kanten (Fr. 188 II., 22 V.).

II. Zwei ſchiefe Prismen ſind bei gleicher Höhe und kongruenten Grundflächen nur dann kongruent, wenn die Seitenkanten (und deren Projektionen) gleiche Neigung und Lage gegen die Grundfläche haben (vergl. Fr. 201 VI., 186 VII.).

III. Teilt man die Höhe H eines Prismas in n gleiche Teile (vergl. Fig. 201), und legt man durch die Teilpunkte Parallelebenen zur Grundfläche, ſo erhält man n kongruente Prismen (Fr. 216 II. und 219 I., oder II.).

**220. Wie verhalten ſich die Rauminhalte zweier Prismen?**

I. Zwei gerade Prismen $M_1$ und $M_2$ mit kongruenter Grundfläche verhalten ſich wie ihre Höhen.

Sind die beiden Höhen $H_1 = xm$ und $H_2 = ym$ kommenſurabel und man teilt ſie in x und y gleiche Teile von der Größe m, ſo läßt ſich $M_1$ durch Parallelebenen in x, $M_2$ in y kongruente Teile p (Fr. 219 III. und I.) zerlegen; daher iſt $M_1 : M_2 = xp : yp = x : y = xm : ym = H_1 : H_2$.

Sind $H_1$ und $H_2$ inkommenſurabel, ſo ſind auch $M_1$ und $M_2$ inkommenſurabel, ihr Verhältnis liegt aber (ähnlich wie in Fr. 173 III.) ſtets zwiſchen denſelben Grenzen, wie das Verhältnis der Höhen, weshalb nach Fr. 147 wieder:

$$M_1 : M_2 = H_1 : H_2.$$

II. Körper zwiſchen parallelen Ebenen haben gleiche Höhe und umgekehrt (Fr. 206 III.).

III. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede $P_1$ und $P_2$ von gleicher Höhe $H$ verhalten ſich wie ihre (kommenſurabeln, oder inkommenſurabeln) Grundflächen $F_1$ und $F_2$.

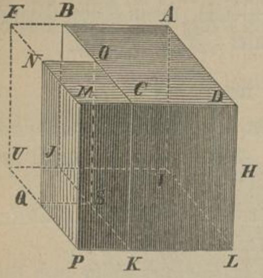

Fig. 202.

Legt man $P_1$ und $P_2$ (Fig. 202) mit der Kante CK ſo an einander, daß die an dieſer Kante gelegenen Flächenwinkel Nebenwinkel werden, und erweitert man die Grundflächen $F_1 = ABCD = VJKL$ und $F_2 = CMNO = KPQS$, ſowie die Seitenflächen ABJV und PMNQ, bis ſie ſich in FU ſchneiden, ſo iſt noch ein drittes dreimalrechtwinkeliges Parallelepiped $P_3 = JBFUPMCK$ von der nämlichen Höhe CK entſtanden. Da nun $P_3$ mit $P_1 = VABJKCDL$ die Grundfläche BJKC, mit $P_2 = KCMPQNOS$ aber die Grundfläche KCMP gemeinſchaftlich hat, ſo iſt nach I. $P_1 : P_3 = CD : CM$ und $P_3 : P_2 = BC : CO$; daher $P_1 : P_2 = (P_1 : P_3) . (P_3 : P_2) = CD . BC : CM . CO$ (Fr. 20 VIII.) und nach Fr. 177 IV. endlich $P_1 : P_2 = F_1 : F_2$.

IV. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede $P_1$ und $P_2$ verhalten ſich wie die Produkte aus ihren Grundflächen $F_1$ und $F_2$ und ihren Höhen $H_1$ und $H_2$.

Denkt man ſich noch ein drittes dreimalrechtwinkeliges Parallelepiped $P$ von der Grundfläche $F \cong F_1$ und der Höhe $H = H_2$, ſo iſt nach I. $P_1 : P = H_1 : H = H_1 : H_2$ und nach III. $P : P_2 = F : F_2 = F_1 : F_2$, daher nach Fr. 20 VIII. $P_1 : P_2 = (P_1 : P)(P : P_2) = F_1H_1 : F_2H_2$.

V. Zwei dreimalrechtwinkelige Parallelepipede verhalten ſich wie die Produkte aus ihren in einer Ecke zuſammenſtoßenden drei Seiten (IV. und Fr. 177 IV.).

VI. Jedes ſchiefe Prisma $ABCDVUYX$ (Fig. 203) läßt ſich in ein gerades $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ von demſelben Inhalte und derſelben Seitenkante $AX$ verwandeln, indem man durch die Endpunkte $A$ und $X$ einer Kante $AX$ zwei Ebenen $AB_1C_1D_1$ und $XY_1U_1V_1$ legt, welche auf dieſer Kante (und daher auch auf allen anderen Kanten, Fr. 189 VII.) normal ſtehen. Denn die Körper $ABCDD_1C_1B_1A$ und $XYUVV_1U_1Y_1X$ ſind dann kongruent, da ſie ſich wegen der Übereinſtimmung in allen ihren Stücken zum Decken bringen laſſen. Addiert man nun zu dieſen beiden Körpern den Körper $AB_1C_1D_1VUYX$, ſo erhält man die Prismen

$$ABCDVUYX \quad \text{und} \quad AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X,$$

welche nach Fr. 20 VIII. inhaltsgleich ſind.

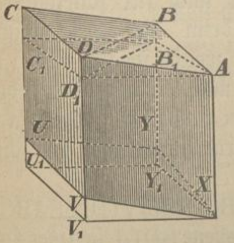

Fig. 203.

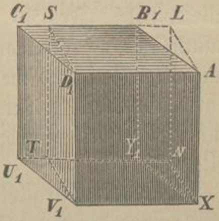

Fig. 204.

VII. Wegen Fr. 166 III. iſt in VI. $ADVX = AD_1V_1X$; faßt man dieſe Parallelogramme als Grundflächen auf, ſo iſt in VI. das Parallelepiped $ABCDVUYX$ in ein inhaltgleiches $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ von gleicher Höhe (II.) und inhaltgleicher, rechteckiger Grundfläche verwandelt worden, das mit jenem die Kante $AX$ gemein hat, die aber jetzt auf den Seitenflächen $AB_1C_1D_1$ und $XY_1U_1V_1$ normal ſteht.

VIII. Wiederholt man das in VI. angegebene Verfahren bei dem Parallelepiped $AB_1C_1D_1V_1U_1Y_1X$ (Fig. 204) in betreff der Kante $AD_1$, ſo laufen die auf $AD_1$ normalen Ebenen $ALNX$ und $D_1STV_1$ durch die Kanten $AX$ und $D_1V_1$ (Fr. 181 X.).

Zwiſchen dieſen Ebenen und den Parallelebenen $AB_1Y_1X$ und $D_1C_1U_1V_1$ liegen dann zwei (nach Fr. 219 I.) kongruente dreiſeitige Prismen $AB_1LNY_1X$ und $D_1C_1STU_1V_1$; addiert man zu dieſen den Körper $AB_1SD_1V_1TY_1X$, ſo erhält man die (nach Fr. 20 VIII.) inhaltgleichen Parallelepipede $AD_1SLNTV_1X$ und $D_1AB_1C_1U_1Y_1XV_1$. Da nun in erſterem $ALSD_1 \perp AX$ und $ALNX \perp AD_1$ gemacht wurde, ſo iſt $\angle XAL = 90°$ und $\angle D_1AL = 90°$ (Fr. 181 X.), alſo auch:

$$AL \perp AD_1V_1X \text{ (Fr. 181 XI.).}$$

Demnach läßt ſich jedes ſchiefe Parallelepiped $ABCDVUYX$ in ein dreimalrechtwinkeliges $ALSD_1V_1TNX$ von gleichem Inhalt, gleicher Höhe $AL$ (VII. und Fr. 206 III.) und gleicher Grundfläche ($AD_1V_1X = ADVX$) verwandeln, welches mit dem erſtern in einer Seite $AX$ übereinſtimmt.

IX. Daher gilt der Satz IV. auch für ſchiefwinkelige Parallelepipede (Fr. 20 IV.); denn die zwei dreimalrechtwinkeligen Parallelepipede, in welche ſie ſich nach VIII. verwandeln laſſen, und welche ſich nach IV. wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen verhalten, haben ja die nämliche Höhe und gleichgroße Grundfläche wie die ſchiefwinkeligen.

X. Jedes gerade Parallelepiped $ABCDLKJV$ ($DL \perp ABCD$; Fig. 202) wird durch die Diagonalebene $BDLJ$ in zwei kongruente Hälften zerlegt (Fr. 108 I. und 219 I.).

XI. Jedes ſchiefe Parallelepiped $ABCDVUYX$ (Fig. 203) wird durch die Diagonalebene $BDVY$ in zwei inhaltgleiche Hälften zerlegt.

Bringt man die Körper

$$ABCDD_1C_1B_1A \quad \text{und} \quad XYUVV_1U_1Y_1X$$

zum Decken (VI.), ſo decken ſich auch die Trapeze $BDD_1B_1$ und $YVV_1Y_1$ und die Körper $ABDD_1B_1A$ und $XYVV_1Y_1X$, ſowie $BDCC_1D_1B_1$ und $YVUU_1V_1Y_1$; nach X. und Fr. 20 VIII. iſt daher:

$$ABDVYX = AB_1D_1V_1Y_1X = B_1C_1D_1V_1U_1Y_1$$
$$= BCDVUY.$$

Ganz dasſelbe gilt für die Diagonalebene $ACUX$.

XII. Jedes dreiſeitige Prisma läßt ſich als die Hälfte eines Parallelepipeds anſehen (X., oder XI.).

XIII. Daher verhalten ſich dreiſeitige Prismen wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen (XII. und IX.).

XIV. Jedes Prisma läßt ſich in dreiſeitige zerlegen; daher gilt (wegen XIII.) der Satz IV. für alle Prismen, d. h.:

Zwei Prismen verhalten ſich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe.

XV. Zwei Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ſind inhaltgleich (XIV.).

**221. Wie berechnet man den Inhalt eines Prismas?**

I. Als Maß für den Rauminhalt der Körper wählen wir das Kubikmeter ($1\boxplus^{m} = 1^{cbm}$), d. h. einen Würfel (Fr. 217 VII.), deſſen Seite der Längeneinheit (1 Meter) gleicht. Vergl. Fr. 146 III. und Fr. 176.

II. Ein Kubikcentimeter ꝛc. iſt ein Würfel von 1 Centimeter ꝛc. Seite.

III. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Kubikmeter ein Körper enthält, heißt deſſen Inhaltszahl oder Raumzahl.

Damit die nachfolgenden Formeln den Rauminhalt in Kubikmetern liefern, ſind die in ihnen vorkommenden Maße in Metern einzuſetzen.

IV. Die Inhaltszahl eines Würfels W iſt die dritte Potenz der Längenzahl a ſeiner Seite a. Denn nach Fr. 220 IV. findet man $W : 1\boxplus^{m} = (a^2\square^{m} . a^{m}) : (1\square^{m} . 1^{m}) = a^3$, alſo

$$W = a^3\boxplus^{m}.$$

V. Für die Würfel $W_1$ und $W_2$ der Summe $(a + b)$ oder der Differenz $(a - b)$ zweier Strecken hat man nach IV.*):

$$W_1 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$W_2 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

---

*) Vergl. Katechismus der Raumberechnung Fr. 33. — Eine hübſche Deutung dieſer zwei Formeln geſtattet VII. in Verbindung mit Fr. 177 I. Hiernach läßt ſich nämlich $W_1$ in zwei Würfel und ſechs Parallelepipede zerlegen. — Vergl. die Anmerkung *) zu Fr. 178.

VI. Aus IV. folgt leicht, weshalb

$$1\ ⊞^{\mathrm{m}} = 10^3 \text{ d. h. } 1000\ ⊞\text{Decimeter}$$
$$= 100^3 \text{ d. h. } 1\,000\,000\ ⊞\text{Centimeter 2c.}$$

VII. Die Raumzahl eines dreimalrechtwinkeligen Parallelepipeds P iſt das Produkt aus den Längenzahlen ſeiner drei Seiten a, b, c (Fr. 220 V.):

$$P = a\,b\,c\ ⊞^{\mathrm{m}}.$$

Jede Diagonale dieſes Körpers hat nach Fr. 170 I. (wegen Fr. 181 X.) die Länge $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

VIII. Die Raumzahl eines Prismas M iſt das Produkt aus der Flächenzahl $\mathfrak{F}$ ſeiner Grundfläche und der Längenzahl $\mathfrak{H}$ ſeiner Höhe:

$$M = \mathfrak{F}\mathfrak{H}\ ⊞^{\mathrm{m}}.$$

Beiſpiele enthält der Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. 1888. Fr. 139 ff.

---

## Elftes Kapitel.

# Der Cylinder.

**222. Was iſt eine Cylinderfläche und ein Cylinder?**

I. Bewegt ſich an einer feſtliegenden als Leitlinie L, Fig. 205, dienenden Kreislinie eine unbegrenzte, die Ebene der Leitlinie ſchneidende Gerade (die Erzeugende) G, von unveränderlicher Richtung (Fr. 186 XI.) hin, ſo beſchreibt ſie eine Kreis-Cylinderfläche, welche (da andere Cylinderflächen hier nicht betrachtet werden ſollen) kurzweg Cylinderfläche genannt werde.

II. Die durch den Mittelpunkt C der Leitlinie L gelegte Parallele A zur Erzeugenden G heißt die Axe, die Ebene F der Leitlinie die Grundfläche der Cylinderfläche.

III. Steht die Erzeugende G und demnach (wegen Fr. 189 VII.) auch die Axe A normal, oder ſchief auf der Ebene der Leitlinie, ſo iſt die Cylinderfläche gerade, oder ſchief.

IV. Der von der Cylinderfläche umſchloſſene halbbegrenzte Raum heißt ein *cylindriſcher Raum*.

V. Eine durch einen Punkt $C_1$ der Axe parallel zur Grundfläche F gelegte Ebene muß die Erzeugende in allen ihren Lagen ſchneiden (Fr. 206 IV.), die Cylinderfläche alſo in einer geſchloſſenen Linie.

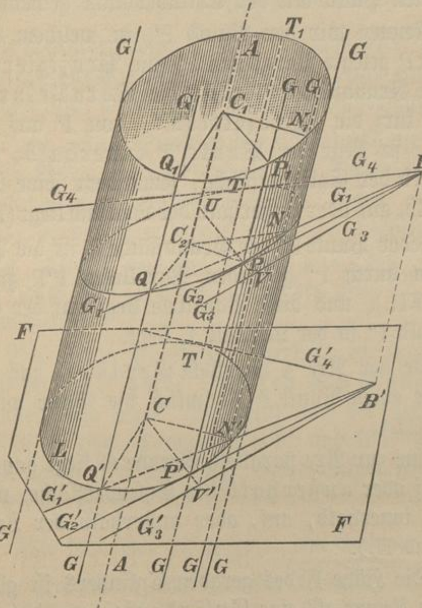

Fig. 205.

VI. Der von der Grundfläche F und einer dazu parallelen Ebene und dem zwiſchen beiden liegenden Stücke der geraden, oder ſchiefen Cylinderfläche (dem *Mantel*) begrenzte Körper heißt ein (gerader, oder ſchiefer) *Cylinder* (Walze). — Vergl. Fr. 224 VI.

Die Entfernung dieſer beiden parallelen Ebenen (der beiden *Grundflächen*) heißt die *Höhe* H des Cylinders.

**223. Welche Lagen kann ein Punkt und eine Gerade gegen eine Cylinderfläche haben?**

I. Jede durch einen Punkt P, Fig. 205, der Cylinderfläche gelegte Parallele G zur Axe A liegt ganz in der Cylinderfläche (Fr. 222 I. und 186 VII.).

II. Jede andere Parallele (z. B. BB′, oder VV′) zur Axe A hat keinen Punkt mit der Cylinderfläche gemein (I.).

III. Nennen wir den Punkt P′, in welchem eine durch den Punkt P gelegte Parallele PP′ (die Projizierende) zur Axe A die Grundfläche F trifft, die Parallelprojektion (oder hier kurz die „Projektion“) von P auf F (vergl. Fr. 190), ſo liegt der Punkt P innerhalb, auf oder außerhalb der Cylinderfläche, jenachdem ſeine Projektion P′ innerhalb, auf oder außerhalb der Leitlinie liegt (I. und II.).

IV. Jeder Punkt P′ der Grundfläche F iſt die Projektion der ganzen durch P′ gehenden Parallelen P′P zur Axe A (Fr. 186 VII.), und dieſe Parallele liegt auf der Cylinderfläche, ſobald P′ in der Leitlinie L liegt.

V. Jede der Axe A parallele Gerade G hat als Projektion nur einen Punkt P′, nämlich die Spur von G in F (Fr. 188 III.).

VI. Eine zur Axe parallele Gerade G liegt ganz innerhalb, auf oder außerhalb der Cylinderfläche, wenn ihre Projektion innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie L liegt (I. und II.).

VII. Die Höhe H des geraden Cylinders iſt gleich, die des ſchiefen kleiner als eine Cylinderſeite a, d. h. eine auf deſſen Mantel von einer Grundfläche zur andern gezogene Strecke $P'P_1$ (Fr. 190 IV.).

VIII. Die Projektion G′ jeder nicht zur Axe A parallelen Geraden G iſt wieder eine Gerade, was ſich ganz ähnlich wie in Fr. 191 beweiſen läßt.

IX. Die Cylinderfläche wird wegen III. bis V. von der Geraden $G_1$, $G_2$ oder $G_3$ in zwei Punkten N und Q geſchnitten, in einem Punkte P berührt, oder in keinem Punkte getroffen, jenachdem die Projektion die Leitlinie ſchneidet wie $G_1'$, oder berührt wie $G_2'$, oder wie $G_3'$ gar nicht trifft (Fr. 83).

In der durch den Berührungspunkt, oder durch einen Schnittpunkt zwiſchen Projektion und Leitlinie gelegten Projizierenden kann nämlich wegen Fr. 21 I. und 223 III. nur ein Punkt der Geraden G liegen.

X. Die Cylinderfläche iſt alſo krumm (Fr. 16 I. und 12 I.), da ſich durch jeden ihrer Punkte P nur eine Gerade G (I.) ziehen läßt, welche ganz in der Cylinderfläche liegt.

XI. Durch jeden Punkt P der Cylinderfläche laſſen ſich unzählige Berührungslinien oder Tangenten an die Cylinderfläche legen (IX.); dieſelben liegen aber wegen Fr. 184 I. in der (zur Axe A parallelen) Ebene PBB'P', welche ſich durch P und die Tangente $G_2'$ der Leitlinie im Punkte P' legen läßt (Fr. 182 II., oder 200 II., da A und $G_2'$ ſich kreuzen).

XII. Von jedem Punkte B außerhalb der Cylinderfläche laſſen ſich nach XI. zwei Scharen von Tangenten an die Cylinderfläche legen, weil ſich von der Projektion B' des Punktes B zwei Tangenten B'P' und B'T' an die Leitlinie legen laſſen (Fr. 103 II.). Jede Schar liegt in einer Ebene BPP'B', bezw. $BT_1T'B'$.

