Katechismus der Feldmeßkunst

Pietsch, Carl

Leipzig, 1897

Fünfter Abschnitt. Das Berechnen der aufgenommenen Grundstücke

Fünfter Abschnitt.

Das Berechnen der aufgenommenen Grundstücke.

107. Was braucht man, um den Inhalt einer Fläche auszudrücken?

Um den Inhalt einer Fläche ausdrücken zu können, braucht man eine Maßeinheit für Flächen.

108. Giebt es nur eine bestimmte Flächeneinheit?

Nein, es sind deren viele im Gebrauch; in verschiedenen Ländern rechnet man mit verschiedenen Flächeneinheiten, aber auch in demselben Lande bedient man sich zu verschiedenen Zwecken verschiedener Einheiten; stets aber benutzt man eine quadratische Fläche als Flächeneinheit. Die Länge der Seite des Quadrats ist nur verschieden bei den verschiedenen Einheiten.

109. Wonach richtet sich die Seite des als Flächeneinheit benutzten Quadrats?

Sie richtet sich nach dem in dem betreffenden Lande gebräuchlichen Längenmaß.

110. Wie bezeichnet man die Flächeneinheiten?

Man bezeichnet die Flächeneinheiten dadurch, daß man der Bezeichnung der Längeneinheit, welche Seite des als Flächeneinheit dienenden Quadrats ist, noch das Wort „Quadrat“ vorsetzt; also würde z. B. die Fläche eines Quadrats von 1 m Seite als Quadratmeter bezeichnet werden.

111. Welches sind die in verschiedenen Ländern jetzt oder früher gebräuchlichen Flächeneinheiten und wie verhalten sie sich unter einander?

Beides, sowohl Bezeichnung, als auch das gegenseitige Verhältnis der Flächeneinheiten, ist in folgender Tafel gegeben.

Preußen Quadratfuß	Oesterreich Quadratfuß	Bayern Quadratfuß	Württemberg Quadratfuß	Sachsen Quadratfuß	Pr. Hannover Quadratfuß	Braunschweig Quadratfuß	Baden, Schweiz Quadratfuß	England, Rußland Quadratfuß	Quadratmeter
1.000	0.986	1.156	1.200	1.228	1.155	1.210	1.094	1.060	0.0985
1.014	1.000	1.173	1.217	1.246	1.171	1.227	1.110	0.076	0.0999
0.865	0.852	1.000	1.038	1.062	0.998	1.046	0.946	0.917	0.0852
0.833	0.821	0.964	1.000	1.023	0.962	1.008	0.912	0.883	0.0821
0.814	0.803	0.941	0.977	1.000	0.940	0.985	0.891	0.863	0.0802
0.866	0.854	1.002	1.040	1.064	1.000	1.048	0.948	0.918	0.0853
0.827	0.815	0.956	0.992	1.015	0.954	1.000	0.905	0.877	0.0814
0.914	0.901	1.057	1.097	1.122	1.055	1.105	1.000	0.969	0.0900
0.943	0.930	1.091	1.132	1.158	1.089	1.141	1.032	1.000	0.0929
10.152	10.008	11.740	12.184	12.469	11.721	12.280	11.111	10.764	1.0000

112. Gieb ein Beispiel für die Anwendung dieser Tafel!

Wenn man wissen will, wie viel österreichische Quadratfuß gleich 27.3 Quadratmeter sind, so giebt die Tafel in ihrer letzten Zeile an, daß

1 Quadratmeter = 10.008 österr. Quadratfuß

ist. Daraus folgt, daß

27.3 Quadratmeter = 27.3 . 10.008
= 273.22 österr. Quadratfuß

sind.

113. Welche Flächeneinheiten sind in Deutschland beim Feldmessen üblich?

Das Quadratdekameter, d. i. ein Quadrat von 10 m Seite, und das Quadrathektometer, d. i. ein Quadrat von 100 m Seite. Erstere Fläche heißt ein Ar und wird abgekürzt mit a, letztere heißt Hektar und wird abgekürzt mit ha bezeichnet.

114. Welches sind die abgekürzten Bezeichnungen für Quadratmeter, Quadratdezimeter ꝛc. und welches sind die Verhältnisse dieser Einheiten zu einander?

Man bezeichnet Quadratmeter mit qm,
Quadratdezimeter mit qdm,
Quadratcentimeter mit qcm,
Quadratmillimeter mit qmm.