**224. Wie kann eine Ebene gegen eine Cylinderfläche liegen?**

I. Die Projektion einer zur Axe A parallelen, oder durch die Axe ſelbſt gelegten Ebene E iſt die Gerade G' (Spur), in welcher E die Grundfläche F ſchneidet; denn alle Projizierende von Punkten in E liegen ganz in dieſer Ebene E, die Projektionen der Punkte alſo in G' (Fr. 223 III. und 198 III.; oder Fr. 186 XV.).

II. Die zur Axe A parallele, oder durch A gehende Ebene E ſchneidet die Cylinderfläche in zwei Geraden $N_1N'$ und $Q_1Q'$ (Fig. 205), berührt ſie in einer Geraden $P_1P'$, oder hat gar nichts mit ihr gemein, jenachdem die Projektion G, der Ebene E die Leitlinie ſchneidet, berührt, oder nicht trifft (vergl. Fr. 223 IX.). Die Schnitt- und Berührungs-Geraden zwiſchen einer ſolchen Ebene E und der Cylinderfläche ſind der Axe A parallel (Fr. 223 X.).

III. Durch einen Punkt P der Cylinderfläche läßt ſich nur eine, durch einen Punkt B außerhalb derſelben laſſen ſich zwei Berührungsebenen an die Cylinderfläche legen (II.; vergl. Fr. 223 XI. und XII.).

IV. Nach Fr. 222 V. ſchneidet eine durch einen Punkt $C_1$, Fig. 205, der Axe A parallel zur Grundfläche F gelegte Ebene E die Cylinderfläche in einer geſchloſſenen Linie. Legt man durch einen beliebigen Punkt $P_1$ der Schnittlinie eine Parallele $P_1P'$ zur Axe A, ſo liegt $P_1P'$ ganz in der Cylinderfläche (Fr. 223 I.) und trifft die Leitlinie in einem Punkte P'. Legt man nun noch durch die Parallele $P_1P'$ und die Axe A eine Ebene, ſo ſchneidet letztere E und F in zwei Parallelen $C_1P_1$ und CP' (Fr. 205 II.); deshalb iſt $C_1P_1 = CP'$ (Fr. 108 III.), d. h. jeder Punkt $P_1$ des Schnittes iſt von $C_1$ um den Halbmeſſer (CP') der Leitlinie entfernt.

Die Schnittlinie iſt alſo ein der Leitlinie kongruenter Kreis (Fr. 47 II.), deſſen Mittelpunkt in der Axe A liegt.

V. Daher ſind die beiden parallelen Grundflächen des Cylinders kongruent (Fr. 222 VI.).

VI. Auch der Cylinder (vergl. Fr. 217 II.) kann daher durch ſtetige Parallelbewegung ſeiner Grundfläche entſtehen; dabei muß aber der Mittelpunkt C der ihre Größe nicht ändernden Grundfläche die Axe A beſchreiben.

Ein gerader Cylinder entſteht auch durch Umdrehung eines Rechtecks um die eine feſtgehaltene Seite, wobei die letztere die Axe $C_1C$ liefert (Fr. 181 XIV., 106 III., 108 VII.).

VII. Eine Ebene E, welche weder der Grundfläche F, Fig. 205, noch der Axe A parallel iſt, ſchneidet die Cylinderfläche ebenfalls in einer geſchloſſenen Linie, deren Punkte P jedoch in ungleicher Entfernung von dem Punkte $C_2$ liegen, worin E die Axe A ſchneidet. Zieht man nämlich $PU \parallel P'C$, ſo iſt wieder $PU = P'C$ (IV.); mit P aber ändern ſich die Strecken $CU = P'P$ (Fr. 207 IV.) und $C_2U = CU - CC_2$ (Fr. 20 IX.), ebenſo der Winkel $PUC_2 = P'CA$ (Fr. 193), daher auch die Strecke $PC_2$ (Fr. 170 I., IV., oder V.).

VIII. Am einfachſten geſtaltet es ſich bezüglich des in VII. beſprochenen Schnittes beim geraden Cylinder, weil bei dieſem $\angle PUC_2 = 90^\circ$ iſt. Der hier auftretende Schnitt heißt eine Ellipſe (vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. Fr. 123; Katechismus der analytiſchen Geometrie, § 21).

IX. Beim ſchiefen Cylinder iſt der in VII. beſprochene Schnitt meiſt auch eine Ellipſe, bei einer beſtimmten Lage der ſchneidenden Ebene jedoch ein Kreis.

X. Bei der ſchiefen Cylinderfläche iſt ein Normalſchnitt zur Axe eine Ellipſe (IX.); daher läßt ſich jede ſchiefe Kreiscylinderfläche als eine gerade elliptiſche Cylinderfläche auffaſſen.

### 225. Wie groß iſt die Mantelfläche eines Cylinders?

I. Die Mantelfläche jedes Cylinders vom Halbmeſſer $P'C = R$, Fig. 205, läßt ſich auf einer Ebene abwickeln, da ja nach Fr. 224 II. der Cylinder dieſe Ebene beſtändig berühren kann.

Die abgewickelte Mantelfläche iſt eine Figur, welche durch Parallelverſchiebung von der Cylinderſeite $P_1P' = a$ beſchrieben werden kann, wenn letztere ſich an der abgewickelten Leitlinie $L = 2\pi R$ hinbewegt; dabei beſchreibt jeder Punkt der Seite den Weg $2\pi R$. Vergl. Fr. 168 und 177.

II. Die Mantelfläche M des geraden Cylinders von der Höhe H iſt ein Rechteck aus den Seiten $H = a$ und L.

Daher iſt die Mantelfläche $M = HL = 2\pi RH$,
und die geſamte Oberfläche O des Cylinders

$$O = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R + H).$$

III. Die Oberfläche O des geraden Hohlcylinders oder einer Röhre (Fig. 206) beſteht aus dem innern Cylindermantel $M_0 = 2\pi R_0 H$, dem äußern Cylindermantel $M_1 = 2\pi R_1 H$ und den beiden ringförmigen Grundflächen, von denen jede den Inhalt $(R_1^2 — R_0^2)\pi = (R_1 + R_0)(R_1 — R_0)\pi$ hat (Fr. 178 XI.).

Dabei iſt bei der lichten Weite $2R_0$ und der Wandſtärke $e = R_1 — R_0$ der äußere Durchmeſſer $D_1 = 2R_1 = 2(R_0 + e)$ und der mittlere Durchmeſſer $D = 2R = 2R_0 + e = R_1 + R_0$. Daher iſt:

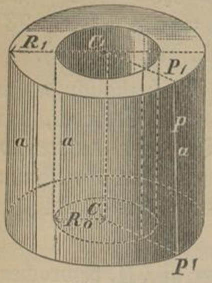

Fig. 206.

$$O = 2\pi(R_1 + R_0)(e + H) = 4\pi R(e + H).$$

IV. Beim ſchiefen Cylinder iſt die abgewickelte Mantelfläche eine gemiſchtlinige Figur, läßt ſich aber in ein Rechteck von den Seiten a und b verwandeln, wenn b den Umfang der Ellipſe bedeutet, welche ein Normalſchnitt zur Axe liefert (Fr. 224 X.).

**226. Wie berechnet man den Inhalt eines Cylinders und ſeiner Teile?**

I. Da ein Prisma mit regelmäßiger Grundfläche zu einem Kreiscylinder wird, ſobald die Seitenzahl der Grundfläche ins Unendliche wächst (vergl. Fr. 113 VIII.), ſo behält die Inhaltsformel für das Prisma (Fr. 221 VIII.) auch für den Cylinder Geltung; der Inhalt des letztern iſt daher:

$$C = FH = \pi R^2 H.$$

II. Für den Inhalt T von Cylinderteilen, deren Grundfläche F ein Abſchnitt, Ausſchnitt, Zone, Ring, oder Mond iſt, gilt (ſobald nur dieſe Teile noch die in Fr. 224 IV. und V. vorausgeſetzte Eigenſchaft haben) ebenfalls die Formel:

$$T = FH.$$

III. Der Hohlcylinder (Fig. 206) hat demnach den Inhalt:

$$T_1 = \pi H(R_1^2 — R_0^2) = \pi He(R_1 + R_0) = 2\pi HeR.$$

IV. Nach derſelben Formel darf auch der Inhalt von priſmatiſchen (Fr. 217 III.) Körpern mit irgendwelcher krummlinigen, oder gemiſchtlinigen Grundfläche berechnet werden, weil man einen möglichſt kleinen Bogen jeder krummen Linie als einen kleinen Kreisbogen anſehen darf.

227. **Wenn ſind zwei Körper inhaltsgleich?**

I. Denkt man ſich in Fig. 207 die einzelnen priſmatiſchen (oder cylindriſchen) Schichten ſo auf einander geſetzt, daß die Flächen, mit denen ſie ſich berühren, ſich nicht decken, ſo entſteht ein treppenförmiger Körper, welcher dem Priſma STUVRQPO an Inhalt gleicht.

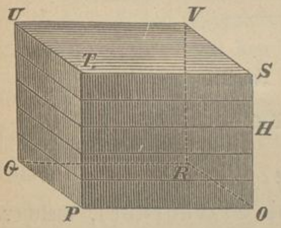

Fig. 207.

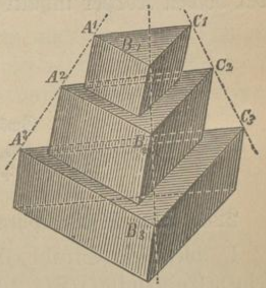

Fig. 208.

II. Zwei ſolche treppenförmige Körper (von gleicher Höhe) werden demnach gleichen Inhalt haben, wenn alle einzelnen priſmatiſchen Schichten des einen denſelben Inhalt haben wie die entſprechenden Schichten des anderen, d. h. (wegen Fr. 220 XV.) wenn die Schichten beider Körper paarweiſe gleiche Höhe und gleiche (wenn auch verſchieden geſtaltete) Grundflächen haben.

Dabei iſt es aber keineswegs erforderlich, daß ſämtliche Schichten eines jeden der beiden Körper unter ſich gleich ſind, vielmehr kann ſich der Querſchnitt jedes Körpers von Schicht zu Schicht an Größe und ſelbſt an Geſtalt ganz beliebig ändern.

III. Läßt man in II. die Schichtenhöhen immer kleiner und kleiner werden, ſo werden unter übrigens gleichen Umſtänden die Treppenabſätze immer unmerklicher, und in Fig. 208 z. B. rücken die ſich entſprechenden oberen Eckpunkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ ꝛc.

der einzelnen Schichten immer näher an einander, ohne daß die in II. ermittelte Inhaltsgleichheit verloren geht.

Könnte man die Schichtenhöhen verſchwindend klein machen, ſo würden jene Eckpunkte zu einer (geraden, oder krummen) Linie, die gebrochenen Seitenflächen zu einer (ebenen, oder krummen) Fläche zuſammenrücken, welche die Kanten $A_1B_1$, $A_2B_2$ ꝛc. enthält. Der Satz II. würde dann lauten:

IV. Zwei Körper ſind inhaltsgleich, wenn je zwei, zu den Grundflächen der beiden Körper parallele und in gleicher Entfernung von dieſen Grundflächen liegende Querſchnitte der beiden Körper inhaltsgleich ſind.

## Zwölftes Kapitel.

# Die Pyramide.

### 228. Was iſt eine Pyramide?

I. Wenn ein Strahl OS (die Erzeugende), welcher in ſeinem Endpunkte O (Fig. 209) feſt gehalten wird, ſich ſo bewegt, daß er ſtets einen Punkt mit dem Umfange (der Leitlinie) eines ſeine Lage nicht ändernden Vielecks ABCD (der Grundfläche F) gemein hat, deſſen Ebene nicht durch den feſtgehaltenen Punkt O (die Spitze) geht, ſo erzeugt OS eine Pyramidenfläche.

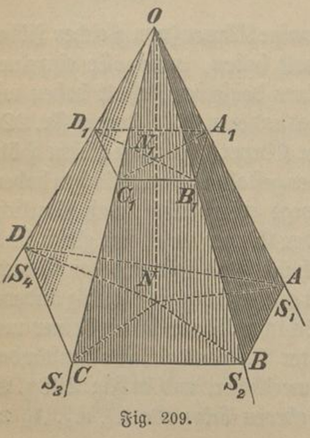

Fig. 209.

II. Iſt die Grundfläche F ein n-eck, ſo beſteht die Pyramidenfläche aus Teilen von n ſich ſchneidenden Ebenen und hat n Kanten $OS_1$, $OS_2$ ꝛc.

III. Das an der Spitze O entſtehende Dreikant, oder Vielkant (Fr. 209) iſt durch die Leitlinie und die Lage der Spitze gegen die Leitlinie beſtimmt.

Zur Beſtimmung der Lage der Spitze O gegen die Grundfläche F genügt der Punkt N, in welchem eine von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Normale ON die Grundfläche trifft, und die Länge dieſer Normalen (Fr. 188 II.).

Die Lage und die (von der Grundfläche aus gerechnete) Länge *einer* Kante (Fr. 214), oder die Länge von *drei* Kanten (Fr. 79 V.) würden die Lage von O gegen F ebenfalls beſtimmen.

IV. Verlängert man die Kanten über die Spitze O hinaus, ſo entſteht noch das (ſymmetriſch-gleiche) Scheitelvielkant, und deſſen Seiten bilden mit den ſchon vorhandenen die *Doppelpyramidenfläche*.

V. Der innerhalb der Pyramidenfläche liegende, von ihr halbbegrenzte Raum (das Vielkant) heiße ein *pyramidaler Raum*.

VI. Die n-ſeitige Grundfläche F und der *Pyramidenmantel* (d. i. der zwiſchen F und der Spitze O liegende Teil der Pyramidenfläche) begrenzen einen Körper, welcher eine *n-ſeitige Pyramide* heißt.

Die Normale ON von O auf F heißt die *Höhe* der Pyramide. Die n-ſeitige Pyramide hat n *Seitenkanten* OA, OB ꝛc., und n *Grundkanten* AB, BC ꝛc.; von ihren n + 1 Begrenzungsflächen und von ihren n + 1 *Ecken* O, A, B ꝛc. ſind je n dreiſeitig (vergl. Fr. 209 I.).

VII. Liegen die Eckpunkte A, B ꝛc. der Grundfläche F im Kreiſe um den Fußpunkt N der Höhe, ſo ſind alle Seitenkanten gleichlang (Fr. 190 VI.), und die Pyramide heißt *gerade*.

VIII. Die Pyramide iſt *regelmäßig*, wenn ihre Grundfläche eine regelmäßige Figur iſt, deren Mittelpunkt mit dem Höhenfußpunkte N zuſammenfällt.

IX. Die dreiſeitige Pyramide heißt *Tetraeder*. Jede ihrer vier Flächen kann als Grundfläche angeſehen werden.

### 229. Welche Eigenſchaften hat die Pyramide?

I. Jede durch die Spitze O (Fig. 209) und einen Punkt der Leitlinie gelegte Gerade G liegt ganz in der Pyramidenfläche (Fr. 228 I.).

II. Jede durch den Punkt $N_1$ der Höhe $ON = H$ gelegte, zur Grundfläche $F = ABCD$ parallele Ebene E ſchneidet alle Ebenen der Pyramidenfläche (Fr. 208 III.), liefert alſo eine geſchloſſene Schnittfigur $A_1B_1C_1D_1$.

Zerlegt man von dem Höhenfußpunkte N und von dem Schnittpunkte $N_1$ aus die Grundfläche und den Schnitt in Dreiecke, ſo ſind auch deren Seiten paarweiſe parallel (Fr. 205 II.), die Dreiecke, z. B. $A_1N_1B_1$ und ANB, ſind alſo gleichwinkelig (Fr. 189 IX.) und ähnlich (Fr. 156 I.); daher iſt denn (nach Fr. 150 I.) auch der Parallelſchnitt der Grundfläche ähnlich.

III. Ebenſo iſt wegen Fr. 155 II. $\triangle A_1ON_1 \sim \triangle AON$, $\triangle B_1ON_1 \sim \triangle BON$ ꝛc., und demnach verhält ſich

$$ON_1 : ON = OA_1 : OA = OB_1 : OB = \cdots$$
$$= A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC = \cdots$$

IV. Der Inhalt f des Parallelſchnittes findet ſich aus $f : F = \overline{A_1B_1}^2 : \overline{AB}^2$ (Fr. 175 II.), wofür man nach III. auch $f : F = z^2 : H^2$ ſetzen kann, wenn $ON_1 = z$.

V. Ähnliche Sätze, wie II. bis IV., gelten auch von je zwei anderen parallelen Ebenen, welche alle Kanten der Pyramide ſchneiden.

VI. Will man auch die Pyramide durch ſtetige Parallelbewegung eines Vielecks F entſtehen laſſen, ſo müſſen deſſen Seiten ſtets parallel zu ſich ſelbſt bleiben und die Ecken ſich auf den Kanten geradlinig fortbewegen, damit die Größe von F ſich nach dem in IV. gefundenen Geſetze ſtetig ändere.

VII. Die Summe der ebenen Winkel der n dreieckigen Seitenflächen der n-ſeitigen Pyramide beträgt $2n\mathfrak{R}$ (Fr. 68 II.). Da nun die zwei Winkel, welche irgend eine Kante mit den zwei zugehörigen Grundkanten einſchließt, zuſammen größer ſind, als der von dieſen Grundkanten gebildete Winkel (Fr. 213 XI.), ſo muß die Summe S der n ebenen Winkel bei O kleiner ſein als der Reſt zwiſchen $2n\mathfrak{R}$ und der Summe der n Winkel der Grundfläche (Fr. 20 IX.); nach Fr. 72 III. iſt aber letztere Summe $= (2n - 4)\mathfrak{R}$, und deshalb iſt die erſtere Summe $S < 4\mathfrak{R}$.

VIII. Bei einem Vielkant (einer mehrſeitigen Ecke) mit lauter hohlen Flächenwinkeln liegt die Summe S der Seiten zwiſchen 0 und 360° (VII.). Vgl. Fr. 213 XII.

IX. Die Summe der Winkel eines n-ſeitigen Vielkants liegt zwiſchen $n \,.\, 180^\circ$ und $(n - 2)\, 180^\circ$, was man aus VIII. mittels des Polar-Vielkants ebenſo wie in Fr. 213 XIII. findet.

### 230. Was verſteht man unter einem Pyramidenſtumpf?

I. Schneidet man von einer n-ſeitigen Pyramide OABCD (Fig. 209) das nach der Spitze O hin gelegene Stück $OA_1B_1C_1D_1$ durch eine zur Grundfläche F parallele Ebene weg, ſo bleibt ein Pyramidenſtumpf (abgeſtutzte, abgekürzte oder abgeſtumpfte Pyramide) übrig, mit 2n dreiſeitigen Ecken, 3n Kanten und $n + 2$ Begrenzungsflächen; von den letzteren ſind zwei (die Abſtutzungsfläche f und die Grundfläche F) ähnliche n-Ecke (Fr. 229 II.), die n anderen ſind lauter Trapeze und bilden den Mantel.

II. Iſt $N_1N = h$ die Höhe des Stumpfes, d. h. der Abſtand zwiſchen f und F, iſt $ON_1 = z$ die Höhe des weggeſchnittenen Teils, alſo $ON = H = h + z$ die Höhe der urſprünglichen Pyramide, ſo findet ſich aus Fr. 229 IV. und Fr. 19 VI. zunächſt

$$(h + z) : z = \sqrt{F} : \sqrt{f} \quad \text{und hieraus}$$

$$z\sqrt{F} = (h + z)\sqrt{f}, \quad z\left(\sqrt{F} - \sqrt{f}\right) = h\sqrt{f},$$

$$z = \frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} \quad \text{und} \quad h + z = \frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}.$$

III. Das abgeſchnittene Stück iſt der ganzen Pyramide ähnlich; die ähnlichen Begrenzungsflächen beider folgen in gleicher Weiſe auf einander, ſchließen gleiche Flächenwinkel ein und bilden kongruente Ecken.

### 231. Wie groß iſt die Oberfläche der Pyramide?

I. Die Oberfläche der Pyramide und des Pyramidenſtumpfs iſt nach Fr. 177 und 178 zu berechnen.

II. Hat eine regelmäßige n-ſeitige Pyramide bei der Leitlinie $L = ns$ die Höhe $H$ und der ihrer Grundfläche eingeſchriebene Kreis den Halbmeſſer $r$, ſo iſt die Höhe jeder Seitenfläche $k = \sqrt{H^2 + r^2}$ (Fr. 189 II.). Die Grundfläche hat nach Fr. 178 II. den Inhalt $F = \frac{1}{2}Lr$. Daher mißt die Oberfläche

$$O = \frac{1}{2}Lr + \frac{1}{2}Lk = \frac{1}{2}L(r + k).$$

III. Ähnlich iſt's, wenn die Fußpunkte aller Dreieckshöhen im Kreiſe um den Fußpunkt N der Höhe ON der Pyramide liegen (Fr. 190 VI.).

IV. Beim regelmäßigen n-ſeitigen Pyramidenſtumpf haben alle Trapeze gleiche Höhe $k$ (Fr. 189 II.), daher iſt die Oberfläche

$$O = F + f + \frac{1}{2}(U + u)k,$$

wenn $F$ und $f$ (Fr. 230) die Umfänge $U$ und $u$ haben.

### 232. Welchen Inhalt haben Pyramiden, Pyramidenſtumpfe und in ſolche zu zerlegende eckige Körper?

I. Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche $F_1$ und $F_2$ und gleicher Höhe $H$ ſind inhaltsgleich (Fr. 227 IV.). Denn legt man bei beiden in der Entfernung $z$ von der Spitze einen Parallelſchnitt $f_1$ und $f_2$ zu der Grundfläche $F_1$ und $F_2$, ſo iſt nach Fr. 229 IV. $f_1 : F_1 = z^2 : H^2 = f_2 : F_2$, d. h. $f_1 : F_1 = f_2 : F_2$ oder $f_1 = f_2$, weil ja $F_1 = F_2$ vorausgeſetzt wurde.

II. Das dreiſeitige Prisma ABCKNQ (Fig. 210) läßt ſich durch die Ebenen AKN und ACN in drei inhaltsgleiche

Pyramiden zerlegen. Weil nämlich $\triangle ABC \mathrel{\#} \triangle QNK$ (Fr. 217 I.); ſo iſt (I.; Fr. 220 II.) $NABC = AQKN$; die beiden Pyramiden AQKN und ACKN ferner haben gleiche Höhe, weil ſie eine gemeinſchaftliche Spitze N beſitzen und ihre Grundflächen AQK und KCA (welche nach Fr. 108 I. kongruent ſind) in einer Ebene ACKQ liegen; daher iſt auch $AQKN = ACKN$ (I.) und nach Fr. 20 V. endlich:

$$NABC = AQKN = ACKN.$$

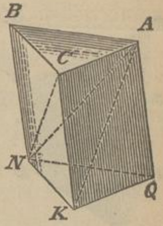

Fig. 210.

III. Jede dreiſeitige Pyramide iſt alſo der dritte Teil eines Prismas von derſelben Höhe H und derſelben Grundfläche F.

Dasſelbe gilt aber auch von jeder n-ſeitigen Pyramide, weil ſich dieſe in lauter dreiſeitige Pyramiden mit einer gemeinſchaftlichen Spitze zerlegen läßt.

IV. Die Raumzahl einer Pyramide iſt $\frac{1}{3}$ von dem Produkt aus der Flächenzahl der Grundfläche und der Längenzahl der Höhe (III. und Fr. 221 VIII.).

V. Zwei Pyramiden verhalten ſich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe (IV.);

$$Y_1 : Y_2 = F_1H_1 : F_2H_2.$$

VI. Bei der abgeſtutzten Pyramide A von der Höhe h, der Grundfläche F und der Abſtutzungsfläche f ſei z die Höhe des weggeſchnittenen Teils (Fr. 230 I.). Dann iſt nach IV.

$$A = \frac{1}{3} F(h + z) - \frac{1}{3} fz,$$

woraus nach Fr. 230 II. weiter folgt:

$$A = \frac{1}{3} h \frac{F\sqrt{F} - f\sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \frac{1}{3} h (F + \sqrt{Ff} + f).$$

VII. *Eckige Körper*, deren Berechnung nicht ſchon in VI. und Fr. 221 gelehrt wurde, zerlegt man durch Diagonalebenen in drei- oder mehrſeitige Pyramiden und berechnet ſie dann nach IV.

VIII. Wird ein gerades dreiſeitiges Prisma ABCNKD (Fig. 211) von der Grundfläche ABC = F und der Höhe a durch eine Ebene ſo abgeſchnitten, daß ſeine Seiten AD = a, CU = c und BV = b ſind, ſo fällt der Fußpunkt Q der Höhe DQ = h der vierſeitigen Pyramide DNKVU in die Kante NK (Fr. 204 I. und VI.). Nach Fr. 177 IX. iſt die Grundfläche UNKV = $\frac{1}{2}(NU + KV)\,NK = \frac{1}{2}[(a - c) + (a - b)]\,NK = \frac{1}{2}(2a - b - c)\,NK$; denn NK ſoll ja auf CN und KB ſenkrecht ſein (Vor. und Fr. 181 X.).

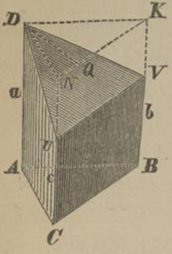

Fig. 211.

Daher hat die Pyramide DNKVU den Inhalt:

$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{1}{3}(UNKV)\,h \\ &= \tfrac{1}{3}(2a - b - c)\,\tfrac{1}{2}NK\,.\,h \\ &= \tfrac{1}{3}(2a - b - c)\,\triangle DNK \\ &= \tfrac{1}{3}F\,(2a - b - c). \end{aligned}$$

Daraus ergiebt ſich aber wegen Fr. 221 VIII. der Inhalt des ſchief, aber eben abgeſchnittenen Prismas ABCUVD zu:

$$\begin{aligned} J &= Fa - \tfrac{1}{3}F\,(2a - b - c) \\ &= \tfrac{1}{3}F\,(a + b + c). \end{aligned}$$

Dieſelbe Formel ergiebt ſich, wenn auch noch auf der anderen Seite des Prismas ein Stück durch eine Ebene abgeſchnitten wird. (Vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. Fr. 155.)

IX. Zwei ähnliche Pyramiden (vergl. Fr. 230 III.) und deshalb auch zwei **ähnliche eckige Körper** (welche ſich in ähnliche Pyramiden zerlegen laſſen; vergl. Fr. 150 II.) verhalten ſich wie die dritten Potenzen ähnlichliegender Seiten oder Strecken (V.); denn bei den ähnlichen Pyramiden iſt $F_1 : F_2 = H_1^2 : H_2^2$ (Fr. 229 IV.).

Auch zwei **ähnliche Körper**, welche ganz oder zumteil von **krummen** Flächen begrenzt werden, verhalten ſich wie die dritten Potenzen ähnlichliegender Strecken.

## Dreizehntes Kapitel.

# Der Kegel.

### 233. Was iſt eine Kegelfläche und ein Kegel?

I. Bewegt ſich ein an ſeinem Endpunkte O (Fig. 212) feſtgehaltener Strahl OS (die Erzeugende) an einem als Leitlinie L dienenden Kreiſe hin, deſſen Ebene (die Grundfläche F) nicht durch den feſten Endpunkt O geht, ſo beſchreibt der Strahl eine (Kreis-)Kegelfläche, deren Spitze oder Mittelpunkt der feſte Punkt O iſt.

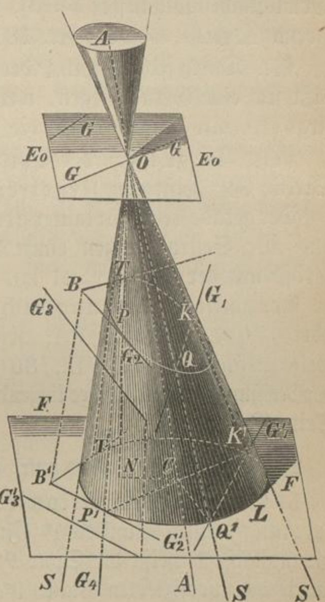

Fig. 212.

II. Bewegt ſich anſtatt des Strahles OS eine unbegrenzte Gerade in derſelben Weiſe, ſo beſchreibt ſie eine aus zwei ſymmetriſchen Hälften beſtehende Doppelkegelfläche.

III. Der von der Kegelfläche umſchloſſene halbbegrenzte Raum heißt ein kegelförmiger oder koniſcher Raum.

IV. Der Körper zwiſchen Spitze O, Grundfläche F und dem zwiſchenliegenden Kegelflächenſtück (dem Mantel) heißt ein Kegel. — Vergl. auch Fr. 236 XIV. und XV.

V. Die durch die Spitze und den Mittelpunkt C der Grundfläche F gelegte Gerade OC heißt die Axe der Kegelfläche.

Jenachdem die Axe auf der Grundfläche normal, oder ſchief ſteht, heißen die Kegelfläche und der Kegel ſelbſt gerade, oder ſchief. Die Höhe H des Kegels iſt die Normale ON von der Spitze O auf die Grundfläche F.

VI. Die Kegelfläche hat als äußerſte Fälle einerſeits die Cylinderfläche (wenn OS // OA), oder die Gerade (wenn der Grundflächenhalbmeſſer = 0), anderſeits aber die Ebene (wenn $\angle AOS = 90^\circ$; Fr. 181 XIV.).

VII. Durch jeden Punkt P der Kegelfläche und die Spitze O läßt ſich eine Gerade legen, welche ganz in der Kegelfläche liegt (I.), alſo (in P') durch die Leitlinie geht.

VIII. Die zwiſchen der Spitze und der Leitlinie gelegene Strecke OP' heißt eine Kegelſeite.

Der gerade Kegel hat lauter gleiche Seiten (Fr. 190 VI.), und alle Seiten machen einen Winkel von der nämlichen Größe mit der Axe (Fr. 81 I.).

Der ſchiefe Kegel iſt ungleichſeitig (Fr. 193 und 78 II., oder 170 I., IV. und V.); ſeine Seiten ſind nur paarweiſe gleich (Fr. 193 VII., 80 II.), mit Ausnahme der in der Neigungsebene der Axe liegenden kleinſten und größten Seite (Fr. 192 III.).

### 234. Was verſteht man unter Central-Projektion?

I. Central-Projektion (oder hier kurzweg „Projektion") eines Punktes P (Fig. 212 und 213) auf die Grundfläche F heißt die Spur P' (Fr. 184 III.), worin die durch den projizierten Punkt P und die Spitze O gelegte Gerade OP die Grundfläche F durchdringt. OP' iſt die Projizierende.

II. Die Spitze O iſt dann ſtreng genommen nicht projizierbar (Fr. 24 I.).

III. Alle anderen Punkte der durch die Spitze parallel zur Grundfläche F gelegten Ebene $E_0$ haben keine Projektion in endlicher Entfernung von C in Fig. 212 (Fr. 26; 205 I.).

IV. Die Projektion eines Punktes der Grundfläche F fällt mit dem projizierten Punkte ſelbſt zuſammen.

V. Die Punkte innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche aus O haben ihre Projektion innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie L.

**235. Wie kann eine Gerade gegen eine Kegelfläche liegen?**

I. Jede Gerade G in der durch die Spitze O, Fig. 212, parallel zur Grundfläche F gelegten Ebene $E_0$ hat mit der Kegelfläche nur die Spitze, oder gar nichts gemein und hat keine Projektion in endlicher Entfernung von C (Fr. 234 II., III.).

II. Jede durch die Spitze O gehende und der Grundfläche F nicht parallele Gerade $G_4$ hat als Projektion nur einen Punkt P' (Fr. 184 IV., 21 II.). Liegt dieſer Punkt P' innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie, ſo liegt die Gerade $G_4$ innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche (Fr. 234 V.).

III. Jeder Punkt P' der Grundfläche F kann als die Projektion einer durch die Spitze O gehenden Geraden $G_4$ gelten, welche innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche liegt (II.).

IV. Die Projektion G' einer weder durch die Spitze O gehenden (II.), noch in der durch O parallel zu F gelegten Ebene $E_0$ liegenden (I.) Geraden $G_1$, $G_2$ oder $G_3$ iſt wieder eine Gerade; denn alle Projizierenden liegen in der durch O und die Gerade $G_1$, $G_2$, oder $G_3$ beſtimmten Ebene (Fr. 182 II.), dieſe aber ſchneidet F nur in einer Geraden G' (Fr. 185 II.).

V. Wenn in IV. die Projektion die Leitlinie ſchneidet wie $G_1'$, oder berührt wie $G_2'$, oder wie $G_3'$ gar nicht trifft, ſo wird die Kegelfläche von der Geraden $G_1$, $G_2$, oder $G_3$ in zwei Punkten K und Q geſchnitten, in einem Punkte P berührt, oder in keinem Punkte getroffen (Fr. 234 I. und V.).

In der durch den Berührungspunkt, oder einen Schnittpunkt zwiſchen Projektion und Leitlinie gelegten Projizierenden kann nämlich wegen Fr. 21 I. nur ein Punkt der berührenden, oder ſchneidenden Geraden liegen.

VI. Wird eine Gerade durch einen von der Spitze O verſchiedenen Punkt P der Kegelfläche gelegt, ſo kann ſie nach I., II. und V. nur dann ganz in der Kegelfläche liegen, wenn ſie auch durch die Spitze geht. Vergl. Fr. 233 I.

VII. Die Kegelfläche iſt alſo krumm (Fr. 16 I. und 12 I.), da ſich durch jeden ihrer (von der Spitze verſchiedenen) Punkte nur eine Gerade (II. und VI.) ziehen läßt, welche ganz in der Kegelfläche liegt.

VIII. Schneidet die in IV. beſprochene Gerade G, Fig. 213, die Grundfläche F in D, die durch O parallel zu F gelegte Ebene $E_0$ in $D_0$, und ſchneidet die durch O gelegte Parallele OQ zu G die Grundfläche in Q, ſo liegt Q in der durch O und G gelegten, $E_0$ in $G_0$ ſchneidenden Ebene, alſo in der Projektion G′ von G (Fr. 186 VI., XV.). Zugleich werden G und G′ durch $D_0$ und Q in je zwei Strahlen $D_0DY$ und $D_0X$, QDY′ und QX′ zerlegt; $D_0Y$ und QY′ ſchneiden ſich in D; dabei iſt QX′ die Projektion von $XD_0$, QY′ die Projektion von $YD_0$, und zwar QD die von YD und DY′ die von $DD_0$.

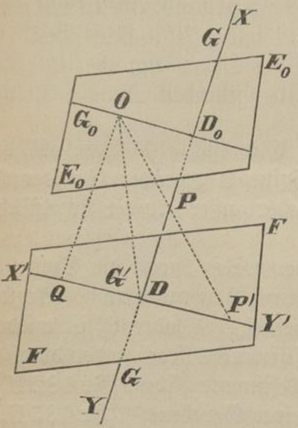

Fig. 213.

IX. Die zwei Punkte Q und K, Fig. 212, in denen eine Gerade $G_1$ die Kegelfläche ſchneidet, können entweder auf derſelben oder auf verſchiedenen Hälften der Doppelkegelfläche liegen.

Im erſteren Falle hat das innerhalb der Kegelfläche liegende, begrenzte Stück QK der Geraden $G_1$ eine endliche Projektion Q'K'; im anderen Falle (vergl. Fig. 216 S. 296) hat das außerhalb der Kegelfläche liegende, begrenzte Stück QK der Geraden zwei (unendliche) Strahlen Q'X' und K'Y' als Projektion, während die Strecke Q'K' die Projektion der beiden innerhalb der Kegelfläche gelegenen Strahlen QX und KY iſt.

X. Durch jeden Punkt P der Kegelfläche laſſen ſich unzählige Berührungslinien oder Tangenten an den Kegel legen (V.); dieſelben liegen aber in der Ebene, welche ſich durch OPP' (Fig. 212) und die durch P' gehende Tangente $G_2'$ der Leitlinie legen läßt (Fr. 182 III.).

XI. Von jedem Punkte B außerhalb der Kegelfläche laſſen ſich zwei Scharen von Berührungslinien an die Kegelfläche legen (V.), weil ſich von der Projektion B' des Punktes B zwei Tangenten B'P' und B'T' an die Leitlinie legen laſſen (Fr. 103 II.). Jede Schar liegt aber in einer durch P', bezw. T' und durch BB' gehenden Ebene.

**236. Wie kann eine Ebene gegen eine Kegelfläche liegen?**

I. Jede durch die Spitze O, Fig. 212, gelegte, die Grundfläche F in einer Geraden G' ſchneidende Ebene E ſchneidet entweder die Kegelfläche in zwei Geraden OQ' und OK', oder berührt dieſelbe in einer Geraden OP', oder hat bloß die Spitze O mit der Kegelfläche gemein, wenn die (als Projektion von E aufzufaſſende) Spur G' die Leitlinie in Q' und K' ſchneidet, in P' berührt, oder gar nicht trifft (Fr. 83).

II. Jeder die Axe A enthaltende ebene Schnitt P'OK' (Hauptſchnitt) beſteht aus zwei Kegelſeiten, welche durch die zwei Endpunkte P' und K' desſelben Grundflächendurchmeſſers P'K' gehen (Fr. 48 II.).

III. Durch jeden Punkt P in der Kegelfläche kann man eine, durch jeden Punkt B außerhalb der Kegelfläche zwei Berührungsebenen an die Kegelfläche legen (Fr. 235 X.

und XI.). Die Projektion jeder Berührungsebene berührt die Leitlinie (I.).

IV. Die durch die Spitze O gehende, der Grundfläche F parallele Ebene $E_0$ beſitzt keine Projektion in endlicher Entfernung von C und hat mit der Kegelfläche nur die Spitze O gemein (Fr. 234 II., III.).