Es ist 1 qm = 100 qdm,
= 10 000 qcm,
= 1 000 000 qmm.

115. Welches ist das Verhältnis der Feldmessereinheiten zum Quadratmeter?

Es ist 1 a = 100 qm,
1 ha = 10 000 qm,
1 qm = 0.01 a = 0.0001 ha.

116. Welches ist das Verhältnis des Hektars zu den in anderen Ländern jetzt oder früher üblichen Flächenmaßen?

1 Hektar ist gleich
2.4711 englischen und amerikanischen Acres,
2.7778 badischen Morgen,
2.9349 bayerischen Tagewerken,
3.8153 hannoverschen Morgen,
4.0000 großherzoglich hessischen Morgen,
3.9162 preußischen Morgen,
1.8069 sächsischen Ackern,
2.7778 Schweizer Juchart,
1.7375 Wiener Joch,
3.1729 württembergischen Morgen,
0.9153 russischen Dessätinen.

117. Gieb ein Beispiel für die Umrechnung von Flächengrößen auf Grund vorstehender Angaben!

Ein Stück Landes sei gleich 305 englischen Acres; soll der Inhalt derselben in Hektaren angegeben werden, so entnimmt man aus der Tafel

2.4711 engl. Acres = 1 ha,

also
$$1 \text{ engl. Acre} = \frac{1}{2.4711}\,\text{ha}$$
und
$$305 \text{ „ Acres} = \frac{305}{2.4711}\,\text{ha} = 123.43\,\text{ha}.$$

118. Welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks?

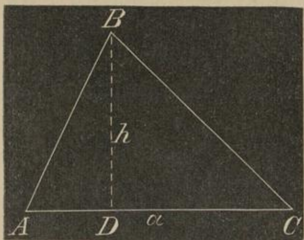

Fig. 64.

Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, h die zur Seite a gehörige Höhe desselben (vergl. Fig. 64), so ist die Fläche des Dreiecks
$$F = \frac{a\,h}{2},$$
und, wenn man
$$\frac{a + b + c}{2} = s$$
setzt,
$$F = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

Beispiel 1: Es sei
$$a = 21.1\,\text{m},\ h = 17.1\,\text{m};$$
dann ist
$$F = \frac{21.1 \,.\, 17.1}{2}\,\text{qm} = 180.405\,\text{qm},$$
$$= 1\,\text{a}\ 80.405\,\text{qm}.$$

Beispiel 2: Es sei
$$a = 13\,\text{m},\ b = 14\,\text{m},\ c = 15\,\text{m};$$
dann ist
$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$
$$s - a = 21 - 13 = 8$$
$$s - b = 21 - 14 = 7$$
$$s - c = 21 - 15 = 6,$$
folglich
$$F = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$
$$= \sqrt{21 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}$$
$$= \sqrt{7056}\,\text{qm}$$
$$= 84\,\text{qm}.$$

119. Wie berechnet man den Inhalt eines Vierecks?

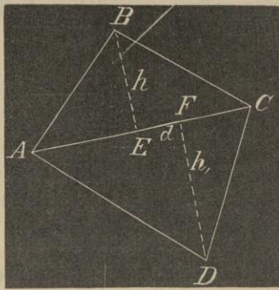

Fig. 65.

Das Viereck (vergl. Fig. 65) kann durch eine seiner Diagonalen, z. B. AC, in zwei Dreiecke zerlegt werden. Der Inhalt des Vierecks läßt sich dann als Summe der Inhalte der beiden Dreiecke berechnen. Bezeichnet man die Diagonale mit d und die zu AC als Grundlinie gehörigen Höhen der beiden Dreiecke ABC und ADC mit h resp. h,, so ist die Fläche des Vierecks $F = \frac{d\,h}{2} + \frac{d\,h_,}{2} = \frac{h + h_,}{2}\,d.$

Ist z. B. $d = 11.4$ m, $h = 17.3$ m, $h = 8.7$ m, so ist $F = \frac{17.3 + 8.7}{2}\,11.4$ qm $= 13 \,.\, 11.4$ qm
$= 148.2$ qm $= 1$ a 48.2 qm.

120. Wie berechnet man den Inhalt des Trapezes?

Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der halben Summe der parallelen Seiten desselben und der Höhe.