V. Jede nicht durch die Spitze O gehende, der Grundfläche F parallele Ebene $E_1$ (Fig. 214) ſchneidet die Erzeugende in allen Lagen derſelben; ihr Schnitt mit der Kegelfläche iſt alſo eine geſchloſſene Linie und liegt in einer und derſelben Hälfte des Doppelkegels. Alle Punkte P des Schnittes ſind in gleicher Entfernung von dem Punkte $C_1$, worin die Schnittebene die Axe A trifft; denn weil $C_1P \parallel CP'$ (Fr. 205 II.), ſo iſt $C_1P : C_1O = CP' : CO$ (Fr. 148 I.); die Größe der Strecke $C_1P$ iſt alſo nicht von der Lage des Punktes P abhängig, da ja $C_1O$, $CP'$ und CO für alle Punkte P dieſelbe Länge haben.

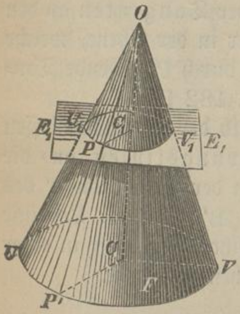

Fig. 214.

Daher iſt der Schnitt ein Kreis (Fr. 47 II.). Der Halbmeſſer $C_1P$ dieſes Kreiſes verhält ſich zum Halbmeſſer CP' der Grundfläche, wie der durch die Schnittebene $E_1$ erzeugte obere Abſchnitt OP, $OC_1$, oder $ON_1$ einer Kegelſeite OP', der Axe OC, oder der Höhe ON zur ganzen Kegelſeite, Axe, oder Höhe (Fr. 148 I.).

VI. Jede durch irgend zwei Kegelſeiten gelegte Ebene E ſchneidet jene Parallelſchnittebene $E_1$ und die Grundfläche in zwei parallelen (Fr. 205 II.) Sehnen (bezw. nach II. in zwei parallelen Durchmeſſern), welche ſich (Fr. 148 I.) ebenfalls wie die Halbmeſſer des Parallelſchnitts und der Grundfläche (V.) verhalten.

VII. Schneidet eine nicht durch die Spitze O gehende Ebene $E_2$ (Fig. 215 und 216) die Grundfläche F in der Spur $G'$, ſo ſind nur die drei Fälle zu unterſcheiden, ob eine zu $E_2$ parallel durch die Spitze O gelegte Ebene E bloß die Spitze, bloß eine Gerade $OP'$, oder zwei Gerade OJ und OZ mit der Kegelfläche gemein hat (I.).

VIII. Im erſteren Falle in VII. ſchneidet die Schnittebene $E_2$ alle Kegelſeiten (Fr. 206 IV.), und zwar alle in derſelben Hälfte des Doppelkegels, weil die andere Hälfte ganz auf der $E_2$ entgegengeſetzten Seite der Ebene E liegt; der Schnitt iſt alſo eine geſchloſſene Linie TPQK (in Fig. 215) und erweiſt ſich bei weiterer Unterſuchung als eine Ellipſe (vergl. Fr. 224 VIII.).

IX. Im zweiten Falle in VII. iſt die Schnittebene $E_2$ zu einer Berührungsebene parallel (I.), alſo auch zu der betreffenden Berührungslinie $OP'$ (Fr. 205 I.), aber bloß dieſer einen Kegelſeite; alle anderen Kegelſeiten werden geſchnitten und wieder alle auf der nämlichen Seite von E, d. h. in derſelben Kegelhälfte (Fr. 206 IV.), der Schnitt AUB (Fig. 216 S. 296) iſt aber keine geſchloſſene Linie, ſondern erweiſt ſich als eine Parabel (vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. S. 55; Katech. d. analytiſchen Geometrie, S. 167). Die Grundfläche F wird hier von $E_2$ in einer Geraden AB geſchnitten,

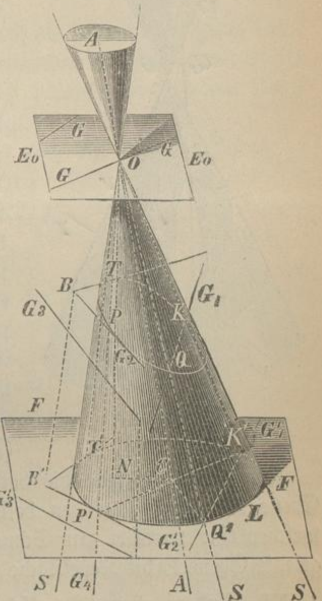

Fig. 215.

welche zur Tangente des Punktes P′ der Leitlinie parallel iſt (I. und Fr. 205 II.).

X. Im dritten Falle in VII. endlich iſt die Schnittebene $E_2$ zu zwei Kegelſeiten OJ und OZ, Fig. 216, parallel, ſchneidet wieder alle anderen Kegelſeiten (Fr. 206 IV.), aber einige in der einen, die anderen in der zweiten Kegelflächenhälfte, jenachdem die von O aus der Grundfläche zugewandte Hälfte der Seite mit der Schnittebene $E_2$ auf derſelben, oder auf entgegengeſetzten Seiten jener durch die Spitze gelegten Parallelebene E zur Schnittfläche $E_2$ liegt; der Schnitt beſteht aus zwei ſich nicht ſchließenden Zweigen CVD und $C_1V_1D_1$, und heißt eine Hyperbel (vgl. Katech. d. analyt. Geometrie, S. 152). Die Spur der Ebene ZOJ in F iſt zu der Spur CD von $E_2$ in F parallel (Fr. 205 II.).

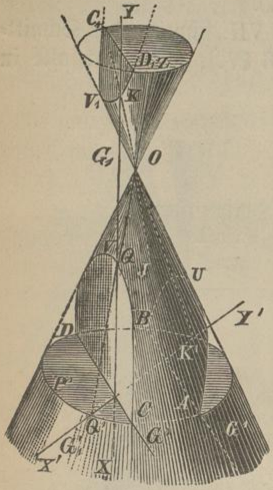

Fig. 216.

Umgekehrt iſt jede die beiden Kegelhälften ſchneidende Ebene $E_2$ parallel zu den beiden Seiten OJ und OZ, in welchen eine parallel zur Schnittfläche $E_2$ durch die Spitze gelegte Ebene E die Kegelfläche ſchneidet.

XI. Andere ebene Kegelſchnitte, als Kreis, Ellipſe, Parabel und Hyperbel, giebt es nicht; dieſe Linien bilden eine abgeſchloſſene Gruppe. Die Parabel erſcheint als Zwiſchenglied zwiſchen Ellipſe und Hyperbel.

XII. Bei jeder ſchiefen Kreiskegelfläche iſt ein (nicht durch die Spitze O gehender) Normalſchnitt zur Axe eine Ellipſe (VIII.).

Wegen Fr. 73 VIII. geht aber die Axe des ſchiefen Kreiskegels nicht durch den Mittelpunkt der Ellipſe.

XIII. *Jeder ſchiefe Kreiskegel läßt ſich als ein gerader elliptiſcher Kegel auffaſſen.*

Die Axe dieſes elliptiſchen Kegels liegt in der Ebene des Neigungswinkels (Fr. 192 I.) der Axe des ſchiefen Kreiskegels gegen deſſen Grundfläche und halbiert den Winkel, unter welchem ſich die in dieſer Ebene liegenden beiden Seiten ſchneiden (vgl. Fig. 53 S. 63).

XIV. Der Kegel entſteht durch die ſtetige Bewegung eines ſtets zu ſich ſelbſt parallel bleibenden Kreiſes, wenn deſſen Mittelpunkt nicht aus der Axe A herausrückt und ſein Halbmeſſer ſich ſo, wie es V. verlangt, ſtetig ändert.

XV. Der gerade Kegel wird auch durch ſtetige Bewegung eines rechtwinkeligen Dreiecks OCP' (Fig. 217) um die eine Kathete OC erzeugt (Fr. 181 XIV).

237. Was iſt ein Kegelſtumpf?

I. Der Körper, welcher von der Grundfläche F, einem (in derſelben Kegelflächenhälfte gelegenen) Parallelſchnitte f zu ihr und dem zwiſchenliegenden Kegelflächenſtück (dem *Mantel*) begrenzt wird, heißt ein *abgeſtutzter Kegel* oder ein *Kegelſtumpf*; die Entfernung h ſeiner beiden parallelen *Grundflächen* F und f iſt ſeine *Höhe*.

II. Der *gerade* Kegelſtumpf (Fig. 217) kann durch die Umdrehung eines Trapezes $PC_1CP'$ entſtehen, deſſen Parallelſeiten $C_1P$ und $CP'$ auf der Seite $CC_1$, um welche die Umdrehung erfolgt, ſenkrecht ſtehen (Fr. 181 XIV.).

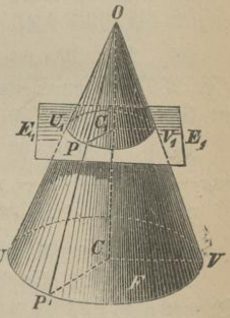

Fig. 217.

III. Hat der Kegelſtumpf, deſſen Grundfläche F und Abſtutzungsfläche f Kreiſe vom Halbmeſſer $r_1$ und $r_0$ und den

Umfängen $u_1$ und $u_0$ ſind, die Höhe $h$, während die abgeſchnittene Spitze die Höhe $z$ hatte, iſt ferner $r$ der Halbmeſſer und $u$ der Umfang des in der Mitte der Höhe $h$ (alſo in der Entfernung $z_m = z + \frac{1}{2} h$ von der Spitze O) gelegten Parallelſchnittes, ſo findet ſich aus Fr. 236 V. zunächſt $r_0 : r_1 = z : (h + z)$ und $r : r_1 = (\frac{1}{2} h + z) : (h + z)$; hieraus ergiebt ſich leicht:

$$r_1 + r_0 = r_1 + \frac{zr_1}{h + z} = \frac{r_1 (h + 2z)}{h + z} = 2r.$$

Dann iſt aber $u = 2\pi r = \pi(r_1 + r_0) = \frac{1}{2}(u_1 + u_0)$.

**238. Wie groß iſt der Kegelmantel?**

I. Auch der Kegelmantel $M$ läßt ſich (wegen Fr. 236 III.) auf einer Ebene abwickeln. — Vgl. Fr. 225 I.

II. Beim geraden Kegel vom Halbmeſſer $CU = R$ und der Höhe $OC = H$, Fig. 217, erhält man (Fr. 233 VIII.) einen Kreisausſchnitt, deſſen Halbmeſſer der Kegelſeite $OU = s = \sqrt{R^2 + H^2}$ und deſſen Bogen der Leitlinie $L = 2\pi R$ gleicht; daher iſt nach Fr. 179 VIII. $M = \frac{1}{2} Ls = \pi Rs$. — Vgl. Fr. 230 II.

III. Der Mantel des ſchiefen Kegels iſt kein Kreisausſchnitt (Fr. 233 VIII.).

IV. Der Mantel $M$ des geraden Kegelſtumpfes (Fr. 237), deſſen Seite $PP' = s = OP' - OP = s_1 - s_0$ iſt, hat den Inhalt $M = \frac{1}{2} u_1 s_1 - \frac{1}{2} u_0 s_0 = \pi(r_1 s_1 - r_0 s_0)$.

Nach Fr. 236 V. iſt aber $s_0 : s_1 = r_0 : r_1$; daher auch $(s_1 - s_0) : s_1 = (r_1 - r_0) : r_1$ und (wegen Fr. 237 III.) weiter:

$$M = \pi s_1 (r_1^2 - r_0^2) : r_1 = \pi s_1 (r_1 + r_0)(r_1 - r_0) : r_1$$
$$= \pi (r_1 + r_0)(s_1 - s_0) = \frac{1}{2}(u_1 + u_0) s = us.$$

Es läßt ſich alſo der Mantel dieſes Stumpfes wie ein Trapez (Fr. 177 IX.) berechnen. Vgl. Fr. 179 XII.

**239. Wie groß iſt der Inhalt des Kegels?**

I. Wegen Fr. 236 V. und 229 IV. ändern ſich bei einem Kegel vom Halbmeſſer $R$ die der Grundfläche $F = \pi R^2$

parallelen Querſchnitte genau ſo wie bei einer Pyramide von der nämlichen Höhe H und einer gleichgroßen Grundfläche.

Nach Fr. 227 IV. hat daher der Kegel denſelben Inhalt C wie dieſe Pyramide, d. h. nach Fr. 232 IV. iſt:

$$C = \frac{1}{3}FH = \frac{1}{3}\pi HR^2.$$

II. Der Kegelſtumpf (Fr. 237) hat nach Fr. 232 VI. den Inhalt $A = \frac{1}{3}h(F + \sqrt{Ff} + f)$, woraus ſich nach Fr. 179 II. weiter ergiebt: $A = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)$.

## Vierzehntes Kapitel.

# Die Kugel.

**240. Was iſt eine Kugelfläche und eine Kugel?**

I. Die Kugelfläche enthält alle Punkte P des Raumes, welche in gleichem Abſtande von einem Punkte M (dem **Mittelpunkte**) liegen. Dieſe unveränderliche Entfernung MP = R heißt der **Halbmeſſer** der Kugel.

II. Zwei Halbmeſſer, deren jeder die Verlängerung des anderen bildet, geben einen **Durchmeſſer** D = 2R. Vgl. Fr. 48 II.

III. Daher ſind alle Halbmeſſer und alle Durchmeſſer der Kugelfläche unter ſich gleich.

IV. Wird ein Halbkreis $FCP_2$ (Fig. 218 S. 300) um ſeinen feſtliegenden Durchmeſſer $FP_2$ gedreht, bis er wieder in ſeine anfängliche Lage kommt, ſo beſchreibt er wegen Fr. 47 II. eine volle Kugelfläche.

Die Kugelfläche iſt demnach eine **geſchloſſene** Fläche; der Mittelpunkt M liegt innerhalb derſelben.

Die Kugelfläche iſt der **geometriſche Ort** (vgl. Fr. 74 XVII.) eines Kreiſes von gegebenem Halbmeſſer und von vorgeſchriebenem Mittelpunkte. Vergl. Fr. 242 VI.

V. Der von einer Kugelfläche umſchloſſene Körper heißt eine **Kugel**.

VI. Iſt die Entfernung eines Punktes P vom Mittelpunkte größer, oder gleich, oder kleiner als der Halbmeſſer R, ſo liegt der Punkt P außerhalb, oder auf, oder innerhalb der Kugelfläche.

### 241. Wie kann eine Gerade gegen eine Kugelfläche liegen?

I. Iſt die Entfernung $MN_1$ einer Geraden $G_1$ vom Mittelpunkte M größer als der Halbmeſſer R, ſo liegt $G_1$ ganz außerhalb der Kugelfläche (Fr. 240 VI.). Denn alle anderen Punkte von $G_1$ ſind noch weiter von M entfernt als $N_1$ (Fr. 74 IX.).

II. Iſt die Entfernung $MN_2$ einer Geraden $G_2$ vom Mittelpunkte M dem Halbmeſſer R gleich, ſo hat $G_2$ bloß einen Punkt $N_2$ mit der Kugelfläche gemein (Fr. 240 VI.), weil alle anderen Punkte von $G_2$ weiter als $N_2$ von M entfernt ſind (Fr. 74 IX.).

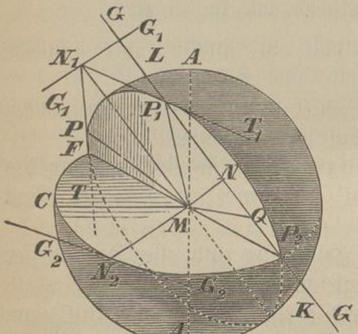

Fig. 218.

III. Eine Gerade $G_2$, welche mit der Kugelfläche bloß einen Punkt gemein hat, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

IV. Jede Senkrechte auf einem Halbmeſſer $MN_2$ in deſſen Endpunkte $N_2$ iſt eine Tangente (II.).

V. Iſt die Entfernung $MN = e$ einer Geraden G, Fig. 218, vom Mittelpunkte M kleiner als der Halbmeſſer R, ſo ſchneidet G die Kugelfläche in zwei Punkten $P_1$ und $P_2$; N liegt nämlich innerhalb der Kugelfläche (Fr. 240 VI.), die beiden Punkte K und L in G aber, welche um $KN = NL = R$ von N abſtehen, liegen außerhalb der Kugelfläche (Fr. 74 VIII.), und deshalb muß es in G zwei

Punkte $P_1$ und $P_2$ geben, welche in der Entfernung R von M liegen (Fr. 74 X.).

VI. *Die Kugelſehne*, d. h. die innerhalb der Kugelfläche gelegene Strecke $P_1P_2 = s$ der ſchneidenden Geraden G wird von der Senkrechten MN halbiert (Fr. 75 V. und VI.). Nach Fr. 160 III. iſt daher $R^2 = e^2 + \frac{1}{4}s^2$.

VII. Je näher die Kugelſehne am Mittelpunkte M liegt, deſto größer iſt ſie (VI.).

VIII. Die Kugelfläche iſt *krumm* (Fr. 16 I. und 12 I.); denn nach I. bis V. laſſen ſich auf ihr gar keine Geraden ziehen.

IX. Jede Gerade G durch einen Punkt Q innerhalb der Kugelfläche ſchneidet die Kugelfläche in zwei Punkten (V.).

Denn fällt man von M eine Senkrechte MN auf G, ſo iſt wegen Fr. 74 IX. $MN \leqq MQ$, jenachdem N mit Q zuſammenfällt, oder nicht; da nun nach Fr. 240 VI. ſchon $MQ < R$, ſo iſt $MN < R$ (Fr. 20 IV., oder VII.), und G ſchneidet die Kugelfläche.

X. Jede Gerade G durch einen Punkt $P_1$ der Kugelfläche und ſchief gegen den nach $P_1$ gezogenen Halbmeſſer $MP_1$ ſchneidet die Kugelfläche in zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ (V.), weil der Fußpunkt N der von M auf G gefällten Senkrechten MN innerhalb der Kugelfläche liegt (Fr. 240 VI.), da ja $MN < MP_1 = R$ iſt (Fr. 74 IX.).

XI. Jede Tangente (III.) ſteht wegen X. auf dem Halbmeſſer des Berührungspunktes ſenkrecht.

XII. In jedem Punkte der Kugelfläche giebt es unzählig viele Tangenten, dieſelben liegen aber ſämtlich in einer Ebene (Fr. 181 XIII.).

**242. Wie kann eine Ebene gegen eine Kugelfläche liegen?**

I. Eine Ebene $E_1$ (Fig. 219 S. 302), deren Entfernung $MN_1$ vom Mittelpunkte M den Halbmeſſer R übertrifft, liegt ganz außerhalb der Kugelfläche (Fr. 240 VI.), weil alle anderen Punkte der Ebene $E_1$ noch weiter von M abſtehen, als $N_1$ (Fr. 190 IV.).

II. Eine Ebene $E_2$, deren Entfernung $MN_2$ vom Mittelpunkte M dem Halbmeſſer R gleicht, hat bloß **einen Punkt** $N_2$ mit der Kugelfläche gemein (Fr. 240 VI.), denn alle anderen Punkte von $E_2$ ſtehen weiter von M ab, als $N_2$ (Fr. 190 IV.).

III. Eine ſolche Ebene $E_2$, die mit der Kugelfläche bloß einen Punkt gemein hat, heißt eine **Berührungsebene**.

IV. Jede Normalebene auf einem Halbmeſſer $MN_2$ in deſſen Endpunkte $N_2$ berührt alſo die Kugelfläche.

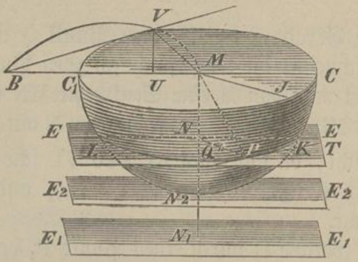

Fig. 219.

V. Iſt die Entfernung $MN = e$ einer Ebene E vom Mittelpunkte M kleiner als der Halbmeſſer R, ſo liegt der mit dem Halbmeſſer R um den Fußpunkt N der vom Mittelpunkte M auf die Ebene gefällten Normalen MN geſchlagene Kreis ganz außerhalb der Kugelfläche (Fr. 74 VIII. und 240 VI.). Alle durch N in E gezogenen Geraden ſchneiden die Kugelfläche zweimal (Fr. 241 V.), und letztere wird demnach von der Ebene E in einer geſchloſſenen Linie geſchnitten. Jeder Punkt P der Schnittlinie KPL iſt um $NP = r = \sqrt{R^2 - e^2}$ von dem Fußpunkte entfernt (Fr. 160 III.), d. h.

der **Schnitt** iſt nach Fr. 47 II. ein **Kreis** (Kugelkreis), und ſein Halbmeſſer r iſt um ſo größer, je näher der Schnitt am Mittelpunkte liegt.

VI. Ein durch den Mittelpunkt M gehender Schnitt liefert einen größten Kreis CJC$_1$ der Kugelfläche, deſſen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkte zuſammenfällt und deſſen Halbmeſſer MJ dem der Kugelfläche gleicht (vergl. Fr. 240 III. und IV.).

VII. Je zwei größte Kreiſe ſchneiden ſich in einem Kugeldurchmeſſer (VI.) und halbieren einander.

VIII. Jeder größte Kreis halbiert die Kugelfläche, zerlegt ſie in zwei ſich deckende Halbkugeln (Fr. 22 V.).

IX. Die Normale MN vom Mittelpunkte M der Kugel auf einen Kugelkreis geht durch den Mittelpunkt N des letztern (V. und Fr. 188 I.).

X. Die Gerade MN durch den Mittelpunkt M der Kugel und den Mittelpunkt N eines Kugelkreiſes ſteht auf dieſem Kreiſe normal (IX. und Fr. 21 II.).

XI. Die im Mittelpunkte N eines Kugelkreiſes auf dieſem Kreiſe errichtete Normale geht durch den Kugelmittelpunkt M (IX. und Fr. 188 II.).

XII. Durch zwei ſich ſchneidende Kugelſehnen läßt ſich eine Ebene legen (Fr. 182 III.); in dem von dieſer Ebene gelieferten (V.) Kugelkreiſe ſind die beiden Kugelſehnen Sehnen, und deshalb gelten die Sätze in Fr. 161 auch von zwei ſich ſchneidenden Kugelſehnen.

XIII. Wenn zwei Kugelſehnen ſich in N gegenſeitig halbieren, ſo ſchneiden ſie ſich im Mittelpunkte N des durch ſie gelegten Kugelkreiſes, ſtehen alſo beide ſenkrecht auf der Strecke MN (Fr. 93 und 242 X.).

XIV. Halbieren ſich zwei Kugelkreiſe gegenſeitig, ſo ſchneiden ſie ſich in einer Kugelſehne, welche für beide Kugelkreiſe ein Durchmeſſer iſt, und daher haben die beiden Kreiſe einen gemeinſchaftlichen Mittelpunkt N; wenn nun N außerhalb M läge, ſo müßte die Strecke MN auf beiden Kreiſen normal ſtehen (X.), d. h. es müßten die Ebenen beider Kreiſe, weil ſie ja den Punkt N gemein haben, zuſammenfallen

(Fr. 182 V.); weil ſie dies aber nach der Vorausſetzung nicht ſollen, ſo muß $MN = o$ ſein, d. h.

die beiden Kugelkreiſe ſind größte Kreiſe.

XV. Jede Tangente $P_1T_1$ (in Fig. 218) an einen Kugelkreis im Punkte $P_1$ berührt auch die Kugelfläche in $P_1$; denn auf der Tangente ſteht wegen Fr. 83 X. der Kugelkreishalbmeſſer (NP in Fig. 219), daher auch der Kugelhalbmeſſer $MP_1$ ſenkrecht (Fr. 189 I.).

XVI. In jeder die Kugelfläche ſchneidenden Ebene laſſen ſich zwei Tangenten $N_1T$ und $N_1T_1$ (Fig. 218) von einem in dieſer Ebene, aber außerhalb der Kugel liegenden Punkte $N_1$ an die Kugel ziehen (XV. und Fr. 103 II.).

XVII. Jede Ebene E durch einen Punkt Q (in Fig. 219) innerhalb der Kugelfläche ſchneidet die Kugelfläche (V.); denn eine von M auf E gefällte Normale MN iſt $\leqq MQ$ (Fr. 190 IV.), und da $MQ < R$ (Vor.), ſo iſt $MN < R$.

XVIII. Jede Ebene E durch einen Punkt P der Kugelfläche und ſchief gegen den nach dem Punkte P gezogenen Halbmeſſer MP ſchneidet die Kugelfläche (V.), weil die von M auf E gefällte Normale MN kleiner iſt als R (Fr. 190 IV.).

XIX. Jede Berührungsebene $E_2$ (Fig. 219) ſteht normal auf dem nach dem Berührungspunkte $N_2$ gezogenen Halbmeſſer $MN_2$ (XVIII.).

XX. In jedem Punkte der Kugelfläche giebt es nur eine Berührungsebene (XIX. und Fr. 182 V.).

XXI. Jede durch den Berührungspunkt $N_2$ (Fig. 219) gehende, in der Berührungsebene $E_2$ liegende Gerade berührt die Kugelfläche (XIX. und Fr. 181 X.).

XXII. Legt man durch die Verbindungsſtrecke MB, Fig. 219, des Kugelmittelpunktes M und eines außerhalb der Kugelfläche gelegenen Punktes B eine Ebene E′ und in dieſer einen Halbkreis über der Strecke MB, ſo ſchneidet dieſer die Kugelfläche in einem Punkte V, und BV iſt alſo Tangente an den größten Kugelkreis (Fr. 103 II.) und an die Kugel (XV.).

Dreht man nun die Ebene E′ um MB, ſo rückt V auf der Kugel fort; daher laſſen ſich von dem außerhalb gelegenen Punkte B *unzählige Tangenten* an die Kugelfläche legen; alle Berührungspunkte ſind von B gleichweit entfernt (Fr. 103 V.). Bei der Drehung um MB beſchreibt die von V auf MB gefällte Senkrechte VU eine Ebene (Fr. 181 XIV.). Daher liegen (nach V.) alle Berührungspunkte V *im Kreiſe* um den Fußpunkt U der Senkrechten VU auf MB. Demnach bilden aber die ſämtlichen Tangenten eine *gerade Kegelfläche*.

XXIII. Auch in eine *gerade Cylinderfläche* läßt ſich eine Kugelfläche einſchreiben, welche mit der Cylinderleitlinie gleichen Halbmeſſer hat, und deren Mittelpunkt in der Axe der Cylinderfläche liegt.

XXIV. Durch jede der unzähligen Tangenten in XXII. läßt ſich eine Berührungsebene legen (IV.), wenn man nur vorher durch den Berührungspunkt V noch eine zweite Normale auf MV errichtet (Fr. 181 XI.).

Daher laſſen ſich von einem außerhalb der Kugel gelegenen Punkte B auch *unzählige Berührungsebenen* an die Kugel legen und dieſelben berühren zugleich den in XXII. erwähnten geraden Kegel (V.).

XXV. Eine durch den Mittelpunkt M einer Kugelfläche normal zu einer außer der Kugelfläche liegenden Geraden $G_1$ (Fig. 218) gelegte Ebene ſchneidet die Gerade in $N_1$, die Kugelfläche in einem größten Kreiſe. Zieht man in dieſer Normalebene von $N_1$ aus die zwei Tangenten $N_1P_1$ und $N_1P$ an den größten Kreis (Fr. 103 II.), ſo ſtehen die Halbmeſſer $MP_1$ und $MP$ nicht bloß auf $N_1P_1$ und $N_1P$ ſenkrecht (Fr. 83 X.), ſondern auch auf den durch $P_1$ und $P$ gelegten Parallelen zu $G_1$ (Fr. 189 VII. und 181 X.); daher wird die Kugelfläche (nach IV. und Fr. 181 XI.) von den beiden Ebenen berührt, welche ſich durch die Gerade $G_1$ und je eine der beiden Tangenten $N_1P_1$ und $N_1P$ legen laſſen.

Die Berührungspunkte $P_1$ und $P$ dieſer beiden Ebenen ſind gleichweit von $N_1$ entfernt (Fr. 103 V.).

**243. Welche Sätze über Parallelkreiſe und Meridiane ſind zu merken?**

I. Sind zwei oder mehr Schnittebenen parallel, ſo fallen nach Fr. 206 I. die aus dem Kugelflächenmittelpunkte M (Fig. 220) auf ſie gefällten Normalen in eine Gerade $AA_1$ (die Axe), welche die Kugelfläche in den beiden Polen A und $A_1$ der Parallelkreiſe SXYV und KPQL ſchneidet.

II. Der größte Parallelkreis $DBCD_1$ heißt Äquator; jeder größte Kreis $AXA_1$ durch die Axe heißt Meridian.

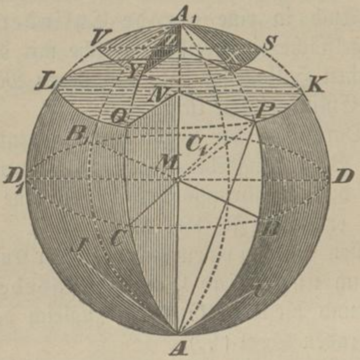

Fig. 220.

III. Jede Meridianebene ſteht auf den Parallelkreiſen normal (Fr. 204 I.).

IV. Kugelkreiſe, welche die nämlichen Pole haben, liegen in parallelen Ebenen (I. und Fr. 205 III.).

V. Zieht man von einem Punkte P, Fig. 220, eines Parallelkreiſes Strecken PA und $PA_1$ nach deſſen Polen A und $A_1$, ſo ſtehen dieſe auf einander ſenkrecht (Fr. 96 III.).

VI. Der Halbmeſſer $NP = r$ eines Kugelkreiſes iſt die mittlere Proportionale zu den Abſchnitten AN und $NA_1$, in welche der Kugelkreis die Axe $AA_1$ zerlegt (Fr. 161 II.).

VII. Jeder Pol iſt von allen Punkten desſelben Parallelkreiſes gleichweit entfernt (Fr. 190 VI.).

VIII. Die Meridianbögen XP und YQ zwiſchen zwei Parallelkreiſen ſind gleichgroß (VII., Fr. 91 IV., 20 VIII.).

IX. Zwiſchen denſelben Meridianen liegen Parallelkreisbögen PQ und XY von gleichem Centriwinkel (Fr. 189 IX.).

Dieſem Centriwinkel gleicht der Winkel zwiſchen den (ebenfalls auf der Axe $AA_1$ ſenkrecht ſtehenden) Meridiantangenten AU und AJ am Pol A.

Die nämliche Größe hat der von den beiden Meridianen am Pole gebildete ſphäriſche Winkel PAQ und der Neigungswinkel (Fr. 202 V.) der beiden Meridianebenen.

**244. Wie heißen die Teile der Kugel und der Kugelfläche?**

I. Jeder Schnittkreis KPQL (Fig. 220) zerlegt die Kugelfläche in zwei Hauben, Kappen oder Kalotten, die Kugel in zwei Abſchnitte oder Segmente.

II. Zwiſchen zwei Parallelkreiſen SXYV und KPQL liegt eine Kugelflächenzone und eine Kugelſchicht.

III. Zwiſchen einer Kappe SXYVA (oder $SXYVA_1$) und der durch ihren Schnittkreis gelegten Kegelfläche SXYVM, deren Spitze im Kugelmittelpunkte M liegt, iſt ein Kugel-Ausſchnitt oder Sektor enthalten.

IV. Zwei ſich ſchneidende Meridiane $APXA_1$ und $AQYA_1$ zerlegen die Kugelfläche in vier Zweiecke (z. B. $ABPA_1QCA$) und die Kugel in vier Kugelkeile (z. B. $ABPA_1ACQA_1$).

Je zwei benachbarte der erſteren bilden eine Halbkugelfläche, je zwei benachbarte der letzteren eine Halbkugel (Fr. 242 VIII.); je zwei gegenüberliegende ſind kongruent.

V. Drei (nicht parallele) größte Kreiſe $AQYA_1$, $APXA_1$ und $DBCD_1$, Fig. 220, ſchneiden ſich in ſechs Punkten und zerlegen die Kugelfläche in acht ſphäriſche Dreiecke oder Kugeldreiecke, entſprechend den durch ihre Ebenen am Mittelpunkte M der Kugel entſtehenden acht Dreikanten (Fr. 211).

Die ſphäriſchen Winkel A, B und C (Fr. 243 IX.) jedes ſphäriſchen Dreiecks ABC ſind den Neigungswinkeln der Ebenen des zugehörigen Dreikants gleich; die drei Seiten AB, BC und CA des ſphäriſchen Dreiecks ſind Bögen, deren Centriwinkel den Seitenwinkeln des Dreikants gleichen. Deshalb laſſen ſich die Sätze in Fr. 209 bis 214 und 229 VIII. und IX. auf ſphäriſche Dreiecke und Vielecke übertragen. Vergl. auch Fig. 222.

VI. Jede Halbkugel läßt ſich als Sektor, als Segment und als Kugelkeil betrachten.

VII. Jeder größere Abſchnitt, Ausſchnitt, Keil, Kappe und Zweieck iſt größer, jeder kleinere kleiner als die Halbkugel, beziehentlich die Halbkugelfläche.

VIII. Kappe und Zone, Segment, Schicht und Sektor entſtehen bei der Erzeugung der Kugel (Fr. 240 IV.) durch die Drehung des Bogens AV und VL, des halben Kreisſegments AZV, der halben Zone VZNL und des Kreisſektors AMV.

**245. Welche Lage haben zwei Kugelflächen gegen einander?**

I. Zwei konzentriſche Kugelflächen haben denſelben Mittelpunkt und entweder keinen, oder (bei gleichem Halbmeſſer) alle Punkte gemein (Fr. 240 I.).

II. Legt man durch die Centralſtrecke, d. h. die Entfernung $M_1M_2 = c$ der Mittelpunkte $M_1$ und $M_2$ zweier excentriſchen Kugelflächen eine Ebene, ſo erhält man ſtets dieſelbe, aus zwei größten Kreiſen beſtehende Schnittfigur (Fr. 242 VI.).

Daher müſſen (wegen Fr. 240 IV.) für zwei excentriſche Kugeln ganz ähnliche Sätze gelten, wie für zwei excentriſche Kreiſe (vergl. Fr. 102). Nämlich:

III. Iſt die Summe $R_1 + R_2$ der Kugelhalbmeſſer kleiner als die Centralſtrecke c, ſo liegt jede der beiden Kugelflächen ganz außerhalb der anderen.

IV. Iſt die Differenz $R_1 — R_2$ der Halbmeſſer größer als die Centralſtrecke c, ſo liegt die eine Kugel ganz innerhalb der anderen.

V. Gleicht die Summe $R_1 + R_2$, oder die Differenz $R_1 - R_2$ der Halbmeſſer der Centralſtrecke $c$, ſo haben die Kugelflächen nur einen Punkt gemein, berühren ſich von außen, oder innen. Der Berührungspunkt zweier Kugeln liegt in der Centralen $M_1 M_2$. Die gemeinſchaftliche Berührungsebene der beiden Kugeln ſteht in dem Berührungspunkte auf der Centralen $M_1 M_2$ ſenkrecht.

VI. Die größere Kugelfläche ſchmiegt ſich der Berührungsebene beſſer an als die kleinere; letztere krümmt ſich demnach ſtärker. Vergl. Fr. 86 III.

VII. Iſt die Summe der Halbmeſſer größer, und ihre Differenz gleichzeitig kleiner als die Centrale ($R_1 + R_2 > c > R_1 - R_2$), ſo ſchneiden ſich die beiden Kugelflächen.

Die beiden Schnittkreiſe, welche eine durch die Centrale gelegte Ebene in beiden Kugelflächen liefert, haben eine gemeinſchaftliche Sehne, welche von der Centralen ſenkrecht halbiert wird und bei jeder Lage der Schnittebene dieſelbe Größe und denſelben Schnittpunkt mit der Centralen hat; deshalb ſchneiden ſich die beiden Kugeln in einem auf der Centralen normalen Kreiſe (Fr. 181 XIV.). — Vergl. auch Fr. 242 XXII.

VIII. Haben zwei excentriſche Kugelflächen einen Punkt außerhalb der Centralen gemein, ſo ſchneiden ſie ſich in einem Kreiſe; haben ſie einen Punkt der Centralen gemein, ſo haben ſie weiter nichts gemein.

### 246. Wie iſt die Kugeloberfläche zu berechnen?

I. Der Inhalt der durch die Umdrehung des Bogens $VL = b$, Fig. 221 S. 310, um die Axe $MA$ erzeugten Kugelflächenzone nähert ſich dem Inhalte des gleichzeitig von der Sehne $VL = s$ erzeugten Mantels des abgeſtutzten Kegels um ſo mehr, je mehr ſich der Bogen $b$ ſeiner Sehne $s$ nähert (Fr. 179 IV.), und je mehr er ſich deshalb mit der Sehne vertauſchen läßt, je kleiner alſo der Bogen iſt.

II. Zieht man den Halbmeſſer $MT = R$ (Fig. 221) nach der Mitte $T$ des Bogens $VL$, und macht man $TS \parallel VZ \parallel LN \perp MA$ und $VJ \parallel MA \perp LN$, ſo ſind die beiden Dreiecke $MST$ und $LJV$ gleichwinkelig (Fr. 71 VI.) und deshalb ähnlich (Fr. 156 I.); daher iſt $ST : MT = JV : LV$ (Fr. 153 I.) oder $r : R = h : s$, d. h. $rs = Rh$, wenn $TS = r$ und $VJ = NZ = h$ geſetzt wird. Darf man aber den Bogen $b$ als geradlinig auffaſſen, ſo ergiebt ſich nach I. und Fr. 238 IV. als Inhalt der Zone $z = 2\pi rs = 2\pi Rh$, d. h. iſt die Höhe $h$ einer Zone $z$ ſo klein, daß man den die Zone erzeugenden Bogen $b$ mit deſſen Sehne $s$ vertauſchen darf, ſo gleicht die Zone dem Mantel eines geraden Cylinders (Fr. 225 II.), welcher mit der Zone gleiche Höhe $h$ und mit der Kugel gleichen Halbmeſſer $R$ beſitzt.