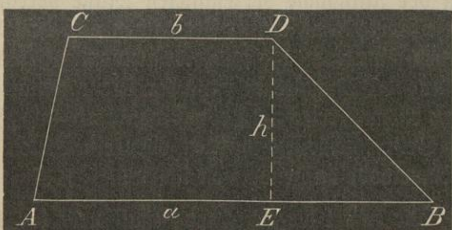

Fig. 66.

Bezeichnet man also die parallelen Seiten (vergl. Fig. 66) mit a und b, die Höhe mit h, so ist

$$F = \frac{a + b}{2}\,h.$$

Ist z. B. $a = 81.17$ m, $b = 69.21$ m, $h = 47.47$ m,

so ist
$$F = \frac{81.17 + 69.21}{2}\, 47.47 \text{ qm}$$
$$= \frac{150.38}{2}\, 47.47 \text{ qm}$$
$$= 75.19 \,.\, 47.47 \text{ qm}$$
$$= 3569.2693 \text{ qm}$$
$$= 35 \text{ a } 69.2693 \text{ qm}.$$

121. Wie berechnet man ein Vieleck?

Ein Vieleck kann entweder durch Zerlegen in Dreiecke berechnet werden oder durch Zerlegen in Trapeze. Die erstere Berechnungsart wird man anwenden, wenn man auch das Vieleck aufgenommen hat, indem man es in Dreiecke zerlegt und deren sämtliche Seiten gemessen hat. Die letztere Berechnungsweise wird man dagegen namentlich anwenden, wenn das Vieleck nach der Normalenmethode aufgenommen worden ist.

122. Berechnet man die Flächen immer unter Zugrundelegung des aufgetragenen Lageplanes?

Nein, man kann die Berechnung auch auf Grund der im Handriß der Aufnahme verzeichneten Maße berechnen. Es wird diese Berechnung immer derjenigen aus dem Lageplan vorzuziehen sein, wenn die im Felde genommenen Längen die Ermittelung des Inhalts in einfacher Weise gestatten, z. B. wenn von einem Dreieck im Felde Grundlinie und Höhe oder die drei Seiten gemessen wurden oder ein Vieleck nach der Normalenmethode aufgenommen ist.

123. Wie erfolgt die Berechnung eines nach der Normalenmethode aufgenommenen Vielecks?

Die Ordinaten der einzelnen Ecken des Vielecks zerlegen dasselbe in Trapeze. Die Ordinaten (vergl. Fig. 67) der Punkte 2 und 3 z. B. schneiden das Trapez $2'\,2\,3\,3'$ heraus. Die Höhe des Trapezes ist $2'\,3'$; die Länge von $2'\,3'$ ist gleich der Differenz der Abscissen der Punkte 3 und 2. Die beiden parallelen

Seiten des Trapezes sind die Ordinaten der Punkte 2 und 3. Bezeichnet man die Abscissen der Punkte mit x_2 und x_3, die Ordinaten mit y_2 und y_3, so ist die Höhe des Trapezes

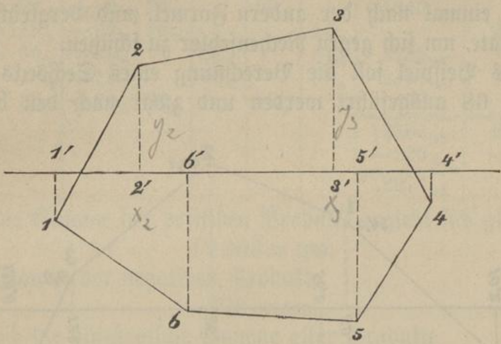

Fig. 67.

gleich $x_3 - x_2$ und die parallelen Seiten sind y_2 und y_3, daher der Inhalt des Trapezes gleich

$$\frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_3 + y_2).$$

Der Inhalt des ganzen Vielecks ergiebt sich nun als Summe der Inhalte der Trapeze, in welche dasselbe durch die Ordinaten zerlegt ist, also

$$F = \frac{1}{2}\{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) + (x_4 - x_3)(y_4 + y_3) + (x_5 - x_4)(y_5 + y_4) + (x_6 - x_5)(y_6 + y_5) + (x_1 - x_6)(y_1 + y_6)\}$$

oder wie man die Formel kürzer schreibt

$$F = \frac{1}{2}\Sigma(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1}).$$

Der griechische Buchstabe „Σ" (sigma) hat die Bedeutung eines Summenzeichens. Es soll andeuten, daß man eine Summe bilden soll, deren einzelne Glieder die Gestalt des unter dem Summenzeichen stehenden Produkts haben. Für n soll dabei der Reihe nach 1, 2, 3 .. 6 gesetzt werden.