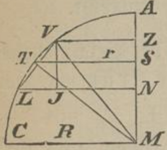

Fig. 221.

III. Teilt man den Bogen $VL = b$, welcher durch ſeine Umdrehung um $MA$ die Kugelzone $VSKL$ (Fig. 220) von der Höhe $NZ = H$ erzeugte, in $n$ Teile, deren Projektionen auf $AM$ mit $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ bezeichnet werden mögen, ſo erhält man den Inhalt $Z$ der Zone, als Summe von $n$ kleineren Zonen von den Höhen $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$, nach II. angenähert:

$$Z = z_1 + z_2 + z_3 \cdots + z_n$$
$$= 2\pi R\,(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n) = 2\pi RH.$$

Dieſe Formel wird um ſo richtiger, je größer $n$ oder je kleiner die Bogenteile werden; bei noch ſo weit getriebener Verkleinerung der Bogenteile und Vergrößerung der Anzahl derſelben bleibt aber die ausgeführte Summierung $h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n = H$ immer noch möglich und liefert auch immer noch das nämliche Reſultat. Daher giebt die obige Formel $Z = 2\pi RH$ nicht einen angenäherten, ſondern den ſtreng richtigen Wert für den Zoneninhalt $Z$.

IV. Ganz die nämliche Schlußfolgerung paßt auch auf die Kugelkappe $k$ von der Höhe $H$; daher iſt auch deren Inhalt

$$k = 2\pi RH.$$

V. Jede Kappe und Zone gleicht demnach dem Mantel eines geraden Cylinders, welcher mit der Kugel gleichen Halbmeſſer R und mit der Kappe, oder Zone gleiche Höhe H hat.

VI. Der Inhalt O der ganzen Kugelfläche ergiebt ſich aus IV., wenn man 2R für H ſetzt; $O = 4\pi R^2$, d. h.

die Oberfläche jeder Kugel iſt viermal ſo groß als deren größter Kreis.

Da man auch $O = 2\pi R(2R)$ ſchreiben darf, ſo gleicht die Kugelfläche der Mantelfläche eines der Kugel umſchriebenen geraden Cylinders, im Einklang mit V.

VII. Den Inhalt des Kugelzweiecks W mit dem ſphäriſchen Winkel w° (Fr. 244 IV. und 243 IX.) erhält man (wegen Fr. 210 I., VIII. und X.) aus der Proportion $W : O = w^\circ : 360^\circ$, nämlich:

$$W = \pi R^2 w^\circ : 90^\circ.$$

VIII. Legt man durch die drei Eckpunkte A, B, C, Fig. 222 (S. 212), eines Kugeldreiecks ABC (Fr. 244 V.) eine Ebene (Fr. 182 I.), ſo ſchneidet dieſelbe die Kugelfläche in einem Kreiſe K (Fr. 242 XVIII.); jeder Pol P (Fr. 243 I.) dieſes Schnittkreiſes iſt von den drei Eckpunkten gleichweit entfernt (Fr. 243 VII.); daher läßt ſich ABC von dem einen (mit A, B, C in der nämlichen Kappe $ABCP_1$ gelegenen) Pole $P_1$ aus in drei gleichſchenkelige ſphäriſche Dreiecke $ABP_1$, $BCP_1$, $CAP_1$ zerlegen.

Jede der drei Meridian-Ebenen, durch welche dieſe Zerlegung bewirkt wird, geht aber auch durch den zweiten Pol $P_2$ und einen Eckpunkt des Scheiteldreiecks $A_1B_1C_1$ (Fr. 244 V. und 211 III.), ſo daß zugleich auch das Scheiteldreieck vom zweiten Pol $P_2$ aus in drei gleichſchenkelige (Fr. 42 II.) Dreiecke $A_1B_1P_2$, $B_1C_1P_2$, $C_1A_1P_2$ zerlegt worden iſt, und zwar iſt jedes dieſer letzteren drei Dreiecke je einem der drei Dreiecke des Urdreiecks kongruent (Fr. 214 X.; Fr. 42 II., 243 IX. und 203 VI.).

Daher hat jedes Kugeldreieck ABC gleichen Inhalt mit ſeinem (ihm ſymmetriſch-gleichen) Scheiteldreiecke $A_1B_1C_1$.

IX. Die Summe aus einem Kugeldreieck ABC und einem Hinterdreieck $AC_1B_1$ (Fr. 211 II.) desſelben iſt (wegen VIII.) dem Kugelzweieck $AC_1A_1B_1A = ACA_1BA$ gleich, welches jenem Winkel A entſpricht, welcher in beiden Dreiecken (als Scheitelwinkel) vorkommt; denn dieſes Zweieck iſt die Summe aus dem Dreieck ABC und dem Scheiteldreieck $A_1BC$ des Hinterdreiecks $AC_1B_1$.

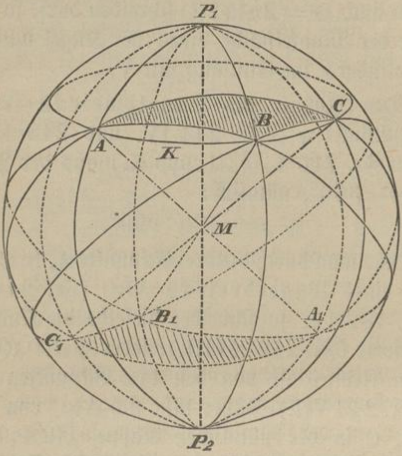

Fig. 222.

X. Addiert man die zwei Kugelzweiecke $ABA_1CA$ und $CAC_1BC$, welche zu den zwei Winkeln A und C des Kugeldreiecks ABC gehören, zu den beiden Dreiecken ABC und $A_1BC_1$, welche nach IX. dem (zu dem Winkel $B = A_1BC_1$ gehörigen) Zweiecke $BAB_1CB = BA_1B_1C_1B$ gleichen, ſo erhält man (vergl. VIII.) als Summe das Doppelte des Dreiecks ABC mehr als die über dem größten Kreiſe $ACA_1C_1A$ (nach vorn zu) ſtehende Halbkugelfläche $2\pi R^2$. Daher ergiebt ſich aus VII. für den Inhalt D des *ſphäriſchen oder Kugeldreiecks*:

$$2D + 2\pi R^2 = \pi R^2(A + B + C) : 90^\circ,$$

oder

$$D = \pi R^2(A + B + C - 180^\circ) : 180^\circ.$$

### 247. Welche Formeln liefern den Inhalt der Kugel?

I. Zieht man in dem Quadrat MAFC (Fig. 223) von der Seite R die Diagonale MF, den Quadranten AVC und eine Strecke ZE // MC, welche den Quadrant in V und die Diagonale in U ſchneidet, ſo iſt MV = MC = ZE (Fr. 240 III., 108 III.); ∠ ZMU = 45° = ∠ ZUM (Fr. 110 II., 62 I.), daher ZM = ZU (Fr. 73 I.) und nach Fr. 170 I.:

$$\overline{ZV}^2 = \overline{MV}^2 - \overline{ZM}^2 = \overline{ZE}^2 - \overline{ZU}^2.$$

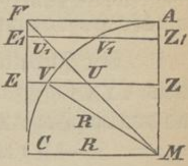

Fig. 223.

II. Läßt man nun in Fig. 223 das Quadrat, das △ MFA und den Quadrant AVC ſich um MA drehen, ſo erzeugt erſteres einen Cylinder, das Dreieck einen Kegel und der Quadrant eine Halbkugel, deren Halbmeſſer R der Höhe und dem Grundflächenhalbmeſſer des Cylinders und des Kegels gleicht. Jeder auf MA normale Kugelſchnitt (Fr. 242 V.) hat den Inhalt $\pi . \overline{ZV}^2 = \pi(\overline{ZE}^2 - \overline{ZU}^2)$, gleicht alſo dem Kreisringe von der Breite UE in dem durch das Dreieck MFC erzeugten Hohlkörper, welcher auch entſteht, wenn man den durch MFA erzeugten Kegel aus dem durch MCFA erzeugten Cylinder herausnimmt.

Daher hat nach Fr. 227 IV. nicht nur die Halbkugel mit jenem Hohlkörper, ſondern auch jede Kugelſchicht und jeder Kugelabſchnitt, welcher durch eine halbe Kreiszone $ZVV_1Z_1$, bezw. einen halben Kreisabſchnitt ZVA erzeugt wird, mit der zwiſchen denſelben Parallelebenen enthaltenen Schicht des Hohlkörpers gleichen Inhalt.

III. Als Inhalt der Halbkugel ($\frac{1}{2}$K) findet ſich aus II. nach Fr. 226 I. und 239 I.:

$$\tfrac{1}{2}K = \pi R^2 R - \tfrac{1}{3}\pi R^2 R = \tfrac{2}{3}\pi R^3.$$

Auch erkennt man leicht, daß der Cylinder, die Halbkugel und der Kegel in II. ſich wie 3 : 2 : 1 verhalten.

IV. Der Inhalt der ganzen **Kugel** iſt

$$K = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{3} OR.$$

Die Kugel läßt ſich alſo auch als eine Pyramide von einer der Kugelfläche gleichen Grundfläche $O = 4\pi R^2$ (Fr. 246 VI.) und der Höhe R auffaſſen (Fr. 232 IV.).

V. Der Inhalt eines **Kugelabſchnittes** T über dem Kreis VYXS (Fig. 220 und 223) vom Halbmeſſer $ZV = r$ und von der Höhe $AZ = h$ iſt (weil $AF = R$ und $ZU = ZM = z = R - h$) nach II., Fr. 226 I. und 239 II.:

$$T = \pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h \left[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2\right]$$
$$= \pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h \left[3R^2 - 3Rh + h^2\right];$$

weil nun nach Fr. 170 II., oder 163 I. $\overline{A_1Z} \cdot \overline{AZ} = \overline{ZV}^2$, d. h. $(2R - h)h = r^2$, alſo $2Rh = r^2 + h^2$ iſt, ſo wird:

$$T = \tfrac{1}{3}\pi(3R - h)h^2 = \tfrac{1}{3}\pi(2R + z)(R - z)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi(r^2 + Rh)h = \tfrac{1}{6}\pi(3r^2 + h^2)h.$$

VI. Der Inhalt S einer **Kugelſchicht**, deren zwei Kugelkreiſe die Halbmeſſer $ZV = r$ und $Z_1V_1 = r_1$ haben und in den Entfernungen $MZ = z = ZU$ und $MZ_1 = z_1 = Z_1U_1$ vom Kugelmittelpunkte auf der nämlichen Seite desſelben liegen, ſo daß alſo $h = z_1 - z$ die Höhe der Schicht iſt, findet ſich aus II. nach Fr. 226 I. und 239 II:

$$S = \pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h \left[z_1^2 + z_1 z + z^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi h \left[6R^2 - 2z_1^2 - 2z^2 - 2z_1 z\right].$$

Da nun aber $-2z_1^2 - 2z^2 - 2z_1 z = -3z_1^2 - 3z^2 + (z_1^2 - 2z_1 z + z^2) = -3z_1^2 - 3z^2 + h^2$ (Fr. 169 II.) und $3(R^2 - z_1^2) = 3r_1^2$, ſowie $3(R^2 - z^2) = 3r^2$ iſt, ſo wird:

$$S = \tfrac{1}{2}\pi h \left(r_1^2 + r^2 + \tfrac{1}{3}h^2\right).$$

Auf die nämliche Formel kommt man ſchließlich auch, wenn man den Inhalt der Kugelſchicht nach V. als Differenz des Inhaltes zweier Abſchnitte berechnet.

VII. Den Inhalt J eines (von MVAM, Fig. 223, erzeugten) **Kugelausſchnittes** findet man entweder als

Summe ſeines Abſchnittes (V.) und des (vom $\triangle MVZ$ erzeugten) Kegels über deſſen Kugelkreis, oder man faßt nach IV. den Ausſchnitt als einen Kegel von der Höhe R und einer Grundfläche auf, welche ſeiner Kappe k (von der Höhe $AZ = h$) gleicht. Man erhält dann (wegen Fr. 246 IV.):

$$J = \tfrac{1}{3}kR = \tfrac{2}{3}\pi R^2 h.$$

VIII. Die über dem Kugeldreiecke $ABC = D$ (Fr. 246 X.) ſtehende, mit der Spitze im Mittelpunkte M liegende *Kugelpyramide* hat nach IV. den Inhalt:

$$P = \tfrac{1}{3}RD = \tfrac{1}{3}\pi R^3(A + B + C - 180^\circ) : 180^\circ.$$

IX. Der Inhalt eines *Kugelkeils* vom Winkel $w^\circ$ (Fr. 246 VII.) hat den Inhalt:

$$W = \pi R^3 w^\circ : 270^\circ.$$

**248. Wie viel giebt es regelmäßige Polyeder?**

I. Ein regelmäßiges *Polyeder* (eckiger Körper) wird von lauter kongruenten regelmäßigen Figuren begrenzt, die in lauter kongruenten, gleiche Flächenwinkel beſitzenden Vielkanten aneinanderſtoßen.

Alle Kanten eines regelmäßigen Polyeders ſind gleich, ebenſo alle ſeine ebenen und alle ſeine Flächen-Winkel.

II. Wegen Fr. 229 VIII. und 113 II. können bei einem regelmäßigen Körper
mit Dreiecken nur *drei*, *vier*, oder *fünf* Flächen,
mit Quadraten nur *drei* Flächen,
mit Fünfecken nur *drei* Flächen
in einer Ecke zuſammenſtoßen.

Es giebt alſo nur *fünf regelmäßige Polyeder*.

III. Das (regelmäßige) *Tetraeder* wird von vier gleichſeitigen Dreiecken begrenzt, hat vier Ecken und ſechs Kanten. Vergl. Fr. 228 IX.

IV. Das *Hexaeder* gleicht dem Würfel (Fr. 217 VII.).

V. Das *Dodekaeder* wird von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt, hat zwanzig Ecken und dreißig Kanten.

VI. Das Oktaeder wird von acht gleichſeitigen Dreiecken begrenzt, deren je vier in einer der ſechs Ecken zuſammenſtoßen; es hat zwölf Kanten und läßt ſich in zwei gerade vierſeitige Pyramiden mit quadratiſcher Grundfläche zerlegen.

VII. Von den zwanzig gleichſeitigen Dreiecken des Ikoſaeders ſtoßen je fünf in einer der zwölf Ecken zuſammen. Seine Kantenzahl iſt dreißig.

VIII. In jedem regelmäßigen eckigen Körper giebt es einen Mittelpunkt, von welchem aus ſich der Körper in ſo viel kongruente regelmäßige Pyramiden zerlegen läßt, als er Seitenflächen hat.

IX. Vom Mittelpunkte jedes regelmäßigen Körpers aus läßt ſich eine Kugelfläche durch die ſämtlichen Ecken, eine zweite durch die Kantenmitten und eine dritte durch die Mittelpunkte der Seitenflächen legen.

# Anhang.

## Tabellen über die Einteilung und Vergleichung der Maße verſchiedener Länder.

### I. Einteilung verſchiedener Landesmaße.

#### Deutſchland.

Nach dem Bundesgeſetz vom 17. Auguſt 1868 ward für den Norddeutſchen Bund als Grundlage des vom 1. Januar 1872 in Kraft tretenden Maßes und Gewichtes das Meter oder der Stab feſtgeſetzt. Dieſe Maß- und Gewichtsordnung des Norddeutſchen Bundes ward durch die Geſetze vom 10. März 1870 und vom 7. Dezember 1873 ergänzt und erlangte bei Gründung des Deutſchen Reiches auch für dieſes Geltung. Die weitere Einteilung der Längen-, Flächen- und Körper-Maße iſt folgende:

1 Meile = 7,5 Kilometer = 750 Dekameter (Ketten) = 7500 Meter; 1 km = 1000 m.
1 „ = 100 „ = 1000 „
1 „ = 10 „
1 Meter (Stab) = 100 Cm. (Neuzoll) = 1000 Millimeter (Strich); 1 m = 100 cm = 1000 mm.
1 „ = 10 „
1 Hektar = 100 Ar = 10 000 □Meter; 1 ha = 100 a = 10 000 qm.
1 „ = 100 „
1 □Meter = 10 000 □Centim. = 1 000 000 □Millim.; 1 qm = 10 000 qcm = 1 000 000 qmm.
1 „ = 100 „
1 ⊞Meter = 1000 Liter (Kannen, ⊞Decim.) = 1 000 000 ⊞Cm.; 1 cbm = 1 000 000 cc.

1 Hektoliter (Faß) = 100 Liter = 200 Schoppen; 1 hl = 100 l.
1 Scheffel = 50 Liter.
1 〃 = 2 Schoppen = 1000 ⊞Centimeter = 1 000 000 ⊞Millimeter.
1 〃 = 1000 〃

Als Gewichtseinheit dient das Kilogramm (kg), d. h. das Gewicht von 1 Liter destillierten Waſſers bei + 4° Celsius.

1 Tonne = 20 Centner = 1000 Kilogramm = 2000 Pfund.
1 〃 = 50 〃 = 100 〃
1 〃 = 2 〃 = 100 Dekagramm (Neulot).
1 Pfund = 50 Neulot (Dekagramm) = 500 Gramm (g).
1 〃 = 10 〃
1 Gramm = 10 Decigr. = 100 Centigr. = 1000 Milligr.
1 〃 = 10 〃 = 100 〃
1 〃 = 10 〃

### 2. England.

1 Yard = 3 Fuß = 36 Zoll; 1 Faden = 6 Fuß; 1 Rute = $5\frac{1}{2}$ Yard; 1 Meile = 5280 Fuß.
1 Acker = 160 □Ruten = 4046,7 □Meter.
1 Gallon = 277,2738 ⊞Zoll; 1 Quarter = 8 Buſhels = 64 Gallons.

### 3. Frankreich (altes Maß).

1 Toiſe = 6 Fuß; 1 (Pariſer) Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 0,324839 Meter.
Über das neue Maß vergl. 1.

### 4. Königreich Italien.

Das metriſche franzöſiſche Maß (vergl. 1).

### 5. Nordamerika.

Wie England.

### 6. Öſterreich.

Nach dem Geſetze vom 23. Juli 1871 iſt in Öſterreich vom 1. Januar 1876 ab im öffentlichen Verkehre ausſchließlich das Metermaß anzuwenden.

Alte Maße:

1 Fuß = 12 Zoll; 1 Elle = 2,465 Fuß; 1 Meile = 4000 Klafter = 24 000 Fuß = 2400 Ruten.
1 Joch = 1600 □Klafter = 5755,43 □Meter.
1 Maß = 0,0448 ⊞ Fuß; 1 Eimer = 40 Maß; 1 Metze = 1,9471 ⊞ Fuß = 16 Maßel.

### 7. Rußland.

1 Saſhèn = 3 Arſchin = 48 Werſchòk; 1 Werſt = 500 Saſhèn.
= 7 Fut (Fuß) = 84 Diùim (Zoll) = 1008 Linien.
1 Deſſiatìne = 2400 □Saſhèn = 10925 □Meter.
1 Wedrò = 750,568 ⊞ Zoll = 10 Krùſchki; 1 Tſchètwert = 8 Tſchetwerìk;
1 Tſchetwerìk = 1601,212 ⊞ Zoll.

### 8. Schweiz.

1 Fuß = 10 Zoll; 1 Rute = 5 Ellen = 10 Fuß; 1 Meile = 29629 Fuß.
1 Juchart = 400 □Ruten = 3600 □Meter.
1 Eimer = 100 Maß = 150 Liter; 1 Malter = 10 Viertel = 150 Liter.

## II. Vergleichungs- und Verwandlungs-Tabellen.

| | | 1 Fuß gleicht | 1 □Fuß gleicht | 1 ⊞Fuß gleicht | 1 Meter gleicht | 1 □Meter gleicht | 1 ⊞Meter gleicht | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | England . . | 0,30479 | 0,09290 | 0,02832 | 3,28090 | 10,76430 | 35,31658 | England. | |
| | Rußland . . | 0,30479 | 0,09290 | 0,02832 | 3,28090 | 10,76430 | 35,31658 | Rußland. | |
| | Schweiz . . | 0,30000 | 0,09000 | 0,02700 | 3,33333 | 11,11111 | 37,03704 | Schweiz. | |
| Altes Maß. | Baden *) . . | 0,30000 | 0,09000 | 0,02700 | 3,33333 | 11,11111 | 37,03704 | Baden. | Altes Maß. |
| | Bayern . . . | 0,29186 | 0,08518 | 0,02486 | 3,42631 | 11,73960 | 40,22350 | Bayern. | |
| | Braunſchweig | 0,28536 | 0,08143 | 0,02324 | 3,50432 | 12,28023 | 43,03380 | Braunſchweig | |
| | Hannover . . | 0,29210 | 0,08532 | 0,02492 | 3,42353 | 11,72056 | 40,12579 | Hannover. | |
| | Kurheſſen . . | 0,28770 | 0,08277 | 0,02381 | 3,47585 | 12,08156 | 41,99374 | Kurheſſen. | |
| | Öſterreich . . | 0,31610 | 0,09992 | 0,03159 | 3,16353 | 10,00792 | 31,66036 | Öſterreich. | |
| | Preußen . . | 0,31385 | 0,09850 | 0,03092 | 3,18620 | 10,15187 | 32,34587 | Preußen. | |
| | Sachſen . . . | 0,28319 | 0,08020 | 0,02271 | 3,53120 | 12,46936 | 44,03176 | Sachſen. | |
| | Württemberg | 0,28649 | 0,08208 | 0,02351 | 3,49052 | 12,18372 | 42,52752 | Württemberg | |
| | | Meter. | □Meter | ⊞Meter. | Fuß. | □Fuß. | ⊞Fuß. | | |

---

*) In Baden hatte die Rute 10 Fuß und der Fuß 10 Zoll.

Hat man in beſonderen Fällen dieſelbe Maßeinheit ſehr häufig in eine und dieſelbe andere umzuſetzen, ſo legt man ſich hierzu zweckmäßig beſondere Tabellen an, die ſich aus den vorſtehenden Zahlen leicht berechnen laſſen. So wäre z. B.

für engliſches und ruſſiſches Maß:

$1'' = 30{,}47945 : 12 = 2{,}539954^{cm}$; $1^{cm} = (12 \,.\, 3{,}28090) : 100 = 0{,}39371''$ ꝛc.; daher:

| Zoll | Centimeter | □ Zoll | □ Centimeter | ⊞ Zoll | ⊞ Centimeter | Centimeter | Zoll | □ Centimeter | □ Zoll | ⊞ Centimeter | ⊞ Zoll |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 = | 2,5400 | 1 = | 6,4514 | 1 = | 16,386 | 1 = | 0,39371 | 1 = | 0,15501 | 10 = | 0,61026 |
| 2 = | 5,0799 | 2 = | 12,9029 | 2 = | 32,773 | 2 = | 0,78741 | 2 = | 0,31001 | 20 = | 1,22052 |
| 3 = | 7,6199 | 3 = | 19,3543 | 3 = | 49,159 | 3 = | 1,18112 | 3 = | 0,46501 | 30 = | 1,83078 |
| 4 = | 10,1598 | 4 = | 25,8057 | 4 = | 65,546 | 4 = | 1,57482 | 4 = | 0,62002 | 40 = | 2,44105 |
| 5 = | 12,6998 | 5 = | 32,2571 | 5 = | 81,932 | 5 = | 1,96853 | 5 = | 0,77502 | 50 = | 3,05131 |
| 6 = | 15,2397 | 6 = | 38,7086 | 6 = | 98,318 | 6 = | 2,36224 | 6 = | 0,93003 | 60 = | 3,66157 |
| 7 = | 17,7797 | 7 = | 45,1600 | 7 = | 114,705 | 7 = | 2,75594 | 7 = | 1,08503 | 70 = | 4,27184 |
| 8 = | 20,3196 | 8 = | 51,6114 | 8 = | 131,091 | 8 = | 3,14965 | 8 = | 1,24004 | 80 = | 4,88210 |
| 9 = | 22,8596 | 9 = | 58,0628 | 9 = | 147,478 | 9 = | 3,54336 | 9 = | 1,39504 | 90 = | 5,49236 |
| 10 = | 25,3995 | 10 = | 64,5143 | 10 = | 163,864 | 10 = | 3,93706 | 10 = | 1,55005 | 100 = | 6,10262 |

Druck von J. J. Weber in Leipzig.

Im Verlage von **J. J. Weber** in **Leipzig** ſind erſchienen und durch jede Buchhandlung zu beziehen:

# Illuſtrierte Katechismen.

## Belehrungen aus dem Gebiete
der
## Wissenschaften, Künste und Gewerbe etc.

### In Original-Leinenbänden.

**Ackerbau.** Dritte Auflage. — **Katechismus des praktiſchen Ackerbaues.** Von Wilhelm Hamm. Dritte Auflage, gänzlich umgearbeitet von A. G. Schmitter. Mit 138 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Agrikulturchemie.** Sechste Auflage, **Katechismus der Agrikulturchemie** Von Dr. E. Wildt. Sechste Auflage, neu bearbeitet unter Benutzung der fünften Auflage von Hamms „Katechismus der Ackerbauchemie, der Bodenkunde und Düngerlehre“. Mit 41 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Algebra.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Algebra, oder die Grundlehren** der allgemeinen Arithmetik. Von Friedr. Herrmann. Dritte Auflage, vermehrt und verbeſſert von K. F. Heym. Mit 8 in den Text gedruckten Figuren und vielen Übungsbeiſpielen. M. 2

**Anſtandslehre** ſ. Ton, der gute, und die feine Sitte.

**Archäologie.** — **Katechismus der Archäologie. Überſicht über die Entwickelung** der Kunſt bei den Völkern des Altertums. Von Dr. Ernſt Kroker. Mit 3 Tafeln und 127 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Archivkunde** ſ. Regiſtratur.

**Arithmetik.** Dritte Auflage. — **Katechismus der praktiſchen Arithmetik.** Kurzgefaßtes Lehrbuch der Rechenkunſt für Lehrende u. Lernende. Von E. Schick. Dritte, umgearbeitete u. vermehrte Auflage, bearbeitet von Max Meyer. M. 3

**Äſthetik.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Äſthetik. Belehrungen** über die Wiſſenſchaft vom Schönen und der Kunſt. Von Robert Prölß. Zweite, vermehrte und verbeſſerte Auflage. M. 3

**Aſtronomie.** Siebente Auflage. — **Katechismus der Aſtronomie. Belehrungen** über den geſtirnten Himmel, die Erde und den Kalender. Von Dr. Adolph Drechsler. Siebente, verbeſſerte und vermehrte Auflage. Mit einer Sternkarte und 170 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Auswanderung.** Sechste Auflage. — **Kompaß für Auswanderer nach** Ungarn, Rumänien, Serbien, Bosnien, Polen, Rußland, Algerien, der Kapkolonie, nach Auſtralien, den Samoa-Inſeln, den ſüd- und mittelamerikaniſchen Staaten, den Weſtindiſchen Inſeln, Mexiko, den Vereinigten Staaten von Nordamerika und Canada. Von Eduard Pelz. Sechste, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 4 Karten und einer Abbildung. M. 1. 50

**Bankweſen.** — **Katechismus des Bankweſens.** Von Dr. E. Gleisberg. Mit 4 Check-Formularen und einer Überſicht über die deutſchen Notenbanken. M. 2

**Baukonſtruktionslehre.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Baukonſtruktionslehre.** Mit beſonderer Berückſichtigung von Reparaturen und Umbauten. Von Walther Lange. Zweite, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 277 in den Text gedruckten Abbildungen. M 3

**Bauſtile.** Zehnte Auflage. — **Katechismus der Bauſtile, oder Lehre der** architektoniſchen Stilarten von den älteſten Zeiten bis auf die Gegenwart. Von Dr. Ed. Freiherrn von Sacken. Zehnte, verbeſſerte Auflage. Mit einem Verzeichnis von Kunſtausdrücken und 103 in den Text gedruckten Abbild. M. 2

☞ Die mit * verſehenen Bändchen ſind zurzeit nur geheftet zu haben.

**Ein ausführliches Verzeichnis mit Inhaltsangabe jedes einzelnen Bandes wird auf Verlangen unberechnet abgegeben.**

**Bergbaukunde. — Katechismus der Bergbaukunde. Von Bergrat G.** Köhler. Mit 217 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4

**Bergſteiger. — Katechismus für Bergſteiger, Gebirgstouriſten und Alpenreiſende.** Von Julius Meurer. Mit 22 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Bewegungsſpiele. — Katechismus der Bewegungsſpiele für die deutſche** Jugend. Herausgegeben von J. C. Lion und J. H. Wortmann. Mit 29 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Bibliothekslehre. — Grundzüge der Bibliothekslehre mit bibliographiſchen** und erläuternden Anmerkungen. Neubearbeitung von Dr. Julius Petzholdts Katechismus der Bibliothekenlehre. Von Dr. Arnim Gräſel. Mit 33 in den Text gedruckten Abbildungen und 11 Schrifttafeln. M. 4. 50

**Bienenkunde.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Bienenkunde und** Bienenzucht. Von G. Kirſten. Dritte, verm. und verb. Auflage, herausgegeben von J. Kirſten. Mit 51 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Bleicherei** ſ. Wäſcherei ꝛc.

***Botanik. — Katechismus der Allgemeinen Botanik. Von Prof. Dr.** Ernſt Hallier. Mit 95 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

***Botanik, landwirtſchaftliche.** Zweite Auflage. — **Katechismus der land**wirtſchaftlichen Botanik. Von Karl Müller. Zweite, vollſtändig umgearbeitete Auflage von R. Herrmann. Mit 4 Tafeln und 48 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 1. 50

**Buchdruckerkunſt.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Buchdrucker**kunſt und der verwandten Geſchäftszweige. Von C. A. Franke. Fünfte, vermehrte und verbeſſerte Auflage, bearbeitet von Alexander Waldow. Mit 43 in den Text gedruckten Abbildungen und Tafeln. M. 2. 50

**Buchführung.** Vierte Auflage. — **Katechismus der kaufmänniſchen Buch**führung. Von Oskar Klemich. Vierte, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 7 in den Text gedruckten Abbildungen und 3 Wechſelformularen. M. 2. 50

**Buchführung, landwirtſchaftliche. — Katechismus der landwirtſchaft**lichen Buchführung. Von Prof. K. Birnbaum. M. 2

**Chemie.** Sechſte Auflage. — **Katechismus der Chemie. Von Prof. Dr. H.** Hirzel. Sechſte, vermehrte Aufl. Mit 31 in den Text gedruckten Abbild. M. 3

**Chemikalienkunde. — Katechismus der Chemikalienkunde. Eine kurze** Beſchreibung der wichtigſten Chemikalien des Handels. Von Dr. G. Heppe. M. 2

**Chronologie.** Dritte Auflage. — **Kalenderbüchlein. Katechismus der** Chronologie mit Beſchreibung von 33 Kalendern verſchiedener Völker und Zeiten. Von Dr. Ad. Drechsler. Dritte, verbeſſerte und ſehr verm. Aufl. M. 1. 50

**Dampfmaſchinen.** Vierte Auflage. — **Katechismus der ſtationären** Dampfkeſſel, Dampfmaſchinen und anderer Wärmemotoren. Ein Lehr- und Nachſchlagebüchlein für Praktiker, Techniker und Induſtrielle. Von Ingenieur Th. Schwartze. Vierte, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 264 in den Text gedruckten und 13 Tafeln Abbildungen. M. 4. 50

**Darwinismus. — Katechismus des Darwinismus. Von Dr. Otto** Zacharias. Mit dem Porträt Darwins, 30 in den Text gedruckten und 1 Tafel Abbildungen. M. 2. 50

**Drainierung.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Drainierung und der** Entwäſſerung des Bodens überhaupt. Von Dr. William Löbe. Dritte, gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 92 in den Text gedr. Abbildungen. M. 2

***Dramaturgie. — Katechismus der Dramaturgie. Von R. Prölß.** M. 2. 50

**Droguenkunde. — Katechismus der Droguenkunde. Von Dr. G. Heppe.** Mit 30 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

☞ Die mit * verſehenen Bändchen ſind zurzeit nur geheftet zu haben.

**Einjährig-Freiwillige. — Der Weg zum Einjährig-Freiwilligen und** zum Offizier des Beurlaubtenſtandes in Armee und Marine. Von Oberſtleutenant z. D. Exner. M. 2

**Elektrotechnik.** Vierte Auflage.— **Katechismus der Elektrotechnik. Ein Lehr**buch für Praktiker, Techniker und Induſtrielle. Von Ingenieur Th. Schwartze. Vierte, verbeſſerte u. verm. Aufl. Mit 243 in den Text gedr. Abbild. M. 4. 50

**Ethik. — Katechismus der Sittenlehre. Von Lic. Dr. Friedrich** Kirchner. M. 2. 50

**Färberei und Zeugdruck.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Färberei und** des Zeugdrucks. Von Dr. Herm. Grothe. Zweite, vollſtändig neu bearbeitete Auflage. Mit 78 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Farbwarenkunde. — Katechismus der Farbwarenkunde. Von Dr. G.** Heppe. M. 2

**Feldmeßkunſt.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Feldmeßkunſt. Von** Dr. C. Pietſch. Fünfte, neu bearbeitete Auflage. Mit 75 in den Text gedruckten Figuren. M. 1. 50

**Feuerwerkerei. — Katechismus der Luſtfeuerwerkerei. Kurzer Lehrgang** für die gründliche Ausbildung in allen Teilen der Pyrotechnik. Von C. A. v. Nida. Mit 124 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Finanzwiſſenſchaft.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Finanzwiſſen**ſchaft oder die Kenntnis der Grundbegriffe und Hauptlehren der Verwaltung der Staatseinkünfte. Von A. Biſchof. Fünfte, verbeſſerte Auflage. M. 1. 50

**Fiſchzucht. — Katechismus der künſtlichen Fiſchzucht und der Teich**wirtſchaft. Wirtſchaftslehre der zahmen Fiſcherei. Von E. A. Schroeder. Mit 52 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

***Flachsbau. — Katechismus des Flachsbaues und der Flachsbereitung.** Von K. Sonntag. Mit 12 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 1

**Fleiſchbeſchau.** Zweite Auflage. — **Katechismus der mikroſkopiſchen** Fleiſchbeſchau. Von F. W. Rüffert. Zweite, verbeſſerte und vermehrte Auflage. Mit 40 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 1 20

**Forſtbotanik.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Forſtbotanik. Von** H. Fiſchbach. Vierte, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 79 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Freimaurerei. — Katechismus der Freimaurerei. Von Dr. Willem** Smitt, Meiſter vom Stuhl der Loge Apollo zu Leipzig. M. 2

**Galvanoplaſtik.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Galvanoplaſtik.** Ein Handbuch für das Selbſtſtudium und den Gebrauch in der Werkſtatt. Von Dr. G. Seelhorſt. Dritte, durchgeſehene und vermehrte Auflage. Von Dr. G. Langbein. Mit Titelbild und 42 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Gedächtniskunſt.** Siebente Auflage. — **Katechismus der Gedächtniskunſt** oder Mnemotechnik. Von Hermann Kothe. Siebente von F. B. Montag ſehr verbeſſerte und vermehrte Auflage. [Unter der Preſſe.

**Geflügelzucht. — Katechismus der Geflügelzucht. Ein Merkbüchlein** für Liebhaber, Züchter und Ausſteller ſchönen Raſſegeflügels. Von Bruno Dürigen. Mit 40 in den Text gedruckten und 7 Tafeln Abbildungen. M. 4

**Geographie.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Geographie.** Vierte Auflage, gänzlich umgearbeitet von Karl Arenz, Kaiſerl. Rat und Direktor der Prager Handelsakademie. Mit 57 Karten und Anſichten. M. 2. 40

**Geographie, mathematiſche. — Katechismus der mathemat. Geographie.** Von Dr. Ad. Drechsler. Mit 113 in den Text gedr. Abbildungen. M. 2. 50

**Geologie.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Geologie, oder Lehre vom** innern Bau der feſten Erdkruſte und von deren Bildungsweiſe. Von Prof. H. Haas. Fünfte, verbeſſerte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Abbildungen und einer Tabelle. [Unter der Preſſe.

**NB** Die mit * verſehenen Bändchen ſind zurzeit nur geheftet zu haben.

**Geometrie, analytiſche.** — **Katechismus der analytiſchen Geometrie.** Von Dr. Max Friedrich. Mit 56 in den Text gedr. Abbild. M. 2. 40

**Geometrie.** Dritte Aufl. — **Katechismus der ebenen und räumlichen Geometrie.** Von Prof. Dr. K. Ed. Zetzſche. Dritte, vermehrte und verbeſſerte Aufl. Mit 209 in den Text gedr. Figuren u. 2 Tabellen zur Maßverwandlung. M. 3

**Geſangskunſt.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Geſangskunſt. Von** F. Sieber. Vierte, verbeſſerte und vermehrte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Notenbeiſpielen. M. 2. 40

**Geſchichte** ſ. Weltgeſchichte

***Geſchichte, deutſche.** — **Katechismus der deutſchen Geſchichte. Von** Dr. Wilh. Kentzler. M. 2. 50

**Geſundheitslehre.** — **Naturgemäße Geſundheitslehre auf phyſiologiſcher** Grundlage. Von Dr. Friedrich Scholz. Mit 7 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3. 50

(Unter gleichem Titel auch Band 20 von Webers Illuſtr Geſundheitsbüchern.)