Dasselbe Resultat giebt die Formel

$$F = \frac{1}{2} \Sigma (y_n - y_{n-1}) (x_n + x_{n-1}),$$

wo das Zeichen Σ die gleiche Bedeutung hat. Man berechne den Inhalt des Vielecks immer doppelt, einmal nach der einen, einmal nach der andern Formel, und vergleiche die Resultate, um sich gegen Rechenfehler zu schützen.

Als Beispiel soll die Berechnung eines Sechsecks nach Figur 68 ausgeführt werden und zwar nach den beiden

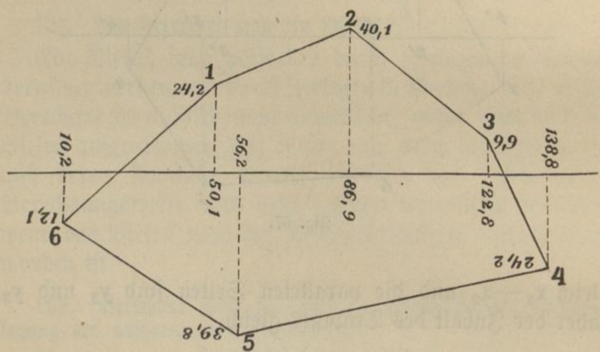

Fig. 68.

angegebenen Formeln. Für jede der beiden Berechnungen ist eine Tabelle entworfen; die erste Vertikalreihe der ersten Tabelle enthält die Nummern der Endpunkte, die zweite und dritte enthält die Koordinaten. Die Abscissen sind sämtlich positiv; die Ordinaten, welche oberhalb der Abscissenachse liegen, sind als positiv, die unterhalb derselben sind als negativ eingeführt. Die beiden folgenden Vertikalreihen, welche die gemeinschaftliche Ueberschrift $x_n - x_{n-1}$ tragen, enthalten die Werte dieser Differenzen und zwar getrennt nach dem Vorzeichen. Die beiden nächsten Reihen enthalten ebenso nach dem Vorzeichen getrennt die Werte von $y_n + y_{n-1}$. Die beiden letzten Spalten der Tabelle enthalten endlich wiederum nach dem Vorzeichen geordnet die Werte der Produkte $(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})$.

n	x_n	y_n	$x_n - x_{n-1}$ +	$x_n - x_{n-1}$ −	$y_n + y_{n-1}$ +	$y_n + y_{n-1}$ −	$(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})$ +	$(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})$ −
1	+ 50.1	+24.2						
2	+ 85.9	+40.1	35.8		64.3		2301.94	
3	+122.8	+ 9.9	36.9		50.0		1845.00	
4	+138.8	−24.2	16.0			14.3		228.80
5	+ 56.2	−39.8		82.6		64.0	5286.40	
6	+ 10.2	−12.1		46.0		51.9	2387.40	
1	+ 50.1	+24.2	39.9		12.1		482.79	
							12303.53	228.80
							−228.80	
							12074.73	

Die Summe der positiven Produkte ergiebt sich gleich

12 303.53 qm,

die Summe der negativen Produkte

228.80 qm,

folglich die algebraische Summe aller Produkte

$$\Sigma (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1}) = (12\,303.53 - 228.80) \text{ qm}$$
$$= 12\,074.73 \text{ qm},$$

und daher die Fläche des Sechsecks

$$F = \tfrac{1}{2} \Sigma (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1}) = 6037.365 \text{ qm}$$
$$= 60 \text{ a } 37.365 \text{ qm}.$$