**Giroweſen.** — **Katechismus des Giroweſens. Von Karl Berger.** Mit 21 Geſchäfts-Formularen. M. 2

**Handelsmarine.** — **Katechismus der Handelsmarine. Von Kapitän zur** See z. D. R. Dittmer. Mit 66 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3. 50

**Handelsrecht.** Dritte Auflage. — **Katechismus des deutſchen Handelsrechts**, nach dem Allgem. Deutſchen Handelsgeſetzbuche. Von Reg.-Rat Robert Fiſcher. Dritte, umgearbeitete Auflage. M. 1. 50

**Handelswiſſenſchaft.** Sechste Auflage. — **Katechismus der Handelswiſſenſchaft.** Von K. Arenz. Sechste, verbeſſerte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Guſt. Rothbaum und Ed. Deimel. M. 2

**Heerweſen.** — **Katechismus des Deutſchen Heerweſens. Von Oberſtleutnant** a. D. H. Vogt. Nach dem Tode des Verfaſſers herausgegeben von R. v. Hirſch, Hauptmann a. D. Mit einem Nachtrag und 7 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Heizung, Beleuchtung und Ventilation.** — **Katechismus der Heizung,** Beleuchtung und Ventilation. Von Ingenieur Th. Schwartze. Mit 159 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Heraldik.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Heraldik. Grundzüge** der Wappenkunde. Von Dr. Ed. Freih. v. Sacken. Vierte, verbeſſerte Auflage. Mit 202 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Hufbeſchlag.** Dritte Auflage. — **Katechismus des Hufbeſchlages. Zum** Selbſtunterricht für jedermann. Von E. Th. Walther. Dritte, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 67 in den Text gedr. Abbild. M. 1. 50

**Hunderaſſen.** — **Katechismus der Hunderaſſen. Von F. Krichler.** Mit 42 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Hüttenkunde.** — **Katechismus der allgemeinen Hüttenkunde. Von Dr.** E. F. Dürre. Mit 209 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4. 50

**Jagdkunde.** — **Katechismus für Jäger und Jagdfreunde. Von Franz** Krichler. Mit 33 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Kalenderbüchlein** ſ. Chronologie.

***Kalenderkunde.** — **Katechismus der Kalenderkunde. Belehrungen über** Zeitrechnung, Kalenderweſen und Feſte. Von O. Freih. v. Reinsberg-Düringsfeld. Mit 2 in den Text gedruckten Tafeln. M. 1

**Kindergärtnerei.** Dritte Auflage. — **Katechismus der praktiſchen Kindergärtnerei.** Von Fr. Seidel. Dritte, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 35 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 1. 50

**Kirchengeſchichte.** — **Katechismus der Kirchengeſchichte. Von Lic. Dr.** Friedrich Kirchner. M. 2. 50

☞ Die mit * verſehenen Bändchen ſind zurzeit nur geheftet zu haben.

**Klavierſpiel.** — **Katechismus des Klavierſpiels. Von Fr. Taylor, deutſch** von Math. Stegmaver. Mit vielen in den Text gedr. Notenbeiſpielen. M. 1. 50

**Knabenhandarbeits-Unterricht.** — **Katechismus des Knabenhandarbeits-**Unterrichts. Ein Handbuch des erziehlichen Arbeitsunterrichts. Von Dr. Woldemar Götze. Mit 69 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Kompoſitionslehre.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Kompoſitionslehre.** Von Prof. J. C. Lobe. Fünfte, verbeſſerte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Muſikbeiſpielen. M. 2

**Korreſpondenz.** Zweite Auflage. — **Katechismus der kaufm. Korreſpondenz** in deutſcher Sprache. Von C. F. Findeiſen. Zweite, verb. Auflage. M. 2

**Koſtümkunde.** — **Katechismus der Koſtümkunde. Von Wolfg. Quincke.** Mit 453 Koſtümfiguren in 150 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4

**Kriegsmarine, Deutſche.** — **Katechismus der Deutſchen Kriegsmarine.** Von Kapitän z. See z. D. R. Dittmer. Mit 126 i. d. Text gedr. Abbild. M. 3

**Kulturgeſchichte.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Kulturgeſchichte.** Von J. J. Honegger. Zweite, vermehrte und verbeſſerte Auflage. M. 2

**Kunſtgeſchichte.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Kunſtgeſchichte.** Von Bruno Bucher. Dritte, verbeſſerte Auflage. Mit 276 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4

**Litteraturgeſchichte.** Dritte Auflage. — **Katechismus der allgemeinen** Litteraturgeſchichte. Von Dr. Ad. Stern. Dritte, durchgeſ. Aufl. M. 3

**Litteraturgeſchichte, deutſche.** Sechste Auflage. — **Katechismus der** deutſchen Litteraturgeſchichte. Von Oberſchulrat Dr. Paul Möbius. Sechste, vervollſtändigte Auflage. M. 2

**Logarithmen.** — **Katechismus der Logarithmen. Von Max Meyer.** Mit 3 Tafeln Logarithmen und trigonometriſchen Zahlen und 7 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Logik.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Logik. Von Lic. Dr. Friedr.** Kirchner. Zweite, durchgeſ. Aufl. Mit 36 in den Text gedr. Abbild. M. 2. 50

**Malerei.** — **Katechismus der Malerei. Von Karl Raupp. Mit 48** in den Text gedruckten Abbildungen und 4 Tafeln. *M. 3

**Marine** ſ. Handels- bez. Kriegsmarine.

**Markſcheidekunſt.** — **Katechismus der Markſcheidekunſt. Von O. Brathuhn.** Mit 174 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Mechanik.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Mechanik. Von Ph. Huber.** Vierte, weſentlich vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 181 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

***Meteorologie.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Meteorologie. Von** Heinr. Gretſchel. Zweite, verbeſſerte und vermehrte Auflage. Mit 53 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 1. 50

**Mikroſkopie.** **Katechismus der Mikroſkopie. — Von Prof. Carl** Chun. Mit 97 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Milchwirtſchaft.** — **Katechismus der Milchwirtſchaft. Von Dr. Eugen** Werner. Mit 23 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Mimik.** — **Katechismus der Mimik und der Gebärdenſprache. Von** Karl Skraup. Mit 60 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3. 50

**Mineralogie.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Mineralogie. Von** Privatdozent Dr. Eugen Huſſak. Vierte, neu bearbeitete Auflage. Mit 154 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Münzkunde.** — **Grundzüge der Münzkunde. Von H. Dannenberg.** Mit 11 Tafeln Abbildungen. M. 4

**Muſik.** Vierundzwanzigſte Auflage. — **Katechismus der Muſik. Erläuterung** der Begriffe und Grundſätze der allgemeinen Muſiklehre. Von Prof. J. C. Lobe. Vierundzwanzigſte Auflage. M. 1. 50

☞ Die mit * verſehenen Bändchen ſind zurzeit nur geheftet zu haben.

**Muſikgeſchichte. — Katechismus der Muſikgeſchichte. Von R. Muſiol.** Mit 15 in den Text gedruckten Abbildungen und 34 Notenbeiſpielen. M. 2. 50

**Muſikinſtrumente.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Muſikinſtrumente.** Von Richard Hofmann. Fünfte, vollſtändig neu bearbeitete Auflage. Mit 189 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4

**Mythologie. — Katechismus der Mythologie aller Kulturvölker. Von** Dr. E. Kroker. Mit 73 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4

***Naturlehre.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Naturlehre, oder** Erklärung der wichtigſten phyſikaliſchen und chemiſchen Erſcheinungen des täglichen Lebens. Nach dem Engliſchen des Dr. C. E. Brewer. Dritte, von Heinrich Gretſchel umgearb. Auflage. Mit 55 in den Text gedr. Abbildungen. M. 2

**Nivellierkunſt.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Nivellierkunſt. Von** Dr. C. Pietſch. Dritte, vollſtändig umgearbeitete Auflage. Mit 61 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Nutzgärtnerei.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Nutzgärtnerei, oder** Grundzüge des Gemüſe- und Obſtbaues. Von Hermann Jäger. Vierte, verm. und verb. Auflage. Mit 54 in den Text gedr. Abbildungen. M. 2

**Orden. — Handbuch der Ritter- und Verdienſtorden aller Kulturſtaaten** der Welt innerhalb des XIX. Jahrh. Auf Grund amtlicher und anderer zuverläſſiger Quellen zuſammengeſtellt von Maximilian Gritzner. Mit vielen in den Text gedruckten Abbildungen. [Unter der Preſſe.

**Orgel.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Orgel. Erklärung ihrer** Struktur, beſonders in Beziehung auf techniſche Behandlung beim Spiel. Von Prof. C. F. Richter. Dritte, durchgeſehene Auflage. Mit 25 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 1. 50

**Ornamentik.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Ornamentik. Leitfaden** über die Geſchichte, Entwickelung und die charakteriſtiſchen Formen der Verzierungsſtile aller Zeiten. Von F. Kanitz. Vierte, verbeſſerte Auflage. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und einem Verzeichnis von 100 Spezialwerken zum Studium der Ornamentikſtile. M. 2

***Orthographie.** Vierte Auflage. — **Katechismus der deutſchen Orthographie.** Von Dr. D. Sanders. Vierte, verbeſſerte Auflage. M. 1. 50

**Pädagogik. — Katechismus der Pädagogik. Von Lic. Dr. Fr. Kirchner.** M. 2

**Perſpektive. — Katechismus der Angewandten Perſpektive. Nebſt einem** Anhang über Schattenkonſtruktion und Spiegelbilder. Von Max Kleiber. Mit 129 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Petrographie. — Katechismus der Petrographie. Lehre von der** Beſchaffenheit, Lagerung und Bildungsweiſe der Geſteine. Von Dr. J. Blaas. Mit 40 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Philoſophie.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Philoſophie. Von** J. H. v. Kirchmann. Dritte, verbeſſerte Auflage. M. 2. 50

——— Zweite Auflage. — **Katechismus der Geſchichte der Philoſophie** von Thales bis zur Gegenwart. Von Lic. Dr. Fr. Kirchner. Zweite, vermehrte und verbeſſerte Auflage. M. 3

**Photographie.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Photographie, oder** Anleitung zur Erzeugung photograph. Bilder. Von Dr. J. Schnauß. Vierte, den neueſten Fortſchritten entſpr. verb. Aufl. Mit 34 in den Text gedr. Abbild. M. 2

**Phrenologie.** Siebente Auflage. — **Katechismus der Phrenologie. Von** Dr. G. Scheve. Siebente Auflage. Mit einem Titelbild und 18 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Phyſik.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Phyſik. Von Dr. J. Kollert.** Vierte, vollſtändig neu bearbeitete Aufl. Mit 231 in den Text gedr. Abbild. M. 4

**Poetik.** Zweite Auflage. — **Katechismus der deutſchen Poetik.** **Von** Prof. Dr. J. Minckwitz. Zweite, vermehrte und verbeſſerte Auflage. M. 1. 80

**Projektionslehre.** — **Katechismus der Projektionslehre.** **Von** **Julius** Hoch. Mit 100 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Pſychologie.** — **Katechismus der Pſychologie.** **Von** Lic. Dr. Fr. Kirchner. M. 3

**Raumberechnung.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Raumberechnung.** Anleitung zur Größenbeſtimmung von Flächen und Körpern jeder Art. Von Fr. Herrmann. Dritte, vermehrte und verbeſſerte Auflage von Dr. E. Pietſch. Mit 55 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 1. 80

**Redekunſt.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Redekunſt. Anleitung** zum mündlichen Vortrage. Von Dr. Roderich Benedix. Vierte, durchgeſehene Auflage. M. 1. 50

**Regiſtratur- und Archivkunde.** — **Katechismus der Regiſtratur- und** Archivkunde. Handbuch für das Regiſtratur- und Archivweſen bei den Reichs-, Staats-, Hof-, Kirchen-, Schul- und Gemeindebehörden, den Rechtsanwälten ꝛc., ſowie bei den Staatsarchiven. Von Georg Holtzinger. Mit Beiträgen von Dr. Friedr. Leiſt. M. 3

**Reichspoſt.** — **Katechismus der Deutſchen Reichspoſt.** **Von** **Wilh.** Lenz. Mit 10 in den Text gedruckten Formularen. M. 2. 50

**Reichsverfaſſung.** Zweite Auflage. — **Katechismus des Deutſchen Reiches.** Ein Unterrichtsbuch in den Grundſätzen des deutſchen Staatsrechts, der Verfaſſung und Geſetzgebung des Deutſchen Reiches. Von Dr. Wilh. Zeller. Zweite, vermehrte und verbeſſerte Auflage. M. 3

**Roſenzucht.** — **Katechismus der Roſenzucht.** **Von** **Herm.** **Jäger.** Mit 52 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Schachſpielkunſt.** Zehnte Auflage. — **Katechismus der Schachſpielkunſt.** Von K. J. S. Portius. Zehnte, vermehrte und verbeſſerte Aufl. M. 2

***Schreibunterricht.** Zweite Auflage. — **Katechismus des Schreibunterrichts.** Zweite, neubearbeitete Auflage. Von Herm. Kaplan. Mit 147 in den Text gedruckten Figuren. M. 1

**Schwimmkunſt.** — **Katechismus der Schwimmkunſt.** **Von** **Martin** Schwägerl. Mit 113 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Spinnerei und Weberei.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Spinnerei,** Weberei und Appretur, oder Lehre von der mechan. Verarbeitung der Geſpinſtfaſern. Dritte, bedeut. verm. Aufl., unter teilweiſer Benutzung des Grotheſchen Originals bearb. v. Dr. A. Ganswindt. Mit 196 in den Text gedr. Abbild. M. 4

**Sprachlehre.** Dritte Auflage. — **Katechismus der deutſchen Sprachlehre.** Von Dr. Konrad Michelſen. Dritte, verbeſſerte Auflage, herausgegeben von Ed. Michelſen. M. 2. 50

**Stenographie.** Zweite Auflage. — **Katechismus der deutſchen Stenographie.** Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende der Stenographie im allgemeinen und des Syſtems von Gabelsberger im beſondern. Von Heinrich Krieg. Zweite, verbeſſerte Aufl. Mit vielen in den Text gedr. ſtenogr. Vorlagen. M. 2. 50

**Stiliſtik.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Stiliſtik. Eine Anweiſung** zur Ausarbeitung ſchriftlicher Aufſätze. Von Dr. Konrad Michelſen. Zweite, durchgeſehene Auflage, herausgegeben von Ed. Michelſen. M. 2

**Tanzkunſt.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Tanzkunſt. Ein Leitfaden** für Lehrer und Lernende. Von Bernhard Klemm. Fünfte, verbeſſerte und vermehrte Auflage. Mit 82 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Technologie, mechaniſche.** — **Katechismus der mechaniſchen Technologie.** Von A. v. Ihering. Mit 163 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4

**Telegraphie.** Sechſte Auflage. — **Katechismus der elektriſchen Telegraphie** Von Prof. Dr. K. Ed. Zetzſche. Sechſte, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 315 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4

☞ Die mit * verſehenen Bändchen ſind zurzeit nur geheftet zu haben.

**Tierzucht, landwirtſchaftliche. — Katechismus der landwirtſchaftlichen** Tierzucht. Von Dr. Eugen Werner. Mit 20 in den Text gedr. Abbild. M. 2. 50

**Ton, der gute. — Katechismus des guten Tons und der feinen Sitte.** Von Eufemia v. Adlersfeld, geb. Gräfin Balleſtrem. M. 2

**Trigonometrie. — Katechismus der ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie.** Von Franz Bendt. Mit 36 in den Text gedr. Abbild. M. 1. 50

**Turnkunſt.** Sechſte Auflage. — **Katechismus der Turnkunſt. Von Dr.** M. Kloſſ. Sechſte, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 100 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Uhrmacherkunſt.** Dritte Auflage. — **Katechismus der Uhrmacherkunſt.** Von F. W. Rüffert. Dritte, vollſtändig neu bearbeitete Auflage. Mit 229 in den Text gedruckten Abbildungen und 7 Tabellen. M. 4

**Urkundenlehre. — Katechismus der Diplomatik, Paläographie, Chronologie** und Sphragiſtik. Von Dr. Fr. Leiſt. Mit 5 Tafeln Abbildungen. M. 4

**Verſicherungsweſen.** Zweite Auflage. — **Katechismus des Verſicherungsweſens.** Von Oskar Lemcke. Zweite, verm. und verb. Aufl. M. 2. 40

**Verskunſt.** Zweite Auflage. — **Katechismus der deutſchen Verskunſt.** Von Dr. Roderich Benedix. Zweite Auflage. M. 1. 20

**Verſteinerungskunde. — Katechismus der Verſteinerungskunde (Petrefaktenkunde**, Paläontologie). Von Prof. H. Haas. Mit 178 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 3

**Völkerkunde. — Katechismus der Völkerkunde. Von Dr.** Heinrich Schurtz. [Unter der Preſſe.

***Völkerrecht. — Katechismus des Völkerrechts. Mit Ruckſicht auf die** Zeit- und Streitfragen des internationalen Rechtes. Von A. Biſchof. M. 1. 20

**Volkswirtſchaftslehre.** Vierte Auflage. — **Katechismus der Volkswirtſchaftslehre.** Katechismus in den Anfangsgründen der Wirtſchaftslehre. Von Dr. Hugo Schober. Vierte, durchgeſehene Auflage. M. 3

**Warenkunde.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Warenkunde. Von** E. Schick. Fünfte, verm. u. verb. Aufl., bearbeitet von Dr. G. Heppe. M. 3

**Wäſcherei, Reinigung und Bleicherei.** Zweite Auflage. — **Katechismus** der Wäſcherei, Reinigung und Bleicherei. Von Dr. Herm. Grothe in Berlin. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 41 in den Text gedr. Abbild. M. 2

**Wechſelrecht.** Dritte Auflage. — **Katechismus des allgemeinen deutſchen** Wechſelrechts. Mit beſonderer Berückſichtigung der Abweichungen und Zuſätze der öſterreichiſchen und ungariſchen Wechſelordnung und des eidgenöſſiſchen Wechſel- und Check-Geſetzes. Von Karl Arenz. Dritte, ganz umgearbeitete und vermehrte Auflage. M. 2

**Weinbau.** Zweite Auflage. — **Katechismus des Weinbaues. Von Fr.** Jac. Dochnahl. Zweite, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 38 in den Text gedruckten Abbildungen. M 1. 20

**Weltgeſchichte.** Zweite Auflage. — **Katechismus der Allgemeinen Weltgeſchichte.** Von Theodor Flathe. Zweite Auflage. Mit 5 Stammtafeln und einer tabellariſchen Überſicht. M. 3

**Ziergärtnerei.** Fünfte Auflage. — **Katechismus der Ziergärtnerei, oder** Belehrung über Anlage, Ausſchmückung und Unterhaltung der Gärten, ſo wie über Blumenzucht. Von H. Jäger. Fünfte, vermehrte und verbeſſerte Auflage. Mit 76 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2. 50

**Zimmergärtnerei. — Katechismus der Zimmergärtnerei. Nebſt einem** Anhang über Anlegung und Ausſchmückung kleiner Gärtchen an den Wohngebäuden. Von M. Lebl. Mit 56 in den Text gedr. Abbildungen. M. 2

***Zoologie. — Katechismus der Zoologie. Von Prof. C. G. Giebel.** Mit 125 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 2

**Verlag von J. J. Weber in Leipzig.**

Druck von J. J. Weber in Leipzig.

☞ Die mit * verſehenen Bändchen ſind zurzeit nur geheftet zu haben.