Die folgende ganz entsprechend eingerichtete Tabelle zeigt die Berechnung des Sechsecks nach der Formel

$$F = \tfrac{1}{2} \Sigma (y_n - y_{n-1})(x_n + x_{n-1}).$$

n	x_n	y_n	$y_n - y_{n-1}$ +	$y_n - y_{n-1}$ −	$x_n + x_{n-1}$ +	$x_n + x_{n-1}$ −	$(y_n - y_{n-1})(x_n + x_{n-1})$ +	$(y_n - y_{n-1})(x_n + x_{n-1})$ −
1	+ 50.1	+24.2						
2	+ 85.9	+40.1	15.9		136.0		2162.40	
3	+122.8	+ 9.9		30.2	208.7			6302.74
4	+138.8	− 24.2		34.1	261.6			8920.56
5	+ 56.2	−39.8		15.6	195.0			3042.00
6	+ 10.2	−12.1	27.7		66.4		1839.28	
1	+ 50.1	+24.2	36.3		60.3		2188.89	
							6190.57	18265.30
								6190.57
								12074.73

Die Summe der positiven Produkte $(y_n - y_{n-1})(x_n + x_{n-1})$ ergiebt sich gleich

$$6190.57 \text{ qm},$$

die Summe der negativen Produkte gleich

$$18\,265.30 \text{ qm},$$

folglich die algebraische Summe aller Produkte

$$\Sigma(y_n - y_{n-1})(x_n + x_{n-1}) = (6190.57 - 18\,265.30) \text{ qm}$$
$$= -12074.73 \text{ qm}.$$

Das Vorzeichen der Summe hat keine Bedeutung; es kommt nur auf den absoluten Wert derselben an. Es ergiebt sich übereinstimmund mit der ersten Berechnung

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma(y_n - y_{n-1})(x_n + x_{n-1}) = 6037.365 \text{ qm}$$
$$= 60 \text{ a } 37.365 \text{ qm}.$$

124. Durch welche andere Formeln läßt sich der Inhalt eines Vielecks noch ausdrücken?

Aus den bei der Beantwortung der vorigen Frage angegebenen Formeln für die Berechnung eines Vielecks lassen sich zwei andere noch etwas bequemere Formeln ableiten, nämlich

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1})$$
$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma y_n (x_{n+1} - x_{n-1}).$$

125. Zeige, wie diese Formeln aus den in Frage 123 angegebenen hervorgehen!

Die erste der in Frage 123 gegebenen Formeln lautet:

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1}).$$

Multipliziert man die Klammerausdrücke unter dem Summenzeichen aus, so erhält man

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma(x_n y_n + x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n - x_{n-1} y_{n-1})$$

oder

$$F = \tfrac{1}{2}\left\{\Sigma x_n y_n + \Sigma x_n y_{n-1} - \Sigma x_{n-1} y_n - \Sigma x_{n-1} y_{n-1}\right\}.$$

$\Sigma x_n y_n$ ist die Summe der Produkte der Koordinaten aller Vieleckspunkte; genau dieselbe Bedeutung hat $\Sigma x_{n-1} y_{n-1}$, sodaß sich beide Summen gegenseitig aufheben und daher

$$F = \tfrac{1}{2}\left\{\Sigma x_n y_{n-1} - \Sigma x_{n-1} y_n\right\}$$

sich ergiebt. Nun ist aber $\Sigma x_{n-1} y_n$ genau gleichbedeutend mit $\Sigma x_n y_{n+1}$, folglich

$$F = \tfrac{1}{2} \left\{ \Sigma x_n y_{n-1} - \Sigma x_n y_{n+1} \right\}$$

oder

$$F = \tfrac{1}{2} \Sigma x_n (y_{n-1} - y_{n+1})$$

oder, da es nur auf den absoluten Wert von F ankommt,

$$F = \tfrac{1}{2} \Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1}).$$

Dies ist die erste der in der vorigen Frage angegebenen Formeln. Die zweite Formel läßt sich in gleicher Weise ableiten.

126. Berechne das Sechseck 1 2 3 4 5 6 (Fig. 68) auf Grund dieser Formeln!

Die Berechnung nach jeder der beiden Formeln ist in einer der nachstehenden Tabellen ausgeführt:

Für die Berechnung nach der ersten Formel ergiebt sich folgende Tabelle:

n	x_n	y_n	$y_{n+1} - y_{n-1}$	$x_n (y_{n+1} - y_{n-1})$ +	$x_n (y_{n+1} - y_{n-1})$ −
1	+ 50.₁	+ 24.₂			
2	+ 85.₉	+ 40.₁	− 14.₃		1228.₃₇
3	+ 122.₈	+ 9.₉	− 64.₃		7896.₀₄
4	+ 138.₈	− 24.₂	− 49.₇		6898.₃₆
5	+ 56.₂	− 39.₈	+ 12.₁	680.₀₂	
6	+ 10.₂	− 12.₁	+ 64.₀	652.₈₀	
1	+ 50.₁	+ 24.₂	+ 52.₂	2615.₂₂	
2	+ 85.₉	+ 40.₁			
				3948.₀₄	16022.₇₇
					3948.₀₄
					12074.₇₃

Es ergiebt sich:

$$\Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) = 12\,074.73 \text{ qm},$$

folglich:

$$F = \tfrac{1}{2} \Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) = 6037.365 \text{ qm}$$
$$= 60 \text{ a } 37.365 \text{ qm}.$$

Für die Berechnung nach der zweiten Formel erhält man diese Tabelle:

n	x_n	y_n	$x_{n+1} - x_{n-1}$	$y_n(x_{n+1} - x_{n-1})$ +	−
1	$+50._1$	$+24._2$			
2	$+85._9$	$+40._1$	$+72._7$	$2915._{27}$	
3	$+122._8$	$+9._9$	$+52._9$	$523._{71}$	
4	$+138._8$	$-24._2$	$-66._6$	$1611._{72}$	
5	$+56._2$	$-39._8$	$-128._6$	$5618._{28}$	
6	$+10._2$	$-12._1$	$-6._1$	$73._{81}$	
1	$+50._1$	$+24._2$	$+75._7$	$1831._{94}$	
2	$+85._9$	$+40._1$			
				$12074._{73}$	

Die Rechnung ergiebt:

$$\Sigma y_n (x_{n+1} - x_{n-1}) = 12\,074.{\scriptstyle 73}\,\text{qm},$$

folglich:

$$F = \tfrac{1}{2} \Sigma y_n (x_{n+1} - x_{n-1}) = 6037.{\scriptstyle 365}\,\text{qm}$$
$$= 60\,\text{a}\;37.{\scriptstyle 365}\,\text{qm}.$$

127. Welche Formel ergiebt sich für den Inhalt eines Vierecks auf Grund der in Frage 126 gegebenen Formeln?

Nach Frage 126 ist

$$F = \tfrac{1}{2} \Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1}).$$

Im Falle des Vierecks hat man n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4 zu geben und erhält

$$F = \tfrac{1}{2} \{ x_1 (y_2 - y_4) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_4 - y_2) + x_4 (y_1 - y_3) \}$$

oder

$$F = \tfrac{1}{2} \{ (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (x_2 - x_4)(y_3 - y_1) \}.$$

128. Wie läßt sich diese Formel auf die Berechnung des Sechsecks 1 2 3 4 5 6 (vergl. das Beispiel in Frage 123 u. 126) **anwenden?**

Das Sechseck läßt sich durch die Diagonale 1 4 in die beiden Vierecke 1 2 3 4 und 1 4 5 6 zerlegen. Das Sechseck ist gleich der Summe der beiden Vierecke, also

$$F = \frac{1}{2}\left\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (x_2 - x_4)(y_3 - y_1) + (x_4 - x_6)(y_5 - y_1) + (x_5 - x_1)(y_6 - y_4)\right\}.$$

129. Wende diese Formel auf die Berechnung des Sechsecks von Frage 123 an!

Man erhält

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2}\{(50.1 - 122.8)(40.1 + 24.2) + (85.9 - 138.8) \\ &\quad (9.9 - 24.2) + (138.8 - 10.2)(-39.8 - 24.2) \\ &\quad + (56.2 - 50.1)(-12.1 + 24.2)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{(-72.7)\,64.3 + (-52.9)(-14.3) + 128.6 \\ &\quad (-64.0) + 6.1 \,.\, 12.1\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{-4674.61 + 756.47 - 8230.4 + 73.81\} \\ &= -\tfrac{1}{2}\,12074.73 \\ &= 6037.365 \text{ qm} \\ &= 60 \text{ a } 37.365 \text{ qm}. \end{aligned}$$

130. Wie läßt sich die Fläche eines Vielecks noch aus dem gezeichneten Lageplan bestimmen?

Man kann, wenn das Vieleck genau aufgetragen ist, durch geometrische Konstruktion (sog. Parallelabschieben) dasselbe in ein flächengleiches Dreieck verwandeln, welches dann nur berechnet zu werden braucht.

131. Worauf beruht die Methode des Parallelabschiebens?

Die Methode des Parallelabschiebens beruht auf dem Satze, daß Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind.

132. Zeige die Umwandlung eines Vierecks in ein flächengleiches Dreieck durch Parallelabschieben!

Das gegebene Viereck (Fig. 69) sei 1 2 3 4. Man ziehe die Diagonale 1 3 und durch den Eckpunkt 4 zu 1 3 die Parallele 4 a; dann ist

$$\triangle\, 1\, 3\, a = \triangle\, 1\, 3\, 4,$$

denn beide Dreiecke haben die Grundlinie 1 3 gemein, und ihre Spitzen a und 4 liegen auf einer Parallelen zur Grundlinie,

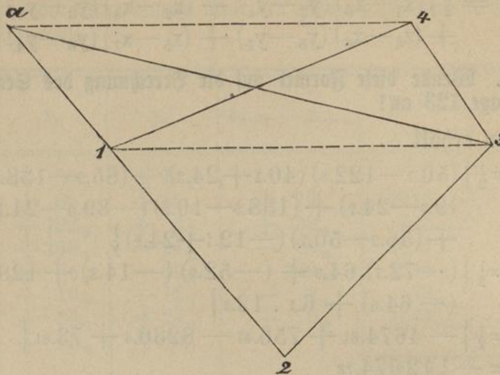

Fig. 69.

ihre Höhen sind also gleich. Ersetzt man das Dreieck 1 3 4 durch das flächengleiche Dreieck 1 3 a, so geht das Viereck 1 2 3 4 in das ihm flächengleiche Dreieck a 2 3 über.

133. Zeige die Verwandlung eines Sechseckes in ein flächengleiches Dreieck durch wiederholtes Parallelabschieben!

Das gegebene Sechseck (Fig. 70) sei 1 2 3 4 5 6. Man ziehe 1 5 und dazu durch den Eckpunkt 6 die Parallele 6 a, dann ist

$$\triangle\, 1\, 5\, a = \triangle\, 1\, 5\, 6,$$

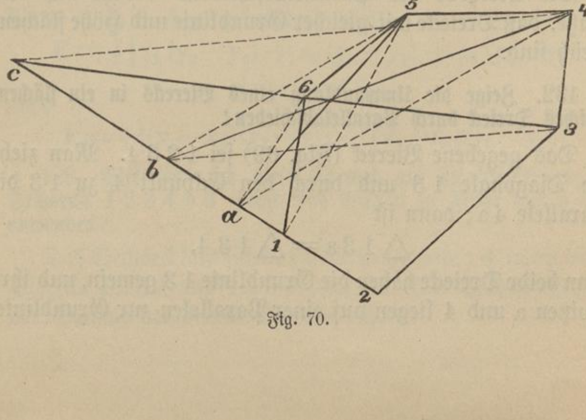

Fig. 70.

folglich:

Sechseck 1 2 3 4 5 6 = Fünfeck 1 2 3 4 5 + Dreieck 1 5 6
= Fünfeck 1 2 3 4 5 + Dreieck 1 5 a
= Fünfeck a 2 3 4 5.

Hierauf ziehe man a 4 und dazu durch den Eckpunkt 5 die Parallele 5 b, dann ist

$$\triangle a\,4\,b = \triangle a\,4\,5,$$

folglich:

Sechseck 1 2 3 4 5 6 = Fünfeck a 2 3 4 5
= Viereck a 2 3 4 + Dreieck a 4 5
= Viereck a 2 3 4 + Dreieck a 4 b
= Viereck b 2 3 4.

Endlich ziehe man b 3 und dazu durch den Eckpunkt 4 die Parallele 4 c, dann ist

$$\triangle b\,3\,c = b\,3\,4,$$

folglich:

Sechseck 1 2 3 4 5 6 = Viereck b 2 3 4
= Dreieck b 2 3 + Dreieck b 3 4
= Dreieck b 2 3 + Dreieck b 3 c
= Dreieck c 2 3.

Damit ist das Sechseck in ein flächengleiches Dreieck verwandelt. Man erkennt, daß sich durch wiederholtes Parallelabschieben jedes Vieleck in ein flächengleiches Dreieck umwandeln läßt.